# Platonova tijela

**Pantaler, Melita**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Melita Pantaler

# PLATONOVA TIJELA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Dora Pokaz

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Hvala mentorici izv. prof. dr. sc. Dori Pokaz i suvoditeljici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na vodstvu i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.*
*Od srca zahvaljujem svojoj obitelji i Miri na bezuvjetnoj podršci i ljubavi tijekom studija.*

# Sadržaj

# Uvod

Vrlo se često danas, u svakodnevnom govoru, susrećemo s izrazima bilježnica na kockice ili dres na kockice. Postavlja se pitanje, jesmo li svjesni razlike između kvadrata i kocke. Je li pravilno reći bilježnica na kockice ili bilježnica na kvadratiće?


Slika 0.1: slika preuzeta iz[10]

S pojmom kocke djeca se susreću od malih nogu. Drvene kocke jedne su od omiljenih dječjih igračaka pomoću kojih djeca mogu graditi razne modele. Kocka je objekt koji djeca mogu opipati. Dakle, kocka je geometrijsko tijelo i trodimenzionalno je, dok je kvadrat geometrijski lik i dvodimenzionalan je. Stoga je pravilno reći bilježnica s kvadratićima i dres s kvadratićima.

S pojmovima geometrijski lik i geometrijsko tijelo učenici se susreću u prvom razredu osnovne škole. Nakon toga *Geometrija prostora* radi se u osmom razredu, a kasnije u drugom razredu srednje škole.

Ovaj rad opisuje uvođenje geometrijskih tijela u školskoj matematici, točnije uvođenje Platonovih tijela.

U prvom poglavlju ukratko ćemo opisati Platonov život i objasniti zašto su pravilni poliedri dobili naziv *Platonova tijela* te pogledati tko se sve osim Platona bavio pravilnim poliedrima.

U drugom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove vezane uz pravilne poliedre,

dokazati Eulerovu formulu te pokazati da postoji točno pet pravilnih poliedara.
U trećem poglavlju kratko ćemo opisati Cavalierijev život te objasniti način uvođenja Cavalierijevog principa za računanje obujma na nivou srednje škole.
Četvrto poglavlje posvećeno je uvođenju Platonovih tijela u osnovnu i srednju školu. Svako tijelo je posebno opisano te popraćeno raznim slikama. Slike su rađene u *GeoGebri*. *GeoGebra* je besplatan program dinamičke geometrije za sve razine matematike koji povezuje geometriju, algebru i analizu. S ovim programom učenici se susreću u osnovnim i srednjim školama. Nadalje, presjeci kocke i ravnine rađeni su uz pomoć programa *Rhinoceros*. Iako se presjeci mogu nacrtati i u *GeoGebri*, u *Rhinocerosu* su prikazi presjeka zorniji. Rhinoceros je program koji se koristi na fakultetskoj razini obrazovanja.
U petom poglavlju prikazat ćemo različite tipove zadataka vezanih uz Platonova tijela koji se pojavljuju na natjecanjima iz matematike.

# Poglavlje 1

# Povijest

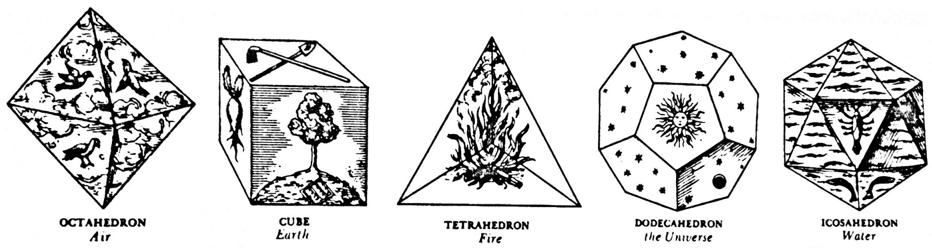
## 1.1 Platon

Platon, pravim imenom Aristoke, rođen je 427. g. pr. Kr. u Ateni. Nadimak Platon, što u prijevodi znači široki, vjerojatno je dobio zbog svoje građe. Bavio se gimnastikom, govorništvom, pjesništvom i filozofijom. Najdublji trag na njega je ostavio učitelj Sokrat[1] koji je Platona poučavao do svoje smrti. Nakon Sokratove smrti, Platon napušta Atenu. Boravio je u Egiptu, Kireni (današnja Libiji) te u današnjoj Italiji. Na svom putovanju upoznaje dva pitagorejca: Teodora iz Kirene [2] i Arhitu iz Tarenta [3]. Nakon povratka u Atenu, 387. g. pr. Kr. , osnovao je filozofsku školu pod nazivom *Akademija*. *Akademija* je nastala po uzoru na pitagorejsku školu, a u joj se uz filozofiju poučavala i matematika, geometrija, astronomija, govorništvo, logika te mnoga druga znanja čiji je cilj prepoznavanje ključnih moralnih vrijednosti.
Platon je pisao u obliku dijaloga čiji je česti sugovornik Sokrat, pa je zbog toga nejasno koja razmišljanja pripadaju Sokratu, a koja Platonu. Njegovi najpoznatiji dijalozi u kojima doznajemo o tadašnjoj matematici su *Teetet* i *Tiamesu*, (prema [3], [11]). U dijalogu *Timaeus* Platon razvija svoju atomističku filozofiju po kojoj je materijalni svijet građen od sitnih čestica četiriju temeljnih elemenata koje imaju oblik pravilnih poliedara. Te čestice su vatra, zemlja, zrak i voda. Tako čestica vatre ima oblik tetraedra jer je on oštar te lako prodire u druge stvari. Čestica zemlje ima oblik kocke jer je ona najstabilnija od svih poliedara. Oktaedar je prozračan pa oblik oktaedra ima čestica zraka, a čestica vode ima oblik ikosaedra jer je on „najobliji“ pa lako klizi. Po Platonu oblik dodekaedra ima svemir, (prema [20]).
Upravo je to razlog zbog kojeg pravilne poliedre nazivamo još i Platonovim tijelima.

[1] Sokrat, (469. - 399. pr. Kr.), grčki filozof
[2] Teodor iz Kirene, (365. - 398. pr. Kr.)
[3] Arhita iz Tarenta, (428. - 350. pr. Kr.), predstojnik pitagorejskog društva

## 1.2 Ostali znanstvenici o Platonovim tijelima

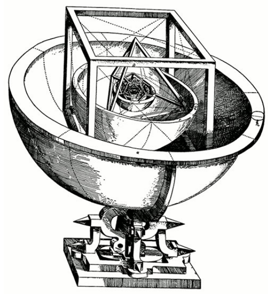
Pravilnim poliedrima bavio se i Euklid [4] koji je o njima pisao u svojoj 13. knjizi *Euklidovih elemenata*. U toj knjizi Euklid uspoređuje stranice pet pravilnih poliedara te dokazuje da su to jedini pravilni poliedri.
Osim Euklida pravilnim poliedrima bavio se i Pitagora [5], kojemu je starogrčki matematičar Proklo [6] pripisao konstrukciju tih poliedara. No, kasnije se ustanovilo da je Pitagora mogao poznavati samo tetraedar, heksaedar i dodekaedar. Oktaedar i ikosaedar je vjerojatno otkrio Teetet iz Atene u 4. st. pr. Kr.
Platonova teorija naišla je i na podršku Johannesa Keplera [7] koji je njegovo tumačenje prikazao svojim ilustracijama, (prema [3], [7]).




Slika 1.1: Keplerova ilustracija Platonovih tijela, slika preuzeta iz [4]

Kepler istražuje ulogu pravilnih poliedara u svemiru. Kako je u to doba bilo poznato samo šest planeta, Keplera zanima zbog čega je to tako te u svojem djelu *Misterium cosmographicum* (1596.) izlaže harmoničan odnos planeta. Međuprostor je omeđen koncentričnim sferama, a sferama je upisano pet pravilnih poliedara.
U vanjsku sferu koja opisuje putanju Saturna upisana je kocka, a u kocku je upisana sfera koja opisuje putanju Jupitera. Slijedi tetraedar, a sfera koja je upisana tetraedru opisuje putanju Marsa. Zatim je u sferu upisan dodekaedar, a sfera koja je upisana tom tijelu opisuje putanje Zemlje. Potom je upisan ikosaedar te sfera upisana tom tijelu na kojoj je orbita Venere. Na kraju se nalazi oktaedar, a sfera upisana oktaedru opisuje putanju Merkura.

[4] Euklid, (330. - 275. pr. Kr.), grčki matematičar
[5] Pitagora sa Samosa, (570. - 500. pr. Kr.), prvi "pravi" matematičar
[6] Proklos, (410. - 485.)
[7] Johannes Kepler, (1571. - 1630.), njemački astronom



Slika 1.2: Keplerov model Sunčevog sustava, slika preuzeta iz [14]

Platonova tijela zanimljiva su i umjetnicima. Leonardo da Vinci [8] ilustrirao je pet pravilnih poliedara u knjizi *De divina proportione* Fra Luce Pacolija [9], a *Posljednja večera* Salvadora Dalia [10] smještena je u prostor dodekaedra.

Početkom 20. stoljeća opisano je niz organizama čiji kosturi imaju oblik pravilnih poliedara. Oblik ikosaedra ima kostur jednostaničnog organizma zrakaša kao i mnogi virusi poput virusa herpesa. I kristalne rešetke minerala imaju oblik Platonovih tijela (prema [14], [20]).

Iz navedenog možemo uočiti da su Platonova tijela važan predmet proučavanja ne samo matematikeveći i drugih prirodnih znanosti.

[8] Leonardo da Vinci (1452. - 1519.), talijanski slikar

[9] Fra Luca de Pacioli (1445. - 1517.), talijanski matematičar

[10] Salvador Dalí (1904. - 1989.), španjolski slikar

# Poglavlje 2

# Poliedri

Ovo poglavlje započet ćemo definicijom koja je preuzeta iz [4]. Nakon toga dokazat ćemo Eulerovu formulu i teorem da postoji točno pet pravilnih poliedara.

**Definicija 2.1** (Konveksan poliedar)**.** *Konveksan poliedar je omeđen skup dobiven kao presjek konačno mnogo poluprostora.*

Elementi konveksnog poliedra su strane koje su mnogokuti, bridovi i vrhovi.

## 2.1 Pravilni poliedri

**Definicija 2.2** (Pravilni poliedri)**.** *Pravilni poliedri su poliedri čije strane su sukladni pravilni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova.*

Pravilni poliedri su tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedra, dodekaedar i ikosaedar.

Da bi dokazali da postoji točno pet pravilnih poliedara najprije trebamo dokazati *Eulerovu formulu* koju koristimo u dokazu.

