

Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva i primjene u geometriji trokuta

Sabati, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:704187>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-07**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Sabati

**REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT
KOMPLEKSNIH BROJEVA I PRIMJENE
U GEOMETRIJI TROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mario Krnić

Suvoditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Obitelji i prijateljima.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 O kompleksnim brojevima	2
1.1 Kompleksni brojevi i njihova svojstva	2
1.2 Geometrijska interpretacija i osnovna svojstva	4
2 Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva	11
2.1 Realni produkt kompleksnih brojeva	11
2.2 Kompleksni produkt kompleksnih brojeva	16
2.3 Još neki primjeri	20
3 Primjene u geometriji trokuta	25
3.1 Površina konveksnog mnogokuta	25
3.2 Neke karakteristične točke trokuta	26
3.3 Eulerova kružnica devet točaka	31
3.4 Neke udaljenosti u trokutu	36
3.5 Baricentričke koordinate točke s obzirom na trokut	40
3.6 Nožišni trokut i Simsonov pravac	47
Bibliografija	52

Uvod

Još od davnina matematičari su zazirali od rješavanja kvadratnih jednadžbi čija rješenja nisu realni brojevi. Slavni matematičar Leonard Euler prvi je uveo imaginarnu jedinicu i kao oznaku za broj $\sqrt{-1}$ i time izmijenio svijet matematike. Upravo taj simbol određuje kompleksne brojeve, a danas je nemoguće zamisliti modernu matematiku bez njih. U ovom radu posvetit ćemo se upravo njima, ali na način na koji to još nismo činili u školi ili na fakultetu.

U prvom poglavlju prisjetit ćemo se osnovnih definicija i svojstava vezanih uz kompleksne brojeve. Također, dati ćemo geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva te neke zanimljive rezultate u Euklidskoj geometriji primjenjujući iste.

U drugom poglavlju uvest ćemo realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva kao analogone uobičajenih operacija skalarnog i vektorskog množenja vektora. Te operacije služe kao efikasno sredstvo pri rješavanju geometrijskih problema, što ćemo i pokazati na nekoliko primjera.

Primjenom navedenih operacija i svojstava kompleksnih brojeva, u posljednjem poglavlju, posvetit ćemo se rješavanju problema iz geometrije trokuta. Pritom ćemo izvesti neke važne tvrdnje i teoreme o trokutu, te riješiti niz problema kako bismo pokazali učinkovitost u primjeni navedenih operacija.

Poglavlje 1

O kompleksnim brojevima

Za početak, reći ćemo osnovno o kompleksnim brojevima i njihova najvažnija svojstva, a zatim ćemo dati geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva i osnovnih operacija nad njima. S kompleksnim brojevima susreli smo se još u srednjoj školi, a kasnije smo na fakultetu proširili znanje o njihovim svojstvima i primjeni. Prisjetit ćemo se nekih od njih. Ovdje ćemo pokazati i neka geometrijska svojstva koristeći kompleksne brojeve.

1.1 Kompleksni brojevi i njihova svojstva

U daljnjem radu pretpostavljamo da su nam poznata osnovna svojstva skupa realnih brojeva \mathbb{R} .

Definicija 1.1.1. Svaki broj z oblika $z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, naziva se **kompleksan broj**. Broj x nazivamo **realni**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z).$$

Broj i je **imaginarna jedinica** kompleksnog broja te vrijedi $i^2 = -1$. Skup kompleksnih brojeva označavamo s

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Svaki kompleksni broj $z = x + yi$ može se zapisati u obliku uređenog para realnih brojeva (x, y) .

Definicija 1.1.2. Dva kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ jednaka su ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, tj. ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Definicija 1.1.3. Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva nad \mathbb{R}^2 definirane su na sljedeći način:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Prisjetimo se svojstava koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u skupu kompleksnih brojeva.

Propozicija 1.1.4. Za sve kompleksne brojeve z, z_1, z_2, z_3 vrijedi:

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (**komutativnost zbrajanja**),
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (**asocijativnost zbrajanja**),
- 3) Postoji jedinstveni kompleksni broj $0 = (0, 0)$ takav da vrijedi $z + 0 = 0 + z = z$ (**neutralni element za zbrajanje**),
- 4) Za svaki kompleksni broj $z = (x, y)$ postoji jedinstveni kompleksni broj $-z = (-x, -y)$ takav da je $z + (-z) = (-z) + z = 0$ (**suprotni element**).

Propozicija 1.1.5. Za sve kompleksne brojeve z, z_1, z_2, z_3 vrijede sljedeća svojstva:

- 1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (**komutativnost množenja**),
- 2) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (**asocijativnost množenja**),
- 3) Postoji jedinstveni kompleksni broj $1 = (1, 0)$ takav da vrijedi $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (**neutralni element za množenje**),
- 4) Za svaki kompleksni broj $z = (x, y) \neq 0$ postoji jedinstveni broj $z^{-1} = (x', y')$ takav da vrijedi $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ (**inverzni element**),
- 5) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (**distributivnost množenja prema zbrajanju**).

Napomena 1.1.6. Za svojstvo 4) iz Propozicije 1.1.5 primjenom definicije umnoška kompleksnih brojeva te rješavanjem sustava dviju linearnih jednažbi lako se dobiju x' i y' :

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Konjugirano kompleksni brojevi

Definicija 1.1.7. Ako je $z = x + yi$ kompleksan broj, broj $\bar{z} = x - yi$ je **konjugirano kompleksan** broju z .

Propozicija 1.1.8. Za sve kompleksne brojeve z, \bar{z}, z_1, z_2 vrijede sljedeća svojstva:

- 1) $z = \bar{\bar{z}}$ ako i samo ako je $z \in \mathbb{R}$,
- 2) $z = -\bar{-z}$ ako i samo ako je $z \in i\mathbb{R}$,
- 3) $z = \overline{\bar{z}}$,
- 4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

- 5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
 6) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $z \neq 0$,
 7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$,
 8) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Modul kompleksnog broja

Definicija 1.1.9. Broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ naziva se **modul** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja z .

Propozicija 1.1.10. Za sve kompleksne brojeve z, \bar{z}, z_1, z_2 vrijedi:

- 1) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$,
- 2) $|z| \geq 0$. Vrijedi $|z| = 0$ ako i samo ako je $z = 0$,
- 3) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$,
- 4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
- 5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- 6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- 7) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- 8) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$,
- 9) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

1.2 Geometrijska interpretacija i osnovna svojstva

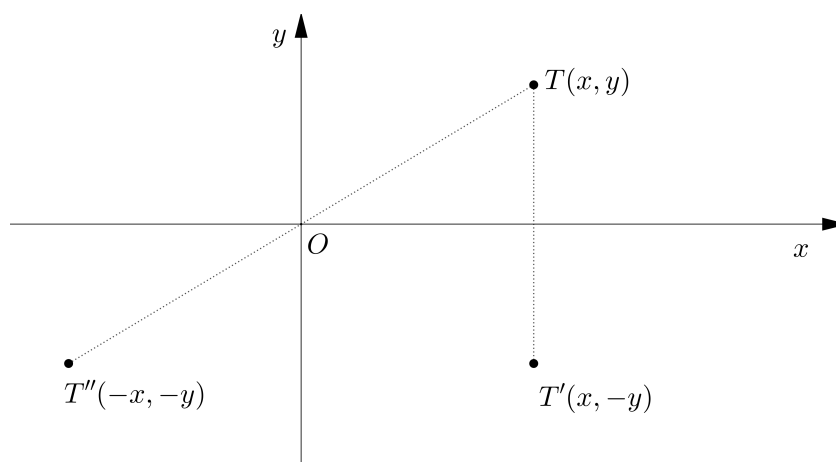
Ranije smo spomenuli da se svaki kompleksni broj $z = x + yi$ može zapisati kao uređen par realnih brojeva (x, y) . Stoga se svakom kompleksnom broju z može pridružiti točka $T(x, y)$ u ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definicija 1.2.1. Točka $T(x, y)$ naziva se **geometrijska slika** kompleksnog broja $z = x + yi$. Kompleksan broj z naziva se **kompleksna koordinata** točke T , što označavamo s $T(z)$.

Napomena 1.2.2. Geometrijska slika broja konjugirano kompleksnog broju $z = x + yi$ odnosimetrična je točki T s obzirom na os x .

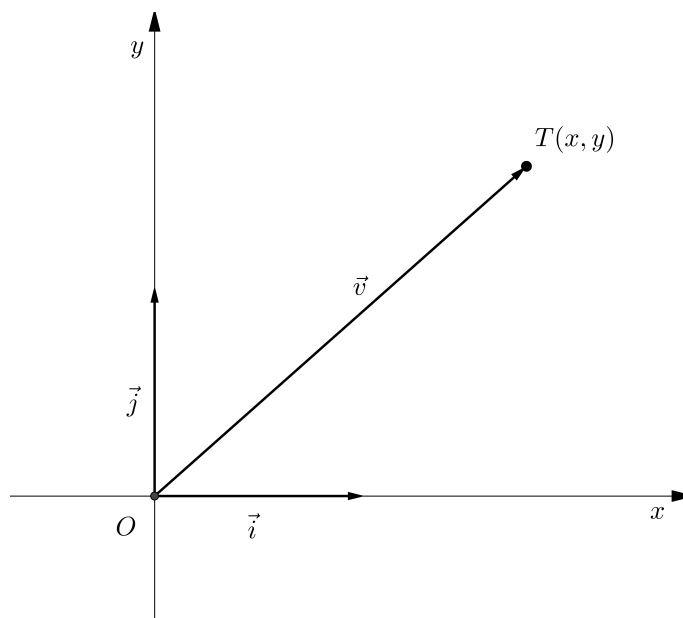
Geometrijska slika inverza za zbrajanje $-z$ centralnosimetrična je točki T s obzirom na ishodište.

Definicija 1.2.3. Koordinatna ravnina u kojoj su smještene točke čije su koordinate kompleksni brojevi naziva se **kompleksna ravnina**. Os x naziva se **realna os**, a os y **imaginarna os**.



Slika 1.1: Geometrijske slike kompleksnih brojeva

Kompleksnom broju $z = x + yi$, osim točke, može se pridružiti i vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$, gdje je T geometrijska slika kompleksnog broja z . Vektor \vec{v} zapisujemo u obliku $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, gdje su \vec{i} i \vec{j} jedinični vektori na x -osi i y -osi, redom.



Slika 1.2: Vektor pridružen kompleksnom broju

Definicija 1.2.4. Neka je $z = x + yi$ kompleksan broj i neka je $T(x, y)$ njegova geometrijska slika. **Euklidska udaljenost** $|OT|$ dana je formulom

$$|OT| = \sqrt{(x_T - x_O)^2 + (y_T - y_O)^2},$$

pa je $|OT| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$. Drugim riječima, apsolutna vrijednost kompleksnog broja z je duljina dužine \overline{OT} , tj. duljina vektora $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Napomena 1.2.5. 1) Za pozitivan realan broj r , skup kompleksnih brojeva kojima je modul jednak r predstavljaju kružnicu K sa središtem u ishodištu i radijusom r .

2) Kompleksni brojevi z čiji je modul $|z| < r$ su točke unutar kružnice $K(O, r)$, a kompleksni brojevi čiji je modul $|z| > r$ predstavljaju točke izvan kružnice $K(O, r)$.

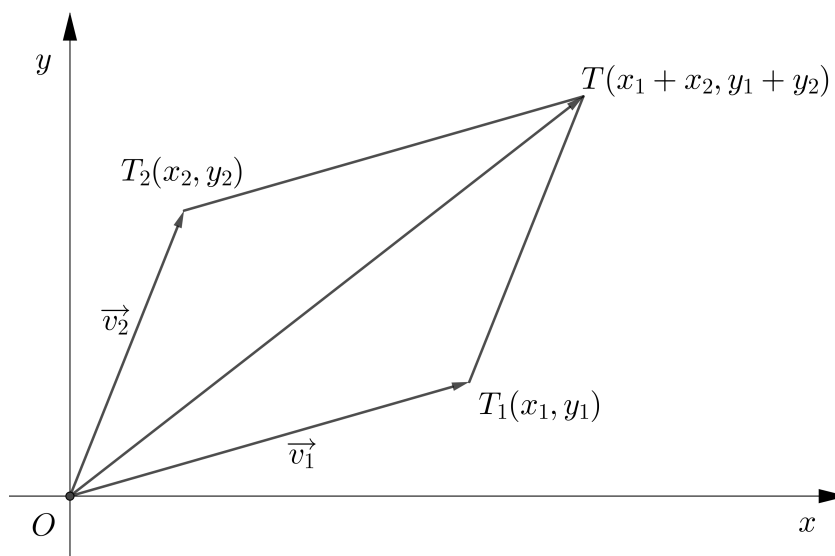
Definicija 1.2.6. Neka su $z_1 = x_1 + y_1i$ i $z_2 = x_2 + y_2i$ kompleksni brojevi te neka su im pridruženi vektori $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ i $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Suma kompleksnih brojeva dana je s

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

a suma vektora s

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Stoga je geometrijska slika sume $z_1 + z_2$ određena vektorom $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.



Slika 1.3: Geometrijska slika sume kompleksnih brojeva

Definicija 1.2.7. Neka je $z = x + yi$ kompleksan broj te neka mu je pridružen vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Neka je λ realan broj. Tada je umnošku $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ pridružen vektor

$$\lambda\vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}.$$

Uočimo, ako je $\lambda > 0$ vektori $\lambda\vec{v}$ i \vec{v} imaju istu orijentaciju i vrijedi $|\lambda\vec{v}| = \lambda|\vec{v}|$.

Ako je $\lambda < 0$ vektori $\lambda\vec{v}$ i \vec{v} imaju suprotnu orijentaciju i vrijedi $|\lambda\vec{v}| = -\lambda|\vec{v}|$.

Ako je $\lambda = 0$, onda je $\lambda\vec{v} = \vec{0}$.

