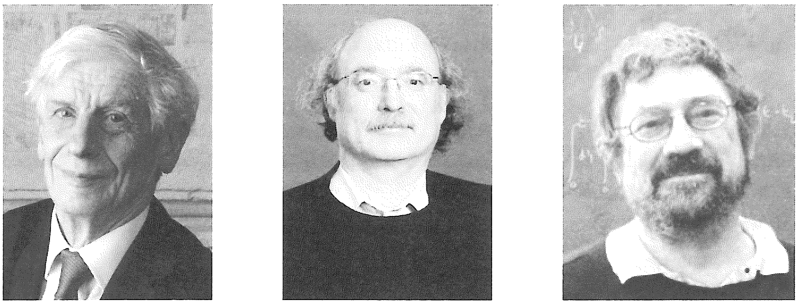
Topološka stanja i topološki prijelazi

Batistić, Ivo

Topološka stanja i topološki prijelazi

Ivo Batistić[1]

Dobitnici Nobelove nagrade iz fizike u 2016. su trojica teorijskih fizičara: D. J. Thouless, F. D. M. Haldane i J. M. Kosterlitz.

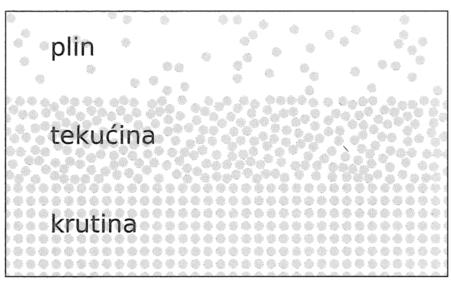


Slika 1. Dobitnici Nobelove nagrade iz fizike u 2016.

Nagrada je dodijeljena za predviđanje i otkriće topoloških stanja i topoloških prijelaza u tvarima. Obrazloženje Nobelovog odbora neupućenoj osobi budi zbunjenost i radoznalost, jer "topološka stanja i topološki prijelazi" nisu dio gradiva koji se uči u školama, pa čak ni na fakultetima. Doista, što su to ovi fizičari predvidjeli? Da bi mogli bolje razumjeti njihov doprinos potrebno je napraviti kratki uvod u teoriju faznih prijelaza.

Fazna stanja i fazni prijelazi

Ono što svi poznajemo i što se u školama uči su agregatna stanja: plinovito, tekuće i kruto – slikovito prikazani na slici 2.



Slika 2. Agregatna stanja.

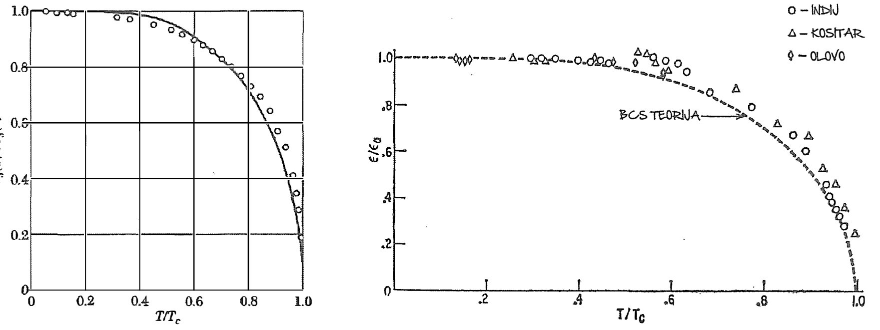
Međutim, pojam agregatnih stanja je previše ograničen da bi se mogla opisati *sva stanja* u kojima se tvari mogu nalaziti. U kojem se to stanju nalazi komad željeza koji je magnetičan? Ili isti komad željeza koji prestaje biti magnetičan na temperaturama višim od 1043 K. Ili neki materijal koji je supravodljiv na niskim temperaturama, dok je na višim temperaturama obični metal.

[1] Autor je profesor na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `ivo@phy.hr`

Osor Barišić i Petar Popčević pažljivo su recenzirali ovaj članak.

U prirodi nalazimo tvari u bezbroj različitih stanja, i pri tome, promjenom vanjskih uvjeta (temperature tlaka magnetskog polja ili nečeg drugog) možemo izazvati prijelaz iz jednog stanja u drugo. Uobičajeno je stanja u kojima se tvari nalaze, i prijelaze između njih, nazivati *faznim stanjima* i *faznim prijelazima*.