**Teorem 2.3** (Eulerova [1] formula)**.** *Za svaki konveksan poliedar vrijedi:*

$$V - B + S = 2, \tag{2.1}$$

*gdje je $V$ broj vrhova, $B$ broj bridova i $S$ broj strana konveksnog poliedra.*

*Dokaz.* [2] Zamislimo da imamo poliedar od rastezljive gume. Zatim tom poliedru uklonimo jednu njegovu stranu i rastegnimo njegovu mrežu u ravninu, ali tako da bridovi uklonjene strane budu vanjski rubovi nastalog lika u ravnini i da sve strane u

[1] Leonhard Euler, (1707. - 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom

ravnini ostanu mnogokuti, tj. da bridovi budu ravni. Budući da nas zanima samo broj vrhova, strana i bridova, nije bitno što se pri rastezanju promijenio oblik. Odredimo zbroj kutova u svim mnogokutima na nastaloj slici, a to možemo na dva načina.
Neka je $V$ broj strana, $B$ broj bridova i $S$ broj strana danog poliedra. Na nastaloj slici je $V$ broj vrhova, a njih $v$ su vanjski vrhovi mnogokuta na slici jer pripadaju uklonjenoj strani. Preostalih $V-v$ vrhova se nalazi u unutrašnjosti mnogokuta. Zbog toga zbroj svih kutova mnogokuta možemo izračunati kao zbroj svih kutova jednog $v$-terokuta i $(V-v)$ punih kutova:

$$Z = (v-2)\cdot 180^\circ + (V-v)\cdot 360^\circ = (2V-v-2)\cdot 180^\circ. \tag{2.2}$$

Nadalje, istu sumu možemo dobiti i kao zbroj suma unutarnjih kutova svih "malih" mnogokuta na dobivenoj slici, nastalih od strana poliedra. Kako je jedna strana uklonjena slijedi da tih mnogokuta ima $S-1$. Označimo brojeve njihovih vrhova s $n_1, n_2, ..., n_{S-1}$. Tada vrijedi:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}(n_i-2)\cdot 180^\circ = (n_1+n_2+...+n_{S-1}-2(S-1))\cdot 180^\circ. \tag{2.3}$$

Izjednačavanjem (2.2) i (2.3) dobivamo:

$$2V-v-2 = n_1+n_2+...+n_{S-1}-2(S-1). \tag{2.4}$$

Pritom je $n_1+n_2+...+n_{S-1}$ ukupan broj bridova na nastaloj slici, pri čemu su "unutarnji" bridovi brojani dva puta. Zato vrijedi:

$$n_1+n_2+...+n_{S-1} = 2B-v. \tag{2.5}$$

Uvrštavanjem (2.5) u (2.4) dobivamo:

$$(2B-v)-2(S-1) = 2V-v-2$$

$$2B-v-2S+2 = 2V-v-2$$

$$2V-2B+2S = 4.$$

Dakle,

$$V-B+S = 2.$$

□

Dokažimo sada da postoji točno pet pravilnih poliedara.

**Teorem 2.4.** *Postoji točno pet pravilnih poliedara.*

*Dokaz.* [16], [1]
Označimo sa $V$ broj vrhova, $B$ broj bridova i $S$ broj strana nekog pravilnog poliedra. Nadalje, označimo s $n$ broj svih bridova na pojedinoj strani i s $m$ broj svih bridova koji se sastaju u jednom vrhu pravilnog poliedra. Budući da svaki brid leži na dvije stranice te svaki brid spaja dva vrha zaključujemo da vrijedi

$$nS = 2B \tag{2.6}$$

$$mV = 2B. \tag{2.7}$$

Iz dobivenih jednadžbi (2.6) i (2.7) izrazimo broj strana $S$ i broj vrhova $V$.
Imamo:

$$S = \frac{2B}{n} \tag{2.8}$$

$$V = \frac{2B}{m}. \tag{2.9}$$

Uvrštavanjem u Eulerovu formulu 2.1 dobivamo

$$\frac{2B}{m} - B + \frac{2B}{n} = 2 \tag{2.10}$$

$$\frac{2Bn - Bmn + 2Bm}{mn} = 2 \tag{2.11}$$

$$B(2n - mn + 2m) = 2mn \tag{2.12}$$

$$B = \frac{2mn}{2n - mn + 2m}. \tag{2.13}$$

Uvrštavanjem formule (2.13) u jednadžbe (2.8) i (2.9) dobivamo

$$S = \frac{4m}{2n - mn + 2m} \tag{2.14}$$

$$V = \frac{4n}{2n - mn + 2m}. \tag{2.15}$$

Uočimo, ako su nam poznati $n$ i $m$ možemo lako izračunat $S$, $V$ i $B$.
Budući da je broj bridova $B$ pozitivan broj mora vrijediti

$$2n - mn + 2m > 0 \tag{2.16}$$

$$2(n + m) > mn. \tag{2.17}$$

Također mora vrijediti $n \geq 3$ i $m \geq 3$, te $3 \leq n \leq 5$ .
U jednakost (2.17) uvrstimo $n = 3$ te dobivamo

$$2(3 + m) > 3m$$

$$6 + 2m > 3m$$

$$m < 6.$$

Dakle, za $n = 3$ dobivamo rješenja za $m$ da su 3, 4 ili 5.
Analogno uvrstimo za $n = 4$ i $n = 5$.
Da bi $B$ bio cijeli broj, jedine mogućnosti za $n$ i $m$ su sljedeći parovi:

| $n$ | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 3 | 4 | 5 | 3 | 3 |

Za svaki par ovih vrijednosti postoji jedan pravilan poliedar, što možemo pokazati konstrukcijom. Uvrštavanjem dobivenih parova u jednadžbe (2.13), (2.14), (2.15) dobivamo sljedeće pravilne poliedre: □

| **Pravilni poliedar** | $V$ | $B$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| Tetraedar | 4 | 6 | 4 |
| Heksaedar (Kocka) | 8 | 12 | 6 |
| Oktaedar | 6 | 12 | 8 |
| Dodekaedar | 20 | 30 | 12 |
| Ikosaedar | 12 | 30 | 20 |

Promotrimo tablicu. Uočavamo da heksaedar i oktaedra imaju jednak broj bridova, te da je broj vrhova heksaedra jednak broju strana oktaedra i broj strana heksaedra jednak broju vrhova oktaedra. Vidimo da to isto vrijedi i za dodekaedar i ikosaedar. Kod tetraedra uočavamo da ima jednak broj vrhova i stranica.
To svojstvo nazivamo dualnost.

**Definicija 2.5.** *Neka su $P$ i $D$ konveksni poliedri. Kažemo da je poliedar $P$ dualan poliedru $D$, ako su središta strana poliedra $P$ vrhovi poliedra $D$.*

Dakle, svako Platonovo tijelo možemo dobiti iz njemu dualnog poliedra tako da za njegove vrhove uzmemo središta strana njemu dualnog poliedra. Pravilni tetraedar možemo dobiti iz njemu dualnog tetraedra tako da za njegove vrhove uzmemo središta strana tetraedra, pravilni heksaedar možemo dobiti iz dualnog oktaedra tako da za vrhove heksaedra uzmemo središta strana oktaedra i obratno pravilni oktaedar možemo dobiti iz njemu dualnog heksaedra tako da za vrhove oktaedra uzmemo središta strana heksaedra. Zatim, pravilni dodekaedar možemo dobiti iz njemu dualnog ikosaedra tako da vrhove dodekaedra uzmemo središta strana ikosaedra te pravilni ikosaedar možemo dobiti iz njemu dualnog dodekaedra tako da za vrhove ikosaedra uzmemo središta strana dodekaedra.

Nadalje, svakom Platonovom tijelu možemo pridružiti tri sfere. Opisana sfera na koja leže vrhovi pravilnog poliedra, upisana sfera na kojoj leže središta strana pravilnog poliedra i treća sfera koja prolazi polovišta bridova pravilnog poliedra, (prema [12]).

# Poglavlje 3

# Cavalierijev princip

## 3.1 Bonaventura Cavalieri

Slika 3.1: Bonaventura Francesco Cavalieri, slika preuzeta iz [21]

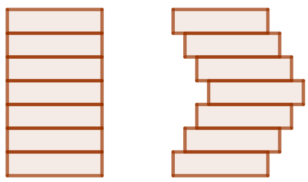
Bonaventura Francesco Cavalieri rođen je u Milanu 1598. godine, a umro u Bologni 1647. godine. Godine 1615. pridružuje se isusovcima te uzima očevo ime Bonaventura. Nakon godinu dana premješta se u isusovački samostan u Pisi gdje boravi do 1620. godine. U samostanu upoznaje predavača matematike na Sveučilištu u Pisi, Antonia Castellia koji Cavalierija poučava geometriju te ga upoznaje s Galileovim idejama. Kardinal Federico Borromeo prepoznaje Cavalierijevu genijalnost pa

na njegov zahtjev Cavalieri upoznaje Galilea[1] te postaje njegov učenik. Cavalieri je poučavao matematiku na Sveučilištu u Bologni od 1629. godine pa do svoje smrti. Bavio se raznim područjima matematike (trigonometrijom i geometrijom), te optikom, astronomijom i astrologijom. Zaslužan je za uvođenje logaritama u talijanske krugove matematičara kroz knjigu *Directorium generale uranometricum in quo trigonometri fundamenta ac regul demonstrantur* (1632.), (prema [21]).
Ostala Cavalierijeva djela su: *Lo Specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche* (1632.), *Rota planetaria* (1640.), *Trigonometria plana et sphrica linearis et logarithmica* (1635.).
Njegovo najpoznatije djelo *Geometria indivisibilibus continuorum nov qudam ratione promota* (1635.) posvećeno je metodi bliskoj metodi ekshaustije. U tom djelu Cavalieri opisuje svoju ideju o *nedjeljivosti*: geometrijski se likovi promatraju kao strukture satkane od nedjeljivih elemenata - točka tankih niti ili ravnih slojeva. Svaka dužina unija je nedjeljivih točaka, a ravninski lik je sastoji se od beskonačno mnogo tankih i međusobno paralelnih dužina, dok se prostorni lik sastoji od beskonačno tankih i međusobno paralelnih slojeva. Takav pristup rezultirao je dvama načelima poznatim kao *Cavalierijev princip za površine* i *Cavalierijev princip za obujam*, (prema [6]).

## 3.2 Princip

Cavalierijev princip za površine i Cavalierijev princip za obujam je objašnjen prema [4].

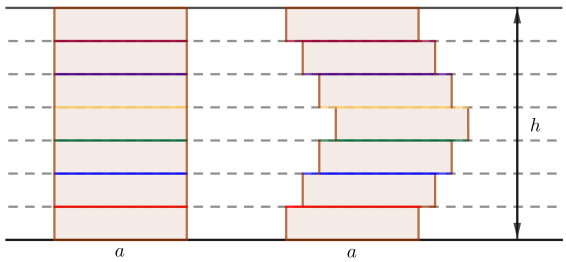
Postavlja se pitanje imaju li dva naizgled potpuno različita lika jednaku površinu.



Drugi lik ima istu duljinu osnovice i duljinu visine kao i pravokutnik, no ima li istu površinu kao i pravokutnik. Da bi izračunali njegovu površinu, primjenjujemo Cavalierijev princip.