Pokažimo sada geometrijske interpretacije nekih osnovnih geometrijskih pojmova i zakonitosti te njihova svojstva u kompleksnoj ravnini.

Definicija 1.2.8. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi te neka su točke T_1 i T_2 njihove geometrijske slike. Udaljenost točaka T_1 i T_2 dana je s

$$|T_1 T_2| = |z_1 - z_2|,$$

tj. vrijedi

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Propozicija 1.2.9. Za sve kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 vrijede sljedeća svojstva:

- 1) $d(z_1, z_2) \geq 0$ (**pozitivnost**),
- 2) $d(z_1, z_2) = 0$ ako i samo ako je $z_1 = z_2$,
- 3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ (**simetričnost**),
- 4) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ (**nejednakost trokuta**).

Definicija 1.2.10. Neka su $A(a)$ i $B(b)$ dvije različite točke u kompleksnoj ravnini. Kažemo da se točka $T(z)$ nalazi između točaka A i B ako $z \neq a, z \neq b$ i

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|.$$

Teorem 1.2.11. Neka su $A(a)$ i $B(b)$ dvije različite točke. Sljedeće tvrdnje su ekvivalente:

- 1) $T \in \overline{AB}$,
- 2) postoji realan broj $k > 0$ takav da je $z - a = k(b - z)$,
- 3) postoji realan broj $t \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $z = (1 - t)a + tb$, gdje je z kompleksna koordinata točke T .

Dokaz. Dokažimo prvo da su tvrdnje 1) i 2) ekvivalentne. Znamo da je $T \in \overline{AB}$ ako i samo ako je $|a - z| + |z - b| = |a - b|$. To možemo zapisati kao $d(a, z) + d(z, b) = d(a, b)$, tj. postoji realan broj $k > 0$ takav da je $z - a = k(b - z)$.

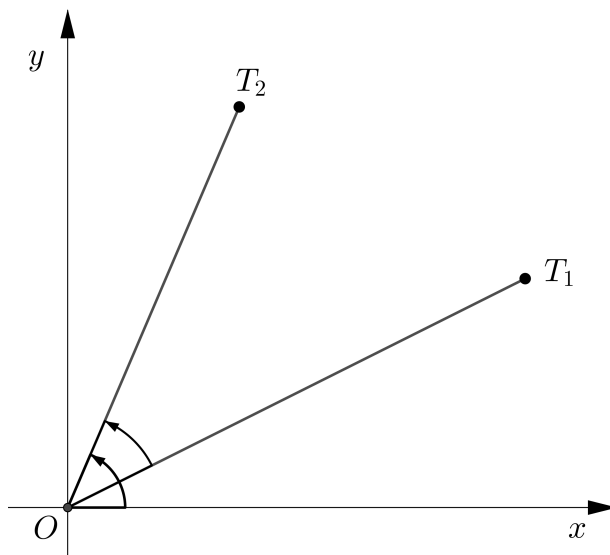
Da bismo dokazali ekvivalentnost tvrdnji 2) i 3) uzmimo t takav da je $t = \frac{k}{k+1} \in \langle 0, 1 \rangle$, tj. $k = \frac{t}{1-t} > 0$. Sada imamo $z - a = k(b - z)$ ako i samo ako je $z = \frac{1}{k+1}a + \frac{k}{k+1}b$, tj. $z = (1 - t)a + tb$. □

Definicija 1.2.12. *Argument* kompleksnog broja $z \neq 0$ definiramo kao realni broj $\varphi \in (-\pi, \pi]$ koji predstavlja mjeru kuta između pozitivnog dijela osi x i polupravca iz ishodišta koji prolazi kroz z . Pišemo: $\varphi = \arg z$.

Lako se vidi da za svaki kompleksni broj $z \neq 0$ vrijedi

$$x = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \varphi, y = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \varphi.$$

Definicija 1.2.13. *Neka su $T_1(z_1)$ i $T_2(z_2)$ dvije različite točke u kompleksnoj ravnini s ishodištem O . Mjera pozitivno orijentiranog kuta $\angle T_1OT_2$ jednaka je $\arg \frac{z_2}{z_1}$.*



Slika 1.4: Pozitivno orijentiran kut $\angle T_1OT_2$

Teorem 1.2.14. *Neka su $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3)$ tri različite točke u kompleksnoj ravnini s ishodištem O . Mjera kuta $\angle T_2T_1T_3$ dana je s $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.*

Dokaz. Translatirajmo točke $T_1(z_1), T_2(z_2), T_3(z_3)$ za vektor $-z_1$ tako da se preslikaju u točke O, T'_2, T'_3 s koordinatama $0, z_2 - z_1, z_3 - z_1$. Vrijedi $\angle T_2T_1T_3 = \angle T'_2OT'_3$. Iz toga slijedi

$$\angle T'_2OT'_3 = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

kako smo i tvrdili. □

Napomena 1.2.15. Neka su $T_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, četiri različite točke. Mjera kuta između pravaca T_1T_3 i T_2T_4 jednaka je $\arg \frac{z_3-z_1}{z_4-z_2}$ ili $\arg \frac{z_4-z_2}{z_3-z_1}$. Tvrdnja se dokazuje koristeći ideje iz prethodnog teorema.

U daljnjem radu susretat ćemo se s problemima kolinearnosti točaka, okomitosti pravaca te sličnosti trokuta. Pokazat ćemo uvjete za navedena svojstva koristeći kompleksne brojeve.

Neka su $T_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, četiri različite točke.

Propozicija 1.2.16. Točke T_1, T_2, T_3 su kolinearne ako i samo ako je

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

Dokaz. Točke T_1, T_2, T_3 su kolinearne ako i samo ako je $\angle T_2T_1T_3 \in \{0, \pi\}$. Slijedi $\arg \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \{0, \pi\}$, tj. $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$. \square

Propozicija 1.2.17. Pravci T_1T_2 i T_3T_4 su okomiti ako i samo ako je

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

Dokaz. Pravci T_1T_2 i T_3T_4 su okomiti ako i samo ako je $\angle(T_1T_2, T_3T_4) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Slijedi $\arg \frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, tj. $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i\mathbb{R}^*$. \square

Propozicija 1.2.18. Trokuti iste orijentacije $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ su slični ako i samo ako je

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

Dokaz. Znamo $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ ako i samo ako je $\frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_1B_3|}$ i $\angle A_3A_1A_2 = \angle B_3B_1B_2$. To je ekvivalentno s $\frac{|a_2-a_1|}{|a_3-a_1|} = \frac{|b_2-b_1|}{|b_3-b_1|}$ i $\arg \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \arg \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$. Dobivamo $\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$. \square

Pokazat ćemo kako računamo površinu trokuta koristeći kompleksne koordinate njegovih vrhova.

Teorem 1.2.19. Površina trokuta $A_1A_2A_3$ čiji vrhovi imaju koordinate z_1, z_2, z_3 jednaka je apsolutnoj vrijednosti broja

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Dokaz. Koristeći Kartezijeve koordinate, površina trokuta s vrhovima $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ jednaka je apsolutnoj vrijednosti determinante

$$\delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Budući da je

$$x_k = \frac{z_k + \bar{z}_k}{2}, y_k = \frac{z_k - \bar{z}_k}{2i}, k = 1, 2, 3,$$

dobivamo

$$\delta = \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

Korolar 1.2.20. *Površina pozitivno orijentiranog trokuta $A_1A_2A_3$ čiji vrhovi imaju koordinate z_1, z_2, z_3 dana je formulom*

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1).$$

Dokaz. Razvojem determinante iz prethodnog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} &= (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_1) \\ &= [(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) - \overline{(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)}] \\ &= 2i \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) \\ &= -2i \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1). \end{aligned}$$

Uvrštavajući dobiveni izraz u (1.1) slijedi da je

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1).$$

□

Poglavlje 2

Realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva

U ovom poglavlju definirat ćemo realni i kompleksni produkt dvaju kompleksnih brojeva. Skalarni i vektorski produkt vektora poznati su nam još iz srednjoškolskog obrazovanja, a sada ćemo ih primijeniti na kompleksne brojeve kako bismo uveli realni i kompleksni produkt kompleksnih brojeva kao njihove analogone. Nabrojat ćemo i dokazati neka njihova svojstva koja će nam kasnije znatno olakšati rješavanje raznih geometrijskih problema, s naglaskom na geometriju trokuta.

U daljnjem radu realni produkt ćemo označavati s \cdot , a kod uobičajene operacije množenja znak ćemo izostavljati, kako bismo jasno razlikovali te dvije operacije.

2.1 Realni produkt kompleksnih brojeva

Koncept skalarnog produkta dvaju vektora otprije nam je dobro poznat. Sada ćemo taj koncept primijeniti na kompleksne brojeve.

Definicija 2.1.1. *Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi. **Realni produkt kompleksnih brojeva** z_1 i z_2 dan je sa*

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}).$$

Uočimo:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = z_1 \cdot z_2,$$

iz čega slijedi da je broj $z_1 \cdot z_2$ realan, otkuda je taj produkt i dobio naziv.

Navedimo osnovna svojstva koja vrijede za realni produkt kompleksnih brojeva.

Propozicija 2.1.2. Za sve kompleksne brojeve $z, z_1, z_2, i z_3$ vrijedi:

- 1) $z \cdot z = |z|^2$,
- 2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (*komutativnost*),
- 3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (*distributivnost realnog produkta prema zbrajanju*),
- 4) $(\alpha z_1) \cdot z_2 = z_1 \cdot (\alpha z_2)$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$,
- 5) $z_1 \cdot z_2 = 0$ ako i samo ako je $OA \perp OB$, gdje su z_1 i z_2 koordinate točkaka A i B , redom,
- 6) $(z_1 z) \cdot (z_2 z) = |z|^2 (z_1 \cdot z_2)$.

Napomena 2.1.3. Neka su A i B točke s koordinatama a i b , redom. Tada je realni produkt $a \cdot b$ jednak potenciji ishodišta O s obzirom na kružnicu promjera \overline{AB} .

Doista, neka je $M(\frac{a+b}{2})$ polovište dužine \overline{AB} , odnosno središte kružnice, te neka je $r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|a - b|$ radijus te kružnice. Potencija ishodišta s obzirom na danu kružnicu jednaka je

$$|OM|^2 - r^2 = \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{(a+b)(\bar{a} + \bar{b})}{4} - \frac{(a-b)(\bar{a} - \bar{b})}{4} = \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{2} = a \cdot b,$$

kako smo i tvrdili.

Propozicija 2.1.4. Neka su $A(a), B(b), C(c)$ i $D(d)$ četiri različite točke. Sljedeće tvrdnje su ekvivalente:

- 1) $AB \perp CD$,
- 2) $(b - a) \cdot (d - c) = 0$,
- 3) $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$ (odnosno $Re(\frac{b-a}{d-c}) = 0$).

Dokaz. Neka su $M(b - a)$ i $N(d - c)$ točke takve da su $OABM$ i $OCDN$ paralelogrami. Tada vrijedi $AB \perp CD$ ako i samo ako je $OM \perp ON$, tj. vrijedi $m \cdot n = (b - a) \cdot (d - c) = 0$, prema Propoziciji 2.1.2, svojstvo 5).

Ekvivalencija tvrdnji 2) i 3) slijedi direktno iz definicije realnog produkta. □

Propozicija 2.1.5. Neka se središte opisane kružnice trokuta ABC nalazi u ishodištu kompleksne ravnine. Ako su a, b, c koordinate točkaka A, B, C , onda je koordinata ortocentra H tog trokuta jednaka $h = a + b + c$.

Dokaz. Koristeći realni produkt kompleksnih brojeva dobivamo da su jednadžbe visina trokuta $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ jednake

$$\overline{AA'} : (z - a) \cdot (b - c) = 0, \overline{BB'} : (z - b) \cdot (c - a) = 0, \overline{CC'} : (z - c) \cdot (a - b) = 0.$$

Pokažimo da točka s koordinatama $h = a + b + c$ leži na sve tri visine trokuta. Vrijedi $(h - a) \cdot (b - c) = 0$ ako i samo ako je $(b + c) \cdot (b - c) = 0$ što je ekvivalentno s $b \cdot b - c \cdot c = 0$, tj. $|b|^2 = |c|^2$. Dakle, $H \in \overline{AA'}$.

Analogno dobivamo $H \in \overline{BB'}$ i $H \in \overline{CC'}$.

Dakle, točka s koordinatom $h = a + b + c$ jest ortocentar trokuta ABC . □

Napomena 2.1.6. Ako su a, b, c, o, h redom koordinate vrhova trokuta ABC , središta O trokutu opisane kružnice te ortocentra H , tada je $h = a + b + c - 2o$.

Zaista, ako uzmemo točku A' takvu da je $\overline{AA'}$ promjer opisane kružnice trokuta ABC , tada je četverokut $HBA'C$ paralelogram. Ako je točka M presjek dužina $\overline{HA'}$ i \overline{BC} , onda vrijedi

$$z_M = \frac{b + c}{2} = \frac{z_H + z_{A'}}{2} = \frac{z_H + 2o - a}{2}$$

iz čega slijedi

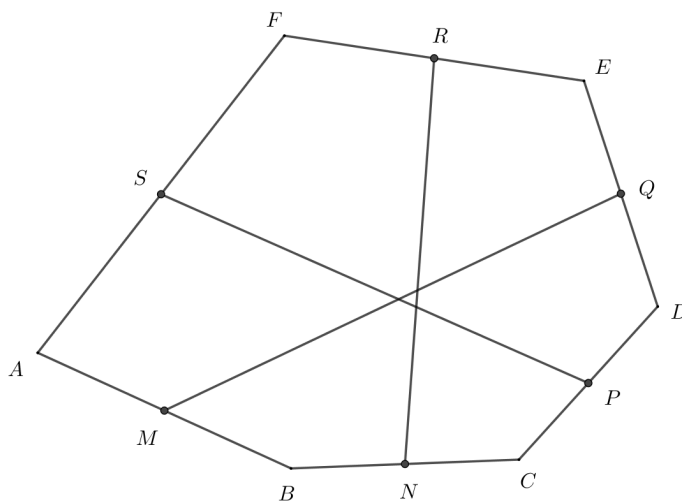
$$z_H = a + b + c - 2o.$$

Navedena svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva uvelike nam olakšavaju rješavanje određenih geometrijskih problema. Pokazat ćemo njihovu primjenu na nekoliko primjera.