Na slici 3 su ilustrirane pojave magnetskog i supravodljivog stanja.

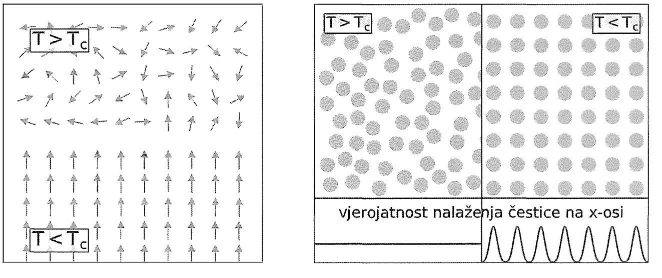


Slika 3. Na lijevoj strani prikazana je magnetizacija nikla kao funkcija temperature [1], a na desnoj temperaturna ovisnost energijskog procjepa u supravodljivoj fazi za In, Sn i Pb [2].

Iako se radi o sasvim različitim fazama i faznim prijelazima, uočavamo da u oba slučaja imamo gotovo isto temperaturno ponašanje. Razlog tome je da se mnogi fazni prijelazi mogu opisati s jednom jedinom teorijom koju je formulirao L. D. Landau[2] 1937. godine [3]. Ovdje ćemo je navesti u pojednostavnjenoj formi:

Na temperaturama nižim od temperature prijelaza T_c tvari prelaze u stanja reducirane simetrije.

Ilustrirajmo tu tvrdnju na dva primjera.



Slika 4. Na lijevoj strani je prikaz uređenog i neuređenog feromagneta, a na desnoj prikaz uređivanja tekućine u kruto stanje.

Na lijevoj strani slike 4 ilustrirano je uspostavljanje feromagnetskog uređenja. Strelice prikazuju atomske/ molekularne magnetske momente koji se nalaze u pravilnoj kristalnoj rešetki. Na temperaturi višoj od temperature prijelaza, magnetski momenti imaju nasumični smjer pa je magnetizacija sustava jednaka nuli. To je situacija koja odgovara nemagnetskoj fazi. Ovdje su svi smjerovi jednako vjerojatni i ekvivalentni, pa je sustav sferno simetričan. Na temperaturama manjim od T_c magnetski momenti svi zauzimaju isti smjer, a magnetizacija postaje različita od nule. Sustav se nalazi u

[2] L. D. Landau dobitnik je Nobelove nagrade iz fizike 1962. godine.

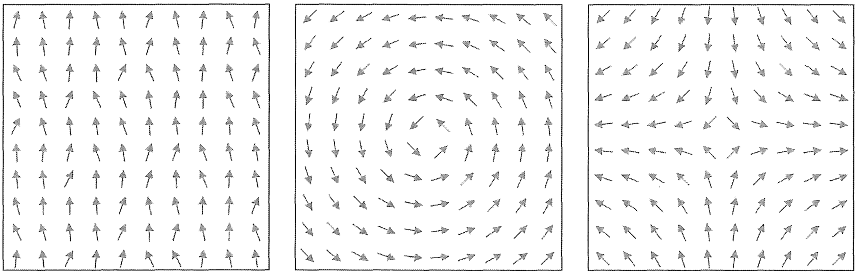
feromagnetskom stanju u kojem postoji preferirani smjer: smjer magnetizacije i smjer magnetskih momenata. To je stanje u kojem je slomljena sferna simetrija.

Na desnoj strani slike 4 prikazano je uređivanje tekućine u krutninu. Prateći položaje atoma projicirane na horizontalni smjer, vidimo da su u neuređenom stanju, $T > T_c$, svi položaji jednako vjerojatni tj. međusobno su ekvivalentni. Sustav je translacijski simetričan. S druge strane, u uređenom krutom stanju neki položaji imaju veću vjerojatnost od drugih. To je stanje slomljene pune translacijske simetrije.

I svi ostali fazni prijelazi povezani su s razbijanjem neke od simetrija koje tijelo ima na višim temperaturama. Iz tog razloga svi ovakvi fazni prijelazi imaju jedan te isti matematički opis koji vodi na isto temperaturno ponašanje ilustrirano primjerima na slici 3.