**Cavalierijev princip za površine** glasi, ako se dva lika mogu postaviti tako da njihovi presjeci s pravcima paralelnima jednom zadanom pravcu imaju istu duljinu, tada oni imaju jednake površine.

[1] Galileo Galilei, (1564. – 1642.), talijanski matematičar, fizičar i astronom

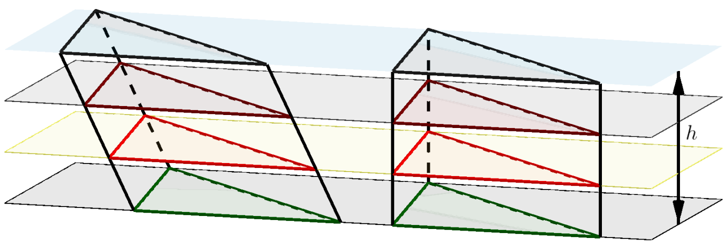



Slika 3.2: Cavalierijev princip za likove

Uočimo, ako presiječemo zadane likove paralelnim pravcima da njihovi presjeci imaju istu duljinu. Tada po Cavalierijevom principu slijedi da ti likovi imaju jednake površine.

Dakle, podijelimo li neki lik na tanke slojeve oblika pravokutnika, pomicanjem tih slojeva površina se ne mijenja.

Na sličan način može se opisati kako odrediti obujam dvaju tijela.
**Cavalierijev princip za obujam** glasi, ako se dva tijela mogu postaviti tako da njihovi presjeci s ravninama paralelnim zadanoj ravnini imaju jednake površine, onda ta dva tijela imaju jednake obujme.




Slika 3.3: Cavalierijev princip za tijela

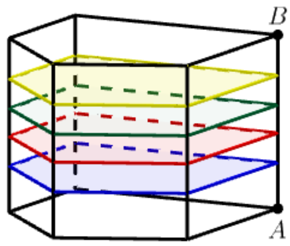
Kao što smo kod likova promatrali paralelne pravce, kod tijela promatramo paralelne ravnine. Tijelo podijelimo paralelnim ravninama na tanke slojeve, a pomicanjem tih slojeva mijenja se njegov oblik, no ne i obujam. Pri tome, slojevi ne moraju biti jednaki, ali je važno da presjeci tijela budu jednake površine.
Koristeći ovo načelo zaključujemo da dvije prizme koje imaju baze jednakih površina i visine jednakih duljina imaju jednak obujam.
Ovo načelo često se primjenjuje u srednjoškolskoj matematici za određivanje formula za obujam. Kod računanja obujma krećemo od obujma kvadra koji je jednak umnošku

duljina triju njegovih bridova:

$$V = a \cdot b \cdot c. \tag{3.1}$$

Za računanje obujma drugih tijela koristit ćemo formulu za obujam kvadra.

Odredimo obujam prizme. Prizmu možemo opisati na sljedeći način. Neka je $\overline{AB}$ dužina čija je početna točka $A$ u jednom vrhu baze. Translatiramo bazu tako da vrh putuje dužinom $\overline{AB}$ i skup svih dobivenih točaka je ponovo prizma.




Slika 3.4: Prizma

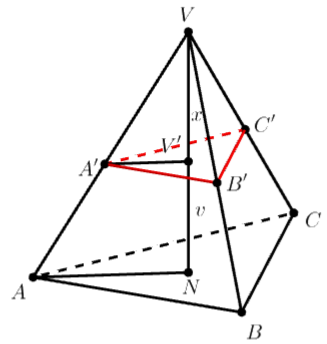
Iz toga zaključujemo da je presjek prizme s ravninom paralelnoj bazi mnogokut sukladan bazi.
Budući da je kvadar prizma, a po Cavalierijevom principu sve prizme jednakih baza i jednakih visina imaju jednak obujam, slijedi da je obujam prizme jednak

$$V = B \cdot h,$$

gdje je $B$ površina baze, a $v$ visina prizme.

Koristeći formulu (3.1) i Cavalierijev princip odredimo formulu za obujam piramide.

Pogledajmo najprije koje svojstvo ima krnja piramida jer će nam to svojstvo trebati u dokazu iduće propozicije.
Neka je zadana trostrana piramida $ABCV$ koja je na udaljenosti $v$ od osnovke presječena paralelnom ravninom.




Slika 3.5: Piramida

Dobili smo trokut $A'B'C'$. Označimo s $V'$ i $N$ nožišta visina iz vrha $V$ na ravnine $ABC$ i $A'B'C'$. Nadalje, označimo s $x$ visinu manje piramide.
Promotrimo trokute $\triangle VA'V'$ i $\triangle VAN$. Trokuti su slični po $KK$ poučku pa slijedi da su im odgovarajuće stranice proporcionalne, tj.

$$\frac{|VA'|}{|VA|} = \frac{|V'A'|}{|NA|} = \frac{|VV'|}{|VN|}. \tag{3.2}$$

Uočimo da je

$$\frac{|VV'|}{|VN|} = \frac{x}{x+v}. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem (3.3) u (3.2) dobivamo

$$\frac{|VA'|}{|VA|} = \frac{|V'A'|}{|NA|} = \frac{x}{x+v}. \tag{3.4}$$

Analogno iz sličnosti trokuta $\triangle VB'V'$ i $\triangle VBN$ dobivamo

$$\frac{|VB'|}{|VB|} = \frac{|V'B'|}{|NB|} = \frac{x}{x+v},$$

te iz sličnosti trokuta $\triangle VC'V'$ i $\triangle VCN$ dobivamo

$$\frac{|VC'|}{|VC|} = \frac{|V'C'|}{|NC|} = \frac{x}{x+v}.$$

Nadalje, trokuti $\triangle VA'B'$ i $\triangle VAB$ su slični po $KK$ poučku pa slijedi

$$\frac{|VA'|}{|VA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}.$$

Tada iz (3.4) slijedi

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{x}{x+v}. \tag{3.5}$$

Analogno bismo dobili da je

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{x}{x+v} \tag{3.6}$$

i

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{x}{x+v}. \tag{3.7}$$

Iz (3.5), (3.6) i (3.7) dobivamo

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{x}{x+v}.$$

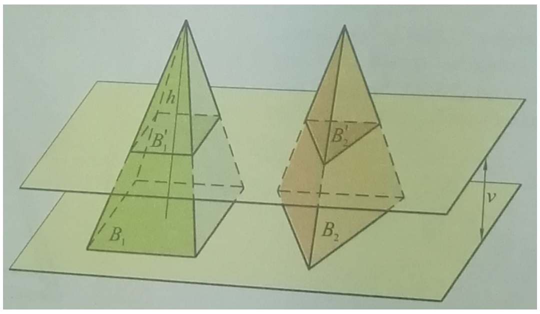
Iz toga slijedi da trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imaju proporcionalne stranice, tj. da su slični s koeficijentom sličnosti $\frac{x}{x+v}$.
Dakle, osnovke baze $B$ i $B_1$ su slični trokuti pa iz toga slijedi da je omjer površina baza $B$ i $B_1$ jednak

$$\frac{B'}{B} = \left(\frac{x}{x+v}\right)^2, \tag{3.8}$$

(prema [19]).

**Propozicija 3.1.** *Bilo koje dvije piramide koje imaju jednake površine baze i jednake visine imaju i jednake obujme.*

*Dokaz.* [19] Uzmimo dvije piramide jednakih površina baza i jednakih visina $h$ te ih presjecimo ravninom paralelnom s ravninom baze na visini $v$.




Slika 3.6: Slika preuzeta iz [19]

Primjenom formule (3.8) zaključujemo da su površine njihovih presjeka s ravninom paralelnoj ravnini baze jednake, pa imamo:

$$B_1' = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 B_1$$

$$B_2' = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 B_2.$$

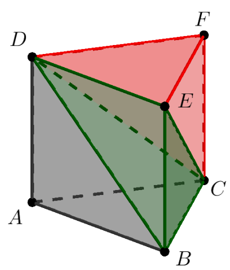
Kako je $B_1 = B_2$ slijedi da je $B_1' = B_2'$, pa iz Cavalierijevog principa slijedi da su i obujmovi tih piramida jednaki. $\square$

Koristeći tvrdnju propoziciji 3.1 dokažimo formulu za obujam piramide.

**Propozicija 3.2.** *Obujam piramide jednak je trećini produkta površine baze i pripadne visine;*

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

*Dokaz.* [17] Uzmimo trostranu piramidu s bazom $B$ i visinom $v$ i usporedimo je s trostranom prizmom iste baze i visine. Neka je dana trostrana prizma $ABCDEF$. Podijelimo prizmu $ABCDEF$ na tri piramide jednakih obujmova.




Slika 3.7: Prizma je podijeljena na tri piramide

Baze te prizme je trokut $\triangle ABC$. Obujam prizme $ABCDEF$ jednak je:

$$V(ABCDEF) = V(DABC) + V(DCFE) + V(DCBE).$$

Prema propoziciji (3.1) obujam piramide $DCFE$ jednak je obujmu piramide $DCBE$,

$$V(DCFE) = V(DCBE), \tag{3.9}$$

jer su baze $\triangle CFE$ i $\triangle CBE$ sukladne, pa imaju jednaku površinu, a visine iz zajedničkog vrha $D$ do tih baza su jednake.
Nadalje, isto tako je i obujam piramide $DABC$ jednak obujmu piramide $DCFE$,

$$V(DABC) = V(DCFE), \tag{3.10}$$

jer su baze $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ sukladne, a visina iz vrha $D$ jednaka je visini iz vrha $C$.
Iz (3.9) i (3.10) slijedi da je

$$V(ABCDEF) = 3 \cdot V(DCFE).$$

tj.

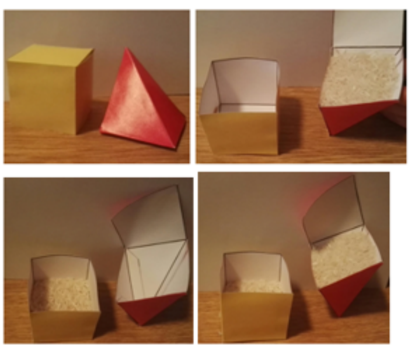
$$V(DCFE) = \frac{1}{3} \cdot V(ABCDEF).$$

Kako je obujam prizme jednak $V = B \cdot h$ slijedi da je obujam piramide jednak

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

Prema propoziciji 3.1 slijedi da dobivena formula vrijedi za bilo koju piramidu. □

U nastavi da bi učenicima pokazali u kakvom su odnosu obujam piramide i obujam prizme možemo napraviti praktičnu vježbu za koju su nam potrebni prizma, piramida i riža. Model prizme i piramide trebaju imati jednaku površinu baze i jednaku duljinu visine. Prvo napunimo piramidu rižom, a nakon toga prebacimo rižu iz piramide u prizmu. Taj postupak ponavljamo tako dugo dok prizmu ne napunimo do kraja rižom. Učenici će uočiti da je potrebno tri puta prebaciti rižu iz piramide u prizmu. Tako zaključuju da je obujam piramide tri puta manji od obujma prizme koja ima jednaku površinu baze i duljinu visine kao i piramida. Dakle, obujam piramide je $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.