Primjer 1. Neka su točke M, N, P, Q, R, S redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ šesterokuta $ABCDEF$. Dokažimo da vrijedi

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2$$

ako i samo ako je $MQ \perp PS$.



Slika 2.1:

POGLAVLJE 2. REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT KOMPLEKSNIH BROJEVA 14

Rješenje. Neka su a, b, c, d, e, f koordinate vrhova šesterokuta $ABCDEF$. Točke M, N, P, Q, R, S imaju koordinate

$$m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{b+c}{2}, p = \frac{c+d}{2}, q = \frac{d+e}{2}, r = \frac{e+f}{2}, s = \frac{f+a}{2},$$

redom.

Primjenjujući svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva imamo

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2$$

ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \left(\frac{e+f}{2} - \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{e+f}{2} - \frac{b+c}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - \frac{d+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - \frac{d+e}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{c+d}{2} - \frac{f+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d}{2} - \frac{f+a}{2}\right), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} (e+f-b-c) \cdot (e+f-b-c) &= (d+e-a-b) \cdot (d+e-a-b) \\ &+ (f+a-c-d) \cdot (f+a-c-d), \end{aligned}$$

odatle sređivanjem dobivamo

$$(d+e-a-b) \cdot (f+a-c-d) = 0,$$

pa je $MQ \perp PS$.

Primjer 2. Neka su a, b, c različiti kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|a| = |b| = |c|$ i $|b+c-a| = |a|$. Dokažimo da vrijedi $b+c=0$.

Rješenje. Neka su A, B, C točke u kompleksnoj ravnini čije su koordinate a, b, c , redom. Neka je ABC trokut takav da je ishodište kompleksne ravnine središte njemu opisane kružnice, te neka je R radijus te kružnice. Tada vrijedi

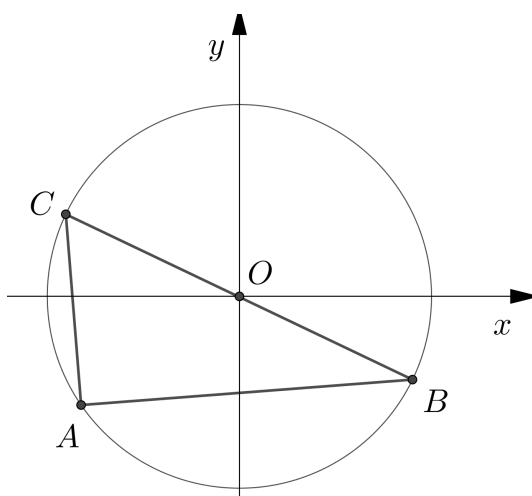
$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2.$$

Primjenjujući realni produkt kompleksnih brojeva imamo

$$|b+c-a| = |a| \text{ ako i samo ako je } |b+c-a|^2 = |a|^2,$$

tj.

$$(b+c-a) \cdot (b+c-a) = |a|^2,$$



Slika 2.2:

pa je

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2b \cdot c - 2a \cdot c - 2b \cdot c = |a|^2.$$

Dobivamo

$$2(R^2 + b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b) = 0,$$

tj.

$$a \cdot a + b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b = 0.$$

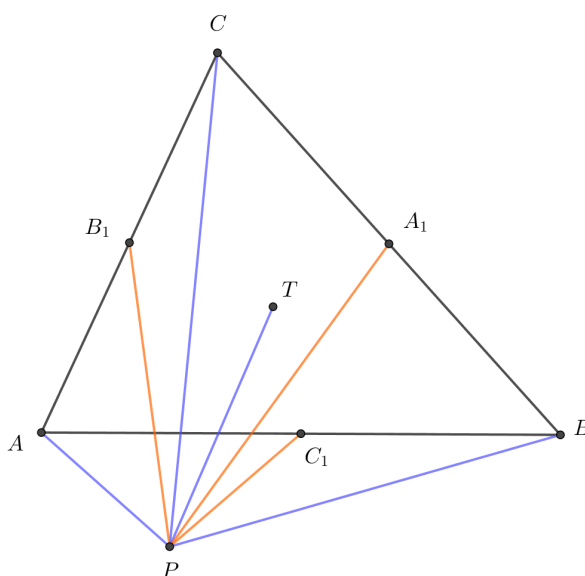
Iz toga slijedi da je $(a - b) \cdot (a - c) = 0$, pa je $AB \perp AC$, tj. $\angle BAC = 90^\circ$. Stoga je \overline{BC} promjer trokutu opisane kružnice pa je $b + c = 0$.

Primjer 3. Neka je T težište trokuta ABC te neka su točke A_1, B_1, C_1 polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, redom. Dokažimo da za svaku točku P u ravnini trokuta vrijedi

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + 9|PT|^2 = 4(|PA_1|^2 + |PB_1|^2 + |PC_1|^2).$$

Rješenje. Neka su $a, b, c, a_1, b_1, c_1, t, p$ redom koordinate točaka $A, B, C, A_1, B_1, C_1, T, P$. Vrijedi

$$t = \frac{a+b+c}{3}, a_1 = \frac{b+c}{2}, b_1 = \frac{c+a}{2}, c_1 = \frac{a+b}{2}.$$



Slika 2.3:

Primjenjujući realni produkt kompleksnih brojeva imamo

$$\begin{aligned}
 |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + 9|PT|^2 &= (p - a) \cdot (p - a) + (p - b) \cdot (p - b) + (p - c) \cdot (p - c) \\
 &\quad + 9 \left(p - \frac{a + b + c}{3} \right) \cdot \left(p - \frac{a + b + c}{3} \right) \\
 &= 12|p|^2 - 8(a + b + c) \cdot p + 2(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a.
 \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}
 4(|PA_1|^2 + |PB_1|^2 + |PC_1|^2) &= 4 \left[\left(p - \frac{b + c}{2} \right) \cdot \left(p - \frac{b + c}{2} \right) + \left(p - \frac{c + a}{2} \right) \cdot \left(p - \frac{c + a}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(p - \frac{a + b}{2} \right) \cdot \left(p - \frac{a + b}{2} \right) \right] \\
 &= 12|p|^2 - 8(a + b + c) \cdot p + 2(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a,
 \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

2.2 Kompleksni produkt kompleksnih brojeva

Vektorski produkt dvaju vektora široko je primjenjiv u matematici i znanosti općenito. Taj dobro poznati koncept primijenit ćemo na kompleksne brojeve te pokazati njegovu

primjenu u rješavanju problema vezanih za površinu, kolinearnost i paralelnost.

Definicija 2.2.1. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi. **Kompleksni produkt** brojeva z_1 i z_2 dan je sa

$$z_1 \times z_2 = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}).$$

Uočimo:

$$z_1 \times z_2 + \overline{z_1 \times z_2} = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) + \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0,$$

pa je $\operatorname{Re}(z_1 \times z_2) = 0$, tj. produkt $z_1 \times z_2$ je čisto imaginaran kompleksni broj.

Pokažimo sljedeća svojstva koja vrijede za kompleksni produkt kompleksnih brojeva.

Propozicija 2.2.2. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi. Vrijedi:

- 1) $z_1 \times z_2 = 0$ ako i samo ako je $z_1 = 0$ ili $z_2 = 0$ ili $z_1 = \lambda z_2$, gdje je λ realan broj,
- 2) $z_1 \times z_2 = -z_2 \times z_1$ (**antikomutativnost**),
- 3) $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ (**distributivnost kompleksnog produkta prema zbrajanju**),
- 4) $\alpha(z_1 \times z_2) = (\alpha z_1) \times z_2 = z_1 \times (\alpha z_2)$, za sve realne brojeve α ,
- 5) Ako su $A(z_1)$ i $B(z_2)$ različite točke od kojih niti jedna nije ishodište, tada je $z_1 \times z_2 = 0$ ako i samo ako su točke O, A, B kolinearne.

Napomena 2.2.3. a) Neka su $A(a)$ i $B(b)$ različite točke u kompleksnoj ravnini, od kojih ni jedna nije ishodište. Kompleksni produkt brojeva a i b ima sljedeće geometrijsko svojstvo:

$$a \times b = \begin{cases} 2iP(AOB), & \triangle OAB \text{ pozitivno orijentiran;} \\ -2iP(AOB), & \triangle OAB \text{ negativno orijentiran.} \end{cases}$$

Zaista, ako je $\triangle OAB$ pozitivno orijentiran, onda je

$$\begin{aligned} 2iP(OAB) &= i|OA||OB| \sin \angle AOB = i|a||b| \sin \left(\arg \frac{b}{a} \right) \\ &= i|a||b| \operatorname{Im} \left(\frac{b}{a} \right) \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2}|a|^2 \left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\bar{b}) = a \times b. \end{aligned}$$

U drugom slučaju, primijetimo da je trokut OBA pozitivno orijentiran pa je stoga

$$2iP(OBA) = b \times a = -a \times b.$$

b) Neka su $A(a), B(b), C(c)$ točke u kompleksnoj ravnini. Kompleksni produkt nam omogućuje da dobijemo sljedeću formulu za površinu trokuta ABC :

$$P(ABC) = \begin{cases} \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \Delta ABC \text{ pozitivno orijentiran;} \\ -\frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \Delta ABC \text{ negativno orijentiran.} \end{cases}$$

Nadalje, jednostavnom algebarskom manipulacijom se pokazuje da je

$$P(ABC) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$$

ako je ΔABC pozitivno orijentiran, kao što smo i pokazali u Korolaru 1.2.20.

Translatirajmo točke A, B, C za vektor $-c$. Točke A, B, C se preslikavaju redom u točke A', B', O s koordinatama $a - c, b - c, 0$. Trokuti ABC i $A'B'O$ sukladni su i iste orijentacije. Ako je ΔABC pozitivno orijentiran, tada je

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(OA'B') = \frac{1}{2i}((a - c) \times (b - c)) = \frac{1}{2i}((a - c) \times b - (a - c) \times c) \\ &= \frac{1}{2i}(c \times (a - c) - b \times (a - c)) = \frac{1}{2i}(c \times a - c \times c - b \times a + b \times c) \\ &= \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. Drugi slučaj se dokazuje na sličan način.

Propozicija 2.2.4. Neka su $A(a), B(b), C(c)$ različite točke u kompleksnoj ravnini. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- 1) Točke A, B, C su kolinearne,
- 2) $(b - a) \times (c - a) = 0$,
- 3) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$.

Dokaz. Točke A, B, C su kolinearne ako i samo ako vrijedi $P(ABC) = 0$, tj. ako je $a \times b + b \times c + c \times a = 0$. Ta se jednadžba može zapisati u obliku $(b - a) \times (c - a) = 0$, pa vrijede ekvivalencije. □

Propozicija 2.2.5. Neka su $A(a), B(b), C(c), D(d)$ različite točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Tada je $AB \parallel CD$ ako i samo ako je $(b - a) \times (d - c) = 0$.

Dokaz. Odaberimo točke $M(m)$ i $N(n)$ takve da su $OABM$ i $OCDN$ paralelogrami. Vrijedi $m = b - a, n = d - c$.

Dužine \overline{AB} i \overline{CD} su paralelne ako i samo ako su točke O, M, N kolinearne. Primjenjujući svojstvo 5) iz Propozicije 2.2.2 dobivamo

$$0 = m \times n = (b - a) \times (d - c).$$

□

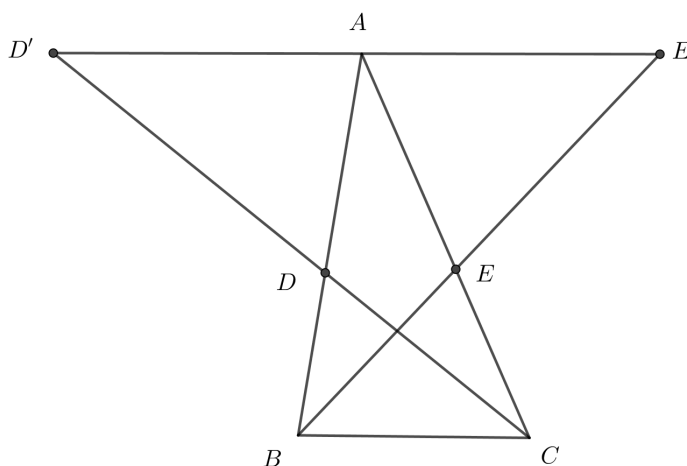
Riješimo nekoliko primjera u kojima se primjenom kompleksnog produkta kompleksnih brojeva olakšava rješavanje geometrijskih problema.

Primjer 4. Točke D i E nalaze se na stranicama \overline{AB} i \overline{AC} trokuta ABC tako da vrijedi

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{4}.$$

Neka se točke E' i D' nalaze na polupravcima BE i CD tako da vrijedi $|EE'| = 3|BE|$ te $|DD'| = 3|CD|$. Dokažimo da vrijedi:

- 1) točke D', A, E' su kolinearne,
- 2) $|AD'| = |AE'|$.



Slika 2.4:

Rješenje. Točke D, E, D', E' imaju koordinate

$$d = \frac{a+3b}{4}, e = \frac{a+3c}{4}, e' = 4e - 3b = a + 3c - 3b, d' = 4d - 3c = a + 3b - 3c,$$

redom.