Ipak Landauovu teoriju faznih prijelaza potrebno je nadograditi. Naime u uređenom stanju atomi nisu zamrznuti u idealnim položajima niti su atomski magnetski momenti zamrznuti u istom smjeru. Na konačnoj temperaturi atomi titraju oko ravnotežnih pozicija i ta titranja nazivamo *fononskim pobuđenjima*. Isto tako, atomski magnetski momenti titraju oko preferiranog smjera te ta titranja zovemo *spinskim pobuđenjima*. Ova titranja (fluktuacije) mogu biti toliko jaka da potpuno onemoguće pojavu uređenog stanja niže simetrije popraćenu odgovarajućim faznim prijelazom. Učinak titranja reduciran je prisustvom većeg broja susjednih atoma/ atomskih magnetskih momenata. Stoga u trodimenzionalnim sustavima (3D) gdje postoji veliki broj *susjeda* nalazimo fazne prijelaze, a u jednodimenzionalnim sustavima (1D) uređeno stanje se zbog fluktuacija *ne uspostavlja* dokle god je temperatura konačna.

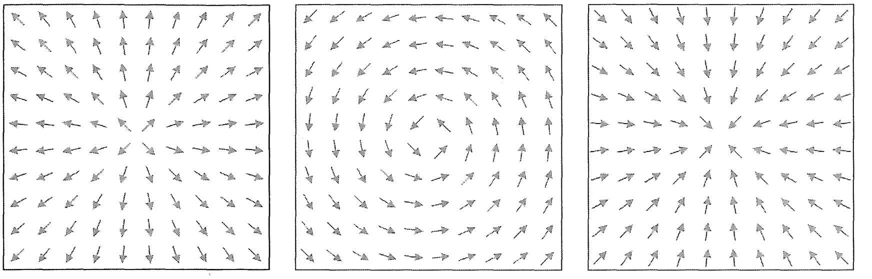
XY model i KT prijelaz



Slika 5. Pobuđenja u XY modelu: spinski valovi (fluktuacije) lijevo, te topološka pobuđenja u sredini i desno.

Godine 1973. Kosterlitz i Thouless su objavili rad [4] u kojem su istražili pojavu faznog prijelaza u dvodimenzionalnom (2D) XY modelu. XY model je sustav izgrađen od malih magnetića koji su pravilno raspoređeni u kristalnu rešetku i pri čemu magnetići mogu rotirati samo vodoravno unutar ravnine u kojoj se nalaze. Između susjednih magnetića postoji međudjelovanje takvo da je energijski najpovoljniji položaj u kojem su magnetići paralelni jedan drugome. Osim spinskih titranja, lijeva strana na slici 5, u XY modelu postoje i dvije vrste topoloških pobuđenja prikazanih u sredini i na desnoj strani slike.

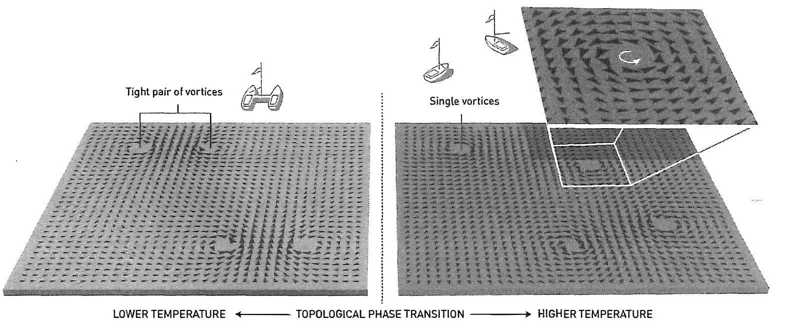
Topološka pobuđenja razlikuju se po tome što ih nije moguće prevesti jedno u drugo krutom rotacijom svih magnetića za isti kut. Primjer topološki ekvivalentnih pobuđenja je prikazan na slici 6 na kojoj se jedno stanje dobije iz drugog rotacijom svih magnetića za kut od 90°.



Slika 6. Topološki ekvivalentna pobuđenja. Jedno pobuđenje dobije se od drugog uzastopnim rotacijama svih magnetića za 90°.

Zanimljivo je da se topološka pobuđenja ponašaju kao kulonski nabijene čestice. Naime, energiju XY modela moguće je prikazati kao zbroj energija stvaranja topoloških pobuđenja plus energija njihovog kulonskog međudjelovanja plus energija spinskih fluktuacija.