Slika 3.8: Prikaz praktične vježbe s kockom i pravilnom četverostranom piramidom

# Poglavlje 4

# Platonova tijela kroz obrazovanje

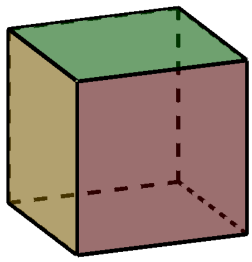
U ovom poglavlju opisat ćemo Platonova tijela te vidjeti u kojoj mjeri se ona spominju u osnovnoj i srednjoj školi.
U osnovnoj školi učenici rade samo heksaedar (kocka) i tetraedar. Na samom početku obrazovanja, u prvom razredu osnovne škole, uče se geometrijska tijela: valjak, kugla, kvadar, kocka i piramida. Tada je u fokusu da učenici znaju prepoznati o kojem se geometrijskom tijelu radi te da u zadacima znaju povezati koji predmeti iz stvarnog života su im slični, npr. kocki ( igraća kocka, Rubikova kocka). Također spominje se i podjela geometrijskih tijela s obzirom na plohe koje ih omeđuju. Uglata tijela su tijela koja su omeđena samo ravnim plohama, a obla tijela su tijela koja su omeđena barem jednom zakrivljenom plohom. Od učenika se traži da znaju prepoznati od kojih se ploha sastoji geometrijsko tijelo.
Zanimljivo je da se učenici prvi put s geometrijskim tijelima susreću u prvom razredu, a nakon toga ona se detaljnije rade tek u drugom polugodištu osmog razreda.

Prema *Hrvatskom nacionalnom obrazovnom standardu* (HNOS-u) obrazovna postignuća vezana uz prizme i piramide u osmom razredu su: prepoznati i opisati prizme i piramide; odrediti broj vrhova, bridova i strana prizme i piramide; skicirati prizme i piramide i njihove mreže; određivati oplošje i obujam prizme i piramide. Da bi učenici usvojili navedena obrazovna postignuća predviđeno je 25 nastavnih sati, a za kocku i tetraedar predviđena su četiri nastavna sata.

Nadalje, u gimnazijama i četverogodišnjim tehničkim školama prvi se put svih pet Platonovih tijela spominje u drugom razredu. Tada učenici trebaju definirati tijela, prepoznati njihove mreže i dokazati neka svojstva.
Zanimljivo je da učenici ekonomskih i trogodišnjih škola u svojim udžbenicima nemaju poglavlje posvećeno Platonovim tijelima pa oni taj nastavni sadržaj ne rade.

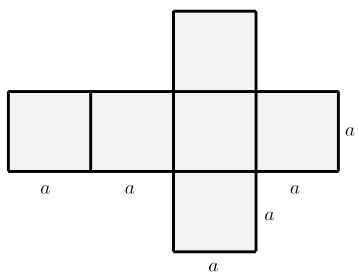
## 4.1 Kocka

Heksaedar (kocka)je pravilni poliedar sa stranama koje su sukladni kvadrati. Ima šest strana, dvanaest jednak dugih bridova i osam vrhova. Ime heksaedar dolazi od grčke riječi *heksa* što znači šest.



Slika 4.1: Heksaedar (Kocka)

Da bi došli do definicije kocke u osmom razredu osnovne škole najprije se definira prizma. Dakle, prizma je geometrijsko tijelo omeđeno s dvama međusobno sukladnim $n$-terokutima koji pripadaju međusobno paralelnim ravninama, a nazivamo ih bazama ili osnovkama prime te s $n$ paralelograma koje nazivamo pobočkama i koje čine pobočje prizme. Baze i pobočke jednim imenom nazivamo stranama prizme. Nakon definicije prizme opisuju se njezini elementi i dijelovi te se spominju uspravne i kose krize. Prizma je uspravna ako su pobočke prizme okomite na ravninu baze. Nadalje, uspravna prizma je pravilna ako su njezine baze pravilni mnogokuti. Nakon uvodnog dijela o prizmama sljedeća nastavna jedinica je kocka. Kocka je pravilna uspravna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednake duljine. Također spominju se i mjerljiva obilježja, oplošje i obujam ili volumen, (prema [15], [18] ).
Ako kocku razrežemo po njezinim bridovima i položimo njezine strane u jednu ravninu dobit ćemo mrežu kocke.




Slika 4.2: Mreža kocke

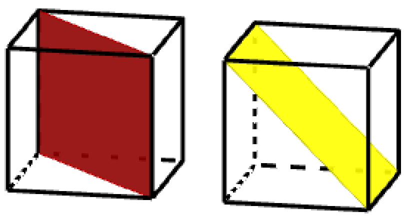
Mreža kocke sastoji se od šest sukladnih kvadrata, a površina jednog kvadrata je $a^2$. Dakle, površina mreže kocke je $6 \cdot a^2$.
Budući da je oplošje prizme površina koju dobijemo zbrajanjem površina svih strana koje omeđuju tu prizmu, zaključujemo da je oplošje prizme jednako površini mreže. Koristeći tu činjenicu dobivamo da je oplošje kocke

$$O = 6a^2.$$

Obujam tijela je veličina prostora koje to tijelo zauzima. Da bi nešto izmjerili treba nam mjerna jedinica. Za mjerenje duljine možemo koristiti cm, za mjerenje površine $\text{cm}^2$, a za mjerenje obujma $\text{cm}^3$. Uočimo da je kubični centimetar ($\text{cm}^3$) obujam kocke čiji je brid duljine 1 cm.
Učenici kroz aktivnost mogu otkriti formulu za obujam kocke. Za aktivnost su im potrebne drvene jedinične kockice duljine brida 1 cm, a obujma 1 $\text{cm}^3$. Od tih kockica trebaju napraviti kocku duljine brida 2 cm. Prebrojavanjem kockica koje su im bile potrebne za izgradnju kocke zadanog brida učenici uočavaju da taj broj odgovara obujmu kocke. Učenici će zaključiti da je obujam kocke jednak umnošku duljina bridova iz jednog vrha. Dakle, obujam kocke duljine brida $a$ je

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

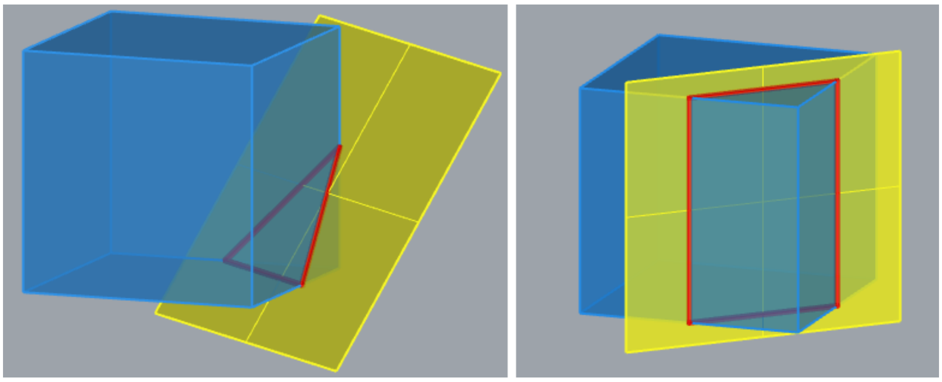
Nadalje, osim mjerljivih obilježja u osnovnoj školi govori se još i o prostornoj dijagonali kocke čija je duljina $D = a\sqrt{3}$, te o dijagonalnom presjeku kocke. Dijagonalni presjek kocke je pravokutnik kojeg dobijemo kada kocku presiječemo ravninom koja sadrži dva paralelna brida kocke koji ne pripadaju istoj strani kocke. U osmome



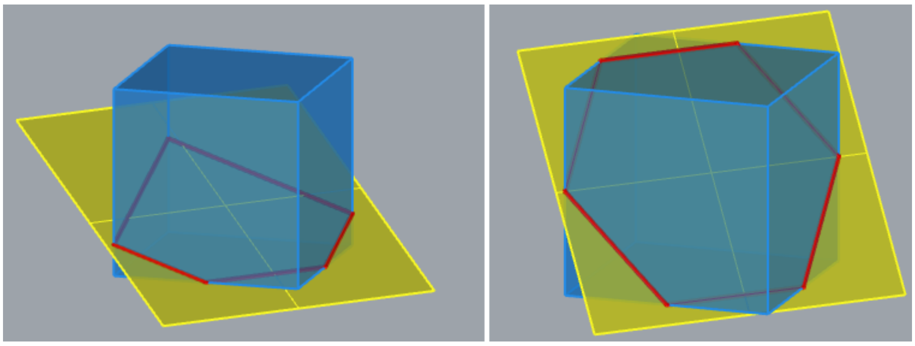
Slika 4.3: Primjeri dijagonalnog presjeka kocke

razredu spominje se samo dijagonalni presjek kocke, no u srednjoj školi znanje o presjecima kocke ravninom se produbljuje. Učenici tada proučavaju u kakvom sve položaju mogu biti kocka i ravnina te se bave konstrukcijom njihovog presjeka. Osim posebnih slučajeva kada ravnina prolazi jednom stanom kocke, jednim vrhom ili pak jednim brdom kocke, zanimljivi su oni slučajevi u kojima u presjeku dobivamo likove

kao što su trokut, četverokut, peterokut i šesterokut.
Da bi učenicima pokazali kakve sve likove možemo dobiti presiječemo li kocku ravninom možemo napraviti praktičnu vježbu koristeći plastični model kocke u koji ulijemo malo obojane tekućine. Naginjanjem kocke tekućina će poprimiti razne oblike. Također, postavlja se pitanje možemo li određeni presjek dobiti na više načina, tj. hoće li ravnina paralelna zadanoj presijecati s kockom sličan lik kao i zadana ravnina.



Slika 4.4: Presjek kocke ravninom je trokut, presjek kocke ravninom je četverokut



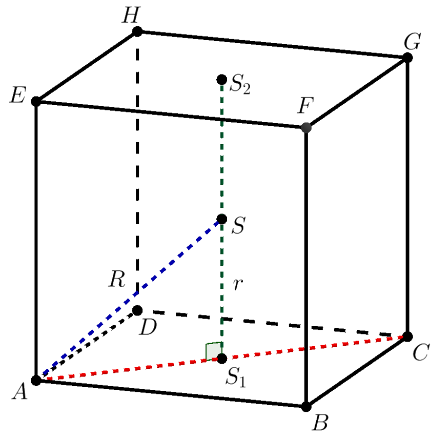
Slika 4.5: Presjek kocke ravninom je peterokut, presjek kocke ravninom je šesterokut

Nadalje, spomenuli smo da se svakom Platonovom tijelu može upisati i opisati sfera pa bi učenici uz pomoć *GeoGebre* i kroz grupni rad mogli sami istražiti koliki su njihovi polumjer.