- 1) S obzirom da vrijedi

$$(a - d') \times (e' - d') = (3c - 3b) \times (6c - 6b) = 18(c - b) \times (c - b) = 0,$$

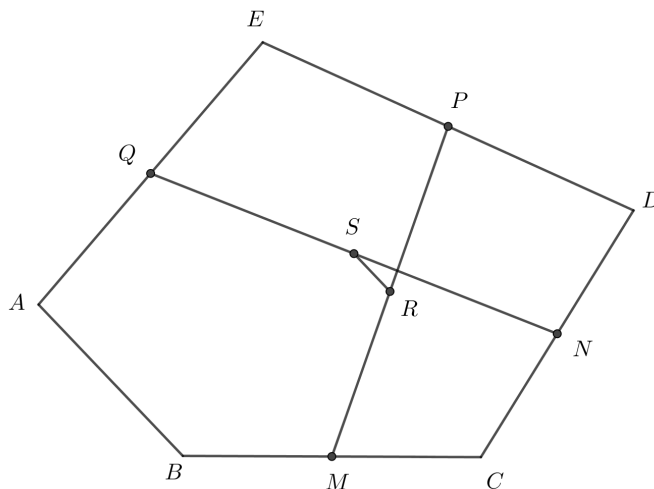
iz Propozicije 2.2.2 slijedi da su točke D', A, E' kolinearne.

- 2) Uočimo:

$$\frac{|AD'|}{|D'E'|} = \left| \frac{a - d'}{e' - d'} \right| = \frac{1}{2},$$

tj. A je polovište $\overline{D'E'}$, pa tvrdnja vrijedi.

Primjer 5. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut te neka su M, N, P, Q, R, S polovišta dužina $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{MP}, \overline{NQ}$, redom. Dokažimo da je $RS \parallel AB$.



Slika 2.5:

Rješenje. Neka su a, b, c, d, e koordinate vrhova A, B, C, D, E , redom. Točke M, N, P, Q, R, S imaju redom koordinate

$$m = \frac{b+c}{2}, n = \frac{c+d}{2}, p = \frac{d+e}{2}, q = \frac{e+a}{2}, r = \frac{b+c+d+e}{4}, s = \frac{c+d+e+a}{4}.$$

Prema tome, vrijedi

$$\frac{s-r}{b-a} = \frac{\frac{a-b}{4}}{b-a} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R},$$

pa je

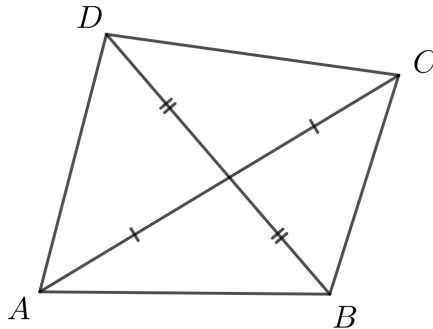
$$(s-r) \times (b-a) = -\frac{1}{4}(b-a) \times (b-a) = 0.$$

Iz Propozicije 2.2.5 slijedi da je $RS \parallel AB$.

2.3 Još neki primjeri

Pokazali smo na nekoliko primjera kako se direktnom primjenom realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva te svojstava kompleksnih brojeva brzo i efikasno mogu riješiti brojni geometrijski problemi. U tu svrhu navest ćemo još nekoliko bazičnih primjera iz geometrije.

Primjer 6. Neka je $ABCD$ četverokut takav da mu se dijagonale \overline{AC} i \overline{BD} raspolavljaju. Dokažimo da je $ABCD$ paralelogram.



Slika 2.6:

Rješenje. Neka su a, b, c, d koordinate vrhova četverokuta $ABCD$. Koordinate polovišta dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} su redom $\frac{a+c}{2}$ i $\frac{b+d}{2}$. S obzirom da se dijagonale raspolavljaju, polovišta im se podudaraju pa vrijedi

$$\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2},$$

tj.

$$a+c = b+d,$$

što možemo zapisati kao

$$b-a = c-d. \tag{2.1}$$

Vrijedi da su dužine \overline{AC} i \overline{BD} paralelne ako i samo ako je $\frac{b-a}{c-d}$ realan broj (vidi [5]). Podijelimo izraz (2.1) s $c-d$. Dobivamo

$$\frac{b-a}{c-d} = 1,$$

tj. $\frac{b-a}{c-d}$ je realan broj pa su \overline{AC} i \overline{BD} su paralelne. Nadalje, iz (2.1) slijedi da je $|b-a| = |c-d|$, pa je $|AB| = |CD|$.

Analogno se dobije da su \overline{BC} i \overline{DA} su paralelne i jednakih duljina. Zaključujemo, četverokut $ABCD$ je paralelogram.

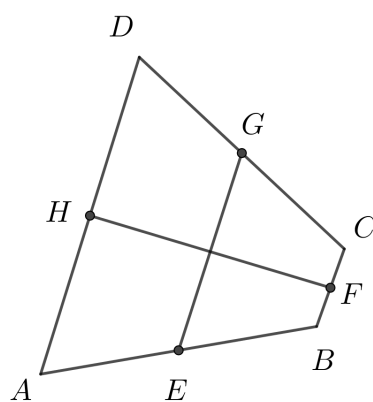
POGLAVLJE 2. REALNI I KOMPLEKSNI PRODUKT KOMPLEKSNIH BROJEVA 22

Primjer 7. Neka su E, F, G, H redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ konveksnog četverokuta $ABCD$. Dokažimo da su pravci AB i CD okomiti ako i samo ako vrijedi

$$|BC|^2 + |AD|^2 = 2(|EG|^2 + |FH|^2).$$

Rješenje. Neka su koordinate polovišta stranica četverokuta E, F, G, H dane redom s e, f, g, h . Tada je

$$e = \frac{a+b}{2}, f = \frac{b+c}{2}, g = \frac{c+d}{2}, h = \frac{d+a}{2}.$$



Slika 2.7:

Primjenom realnog produkta kompleksnih brojeva, iz relacije

$$|BC|^2 + |AD|^2 = 2(|EG|^2 + |FH|^2)$$

dobivamo

$$(c-b) \cdot (c-b) + (d-a) \cdot (d-a) = \frac{1}{2}(c+d-a-b) \cdot (c+d-a-b) + \frac{1}{2}(a+d-b-c) \cdot (a+d-b-c).$$

To je ekvivalentno s

$$c \cdot c + b \cdot b + d \cdot d + a \cdot a - 2b \cdot c - 2a \cdot d = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d - 2a \cdot c + 2b \cdot d,$$

tj.

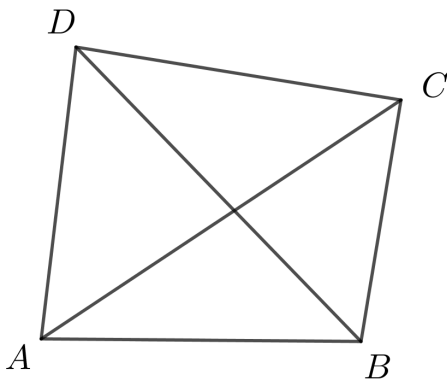
$$a \cdot d + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot d.$$

Iz toga slijedi $(a-b) \cdot (d-c) = 0$ ako i samo ako je $AB \perp CD$, što smo i trebali dokazati.

Primjer 8. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut. Dokažimo da vrijedi

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$$

ako i samo ako je $AC \perp BD$.



Slika 2.8:

Rješenje. Koristeći svojstva realnog produkta kompleksnih brojeva slijedi da je

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$$

ako i samo ako je

$$(b - a) \cdot (b - a) + (d - c) \cdot (d - c) = (c - b) \cdot (c - b) + (a - d) \cdot (a - d),$$

odnosno

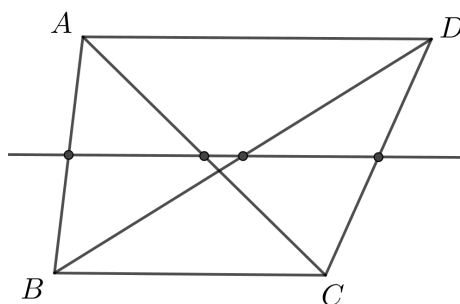
$$a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + d \cdot a.$$

Konačno, imamo

$$(c - a) \cdot (d - b) = 0,$$

što je ekvivalentno s $AC \perp BD$.

Primjer 9. Dan je konveksni četverokut $ABCD$. Polovišta dužina \overline{AB} , \overline{AC} i \overline{BD} su kolinearna. Dokažimo da taj pravac prolazi kroz polovište dužine \overline{CD} .



Slika 2.9:

Rješenje. Neka su polovišta dužina \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BD} i \overline{CD} dana redom s a' , b' , c' , d' . Vrijedi

$$a' = \frac{a+b}{2}, b' = \frac{a+c}{2}, c' = \frac{b+d}{2}, d' = \frac{c+d}{2}. \quad (2.2)$$

Iz činjenice da su polovišta dužina \overline{AB} , \overline{AC} i \overline{BD} kolinearna prema Propoziciji 2.2.4 slijedi

$$(b' - a') \times (c' - a') = 0.$$

Uvrštavajući (2.2) dobivamo

$$\left(\frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \times \left(\frac{b+d}{2} - \frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

odnosno

$$\left(\frac{c-b}{2}\right) \times \left(\frac{d-a}{2}\right) = 0.$$

Prethodnu relaciju možemo zapisati kao

$$\left(\frac{c+d}{2} - \frac{b+d}{2}\right) \times \left(\frac{c+d}{2} - \frac{a+c}{2}\right) = 0,$$

tj.

$$(d' - c') \times (d' - b') = 0,$$

iz čega slijedi da su polovišta dužina \overline{AC} , \overline{BD} i \overline{CD} kolinearna, čije je tvrdnja dokazana.

Poglavlje 3

Primjene u geometriji trokuta

U ovom poglavlju izvest ćemo neke važne teoreme i tvrdnje o trokutu koristeći svojstva realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva, te ćemo ih primijeniti za rješavanje nekih geometrijskih problema. Prvo ćemo izvedene tvrdnje i svojstva primijeniti na konveksni mnogokut, a zatim ćemo se usredotočiti na geometriju trokuta. Neki koncepti koje ćemo iznijeti poznati su nam otprije, dobrim dijelom s kolegija Elementarna geometrija, no ovdje ćemo im pridodati malo drugačije tumačenje.

3.1 Površina konveksnog mnogokuta

Kažemo da je konveksni mnogokut $A_1A_2\dots A_n$ pozitivno orijentiran ako su za bilo koju točku M , koja se nalazi unutar mnogokuta, trokuti MA_kA_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n$, pozitivno orijentirani.

Teorem 3.1.1. *Neka je $A_1A_2\dots A_n$ pozitivno orijentiran konveksan mnogokut kojemu su koordinate vrhova a_1, a_2, \dots, a_n . Tada vrijedi:*

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1).$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Za bazu $n = 3$, tvrdnju smo ranije dokazali u Napomeni 2.2.3, koristeći kompleksni produkt.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$. Dokažimo da vrijedi i za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} P(A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}) &= P(A_1A_2 \cdots A_k) + P(A_kA_{k+1}A_1) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \cdots + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1), \end{aligned}$$

jer je $\text{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) = 0$. □

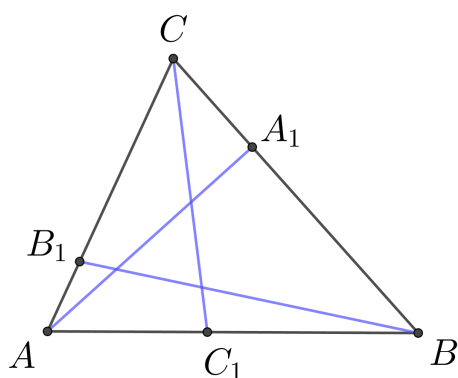
Napomena 3.1.2. Točke $A_1(a_1), A_2(a_2), \dots, A_n(a_n)$ su kolinearne ako i samo ako je

$$\text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \dots + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1) = 0.$$

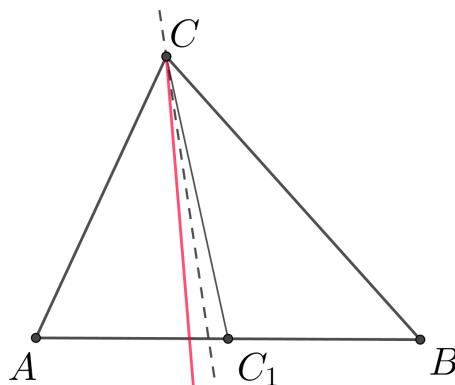
3.2 Neke karakteristične točke trokuta

Navest ćemo neke istaknute točke u trokutu, većinom poznate otprije, te pokazati neka važna svojstva trokuta koristeći navedene točke. No, uvedimo prvo nekoliko novih pojmova.

Definicija 3.2.1. Neka točke A', B', C' leže na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC , redom. Dužine $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ nazivamo **čevijanama** trokuta ABC .



Slika 3.1: Čevijane trokuta



Slika 3.2: Simedijana trokuta

Definicija 3.2.2. Pravac dobiven preslikavanjem težišnice trokuta osnosimetrično s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta naziva se **simedijana** trokuta.

Propozicija 3.2.3. Neka su točke A', B', C' na stranicama BC, CA, AB trokuta ABC , redom, takve da se čevijane $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ trokuta ABC sijeku u točki Q , te neka vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{p}{n}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{m}{p}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{n}{m}.$$

Ako točke A, B, C redom imaju koordinate a, b, c , tada točka Q ima koordinate

$$q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}.$$

Dokaz. Koordinate točkaka A', B', C' su redom jednake

$$a' = \frac{nb + pc}{n + p}, b' = \frac{ma + pc}{m + p}, c' = \frac{ma + nb}{m + n}.$$

Neka je Q točka čije su koordinate

$$q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}.$$

Dokažimo da se čevijane $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ sijeku u toj točki.