Kosterlitz i Thouless problem XY modela su riješili metodom poznatom kao *renormalizacijska grupa*[3]. Oni su našli da u XY modelu *postoji fazni prijelaz* na konačnoj temperaturi, ali da to nije prijelaz u kojem dolazi do slamanja simetrije. Na temperaturi prijelaza dolazi do *sparivanja topoloških pobuđenja* različitog tipa. Pojava sparivanja ilustrirana je na slici 7.



Slika 7. Topološki fazni prijelaz u XY modelu u kojem dolazi do sparivanja topoloških pobuđenja. Slika je posuđena s internetske stranice Nobelovog odbora.

Ovaj fazni prijelaz se ne uklapa u Landauovu teoriju faznih prijelaza. Do njegovog otkrića vladalo je opće mišljenje među fizičarima da se svi fazni prijelazi mogu opisati Landauovom teorijom. Međutim, ovo je bila prva indikacija da Landauova teorija nije kompletna – ona ne obuhvaća topološke prijelaze i topološka stanja.

Iako (2D) XY model izgleda kao sasvim apstraktni problem koji nema dodira sa stvarnošću, to ipak nije tako. Da bi mogli opisati složene sustave, fizičari znaju pojednostaviti problem koliko god se može, ali da pri tome zadrže u njemu glavne odlike originalnog problema za opis dane pojave. To vrijedi i za XY model. Njega možemo promatrati kao vrlo pojednostavnjenu sliku tankog sloja suprafluidne tekućine. To je ona

[3] Metodu renormalizacijske grupe izumio je K. G. Wilson za što je 1982. dobio Nobelovu nagradu.

u kojoj ne postoji viskoznost – trenje između slojeva tekućine koji se gibaju različitim brzinama. Tako primjerice ^{4}He prelazi u suprafluidno stanje na temperaturama manjim od 2.172 K. Provedeni su i eksperimenti na tankim slojevima suprafluidnog ^{4}He i rezultati se u potpunosti slažu s predviđanjima koja su dobili Kosterlitz i Thouless u svom radu [4].

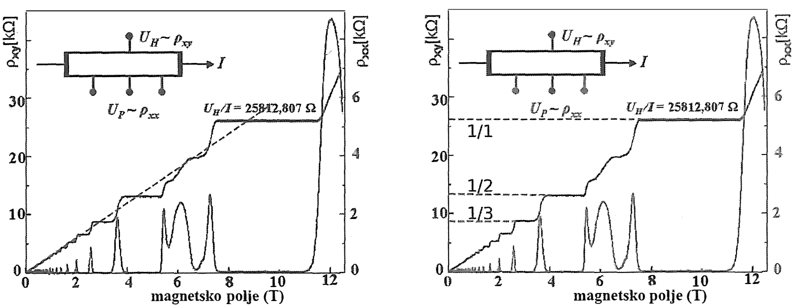
Kvantni Hall efekt

Druga indikacija nekompletnosti Landauove teorije bilo je otkriće *kvantnog Hallovog efekta*, skraćeno na engleskom QHE. Godine 1980. Klitzing[4] i njegova istraživačka grupa objavili su rad [5] u kojem su mjerili Hallov efekt u (2D) elektronskom plinu na temperaturama manjim od 10 K i pri jakom magnetskom polju do 16 T. (2D) elektronski plin je dobiven u graničnom sloju između dva različita poluvodiča prislonjena jedan uz drugi. Budući da su koncentracije i kemijski potencijali elektrona u poluvodičima različiti, dio elektrona iz jednog poluvodiča se prelio u drugi. Međutim preliveni elektroni nisu se mogli proširiti u unutrašnjost drugog poluvodiča, jer ih je stvoreno električno polje zalijepilo za graničnu površinu. To je situacija koja se pojavljuje i u poluvodičkim diodama. Napomenimo da je cijeli poluvodički spoj po dimenzijama manji od 1 mm.

Općenito, Hallov efekt je jako važna eksperimentalna metoda. U njoj se kroz materijal propušta električna struja u jednom smjeru, u smjeru okomitom na struju primjenjuje se magnetsko polje, a u drugom okomitom se mjeri napon. Ovaj "okomiti na struju" napon je jednak nuli kada nema magnetskog polja. Međutim, s uključenim magnetskim poljem, on postaje različit od nule. Ova pojava se može zapisati u obliku Ohmovog zakona:

$$V_\perp = R_\perp \cdot I, \quad \text{gdje je} \quad R_\perp \sim B.$$

Dakle očekujemo da će transverzalni otpor, $R_\perp$, biti razmjeran primijenjenom magnetskom polju.