**Primjer 4.1.** *Odredite polumjer upisane i opisane sfere kocke čiji je brid duljine $a$.*

*Rješenje:* Neka je kocka $ABCDEFGH$ duljine brida $a$. Neka je $S$ središte kocke, $S_1$ središte strane $ABCD$ i $S_2$ središte strane $EFGH$. Upisana sfera dira sva središta

strana kocke, a opisana sfera prolazi svim vrhovima kocke.
Pogledajmo sliku.




Slika 4.6: Skica za primjer 4.1.

Polumjer upisane sfere je

$$r = \overline{S_1S} = \frac{1}{2}\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}a.$$

Odredimo polumjer opisane sfere.
Budući da je $\overline{AC}$ dijagonala strane $ABCD$, a $S_1$ središte te strane slijedi da je

$$\overline{AS_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Pogledajmo pravokutni trokut $\triangle AS_1S$.
Imamo: $\overline{AS_1} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $\overline{S_1S} = \dfrac{a}{2}$ i $\overline{AS} = R$.
Primjenom Pitagorinog poučka slijedi:

$$|AS|^2 = |AS_1|^2 + |S_1S|^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$R^2 = \frac{3a^2}{4}$$

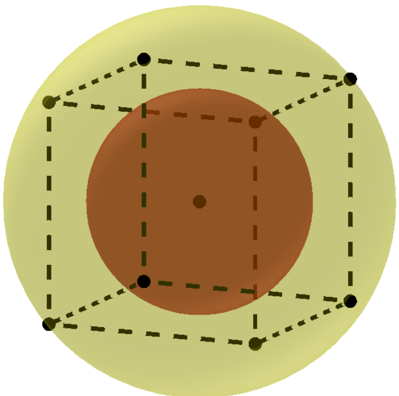
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, polumjer sfere upisane kocki duljine brida $a$ je

$$r = \frac{a}{2},$$

a polumjer sfere opisane kocki je

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

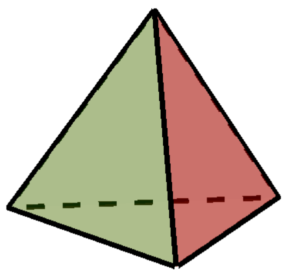


Slika 4.7: Kocka i upisana i opisana sfera

Budući da je na slici teško uočiti nalaze li se svi vrhovi kocke na opisanoj sferi ili siječe li upisana sfera sve strane kocke, u nastavi možemo koristiti razne animacije u *GeoGebri* da bi dobili što jasniji prikaz.

## 4.2 Tetraedar

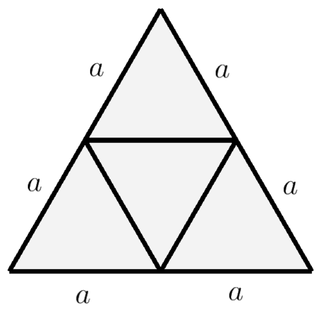
Tetraedar je pravilni poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima šest (jednako dugih) bridova, četiri strane i četiri vrha. Ime tetraedar dolazi od grčke riječi *tetra* što znači četiri.



Slika 4.8: Tetraedar

Isto kao i kocka, tetraedar je dio nastavnog sadržaja osmog razreda.
Nakon dijela o prizmama, rade se piramide. Najprije se definira piramida i njezini dijelovi i elementi.
Neka je $A_1A_2...A_n$ mnogokut, a $V$ točka koja ne leži u ravnini tog mnogokuta. Pravilna $n$-terostrana piramida je tijelo omeđeno mnogokutom $A_1A_2...A_n$ i s $n$ trokuta $VA_1A_2$, $VA_2A_3$, . . . ,$VA_nA_1$., (prema [18]). Potom se radi oplošje i obujam i na kraju se radi svaka piramida posebno.

Tetraedar također možemo razrezati po bridovima i tako dobiti njegovu mrežu.




Slika 4.9: Primjer mreže tetraedra

Mreža tetraedra sastoji se od četiri sukladna jednakostranična trokuta. Površina jednakostraničnog trokuta je $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa je površina mreže tetredra $4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Dakle, oplošje tetredra je

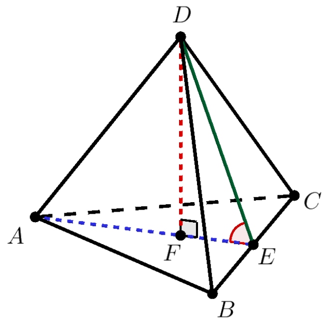
$$O = a^2\sqrt{3}.$$

Koristeći Cavalierijev princip pokazali smo da je obujam piramide jednak
$V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Budući da je baza tetraedra jednakostraničan trokut čija je površina $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, preostaje odrediti visinu. Učenici to mogu napraviti samostalno.

**Primjer 4.2.** *[9] Odredite visinu tetraedra čiji je brid duljine a i kut između pobočki sa zajedničkim bridom.*

*Rješenje:* Pogledajmo sliku.




Slika 4.10: Skica za primjer 4.2.

Uočimo pravokutni trokut $\triangle DFE$.
$\overline{DE}$ je visina jednakostraničnog trokuta $\triangle BCD$, $\overline{FE}$ je polumjer upisane kružnice jednakostraničnom trokutu $\triangle ABC$, a $\overline{FD}$ je tražena visina tetraedra.
Imamo: $\overline{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\overline{FE} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ i $\overline{FD} = h$.
Primjenom Pitagorina poučka slijedi:

$$|DE|^2 = |FD|^2 + |FE|^2$$

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Nadalje, primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokut $\triangle DEF$ imamo:

$$\cos(\measuredangle FED) = \frac{|FE|}{|DE|}$$

$$\cos(\measuredangle FED) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos(\measuredangle FED) = \frac{1}{3}$$

$$\measuredangle(FED) \approx 70°31'.$$

Dakle, obujam tetredra je:

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

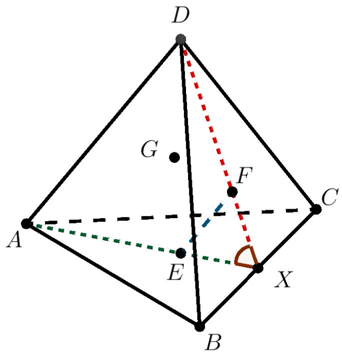
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Spomenuli smo da Platonova tijela imaju svojstvo dualnosti, a zadaci u kojima svojstvo treba dokazati nalaze se i u udžbeniku za drugi razred srednje škole.

**Primjer 4.3.** *[4] Središta strana pravilnog tetraedra vrhovi su pravilnog tetraedra. Dokažite!*

Zanimljivo je da u ovom zadatak učenici mogu istražiti u kakvom su odnosu brid tetraedra i brid njemu dualnog tetraedra.

*Rješenje:* Promotrimo tetraedar $ABCD$ duljine brida $a$. Označimo s $E$, $F$ i $G$ središta strana koje se sastaju u vrhu $C$.




Slika 4.11: Skica za primjer 4.3.

Uočimo da je središte strane tetraedra ujedno i središte upisane i opisane kružnici te strane, tj. trokuta. Iz toga slijedi da točka $E$ leži na visini iz vrha $A$. Isto tako točka $F$ leži na visini iz vrha $D$. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{FD}$ sijeku se u točki $X$. Kako je $|XE|$ i $|XF|$ polumjer upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle BDC$ slijedi da je $|XF| = |XE| = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nadalje, trokuti $\triangle AXD$ i $\triangle EXF$ su slični po *SKS* poučku pa slijedi

$$\frac{|DX|}{|FX|} = \frac{|AD|}{|EF|}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{a}{|EF|}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{a}{|EF|}$$

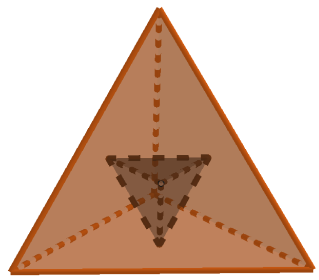
$$|EF| = \frac{1}{3}a.$$

Analogno se pokaže da je

$$|EG| = |FG| = \frac{1}{3}a.$$

Dakle, točke $E$, $F$, $G$ vrhovi su jednakostraničnog trokuta.
Također analogno bismo zaključili promatrajući središta strana koja se sastaju u bilo kojem njegovom vrhu. Budući da tetraedra ima četiri vrha, jednakostraničnih trokuta koje čine vrhovi središta strana tetraedra također će biti četiri i oni čine strane novog

tetraedra.
Ako je u tetraedar duljine brida $a$ upisan tetraedar, tada je duljina njegovoga brida jednaka $\frac{1}{3}a$.

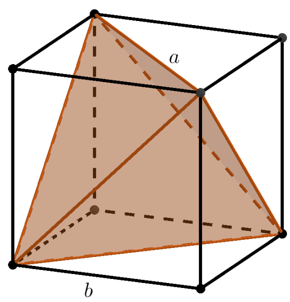


Slika 4.12: Tetraedra i njemu dualan tetraedra

Osim svojstva dualnosti, učenici mogu istražiti koliku su polumjeri upisane i opisane sfere tetraedra.

**Primjer 4.4.** *Odredite polumjer upisane i opisane sfere tetraedru čiji je brid duljine $a$.*

*Rješenje:* Nacrtajmo kocku duljine brida $b$. Pravilni tetraedar duljine brida $a$ smjestimo u kocku tako da su bridovi tetraedra dijagonale strana kocke.