Točke A, Q i A' su kolinearne ako i samo ako vrijedi $(q - a) \times (a' - a) = 0$. To je ekvivalentno s

$$\left(\frac{ma + nb + pc}{m + n + p} - a \right) \times \left(\frac{nb + pc}{n + p} - a \right) = 0,$$

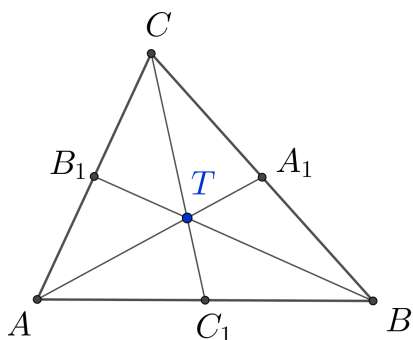
tj. $(nb + pc - (n + p)a) \times (nb + pc - (n + p)a) = 0$, što vrijedi po definiciji kompleksnog produkta.

Analogno, dobivamo da točka Q leži na čevijanima $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ te je time tvrdnja dokazana. \square

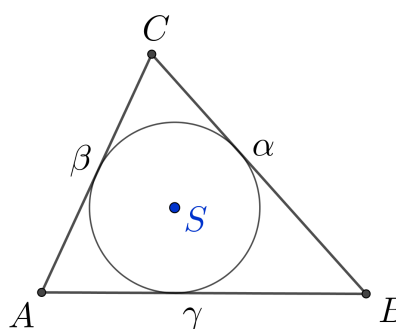
Navedimo sada neke važne karakteristične točke trokuta ABC i njihova svojstva.

1) **Težište.** Ako je točka Q iz Propozicije 3.2.3 ujedno i težište T trokuta ABC , onda vrijedi $m = n = p = 1$. Iz toga slijedi da je koordinata točke T dana sa

$$z_T = \frac{a + b + c}{3}.$$



Slika 3.3: Težište trokuta



Slika 3.4: Središte trokutu upisane kružnice

2) **Središte upisane kružnice.** Neka su duljine stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} trokuta dane redom s γ , α , β . Ako je točka Q ujedno i središte S trokutu upisane kružnice, tada, koristeći svojstvo simetrale kutova, vrijedi $m = \alpha$, $n = \beta$, $p = \gamma$. Iz toga slijedi da je koordinata točke S

$$z_S = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2s}[\alpha a + \beta b + \gamma c],$$

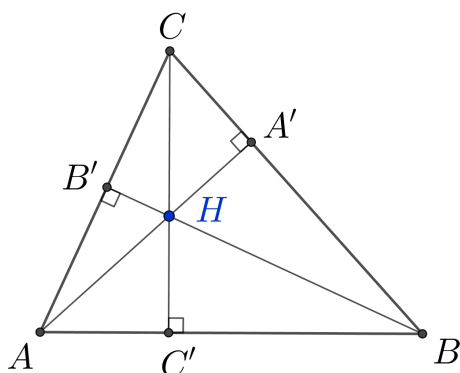
gdje je s poluopseg trokuta ABC .

3) **Ortocentar.** Ako je točka Q ortocentar H trokuta ABC , tada vrijedi

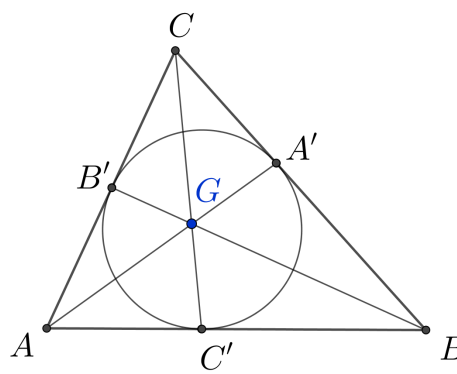
$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}, \quad \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}, \quad \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}.$$

Slijedi da je $m = \operatorname{tg} A$, $n = \operatorname{tg} B$, $p = \operatorname{tg} C$ te su koordinate ortocentra H dane s

$$z_H = \frac{(\operatorname{tg} A)a + (\operatorname{tg} B)b + (\operatorname{tg} C)c}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$



Slika 3.5: Ortocentar trokuta



Slika 3.6: Gergonneova točka

Napomena 3.2.4. *Dokaz postojanja težišta, središta upisane kružnice i ortocentra trokuta možemo pronaći u [7] i [9].*

4) **Gergonneova točka.** Ako su točke A' , B' , C' dirališta trokutu upisane kružnice i stranica \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} , redom, tada se čevijane $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ trokuta ABC sijeku u tzv. Gergonneovoj točki G . Tada vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{1}{s-\gamma}, \quad \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{1}{s-\alpha}, \quad \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{1}{s-\beta}.$$

Koordinata točke G dana je sa

$$z_G = \frac{r_\alpha a + r_\beta b + r_\gamma c}{r_\alpha + r_\beta + r_\gamma},$$

gdje su $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ radijusi pripisanih kružnica trokutu ABC . Lako se pokaže da vrijedi

$$r_\alpha = \frac{P}{s - \alpha}, r_\beta = \frac{P}{s - \beta}, r_\gamma = \frac{P}{s - \gamma},$$

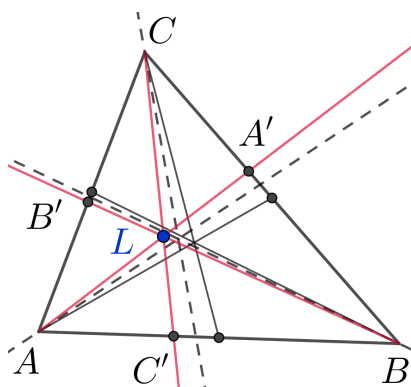
gdje je P površina trokuta ABC , a s njegov poluopseg.

5) **Lemoineova točka.** Lemoineova točka L sjecište je simedijana trokuta ABC . Vrijedi

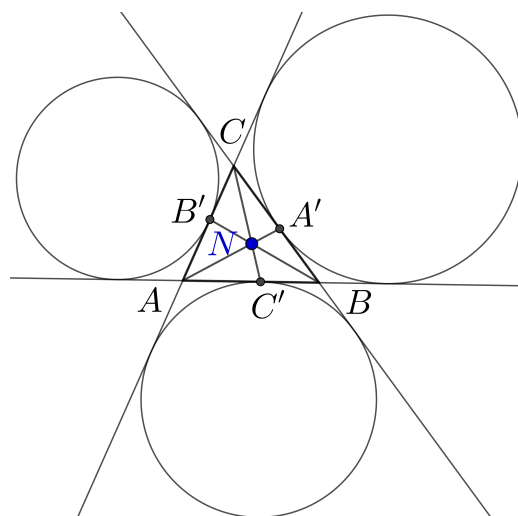
$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Slijedi da je koordinata točke L dana s

$$z_L = \frac{\alpha^2 a + \beta^2 b + \gamma^2 c}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$



Slika 3.7: Lemoineova točka



Slika 3.8: Nagelova točka

5) **Nagelova točka.** Ako su točke A', B', C' dirališta trokutu pripisanih kružnica sa stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, redom, onda se čevijane trokuta ABC sijeku u tzv. Nagelovoj točki N . Tada vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{s - \gamma}{s - \beta}, \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{s - \alpha}{s - \gamma}, \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{s - \beta}{s - \alpha},$$

te iz Propozicije 3.2.3 slijedi da su koordinate Nagelove točke dane s

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{(s - \alpha)a + (s - \beta)b + (s - \gamma)c}{(s - \alpha) + (s - \beta) + (s - \gamma)} \\ &= \frac{1}{s}[(s - \alpha)a + (s - \beta)b + (s - \gamma)c] \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c. \end{aligned}$$

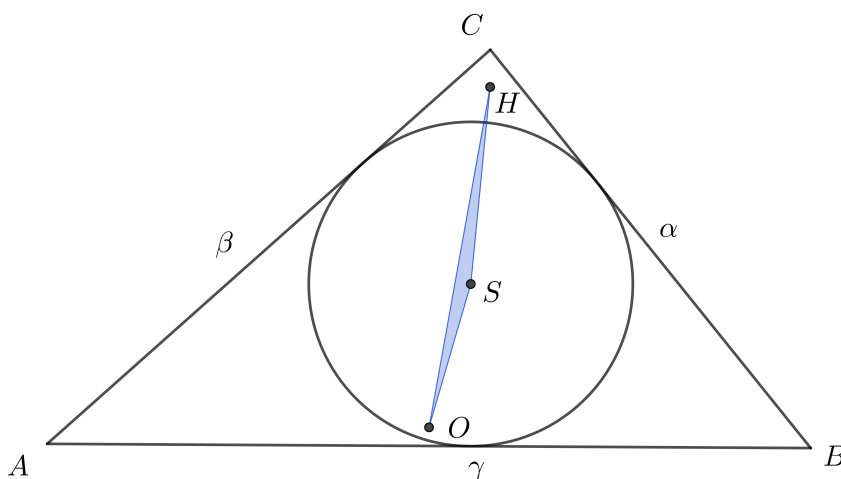
Napomena 3.2.5. Dokaz postojanja Gergonneove, Nagelove i Lemoineove točke trokuta možemo pronaći u [6] i [9].

Riješimo jedan primjer primjenjujući pokazana svojstva.

Primjer 10. Neka su α, β, γ duljine stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC . Pretpostavimo da je $\alpha < \beta < \gamma$. Neka su točke O, S, H redom središte opisane kružnice, središte upisane kružnice i ortocentar trokuta ABC . Dokažimo da vrijedi

$$P(OSH) = \frac{1}{8r}(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha),$$

gdje je r polumjer trokutu upisane kružnice.



Slika 3.9: Trokut OSH

Rješenje. Smjestimo trokut ABC u kompleksnu ravninu s ishodištem u točki O tako da je trokut pozitivno orijentiran. Primjenjujući kompleksni produkt i koordinate točaka S i H

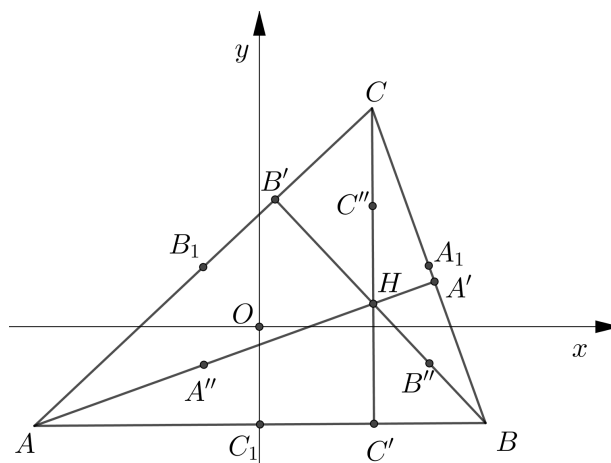
dobivamo

$$\begin{aligned}
 P(OSH) &= \frac{1}{2i}(z_S \times z_H) = \frac{1}{2i} \left[\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} \times (a + b + c) \right] \\
 &= \frac{1}{4si} [(\alpha - \beta)a \times b + (\beta - \gamma)b \times c + (\gamma - \alpha)c \times a] \\
 &= \frac{1}{2s} [(\alpha - \beta)P(OAB) + (\beta - \gamma)P(OBC) + (\gamma - \alpha)P(OCA)] \\
 &= \frac{1}{2s} \left[(\alpha - \beta) \frac{R^2 \sin 2C}{2} + (\beta - \gamma) \frac{R^2 \sin 2A}{2} + (\gamma - \alpha) \frac{R^2 \sin 2B}{2} \right] \\
 &= \frac{R^2}{4s} [(\alpha - \beta) \sin 2C + (\beta - \gamma) \sin 2A + (\gamma - \alpha) \sin 2B] \\
 &= \frac{1}{8r} (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha),
 \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

3.3 Eulerova kružnica devet točaka

Neka je trokut ABC smješten u kompleksnoj ravnini tako da mu se središte opisane kružnice nalazi u ishodištu O , te neka su a, b, c koordinate vrhova A, B, C . Već smo ranije pokazali u Propoziciji 2.1.5 da ortocentar H ima koordinate $z_H = a + b + c$.



Slika 3.10:

Označimo s A_1, B_1, C_1 polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, s A', B', C' nožišta visina iz odgovarajućih vrhova na nasuprotne stranice, te s A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$,

redom.

Lako se vidi da točke $A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$ imaju sljedeće koordinate:

$$z_{A_1} = \frac{1}{2}(b+c), z_{B_1} = \frac{1}{2}(c+a), z_{C_1} = \frac{1}{2}(a+b),$$

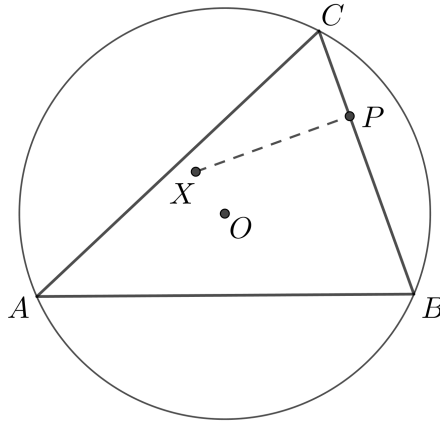
$$z_{A''} = a + \frac{1}{2}(b+c), z_{B''} = b + \frac{1}{2}(c+a), z_{C''} = c + \frac{1}{2}(a+b).$$

Koordinate točaka A', B', C' ne mogu se tako lako odrediti. U tome će nam pomoći sljedeća propozicija.

Propozicija 3.3.1. *Neka se točka $X(x)$ nalazi u ravnini trokuta ABC te neka je P njena ortogonalna projekcija na pravac BC . Tada je koordinata točke P jednaka*

$$p = \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right),$$

gdje je R radijus trokutu opisane kružnice.