Slika 8. Rezultati Klitzingovih mjerenja Hallovog efekta za (2D) elektronski plin. Crtkana linija na lijevoj strani pokazuje očekivano ponašanje koje odudara od izmjerenog, dok crtkane linije na desnoj strani indiciraju visinu stepenica. Prikaz rezultata je preuzet iz rada [6].

Na slikama 8 prikazani su rezultati Klitzingovog mjerenja transverzalnog otpora, $R_\perp$ kao funkcije magnetskog polja B. Mjerenja otpora pokazuju neobično stepenasto

[4] K. von Klitzing je dobio Nobelovu nagradu za otkriće QHE 1985. godine.

ponašanje umjesto očekivano linearnog, skiciranog na lijevoj strani crtkanom linijom. Osim toga visina stepenica opada kao $1/n$ gdje je n prirodni broj, što je ilustrirano na desnoj strani slike 8 crtkanim linijama.

U stvari, postoji još jedan neobični rezultat, a to je visina najviše stepenice, koja je slučajno ili ne:

$$R_{\perp}(\text{najviša stepenica}) = 25\,812.807\ \Omega \overset{?}{\approx} \frac{h}{e^2}$$

jednaka omjeru dviju fundamentalnih konstanti.

Ovi čudni rezultati izazvali su lavinu teorijskih istraživanja o prirodi ovih stepenica. Presudni prodor u tim nastojanjima dali su radovi Thoulessa i njegovih suradnika [7, 8]. Thouless je pokazao da je:

$$R_{\perp}(\text{na platou stepenica}) = \frac{h}{e^2} \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{gdje je} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Dapače, pokazao je da taj rezultat neovisan o obliku uzorka, nečistoćama i defektima u materijalu, jer je on posljedica topoloških svojstava kvantnog stanja u kojem se elektronski plin nalazi. A stepenice, prijelazi između platoa su, u stvari, prijelazi između različitih topoloških stanja.

S obzirom da je n u izrazu za $R_{\perp}$ cijeli broj (prirodni broj), Klitzingovo otkriće se još naziva i *cjelobrojni kvantni Hallov efekt*. Dvije godine iza, 1982., otkriven je i tzv. *frakcijski kvantni Hallov efekt*[5] [9] u kojem n može biti i razlomak. Danas se smatra da su pojave cjelobrojnog i frakcijskog kvantnog Hallovog efekta primjeri pojave topoloških faza/ stanja izazvanih primjenom jakog magnetskog polja. Pri tome prijelazi između topoloških faza nisu simetrijske prirode kao u Landauovoj teoriji faznih prijelaza. Egzistencija topoloških stanja predstavlja fundamentalno otkriće koje proširuje naše vidike i samo razumijevanje prirode.

Topološka stanja karakterizirana su brojevima koje zovemo *topološke invarijante*. Radi se o veličinama koje su invarijantne na male kontinuirane promjene topološkog stanja. Sva stanja koja se dobiju jedno iz drugog malim kontinuiranim promjenama smatraju se međusobno ekvivalentnima, slično ekvivalenciji topoloških pobuđenja u XY modelu, vidi sliku 6. U slučaju topoloških stanja koja se pojavljuju u kvantnom Hallovom efektu topološka invarijanta je tzv. Chernov broj koji ima i svoju geometrijsku interpretaciju.

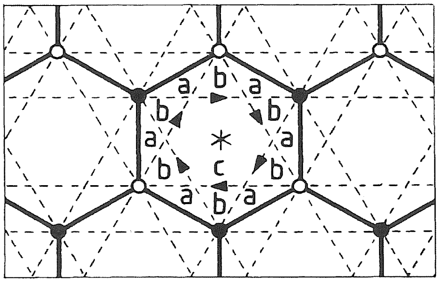
Haldaneov model

Jesu li topološka stanja isključivo povezana s jakim magnetskim poljima i (2D) sustavima? Na prvo pitanje odgovor je dao F. D. M. Haldane u radu [10] iz 1988. godine. U tom radu on je dao konceptualni primjer (2D) rešetke, slika 9, u kojoj se elektroni gibaju preskakujući s jednog čvora rešetke na susjedni ili na sljedećeg susjeda.