Slika 4.13: Tetraedra upisan u kocku

Sfera opisana tetraedru je sfera opisana kocki. Ako je $b$ duljina brida kocke, tada je polumjer sfere opisan tetraedru jednak $R = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

No, kako je $a = b\sqrt{2}$, tj. $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ imamo da je

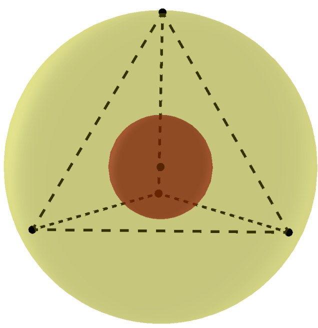
$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Dakle, polumjer sfere opisane tetraedru je $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, (prema [5]).
Odredimo sada polumjer sfere upisane tetraedru.
Zamislimo da imamo tetraedar duljine brida $a$ i njemu dualan tetraedar duljine brida $a_1$. Koristeći činjenice iz primjera 4.3. imamo da je $a_1 = \dfrac{1}{3}a$. Dualan tetraedra smjestimo u kocku kao što je prethodno opisano. Polumjer sfere opisane kocki je polumjer sfere opisane tetraedru. Polumjer sfere opisan tetraedru je $R = \dfrac{a_1\sqrt{6}}{4}$. Budući da je $R$ polumjer opisane sfere dualnog tetraedra slijedi da je $R$ ujedno i polumjer upisane sfere tetraedra duljine brida $a$.
Imamo: $r = R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot a = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
Dakle, polumjer sfere upisane tetraedru je

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12},$$

a polumjer sfere opisane tetraedru je

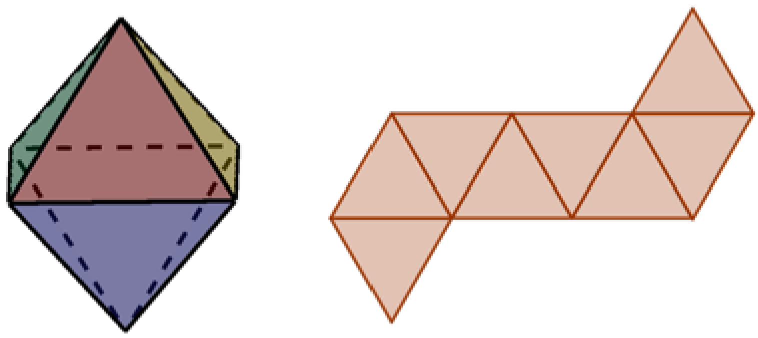
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



Slika 4.14: Tetraedra i upisana i opisana sfera

## 4.3 Oktaedar

Oktaedar je pravilni poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima osam strana, dvanaest jednako dugih bridova i šest vrhova. Ime oktaedar dolazi od grčke riječi *okto* što znači osam.



Slika 4.15: Oktaedar i njegova mreža

U udžbenicima se nalazi nekoliko zadataka vezanih uz oktaedar, a većina osnovnih stvari je navedena bez izvoda. Učenici su do drugog razreda srednje škole naučili osnovno o piramidama pa bi sami mogli izvesti formulu za oplošje i obujam oktaedra.

Mreža oktaedara sastoji se od osam jednakostraničnih trokuta, a površina jednog jednakostraničnog trokuta je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa je oplošje oktaedra jednako $O = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, tj.

$$O = 2a^2\sqrt{3}.$$

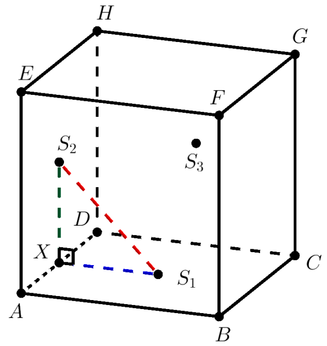
Možemo uočiti da se oktaedra sastoji od dvije četverostrane piramide pa lako možemo izračunati njegov obujam. Obujam četverostrane piramide jednak je $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Dakle, obujam oktaedra je $V = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$, tj.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Nadalje, kod oktaedra također vrijedi svojstvo *dualnosti*, tj. oktaedar je dualan heksaedru i obratno.

**Primjer 4.5.** *[4] Središta strana kocke vrhovi su pravilnog oktaedra. Dokažite!*

*Rješenje:* Promotrimo kocku $ABCDEFGH$ duljine brida $a$. Označimo s $S_1$, $S_2$ i $S_3$ središta strana kocke koje se sastaju u vrhu $D$.




Slika 4.16: Skica za primjer 4.5

Budući da su strane kocke koje se sastaju u vrhu $D$ međusobno okomite, a udaljenost središta kvadrata od stranica kojima pripadaju je $\dfrac{a}{2}$, primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle S_2XS_1$ imamo:

$$|S_1S_2|^2 = |XS_2|^2 + |XS_1|^2$$

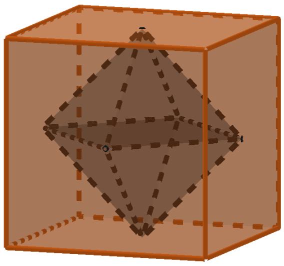
$$|S_1S_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_1S_2|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$|S_1S_2|^2 = \frac{a^2}{2}$$

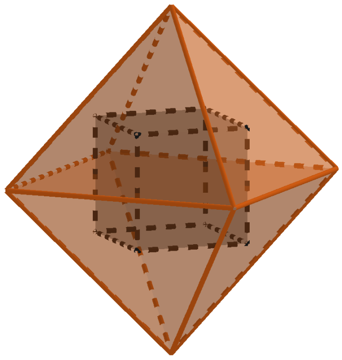
$$|S_1S_2| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Analogno se pokaže da je $|S_1S_3| = |S_2S_3| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Dakle, točke $S_1$, $S_2$ i $S_3$ vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Nadalje, analogno bismo zaključili promatrajući središta strana kocke koje se sastaju u bilo kojem njegovom vrhu. Kako kocka ima osam vrhova, jednakostraničnih trokuta koje čine središta strana također će biti osam i oni čini strane oktaedra.
Konačno, ako je kocka duljine brida $a$ njezin dualni oktaedar ima duljinu brida $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Slika 4.17: Oktaedar i njemu dualan heksaedar

Analogno, kao što smo pokazali da je oktaedar dualan heksaedaru pokazali bismo i da je heksaedar dualan oktaedru.

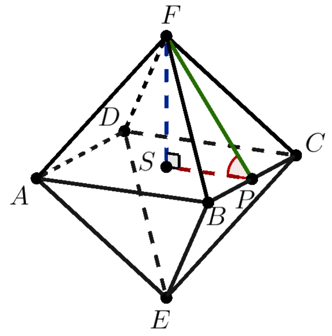


Slika 4.18: Heksaedar i njemu dualan oktaedar

Također možemo odrediti kut između pobočki oktaedra.

**Primjer 4.6.** *[4] Odredite kut između pobočki sa zajedničkim bridom oktaedra.*

*Rješenje:* Pogledajmo sliku.




Slika 4.19: Skica za primjer 4.6.

Uočimo da je kut između pobočki $EBC$ i $BCF$ dvostruko veći kut od kuta $\measuredangle SPF$. Kako je $|FP|$ visina jednakostraničnog trokuta $\triangle BCP$ slijedi da je $|EP| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Točka $S$ središte je kvadrata $ABCD$ pa slijedi da je $|SP| = \frac{a}{2}$.
Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta imamo:

$$\cos(\measuredangle SPF) = \frac{|SP|}{|FP|}$$

$$\cos(\measuredangle SPF) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos(\measuredangle SPF) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\measuredangle SPF = 54°74'.$$

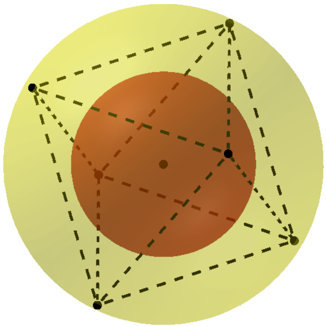
Dakle, kut između pobočki sa zajedničkim bridom je $2 \cdot \measuredangle SPF = 109°28'$.

Nadalje, oktaedru također možemo upisati i opisati sferu.
Polumjer opisane sfere je

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

a polumjer upisane sfere je

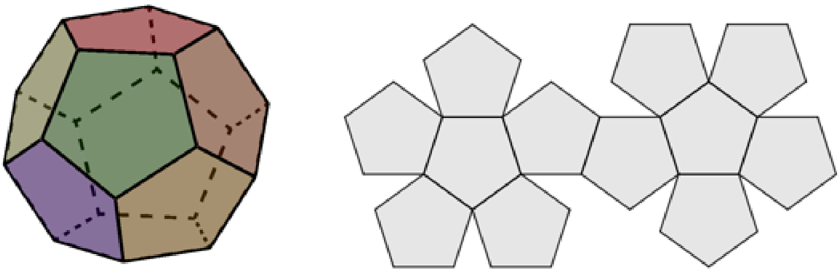
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Slika 4.20: Oktaedra i upisana i opisana sfera

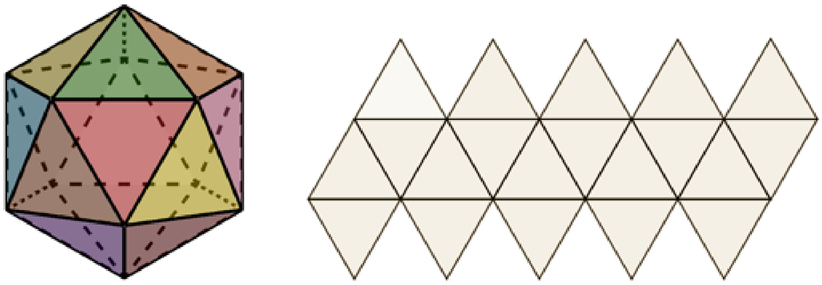
## 4.4 Dodekaedar i ikosaedar

Dodekaedar je pravilan poliedar sa stranama koje su sukladni pravilni peterokuti. Ima dvanaest strana, trideset jednako dugih bridova i dvadeset vrhova. Ime dodekaedar dolazi od grčke riječi *dodeka* što znači dvanaest.



Slika 4.21: Dodekaedar i njegova mreža

Ikosaedar je pravilan poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Ima dvadeset strana, trideset jednako dugih bridova i dvanaest vrhova. Ime ikosaedar dolazi od grčke riječi *ikosi* što znači dvadeset.



Slika 4.22: Ikosaedar i njegova mreža

Ova dva Platonova tijela složenija su nego ostala, zbog toga smatram da je dovoljno da učenici znaju od kakvih mnogokuta se sastoje, te broj strana, vrhova i bridova. Formule za oplošje i obujam, polumjer opisane i upisane kružnice možemo samo spomenuti.

| Naziv | Dodekaedar | Ikosaedar |
| --- | --- | --- |
| Oplošje | $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ | $O = 5a^2\sqrt{3}$ |
| Volumen | $V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$ | $V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$ |
| Polumjer upisane sfere | $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5})$ | $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ |
| Polumjer opisane sfere | $r = \frac{a}{20}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$ | $r = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3 + \sqrt{5})$ |

# Poglavlje 5

# Zadaci s natjecanja

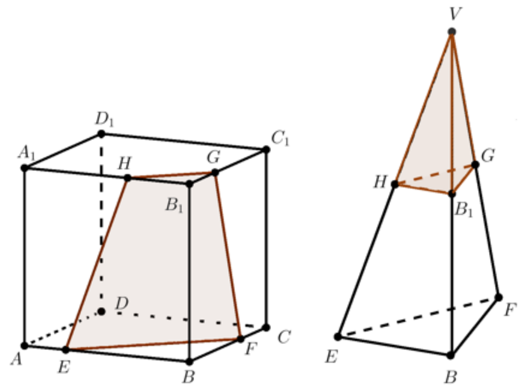
Natjecanja iz matematike provode se u osnovnim i srednjim školama na razini škole, županije i države. U osnovnoj školi na natjecanju mogu sudjelovati učenici od četvrtog do osmog razreda, a u srednjoj školi učenici od prvog do četvrtog razreda. Učenici istih razreda osnovne škole rješavaju iste zadatke, dok u srednjim školama postoje dvije varijante A i B. A varijanta namijenjena je učenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija, a B varijanta učenicima svih ostalih srednjih škola.