Slika 3.11: Ortogonalna projekcija točke na stranicu trokuta

Dokaz. Primjenjujući realni i kompleksni produkt, jednadžbe pravaca BC i XP možemo zapisati kao

$$BC : (z - b) \times (c - b) = 0,$$

$$XP : (z - x) \cdot (c - b) = 0.$$

Koordinata točke P zadovoljava obje jednadžbe pa imamo

$$(p - b) \times (c - b) = 0,$$

$$(p - x) \cdot (c - b) = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$(p - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{p} - \bar{b})(c - b) = 0,$$

$$(p - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{p} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Zbrajanjem tih dviju relacija dobivamo

$$(2p - b - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Iz toga slijedi da je koordinata točke P dana s

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left[b + x + \frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[b + x + \frac{c - b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[b + x - \frac{bc}{R^2} (\bar{x} - \bar{b}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right). \end{aligned}$$

□

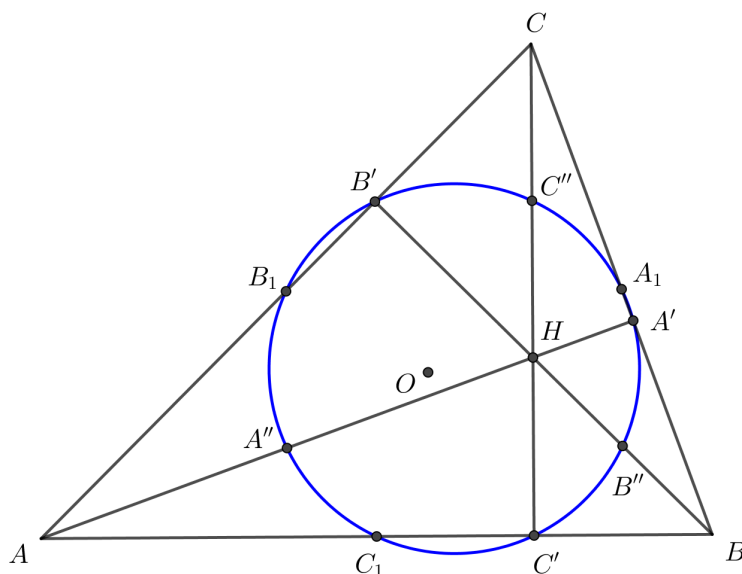
Iz gornje propozicije slijedi da su koordinate točaka A' , B' , C'

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right), \\ z_{B'} &= \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ca\bar{b}}{R^2} \right), \\ z_{C'} &= \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab\bar{c}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Teorem 3.3.2. (*Kružnica devet točaka.*) U svakom trokutu ABC točke $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$ leže na istoj kružnici, čije središte se nalazi u polovištu dužine \overline{OH} , a radijus je dvostruko manji od radijusa trokutu opisane kružnice.

Dokaz. Označimo s O' polovište dužine \overline{OH} . Prema pretpostavci slijedi da je njena koordinata $z_{O'} = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Znamo $|a| + |b| + |c| = R$, gdje je R radijus trokutu opisane kružnice.

Uočimo da vrijedi $|O'A_1| = |z_{A_1} - z_{O'}| = \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}R$, pa je i $|O'B_1| = |O'C_1| = \frac{1}{2}R$.



Slika 3.12: Eulerova kružnica devet točaka

Nadalje, $|O'A''| = |z_{A''} - z_{O'}| = \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}R$. Analogno, $|O'B''| = |O'C''| = \frac{1}{2}R$.
Udaljenost točaka O' i A' lako izračunamo:

$$\begin{aligned} |O'A'| &= |z_{A'} - z_{O'}| = \left| \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{bc\bar{a}}{R^2} \right) - \frac{1}{2}(a + b + c) \right| \\ &= \frac{1}{2R^2} |bc\bar{a}| = \frac{1}{2R^2} |\bar{a}||b||c| = \frac{R^3}{2R^2} = \frac{1}{2}R. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je $|O'B'| = |O'C'| = \frac{1}{2}R$.

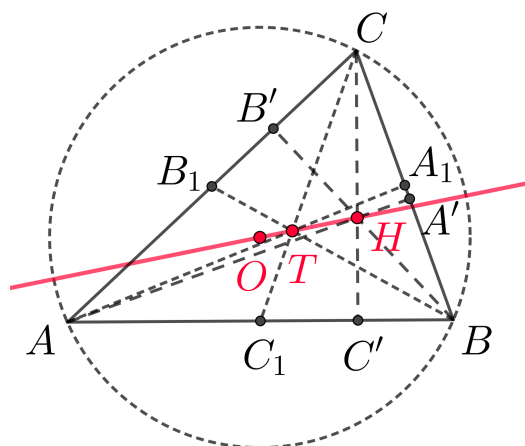
Dakle, vrijedi

$$|O'A_1| = |O'B_1| = |O'C_1| = |O'A'| = |O'B'| = |O'C'| = |O'A''| = |O'B''| = |O'C''|,$$

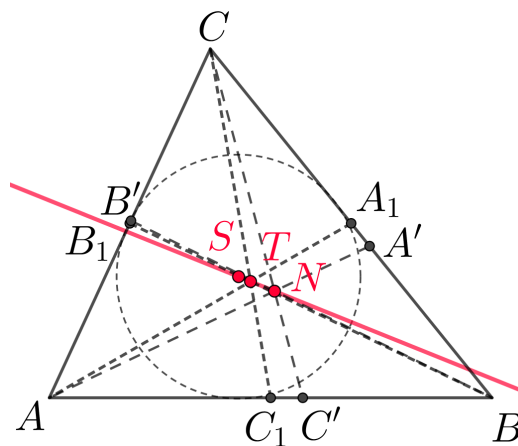
pa točke $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$ leže na istoj kružnici, sa središtem u O' i radijusom $\frac{1}{2}R$. \square

Teorem 3.3.3. 1) (*Eulerov pravac.*) U svakom trokutu ABC točke O, T, H su kolinearne.
2) (*Nagelov pravac.*) U svakom trokutu ABC točke S, T, N su kolinearne.

Dokaz. 1) Ako je središte trokutu opisane kružnice O ujedno i ishodište kompleksne ravnine, imamo $z_O = 0$, $z_T = \frac{1}{3}(a + b + c)$, $z_H = a + b + c$. Prema Propoziciji 2.2.4. točke O, T, H su kolinearne.



Slika 3.13: Eulerov pravac



Slika 3.14: Nagelov pravac

2) Imamo $z_S = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c$, $z_T = \frac{1}{3}(a + b + c)$, $z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c$.
Lako se dobije da vrijedi $z_N = 3z_T - 2z_S$.

Primjenom svojstava kompleksnog produkta na gornju relaciju dobivamo

$(z_T - z_S) \times (z_N - z_S) = (z_T - z_S) \times [3(z_T - z_S)] = 0$, pa su točke S, T, N kolinearne. \square

Riješimo sada jedan primjer primjenjujući prethodna svojstva i tvrdnje.

Primjer 11. Neka se točka M nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC . Dokažimo da središta Eulerovih kružnica trokuta MBC, MCA, MAB čine trokut sličan trokutu ABC .

Rješenje. Označimo s $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$ središta Eulerovih kružnica trokuta MBC, MCA, MAB , redom. Neka je središte opisane kružnice trokuta ABC smješteno u ishodištu kompleksne ravnine. Koordinate točaka A', B', C' su redom

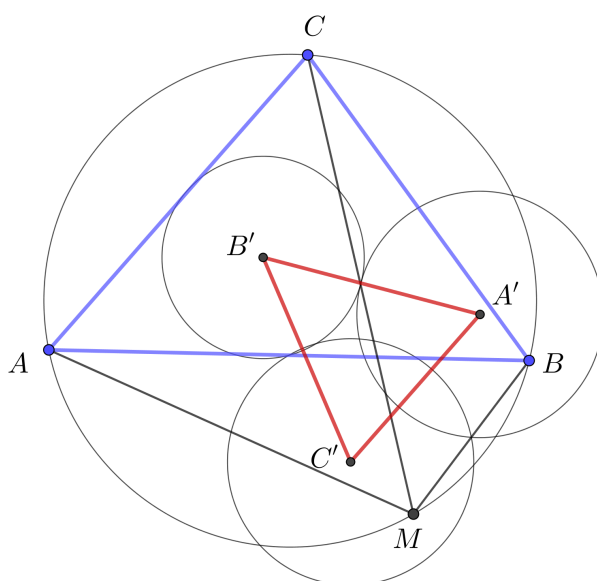
$$a' = \frac{m + b + c}{2}, b' = \frac{m + a + c}{2}, c' = \frac{m + a + b}{2},$$

s obzirom da se M nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Slijedi

$$\frac{b' - a'}{c' - a'} = \frac{a - b}{a - c} = \frac{b - a}{c - a},$$

iz čega slijedi $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, prema Propoziciji 1.2.18.



Slika 3.15:

3.4 Neke udaljenosti u trokutu

Neka su α, β, γ duljine stranica trokuta ABC . Poluopseg trokuta dan je sa $s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, radijus trokutu upisane kružnice s r , a radijus opisane kružnice s R .

Teorem 3.4.1. *Duljine stranica trokuta α, β, γ rješenja su kubne jednadžbe*

$$t^3 - 2st^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)t - 4sRr = 0.$$

Dokaz. Dokažimo da α zadovoljava jednadžbu. Imamo

$$\alpha = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$s - \alpha = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

odakle je

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\alpha(s - \alpha)}{4Rr}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\alpha r}{4R(s - \alpha)}.$$

Iz identiteta $\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} = 1$ slijedi

$$\frac{\alpha(s - \alpha)}{4Rr} + \frac{\alpha r}{4R(s - \alpha)} = 1,$$

tj. sređivanjem dobivamo

$$\alpha^3 - 2s\alpha^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)\alpha - 4sRr = 0.$$

Analogno se pokaže da su β i γ rješenja dane jednadžbe. □

Iz Teorema 3.4.1, koristeći relacije rješenja i koeficijenata jednadžbe, slijedi

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 2s, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= s^2 + r^2 + 4Rr, \\ \alpha\beta\gamma &= 4sRr.\end{aligned}$$

Korolar 3.4.2. U svakom trokutu ABC vrijede sljedeće formule:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr), \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 4s^2 - 2(s^2 + r^2 + 4Rr) \\ &= 2s^2 - 2r^2 - 8Rr \\ &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr).\end{aligned}$$

Za dokaz druge formule imamo

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 2s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr - s^2 - r^2 - 4Rr) + 12sRr \\ &= 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr).\end{aligned}$$

□

Pretpostavimo da je središte O opisane kružnice trokuta ABC smješteno u ishodištu kompleksne ravnine, te neka su a, b, c koordinate vrhova A, B, C , redom.

Lema 3.4.3. Realni produkti $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$ dani su s

$$a \cdot b = R^2 - \frac{\gamma^2}{2}, b \cdot c = R^2 - \frac{\alpha^2}{2}, c \cdot a = R^2 - \frac{\beta^2}{2}.$$

Dokaz. Primjenjujući svojstva realnog produkta imamo

$$\gamma^2 = |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2a \cdot b - b^2 = 2R^2 - 2a \cdot b,$$

iz čega slijedi prva formula. Preostale dvije dokazuju se analogno. \square

U sljedećim teoremima, radi pojednostavljenja zapisa, koristit ćemo tzv. **cikličku sumu**. Cikličke sume koriste se za zbrajanje preko permutacija. Promotrimo permutaciju (a, b, c) . Ciklička suma \sum_{cyc} je zbroj proveden kroz jedan ciklus permutacije:

$$\sum_{cyc} a = a + b + c.$$

Teorem 3.4.4. (Eulerov teorem.) *Neka je $k(O, R)$ kružnica opisana, a $k(S, r)$ kružnica upisana trokutu. Tada je*

$$|OS|^2 = R^2 - 2Rr.$$

Dokaz. Koordinata točke S dana je sa

$$z_S = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c,$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} |OS|^2 &= |z_S|^2 = \left(\frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + 2 \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta)a \cdot b. \end{aligned}$$

Koristeći Lemu 3.4.3 dobivamo

$$\begin{aligned} |OS|^2 &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + \frac{2}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha + \beta + \gamma)^2 R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{4s^2} \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = R^2 - \frac{1}{2s} \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Konačno, koristeći poznate formule $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4P}$ i $r = \frac{P}{s}$ (vidi [7]), gdje je P površina trokuta, dobivamo

$$|OS|^2 = R^2 - 2 \frac{\alpha\beta\gamma}{4P} \cdot \frac{P}{s} = R^2 - 2Rr.$$

\square

Teorem 3.4.5. *Neka je N Nagelova točka trokuta ABC . Tada je*

$$|ON| = R - 2r.$$

Dokaz. Koordinata točke N dana je sa

$$z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c.$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} |ON|^2 &= |z_N|^2 = z_N \cdot \bar{z}_N = R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) a \cdot b \\ &= R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \\ &= R^2 \left(3 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{s}\right)^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 \\ &= R^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 = R^2 - E. \end{aligned}$$

Da bismo izračunali E uočimo prvo

$$\begin{aligned} E &= \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{s} + \frac{\alpha\beta}{s^2}\right) \gamma^2 = \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (\alpha + \beta) \gamma^2 + \frac{1}{s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 \\ &= \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (2s - \gamma) \gamma^2 + \frac{2\alpha\beta\gamma}{s} = - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^3 + 8 \frac{\alpha\beta\gamma}{4P} \cdot \frac{P}{s} \\ &= - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^3 + 8Rr. \end{aligned}$$

Sada, primjenjujući formulu (3.1), dobivamo

$$E = -2(s^2 - r^2 - 4Rr) + 2(s^2 - 3r^2 - 6Rr) + 8Rr = -4r^2 + 4Rr.$$

Konačno, slijedi da je

$$|ON|^2 = R^2 - E = R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R - 2r)^2,$$

iz čega slijedi da je $|ON| = R - 2r$. □

Teorem 3.4.6. *Neka je H ortocentar trokuta ABC . Tada je*

$$|OH|^2 = 9R^2 + 2r^2 + 8Rr - 2s^2.$$

Dokaz. Koordinata točke H dana je s $z_H = a + b + c$. Koristeći realni produkt dobivamo

$$\begin{aligned} |OH|^2 &= |z_H|^2 = z_H \cdot z_H = (a + b + c) \cdot (a + b + c) \\ &= \sum_{cyc} |a|^2 + 2 \sum_{cyc} a \cdot b = 3R^2 + 2 \sum_{cyc} a \cdot b. \end{aligned}$$

Koristeći formule iz Leme 3.4.3 i Korolara 3.4.2, dobivamo

$$\begin{aligned} |OH|^2 &= 3R^2 + 2 \sum_{cyc} \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) = 9R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= 9R^2 - 2(s^2 - r^2 - 4Rr) = 9R^2 + 2r^2 + 8Rr - 2s^2. \end{aligned}$$

□

3.5 Baricentričke koordinate točke s obzirom na trokut

Neka su α, β, γ redom duljine stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC .

Propozicija 3.5.1. *Neka su a, b, c koordinate vrhova A, B, C trokuta ABC , te neka je P točka u ravnini trokuta. Neka je koordinata točke P dana sa z_P . Tada postoje jedinstveni realni brojevi μ_a, μ_b, μ_c takvi da vrijedi*

$$\begin{aligned} z_P &= \mu_a a + \mu_b b + \mu_c c, \\ \mu_a + \mu_b + \mu_c &= 1. \end{aligned}$$

Dokaz. Pretpostavimo da se točka P nalazi u unutrašnjosti trokuta ABC te neka je A' točka takva da vrijedi $AP \cap BC = \{A'\}$. Neka je $k_1 = \frac{|PA|}{|PA'|}, k_2 = \frac{|A'B|}{|A'C|}$. Tada vrijedi

$$z_P = \frac{a + k_1 z_{A'}}{1 + k_1}, z_{A'} = \frac{b + k_2 c}{1 + k_2}.$$

To možemo zapisati kao

$$z_P = \frac{1}{1 + k_1} a + \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)} b + \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)} c.$$

Nadalje, ako uzmemo u obzir da je

$$\mu_a = \frac{1}{1 + k_1}, \mu_b = \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)}, \mu_c = \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)}$$

tada imamo

$$\begin{aligned} \mu_a + \mu_b + \mu_c &= \frac{1}{1+k_1} + \frac{k_1}{(1+k_1)(1+k_2)} + \frac{k_1k_2}{(1+k_1)(1+k_2)} \\ &= \frac{1+k_1+k_2+k_1k_2}{(1+k_1)(1+k_2)} = 1. \end{aligned}$$

Dokaz je analogan u slučaju kada se P nalazi izvan trokuta.

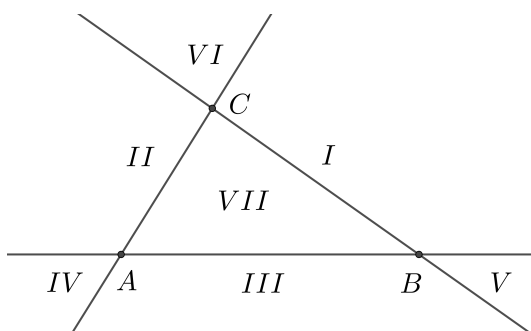
Ako se P nalazi na pravcu koji sadrži stranicu \overline{BC} trokuta ABC , onda je

$$z_P = \frac{1}{1+k}b + \frac{k}{1+k}c = 0 \cdot a + \frac{1}{1+k}b + \frac{k}{1+k}c,$$

gdje je $k = \frac{|PB|}{|PC|}$.

□

Definicija 3.5.2. Realni brojevi μ_a, μ_b, μ_c zovu se **apsolutne baricentričke koordinate** točke P s obzirom na trokut ABC .



Slika 3.16: Sedam područja ravnine trokuta

Predznaci brojeva μ_a, μ_b, μ_c ovise o području ravnine trokuta u kojem je smještena točka P . Trokut ABC određuje takvih sedam područja.

U sljedećoj tablici dani su predznaci brojeva μ_a, μ_b, μ_c :

	I	II	III	IV	V	VI	VII
μ_a	-	+	+	+	-	-	+
μ_b	+	-	+	-	+	-	+
μ_c	+	+	-	-	-	+	+

Tablica 3.1: Predznaci apsolutnih baricentričkih koordinata točke

Teorem 3.5.3. *Neka su točke P_1, P_2 s koordinatama z_{P_1}, z_{P_2} smještene u ravnini trokuta ABC . Ako je $z_{P_k} = \alpha_k a + \beta_k b + \gamma_k c$, gdje su $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ realni brojevi takvi da vrijedi $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, k = 1, 2$, onda je*

$$|P_1 P_2|^2 = - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \quad (3.2)$$

Dokaz. Neka se središte trokutu opisane kružnice O nalazi u ishodištu kompleksne ravnine. Koristeći svojstva realnog produkta imamo

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= |z_{P_2} - z_{P_1}|^2 = |(\alpha_2 - \alpha_1)a + (\beta_2 - \beta_1)b + (\gamma_2 - \gamma_1)c|^2 \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 a \cdot a + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)a \cdot b \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 R^2 + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ &= R^2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1)^2 - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \end{aligned}$$

S obzirom da vrijedi $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$, slijedi

$$|P_1 P_2|^2 = - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2.$$

□

Teorem 3.5.4. *Točke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ smještene su na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC tako da se dužine $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ sijeku u točki P_1 , a dužine $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}$ u točki P_2 . Neka je*

$$\frac{|BA_k|}{|A_k C|} = \frac{p_k}{n_k}, \frac{|CB_k|}{|B_k A|} = \frac{m_k}{p_k}, \frac{|AC_k|}{|C_k B|} = \frac{n_k}{m_k}, k = 1, 2,$$

gdje su m_k, n_k, p_k realni brojevi različiti od nule, te neka je $S_k = m_k + n_k + p_k, k = 1, 2$. Tada je

$$|P_1 P_2|^2 = \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \left[S_1 S_2 \sum_{cyc} (n_1 p_2 + p_1 n_2) \alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 \right]. \quad (3.3)$$

Dokaz. Koordinate točaka P_1, P_2 dane su sa

$$z_{P_k} = \frac{m_k a + n_k b + p_k c}{m_k + n_k + p_k}, k = 1, 2.$$

Slijedi da su apsolutne baricentričke koordinate točkaka P_1, P_2 dane s

$$\alpha_k = \frac{m_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{m_k}{S_k}, \beta_k = \frac{n_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{n_k}{S_k}, \gamma_k = \frac{p_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{p_k}{S_k}, k = 1, 2.$$

Uvođenjem supstitucije u (3.2) dobivamo

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= - \sum_{cyc} \left(\frac{n_2}{S_2} - \frac{n_1}{S_2} \right) \left(\frac{p_2}{S_2} - \frac{p_1}{S_2} \right) \alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \sum_{cyc} (S_1 n_2 - S_2 n_1) (S_1 p_2 - S_2 p_1) \alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \sum_{cyc} [S_1^2 n_2 p_2 + S_2^2 n_1 p_1 - S_1 S_2 (n_1 p_2 + n_2 p_1)] \alpha^2 \\ &= \frac{1}{S_1^2 S_2^2} \left[S_1 S_2 \sum_{cyc} (n_1 p_2 + p_1 n_2) \alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 \right], \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. □

Primjer 12. Izračunajmo udaljenost točkaka T i S , gdje je T težište trokuta, a S središte trokutu upisane kružnice.

Rješenje. Za računanje udaljenosti koristit ćemo formulu (3.3).

Imamo $m_1 = n_1 = p_1 = 1$ i $m_2 = \alpha, n_2 = \beta, p_2 = \gamma$ iz čega slijedi

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{cyc} m_1 = 3, S_2 = \sum_{cyc} m_2 = \alpha + \beta + \gamma = 2s, \\ \sum_{cyc} (n_1 p_2 + n_2 p_1) \alpha^2 &= (\beta + \gamma) \alpha^2 + (\gamma + \alpha) \beta^2 + (\alpha + \beta) \gamma^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) (\alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha) - 3\alpha \beta \gamma \\ &= 2s(s^2 + r^2 + 4Rr) - 12sRr \\ &= 2s^3 + 2sr^2 - 4sRr. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta \gamma + \beta^2 \gamma \alpha + \gamma^2 \alpha \beta = \alpha \beta \gamma (\alpha + \beta + \gamma) = 8s^2 Rr$$

i

$$\sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

Prema tome, slijedi

$$|TS|^2 = \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr).$$

Pokazali smo kako računati udaljenost dviju točaka u ravnini trokuta koristeći bari-centričke koordinate. Sada ćemo izvesti nekoliko zanimljivih tvrdnji vezanih za površinu trokuta koristeći spomenute koordinate.

Teorem 3.5.5. *Neka su $P_j(z_{P_j})$, $j = 1, 2, 3$, tri točke u ravnini trokuta ABC , te neka je $z_{P_j} = \alpha_j a + \beta_j b + \gamma_j c$, gdje su $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ baricentričke koordinate točaka P_j . Ako trokuti ABC i $P_1P_2P_3$ imaju istu orijentaciju, onda je*

$$\frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}. \quad (3.4)$$

Dokaz. Pretpostavimo da su trokuti ABC i $P_1P_2P_3$ pozitivno orijentirani. Označimo s O ishodište kompleksne ravnine. Primjenjujući kompleksni produkt imamo

$$\begin{aligned} 2iP(P_1OP_2) &= z_{P_1} \times z_{P_2} = (\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c) \times (\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) a \times b + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) b \times c + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) c \times a \\ &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & c \times a \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Na analogan način se dobije

$$\begin{aligned} 2iP(P_2OP_3) &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ 2iP(P_3OP_1) &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iP(ABC) \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da se ishodište O nalazi unutar trokuta $P_1P_2P_3$ slijedi da je

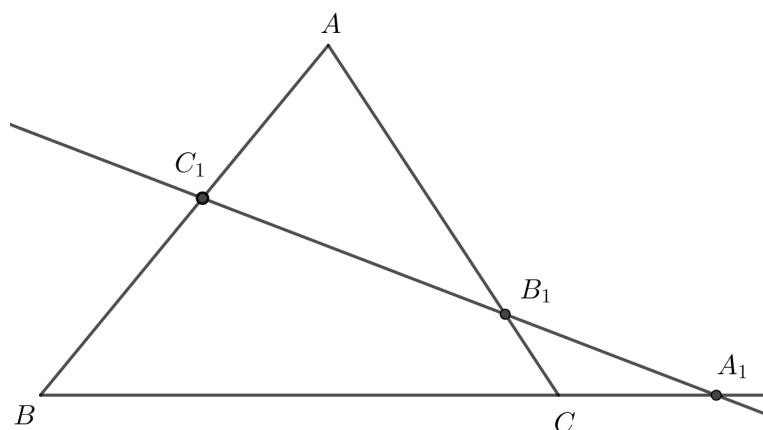
$$\begin{aligned} P(P_1P_2P_3) &= P(P_1OP_2) + P(P_2OP_3) + P(P_3OP_1) \\ &= \frac{1}{2i}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_1) a \times b - \frac{1}{2i}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_3 - \gamma_1) b \times c \\ &\quad + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3) P(ABC) \\ &= P(ABC) \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \alpha_1 \\ 1 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ 1 & \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = P(ABC) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kako smo i tvrdili. □

U dokazu idućeg korolara pozivat ćemo se na poznati Menelajev teorem. Iskazat ćemo ovdje Menelajev teorem, bez dokazivanja. Dokaz možemo pronaći u [7].

Teorem 3.5.6. (*Menelajev teorem.*) *Neka su B_1, C_1 točke na stranicama $\overline{AC}, \overline{AB}$, a točka A_1 na produžetku stranice \overline{BC} trokuta ABC . Točke A_1, B_1, C_1 su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



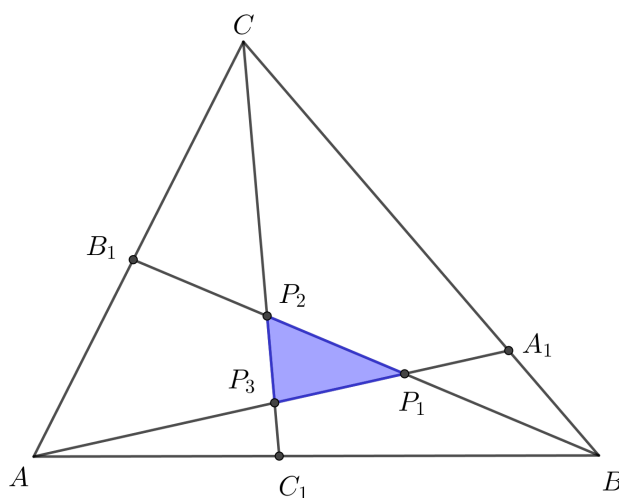
Slika 3.17: Menelajev teorem

Korolar 3.5.7. *Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1, C_1 smještene na pravcima BC, CA, AB , redom, tako da vrijedi*

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = k_1, \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = k_2, \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = k_3.$$

Nadalje, neka su točke P_1, P_2, P_3 takve da $AA_1 \cap BB_1 = \{P_1\}, BB_1 \cap CC_1 = \{P_2\}, CC_1 \cap AA_1 = \{P_3\}$. Tada je

$$\frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} = \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}.$$



Slika 3.18:

Dokaz. Primjenjujući Menelajev teorem 3.5.6 na trokut AA_1B , dobivamo

$$\frac{|C_1A|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB|}{|CA_1|} \cdot \frac{|P_3A_1|}{|P_3A|} = 1.$$

Odatle je

$$\frac{|P_3A|}{|P_3A_1|} = \frac{|C_1A|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CB|}{|CA_1|} = k_3(1 + k_1).$$

Koordinata točke P_3 dana je sa

$$z_{P_3} = \frac{a + k_3(1 + k_1)z_{A_1}}{1 + k_3(1 + k_1)} = \frac{a + k_3(1 + k_1)\frac{b+k_1c}{1+k_1}}{1 + k_3 + k_3k_1} = \frac{a + k_3b + k_3k_1c}{1 + k_3 + k_3k_1}.$$