Haldane je tu vrstu rešetke nazvao *(2D) grafitna rešetka* prema alotropskoj modifikaciji ugljika, grafitu, koji je izgrađen od slične, ali (3D) rešetke. Danas tu rešetku prepoznajemo kao *grafen*[6]: monoatomski sloj ugljikovih atoma raspoređenih u formi saća koji još, u ono vrijeme 1988. godine, nije bio izoliran. U modelu se pojavljuje

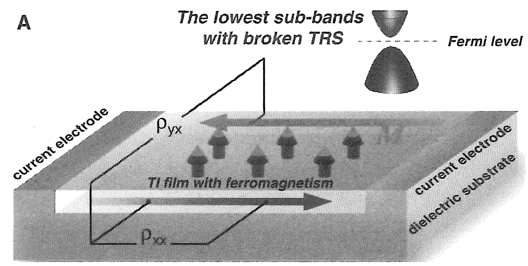
[5] R. B. Laughlin, H. L. Störmer i D. C. Tsui su 1998. dobili Nobelovu nagradu za otkriće frakcijskog Hallovog efekta.
[6] A. Geim i K. Novoselov su 2010. dobili Nobelovu nagradu za otkriće grafena.

nekoliko parametara, i zavisno od njihovih vrijednosti, elektroni se nalaze u topološkom stanju s Chernovim brojem različitim od nule, ili u običnom stanju kada je Chernov broj jednak nuli.



Slika 9. Rešetka tipa grafena kakvu je Haldane predložio kao koncept u kojem je moguće imati topološka stanja i bez magnetskog polja. Slika je posuđena iz Haldaneovog članka [10].

Rešetke grafenskog tipa moguće je eksperimentalno ostvariti i polažući sloj jednog materijala na površinu drugog.



Slika 10. Kvantni Hallov efekt bez magnetskog polja u magnetskom topološkom izolatoru. Slika je posuđena iz rada [11].

Tako je 2013. godine i napravljen mali poluvodički uređaj, slika 10, s tzv. *magnetskim topološkim izolatorom* $Cr_{0.15}(Bi,Sb)_{1.85}Te_3$ [11] pomoću kojeg su konačno potvrđena Haldaneova predviđanja o kvantnom Hallovom efektu bez magnetskog polja.

Topološki izolatori

Topološka stanja su izolatorska pa onda sustave u kojima se ona pojavljuju još zovemo i *topološkim izolatorima.* C. L. Kane i E. J. Mele su predložili novu skupinu topoloških izolatora bez primjene magnetskog polja, baziranih na topološkoj invarijanti $\mathbb{Z}_2$ [7] u radovima [12], [13] iz 2005. Dvije godine poslije, 2007., predložena je teorija (3D) topoloških izolatora [14]. Njihova predviđanja vrlo brzo su eksperimentalno ostvarena i potvrđena. Štoviše, pronađeni su materijali koji se nalaze u topološkim stanjima i na sobnim temperaturama [15].

---

[7] $\mathbb{Z}_2$ – skup "cijelih brojeva" sa samo dva člana.

Ako topološki izolator graniči s materijalom u normalnom stanju, ili s vakuumom, ili materijalom koji je u drugom topološkom stanju, granični sloj koji ih razdvaja je metal s vrlo specifičnim svojstvima. Struje koje teku u graničnom sloju su magnetski polarizirane, s time da njihova magnetska polarizacija ovisi o smjeru struje. Riječ je o relativističkom efektu koji povezuje spin (magnetske stupnjeve slobode) s orbitalnim gibanjem čestica. Napomenimo da *obična struja* koju svakodnevno koristimo nije magnetski polarizirana jer čestice u njoj imaju sve moguće magnetske orijentacije. Ova specifična metalna svojstva graničnog sloja je jedna od karakteristika topoloških stanja i po njima možemo eksperimentalno identificirati postojanje topološkog stanja. $\mathbb{Z}_2$ topološke izolatore obično identificiramo pomoću eksperimentalne tehnike koju skraćeno nazivamo ARPES. Radi se ustvari o fotoelektričnom efektu[8] u kojem se, osim energije izlaznih elektrona, mjeri i njihov impuls. Na temelju tih podataka, može se rekonstruirati kako energija elektrona u materijalu ovisi o njihovom impulsu. Ovisnost energije o impulsu može biti prilično složena i različita je za različite materijale.