U ovom poglavlju riješit ćemo zadatke vezane uz Platonova tijela koja se javljaju na natjecanjima. U posljednjih nekoliko godina (2019. - 2008.) pojavljuju se samo zadaci vezani uz kocku i tetraedar. Također je zanimljivo da najviše zadataka ima na školskom natjecanju, tek poneki na županijskom, a samo dva zadatka na državnom natjecanju u tom razdoblju.

Zadaci su preuzeti iz literature [22].

**Zadatak 1.** (Školsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, 2018.)
Kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida $a$ presiječemo ravninom koja prolazi točkama $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AB}$ i $G \in \overline{B_1C_1}$ tako da je $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BF| = \frac{2}{3}|BC|$ i $|B_1G| = \frac{1}{3}|B_1C_1|$. Obujam manjeg od dvaju likova tako nastalih geometrijskih tijela je $\frac{7}{6}$. Odredite obujam kocke.

**Rješenje:**
Uočimo da je manji lik krnja piramida $EBFHB_1G$ čija je visina duljine $a$. Nadopunimo krnju piramidu do piramide $EBFHB_1GV$. Tada imamo dvije piramide: manju $HB_1GV$ i veću $EBFHB_1GV$.




Slika 5.1: Skica za zadatak 1.

Velika piramida i mala piramida su slične s koeficijentom sličnosti $k = 2$ jer je $|BF| : |B_1G| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{3}a = 2 : 1$.
Pa slijedi da je

$$|BV| : |B_1V| = (a + v) : v = 2 : 1,$$

tj.

$$v = a.$$

Dakle, visina velike piramide je $2a$, pa je njezin obujam jednak

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{2}{3}a\right) \cdot 2a = \frac{1}{6}a^3.$$

Budući da je koeficijent sličnosti velike i male piramide $k = 2$ slijedi da je

$$V_1 : V_2 = 2^3 = 8.$$

Pa imamo:

$$V_2 = \frac{1}{8}V_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{48}a^3.$$

Iz toga zaključujemo da je obujam krnje piramide

$$V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{1}{8}V_1 = \frac{7}{8}V_1 = \frac{7}{48}a^3.$$

Nadalje, iz uvjeta zadatka poznato je da je obujam krnje piramide $\frac{7}{6}$ pa slijedi da je

$$\frac{7}{48}a^3 = \frac{7}{6}.$$

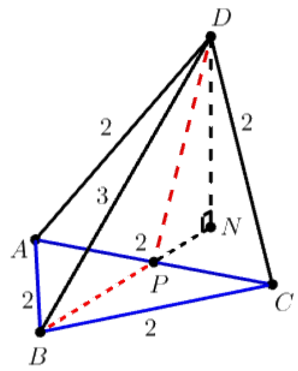
tj.

$$a^3 = 8.$$

Dakle, obujam kocke je 8.

**Zadatak 2.** (Županijsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - A varijanta, 2017.)
Dan je tetraedar kojemu je jedan brid duljine 3, a svi ostali duljine 2. Odredi obujam tog tetraedra.

**Rješenje:**




Slika 5.2: Skica za zadatak 2.

Neka je $ABCD$ tetraedar i $|CD| = 3$. Promotrimo tetraedar kao trostranu piramidu kojoj je baza jednakostraničan trokut $\triangle ABC$.
Površina baze je $B = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.
Neka je $P$ polovište brida $\overline{AC}$. Budući da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ jednakostranični s duljinom brida 2, slijedi da je

$$|PD| = |PB| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Nadalje, neka je $N$ nožište visine iz vrha $D$. Uočimo da točka $N$ leži na pravcu $PB$ jer je $|AD| = |CD|$. Trokut $\triangle BPD$ je jednakokračan s duljinama stranica $|BP| = |PD| = \sqrt{3}$ i $|BD| = 3$.
Odredimo površinu trokuta $\triangle BPD$ primjenom Heronove formule.
Imamo

$$s = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2},$$

pa slijedi

$$P(BPD) = \sqrt{\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2} - 3\right)}$$

$$P(BPD) = \sqrt{\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3+2\sqrt{3}-6}{2}\right)}$$

$$P(BPD) = \sqrt{\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)}$$

$$P(BPD) = \sqrt{\left(\frac{(2\sqrt{3})^2 - 3^2)}{2^2}\right) \cdot \frac{9}{4}}$$

$$P(BPD) = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4}}$$

$$P(BPD) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

S druge strane površina trokuta $\triangle BPD$ jednaka je

$$P(BPD) = \frac{|BP| \cdot |DN|}{2},$$

pa slijedi da je

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot |DN|}{2}$$

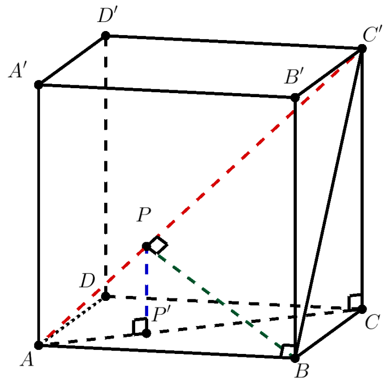
$$|DN| = \frac{3}{2}.$$

Dakle, obujam traženog tetraedra je

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot |DN| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Zadatak 3.** (Školsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - A varijanta, 2016.)
Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ duljine brida $a$. Ako je $P$ ortogonalna projekcija točke $B$ na prostornu dijagonalu $\overline{AC'}$, odredi obujam piramide $ABCDP$.

**Rješenje:** Iz vrha $P$ spustimo okomicu na ravninu $ABCD$ i označimo sjecište s $P'$.




Slika 5.3: Skica za zadatak 3.

Tada je $\overline{PP'}$ visina piramide $ABCDP$. Trokuti $\triangle APP'$ i $\triangle ACC'$ su slični po $KK$ poučku pa slijedi da je

$$\frac{|PP'|}{|CC'|} = \frac{|AP|}{|AC'|}. \tag{5.1}$$

Nadalje, trokut $\triangle ABC'$ je pravokutan s katetama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ duljine $a$ i $a\sqrt{2}$ i hipotenuzom $\overline{AC'}$ duljine $a\sqrt{3}$.
Tada je površina trokuta

$$P(ABC') = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}. \tag{5.2}$$

S druge strane, dužina $\overline{BP}$ je visina trokuta $\triangle ABC'$ pa je površina trokuta jednaka

$$P(ABC') = \frac{|AC'| \cdot |BP|}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot |BP|}{2}. \tag{5.3}$$

Izjednačavanjem (5.2) i (5.3) dobivamo

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot |BP|}{2}$$

$$|BP| = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trokut $\triangle ABP$ je pravokutan pa primjenom Pitagorina poučka možemo izračunati duljinu katete $\overline{AP}$.
Imamo

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$$

$$|AP|^2 = |AB|^2 - |BP|^2$$
$$|AP|^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2$$
$$|AP|^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9}$$
$$|AP|^2 = \frac{a^2}{3}$$
$$|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Uvrštavanjem u (5.1) dobivamo

$$\frac{|PP'|}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}}$$
$$|PP'| = \frac{a}{3}.$$

Baza piramide $ABCDP$ je kvadrat sa stranicama duljine $a$ pa je obujam piramide jednak je

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{9}.$$

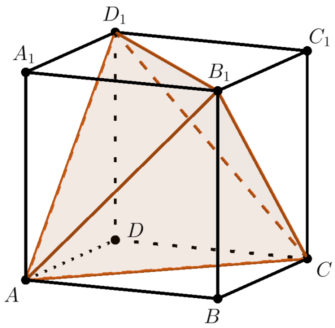
**Zadatak 4.** (Školsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, 2014.)
Kocka je određena svojim vrhovima $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odredite omjer obujma tetraedra $ACB_1D_1$ i obujam dane kocke. U kojem su omjeru oplošja?

**Rješenje:** Neka je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ duljine brida $a$. Tada je obujam kocke

$$V_k = a^3,$$

a oplošje kocke je

$$O_k = 6a^2.$$




Slika 5.4: Skica za zadatak 4.

Tetraedar $ACB_1D_1$ je duljine brida $b = a\sqrt{2}$.
Obujam tetraedra $ACB_1D_1$

$$V_t = \frac{b^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(a\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 2\sqrt{2}\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3},$$

a oplošje

$$O_t = b^3\sqrt{3} = (a\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$$

Tada je omjer obujma tetraedra i obujma kocke jednak

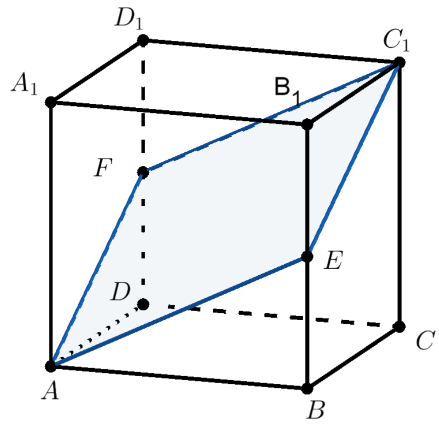
$$\frac{V_t}{V_k} = \frac{\frac{a^3}{3}}{a^3} = \frac{1}{3},$$

a omjer oplošja

$$\frac{O_t}{O_k} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Zadatak 5.** (Školsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - A varijanta, 2012.)
Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ duljine brida $a$. Njezinim vrhovima $A$ i $C_1$ te polovištem brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Izračunaj površinu presjeka kocke tom ravninom.

**Rješenje:**
Odredimo presječni lik. Neka je $E$ polovište brida $\overline{BB_1}$. Ravnina prolazi točkama $A$, $E$ i $C_1$.




Slika 5.5: Skica za zadatak 5.

Neka je $F$ polovište brida $\overline{DD_1}$. Budući da je $\overline{AE} \parallel \overline{C_1F}$ i $\overline{EC_1} \parallel \overline{AE}$ slijedi da ravnina određena točkama $A$, $E$ i $C_1$ siječe brid $DD_1$ u polovištu $F$.
Dakle, presječni lik je romb $AEC_1F$.
Površina romba jednaka je

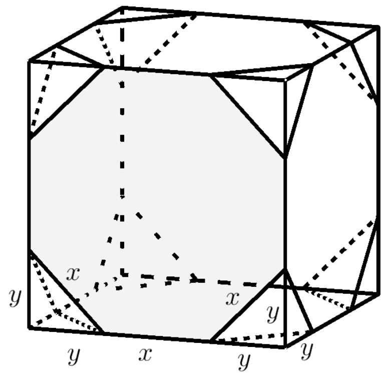
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |EF|.$$

Uočimo da je duljina dijagonale romba $\overline{AC_1}$ prostorna dijagonala kocke, a njena duljina je $a\sqrt{3}$. Nadalje, duljina dijagonale romba $\overline{EF}$ jednaka je duljini dijagonale kvadrata $ABCD$, tj. $|EF| = a\sqrt{2}$.
Površina romba je

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |EF| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

**Zadatak 6.** (Županijsko natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, 2009.)
Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo s 24 vrha ima sve bridove jednakih duljina. Koliki je obujam novonastalog tijela?