Na analogan način dobivamo koordinate točaka P_1 i P_2 :

$$z_{P_1} = \frac{b + k_1c + k_1k_2a}{1 + k_1 + k_1k_2}, z_{P_2} = \frac{c + k_2a + k_2k_3b}{1 + k_2 + k_2k_3}.$$

Trokuti ABC i $P_1P_2P_3$ imaju jednaku orijentaciju pa primjenjujući (3.4) dobivamo

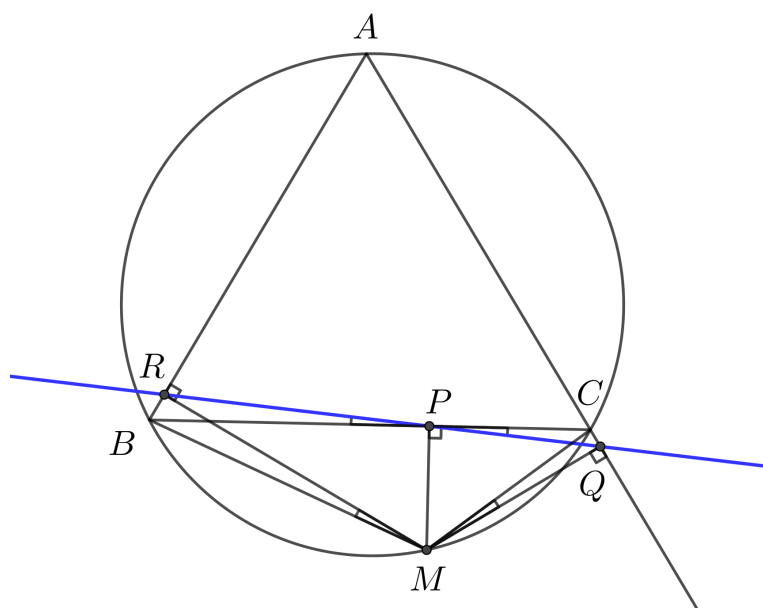
$$\begin{aligned} \frac{P(P_1P_2P_3)}{P(ABC)} &= \frac{1}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)} \begin{vmatrix} k_1k_2 & 1 & k_1 \\ k_2 & k_2k_3 & 1 \\ 1 & k_3 & k_3k_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}. \end{aligned}$$

□

3.6 Nožišni trokut i Simsonov pravac

Neka se točka M nalazi u ravnini trokuta ABC te neka su točke P, Q, R ortogonalne projekcije točke M na pravce BC, CA, AB , redom.

Teorem 3.6.1. (*Simsonov pravac.*) *Točke P, Q, R su kolinearne ako i samo ako se M nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC .*



Slika 3.19: Simsonov pravac

Dokaz. Pretpostavimo da M leži na opisanoj kružnici trokuta ABC . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da M pripada kružnom luku \widehat{BC} . Za kolinearnost točaka P, Q, R dovoljno je pokazati da su kutovi $\angle BPR$ i $\angle CPQ$ jednaki. Uočimo $\angle BRM$ i $\angle BPM$ su jednaki te $\angle MPC + \angle MQC = 180^\circ$, pa su četverokuti $PRBM$ i $PCQM$ tetivni. Iz toga slijedi $\angle BPR = \angle BMR$ i $\angle CPQ = \angle CMQ$. Nadalje, $\angle BMR = 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - \angle MCQ$ jer je i $ABMC$ tetivni četverokut. Konačno, dobivamo $\angle BMR = 90^\circ - \angle MCQ = \angle CMQ$, pa su kutovi $\angle BPR$ i $\angle CPQ$ jednaki.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da su točke P, Q, R kolinearne. Tada su $\angle BPR$ i $\angle CPQ$ jednaki, pa je $\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ$, tj. četverokut $ABMC$ je tetivan. Stoga točka M leži na opisanoj kružnici trokuta ABC . \square

Definicija 3.6.2. *Ako M leži na opisanoj kružnici trokuta ABC , pravac PQR , iz prethodnog teorema, naziva se **Simsonov pravac** točke M s obzirom na trokut ABC .*

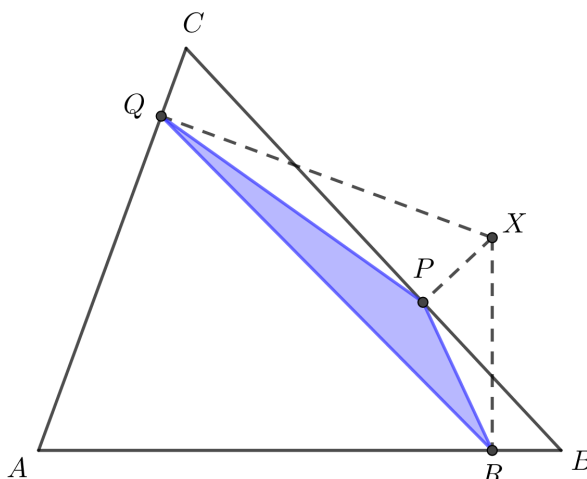
Definicija 3.6.3. Za proizvoljnu točku X u ravnini trokuta ABC neka su točke P, Q, R njene ortogonalne projekcije na pravce BC, CA, AB , redom. Trokut PQR naziva se **nožišni** ili **pedalni trokut** pola X s obzirom na trokut ABC .

Neka je trokut ABC takav da mu je središte opisane kružnice O u ishodištu kompleksne ravnine.

Teorem 3.6.4. Površina nožišnog trokuta pola X s obzirom na trokut ABC dana je formulom

$$P(PQR) = \frac{P(ABC)}{4R^2} |x\bar{x} - R^2|, \quad (3.5)$$

gdje je R radijus opisane kružnice trokutu ABC .



Slika 3.20: Nožišni trokut

Dokaz. Primjenjujući formulu iz Propozicije 3.3.1 dobivamo da su koordinate točaka P, Q, R redom

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right), \\ q &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{ca}{R^2} \bar{x} + c + a \right), \\ r &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{ab}{R^2} \bar{x} + a + b \right). \end{aligned}$$

Iz (1.1) imamo

$$P(PQR) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} q-p & \bar{q}-\bar{p} \\ r-p & \bar{r}-\bar{p} \end{vmatrix}.$$

Za koordinate p, q, r vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{bc}}{R^2} x + \bar{b} + \bar{c} \right), \\ \bar{q} &= \frac{1}{2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{ca}}{R^2} x + \bar{c} + \bar{a} \right), \\ \bar{r} &= \frac{1}{2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{ab}}{R^2} x + \bar{a} + \bar{b} \right). \end{aligned}$$

Sada, slijedi

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{1}{2}(a-b) \left(1 - \frac{c\bar{x}}{R^2} \right), r-p = \frac{1}{2}(a-c) \left(1 - \frac{b\bar{x}}{R^2} \right), \\ \bar{q}-\bar{p} &= \frac{1}{2abc}(a-b)(x-c)R^2, \bar{r}-\bar{p} = \frac{1}{2abc}(a-c)(x-b)R^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} P(PQR) &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} q-p & \bar{q}-\bar{p} \\ r-p & \bar{r}-\bar{p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} 1 - \frac{c\bar{x}}{R^2} & (x-c)R^2 \\ 1 - \frac{b\bar{x}}{R^2} & (x-b)R^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} R^2 - c\bar{x} & x-c \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} (b-c)\bar{x} & b-c \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(b-c)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} \bar{x} & 1 \\ R^2 - b\bar{x} & x-b \end{vmatrix} \\ &= \frac{i(a-b)(b-c)(a-c)}{16abc} (x\bar{x} - R^2). \end{aligned}$$

Primjenjujući modul kompleksnog broja, dobivamo

$$\begin{aligned} P(PQR) &= \frac{|a-b||b-c||c-a|}{16|a||b||c|} |x\bar{x} - R^2| \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{16R^3} |x\bar{x} - R^2| \\ &= \frac{P(ABC)}{4R^2} |x\bar{x} - R^2|, \end{aligned}$$

gdje su α, β, γ duljine stranica trokuta ABC . □

Napomena 3.6.5. Formula u prethodnom teoremu sadrži svojstvo Simsonovog pravca. Zaista, točke P, Q, R su kolinearne ako i samo ako je $P(PQR) = 0$. To vrijedi ako je $|x\bar{x} - R^2| = 0$, tj. ako je $x\bar{x} = R^2$, odnosno $|x| = R$. Dakle, X leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Teorem 3.6.6. Za svaku točku X u ravnini trokuta ABC možemo konstruirati trokut sa stranicama $|AX||BC|, |BX||CA|, |CX||AB|$. Dobiveni trokut sličan je nožišnom trokutu pola X s obzirom na trokut ABC .

Dokaz. Neka je PQR nožišni trokut pola X s obzirom na trokut ABC . Iz (3.6) dobivamo

$$q - p = \frac{1}{2}(a-b)(x-c) \frac{R^2 - c\bar{x}}{R^2(x-c)}. \quad (3.7)$$

Primijenimo li modul na (3.7), dobivamo

$$|q - p| = \frac{1}{2R^2} |a-b||x-c| \left| \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \right|. \quad (3.8)$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \right|^2 &= \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2 - \bar{c}x}{\bar{x} - \bar{c}} = \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2 - \bar{c}x}{\bar{x} - \frac{R^2}{c}} \\ &= \frac{R^2 - c\bar{x}}{x-c} \cdot \frac{R^2(c-x)}{c\bar{x} - R^2} = R^2, \end{aligned}$$

pa iz (3.8) dobivamo

$$|q - p| = \frac{1}{2R} |a-b||x-c|.$$

Stoga je

$$\frac{|PQ|}{|CX||AB|} = \frac{|QR|}{|AX||BC|} = \frac{|RP|}{|BX||CA|} = \frac{1}{2R}, \quad (3.9)$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja. □

Pokazat ćemo na primjeru primjenu prethodno navedenih svojstava.

Primjer 13. *Neka je X točka u ravnini trokuta ABC te neka je $A'B'C'$ trokut sa stranicama $|AX||BC|$, $|BX||CA|$, $|CX||AB|$. Dokažimo da vrijedi*

$$P(A'B'C') = P(ABC)|x\bar{x} - R^2|.$$

Rješenje. Iz (3.9) slijedi da je

$$P(A'B'C') = 4R^2 P(PQR),$$

gdje je PQR nožišni trokut pola X s obzirom na trokut ABC . Uvrstimo li dobivenu jednakost u (3.5), dobivamo

$$P(A'B'C') = P(ABC)|x\bar{x} - R^2|,$$

što smo i trebali dokazati.

Bibliografija

- [1] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.
- [2] Lj. Arambašić, *Kompleksna analiza*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kompa/files/predavanja/1uvodLjA.pdf> (svibanj 2019.).
- [3] R. Deaux, *Introduction to the geometry of complex numbers*, Dover Publications Inc., New York, 2008.
- [4] C. W. Dodge, *Euclidean geometry and transformations*, Dover Publications Inc., New York, 2004.
- [5] L. S. Hahn, *Complex numbers and geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1994.
- [6] H. Halas, M. Bombardelli *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list, 239 (2010.), 158-165.
- [7] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007., dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (lipanj 2019.).
- [8] T. Needham, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [9] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [10] D. Pedoe, *Geometry: A comprehensive course*, Dover Publications Inc., New York, 1998.
- [11] M. Radovanović, *Complex numbers in geometry*, dostupno na <https://pdfslide.net/documents/marko-radovanovic-complex-numbers-in-geometry.html> (srpanj 2019.)

- [12] Y. Sun, *Complex Numbers in Geometry*, dostupno na <http://yisun.io/notes/complex.pdf> (srpanj 2019.).
- [13] V. Volenec, *Baricentričke koordinate*, Osječki matematički list 15 (2015.), 1-11.
- [14] I. M. Yaglom, *Complex numbers in geometry*, Academic press, New York, 1968.

Sažetak

Iako su stoljećima bili potpuna nepoznanica, kompleksni brojevi danas su u širokoj primjeni u matematici i znanosti općenito.

Cilj ovog diplomskog rada je zagrebati ispod površine i otkriti čari kompleksnih brojeva te pokazati kako operacijama nad njima možemo znatno olakšati rješavanje brojnih geometrijskih problema. U tu svrhu uvest ćemo operacije realnog i kompleksnog produkta kompleksnih brojeva te pomoću njih izvesti neke važne i zanimljive koncepte i rezultate iz geometrije, s naglaskom na geometriju trokuta.

Summary

Although completely unknown for centuries, complex numbers are nowadays widely used in mathematics and science in general.

The aim of this thesis is to scratch beneath the surface and to discover the beauty of complex numbers as well as to show how operations with them can make it much easier to solve many geometric problems. For this purpose, we will introduce the operations of the real and complex product of complex numbers and use them to derive some important and interesting concepts and results in geometry, with an emphasis on triangle geometry.

Životopis

Rođena sam 15. siječnja 1993. godine u Zagrebu. Godine 1999. upisujem osnovnu školu Ivana Gorana Kovačića gdje razvijam veliki interes za matematiku i strane jezike. Nakon završetka osnovne škole upisujem XVIII. gimnaziju u Zagrebu gdje ipak matematika postaje područje mog najvećeg interesa. Po završetku jezične gimnazije upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. U srpnju 2017. godine stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike. U listopadu iste godine nastavljam školovanje na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika, smjer; nastavnički na već spomenutom fakultetu. Na drugoj godini diplomskog studija odrađujem metodičku praksu iz matematike u osnovnoj školi Dobriše Cesarića i XV. gimnaziji u Zagrebu.

Tijekom srednje škole i studija radila sam razne učeničke i studentske poslove čime sam stekla odgovornost i sposobnost rada u timu te unaprijedila komunikacijske, organizacijske i analitičke vještine. Aktivno se služim engleskim jezikom, a pasivno francuskim i talijanskim.