Danas se ulažu veliki napori u istraživanju topoloških stanja. Istraživanja su motivirana važnošću boljeg razumijevanja svijeta koji nas okružuje, ali također i s mogućnošću potencijalne primjene. U ovom trenutku teško je predvidjeti moguće primjene. Nalazimo se u poziciji M. Faradaya koji je istraživao elektricitet i magnetizam, te mu je teško bilo domisliti se slike današnjeg svijeta s mnogobrojnim električnim spravama, radiom, televizijom, telekomunikacijskim satelitima i internetom. Naravno mogli bi spekulirati o elektronici baziranoj na magnetski polariziranim strujama, koju još zovemo *spintronika*, ili izradi dostupnog kvantnog računala, koje po svojim svojstvima i mogućnostima bitno nadilazi današnja računala. Ali najistinitije bi bilo kazati da će uređaji budućnosti biti puno puno čudniji od bilo čega što ovdje možemo navesti, i da će u njihovoj izradi materijali u topološkim stanjima sigurno imati važnu ulogu.

Literatura

[1] P. Weiss, R. Forrer, Ann. Phys. (Paris), 1926, 5, 153.

[2] I. Giaever, K. Megerle, *Study of Superconductors by Electron Tunneling*, Phys. Rev., 1961, 122, 1101–1111.

[3] L. D. Landau, *On the Theory of Phase Transitions*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1937, 7, 19–32.

[4] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems*, Journal of Physics C: Solid State Physics 1973, 6, 1181.

[5] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. 1980, 45, 494–497.

[6] K. von Klitzing, *25 Years of Quantum Hall Effect (QHE) A Personal View on the Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect*, The Quantum Hall Effect: Poincaré Seminar 2004, (ur.: B. Douçot, V. Pasquier, B. Duplantier, V. Rivasseau), Birkhäuser Basel, Basel, 2005, str. 1–21.

[7] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. 1982, 49, 405–408.

[8] Q. Niu, D. J. Thouless, Y.-S. Wu, *Quantized Hall conductance as a topological invariant*, Phys. Rev. B 1985, 31, 3372–3377.

[8] A. Einstein je nagrađen Nobelovom nagradom godine 1921. za objašnjenje fotoelektričnog efekta.

[9] D. C. TSUI, H. L. STORMER, A. C. GOSSARD,, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. 1982, 48, 1559–1562.

[10] F. D. M. HALDANE, *Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly"*, Phys. Rev. Lett. 1988, 61, 2015–2018.

[11] C.-Z. CHANG, J. ZHANG, X. FENG, J. SHEN, Z. ZHANG, M. GUO, K. LI, Y. OU, P. WEI, L.-L. WANG, Z.-Q. JI, Y. FENG, S. JI, X. CHEN, J. JIA, X. DAI, Z. FANG, S.-C. ZHANG, K. HE, Y. WANG, L. LU, X.-C. MA, Q.-K. XUE, *Experimental Observation of the Quantum Anomalous Hall Effect in a Magnetic Topological Insulator*, Science 2013, 340, 167–170.

[12] C. L. KANE, E. J. MELE, *Z_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. 2005, 95, 146802.

[13] C. L. KANE, E. J. MELE, *Quantum Spin Hall Effect in Graphene*, Phys. Rev. Lett. 2005, 95, 226801.

[14] L. FU, C. L. KANE, E. J. MELE, *Topological Insulators in Three Dimensions*, Phys. Rev. Lett. 2007, 98, 106803.

[15] Y. XIA, D. QIAN, D. HSIEH, L. WRAY, A. PAL, H. LIN, A. BANSIL, D. GRAUER, Y. S. HOR, R. J. CAVA, M. Z. HASAN, *Observation of a large-gap topological-insulator class with a single Dirac cone on the surface*, Nat Phys 2009, 5, 398–402.

⋆⋆⋆

Rekurzivna formula za sume k-tih potencija

Kako odrediti formule za sume k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k?$$

Lako odredimo formule za prvih nekoliko suma:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n \\
S_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Lako se može provjeriti da vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$\binom{k+1}{1} S_k(n) + \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) + \ldots + \binom{k+1}{k} S_1(n) + S_0(n) = (n+1)^{k+1} - 1.$$

Ona omogućuje da se redom određuju formule za sume $S_k(n)$.