**Rješenje:**




Slika 5.6: Skica za zadatak 6.

Uočimo da smo na svakoj strani kocke dobili osmerokut. Neka je stranica osmerokuta duljine $x$. Označimo s $y$ duljinu odsječenu od svakog vrha kocke.
Tada je

$$a = y + x + y. \tag{5.4}$$

U (5.4) uvrstimo $a = 3$ te dobivamo

$$3 = x + 2y. \tag{5.5}$$

Uočimo pravokutne trokute duljine kateta $y$ i hipotenuze $x$.
Primjenom Pitagorinog poučka imamo:

$$x^2 = y^2 + y^2$$
$$x^2 = 2y^2$$
$$x = y\sqrt{2}.$$

Tada je

$$y = \frac{x\sqrt{2}}{2}. \tag{5.6}$$

Uvrštavanjem u (5.5) dobivamo

$$3 = x + 2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$3 = x(1 + \sqrt{2})$$
$$x = 3\sqrt{2} - 3. \tag{5.7}$$

Uvrštavanjem (5.7) u (5.6) dobivamo da je

$$y = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2}.$$

Ako promatramo jedan vrh kocke, uočimo da je odsječeni lik tetraedar. Budući da kocka ima osam vrhova, zaključujemo da je odsječeno osam tetraedra.
Tada je obujam novonastalog tijela jednak

$$V = V_{kocke} - 8 \cdot V_{tetraedra}.$$

Obujam tetraedra je

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y \cdot y}{2} \cdot y = \frac{y^3}{6}.$$

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \right)^3$$

$$V_{tetraedra} = \frac{90 - 63\sqrt{2}}{8},$$

a obujam kocke je

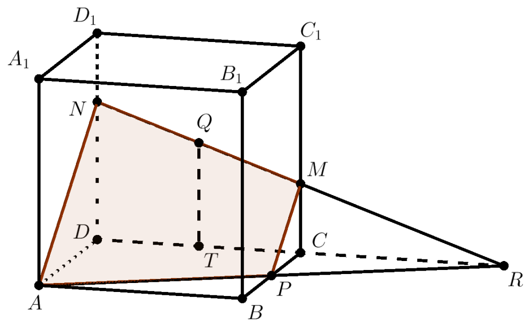
$$V_{kocke} = a^3 = 3^3 = 27.$$

Dakle, obujam novonastalog tijela je

$$V = V_{kocke} - 8 \cdot V_{tetraedra} = 27 - 8 \cdot \left( \frac{90 - 63\sqrt{2}}{8} \right) = -63 + 63\sqrt{2}.$$

**Zadatak 7.** (Državno natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, 2008.)
U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka $P$ je polovište brida $\overline{BC}$, a točka $Q$ je središte kvadrata $CC_1D_1D$. Ravnina kroz točke $A$, $P$ i $Q$ dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih obujmova?

**Rješenje:** Odredimo najprije presjek kocke i ravnine određene točkama $A$, $P$ i $Q$. Pravac $AP$ nalazi se u ravnini $ABCD$. Presjek pravca $AP$ i ravnine u kojoj leži točka $Q$ je točka $R$. Dakle, točka $R$ je probodište pravca $AP$ s ravninom $CC_1D_1D$. Kako je točka $R$ u ravnini $ABCD$, ali i u ravnini $CC_1D_1D$, to je pravac $RQ$ presječnica ravnine $APQ$ s ravninom $CC_1D_1D$. Tako dobivamo točku $M = CC_1 \cap QR$ i točku $N = DD_1 \cap QR$. Dakle, presjek kocke i ravnine je četverokut $APMN$.




Slika 5.7: Skica za zadatak 7.

Time smo dobili dva dijela kocke. Označimo s $V_1$ obujam krnje piramide $ADNPCM$, a s $V_2$ obujam preostalog dijela kocke.
Tada je obujam kocke duljine brida $a$, jednak

$$V = V_1 + V_2,$$

tj.

$$a^3 = V_1 + V_2.$$

Trokuti $\triangle ARD$ i $\triangle PRC$ su slični po $KK$ poučku pa slijedi

$$\frac{|AD|}{|PC|} = \frac{|DR|}{|CR|} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$$

Dakle, $|DR| = 2|CR|$.
Kako je

$$|DR| = |DC| + |CR|,$$

slijedi

$$|DC| = |CR| = a.$$

Nadalje, označimo s $T$ polovište brida $\overline{CD}$.
Trokuti $\triangle QTR$ i $\triangle MCR$ su slični po $KK$ poučku pa slijedi

$$\frac{|QT|}{|CM|} = \frac{|RT|}{|RC|} = \frac{a + \frac{a}{2}}{a} = \frac{\frac{3}{2}a}{a} = \frac{3}{2}.$$

Odatle je

$$|CM| = \frac{2}{3}|QT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}.$$

Također trokuti $\triangle NDR$ i $\triangle MCR$ su slični po $KK$ poučku pa imamo

$$\frac{|DN|}{|CM|} = \frac{|DR|}{|CR|} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Slijedi

$$|DN| = 2|CM| = 2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}.$$

Tada je obujam krnje piramide jednak

$$V_1 = V_{ADNR} - V_{PCMR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AD| \cdot |DN|}{2} \cdot |DR| - \frac{1}{3} \cdot \frac{|PC| \cdot |CM|}{2} \cdot |CR|$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \frac{2a}{3}}{2} \cdot 2a - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}}{2} \cdot a$$

$$V_1 = \frac{2a^3}{9} - \frac{a^3}{36}$$

$$V_1 = \frac{7a^3}{36}.$$

Konačno imamo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7a^3}{36}}{a^3 - \frac{7a^3}{36}} = \frac{\frac{7a^3}{36}}{\frac{29a^3}{36}} = \frac{7}{29}.$$

Omjer obujmova kocke je $\frac{7}{29}$.

# Bibliografija


[1] M. Bombardelli, *Eulerova formula*, Matematika i škola, 2009., 179. – 182. Dostupno na: `https://mis.element.hr/fajli/352/19-09.pdf` (svibanj 2019.)

[2] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Stereometrija*, nastavni materijali za kolegij Elementarna geometrija, Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2007.
Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/7.stereometrija.pdf` ( lipanj 2019.)

[3] F. M. Bruckler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2014. Dostupno na: `http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/714.pdf`

[4] B. Dakić, *Matematika 2 udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije 2.dio*, Element, Zagreb, 2008.

[5] B. Dakić, *Nadopuna tetraedra*, Matematika i škola, 2002., 203. - 207.
Dostupno na: `https://mis.element.hr/fajli/261/15-03.pdf` (lipanj 2019.)

[6] B. Dakić, *Cavalierijeva načela*, Matematika i škola, 2009., 200. - 205.
Dostupno na: `https://www.halapa.com/pravipdf/Cavalijeri.pdf` (srpanj 2019.)

[7] G. I. Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.

[8] S. Gorjanc, E. Jurkin, I. Kodrnja, H. Koncul, *Deskriptivna geometrija*, Sveučilišni web—udžbenik, 2018.
Dostupno na: `www.grad.hr/geometrija/udzbenik` (srpanj 2019.)

[9] J. Gusić, P. Mladinić, B. Pavković *Matematika 2, II. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. polugodište prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, 2008.

[10] S. Janeš, I. Katalenac, Z. Martinec, T. Soucie, R. Svedrec, *Prizme* Dostupno na: `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10661_Prizme.html` (kolovoz 2019.)

[11] D. Kiković, *Platon i Akademija*, Nova akropola za boljeg čovjeka i bolji svijet Dostupno na: `https://nova-akropola.com/filozofija-i-psihologija/filozofija/platon-i-akademija/`

[12] N. Kovačević, *Platonova tijela*, Razvojni projekt Sveučilišta u Zagrebu, 2012. Dostupno na: `http://www.grad.hr/geomteh3d/posteri/platonova_poster.pdf`

[13] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006. Dostupno na: `https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf` (kolovoz 2019.)

[14] A. Musulin, *Platonova tijela*, Nova akropola za boljeg čovjeka i bolji svijet Dostupno na: `https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/platonova-tijela/` (srpanj 2019.)

[15] T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić, *Matematika 8, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole*, Profil, 2006.

[16] D. Palman, *Stereometrija*, Element, Zagreb, 2005.

[17] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[18] S. Varošanec, *Matematika 8 : udžbenik sa zbirkom zadataka za 8. razred osnovne škole* , Školska knjiga, Zagreb, 2001.

[19] S. Varošanec, *Matematika 2 : udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola* , Element, Zagreb, 2008.

[20] *Platonova tijela*, Matematika i škola, 2003., 178. – 178. Dostupno na: `https://mis.element.hr/fajli/352/19-09.pdf` (srpanj 2019.)

[21] *Bonaventura Francesco Cavalieri* Dostupno na: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cavalieri.html` (srpanj 2019.)

[22] Zadaci s natjecanja iz matematike u RH,
Dostupno na: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm (srpanj 2019.)

# Sažetak

U ovom radu opisujemo uvođenje Platonovih tijela u školskoj matematici. Na samom početku opisan je Platonov život te je pojašnjeno zašto su pravilni poliedri dobili naziv Platonova tijela. Također su opisane zanimljivosti o pravilim poliedrima. Definirali smo osnovne pojmove vezane uz pravilne poliedre, dokazali Eulerovu formulu te smo dokazali da postoji točno pet pravilnih poliedara. Objasnili smo na koji način se uvodi Cavalierijev princip računanja obujma na nivou srednje škole. Nakon toga slijedi pregled svih Platonovih tijela kroz osnovnu i srednju školu. Na kraju smo prikazali zadatke s matematičkih natjecanja te ih riješili.

# Summary

In this master's thesis, the introduction of Platonic solid to school mathematics is described. In the beginning, Plato's life is described and it is explained why regular polyhedron is called Platonic solid. Afterwards, interesting facts about regular polyhedron are described. Moreover, basic terms related to regular polyhedrons are defined, Euler's formula is proven and it is proven that there are exactly five regular polyhedrons. We explain how Cavalier's principle of volume calculation is taught in high school. This is followed by an overview of all Platonic solid through elementary and high school. In the end, problems from mathematical competitions are presented and completely. solved.

# Životopis

Zovem se Melita Pantaler i rođena sam 6.9.1994. u Čakovcu. Od 2001. godine pohađala sam Osnovnu školu Draškovec. Nakon završetka osnovne škole, 2009. upisala sam Gimnaziju Josipa Slavenskog Čakovec, prirodoslovno-matematički smjer. Fakultetsko obrazovanje započela sam 2013. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu kada sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički. Nakon završenog preddiplomskog studija na istom fakultetu 2017. upisujem Diplomski sveučilišni studij matematika; smjer: nastavnički.