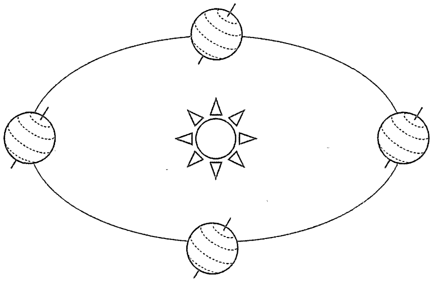
Trajanje dana

Žugec, Petar

Trajanje dana

Petar Žugec[1]



Slika 1.

Duljina dana – u smislu trajanja dnevnog svjetla – od važnosti je gotovo u svim ljudskim aktivnostima. Svjesni smo je u svako doba godine, a posebno oko prvog dana ljeta i zime, kad su dani najdulji ili najkraći, te oko prvog dana proljeća i jeseni, kad se duljina dana najbrže mijenja. Da se duljina dana kroz godinu uopće mijenja ponajviše je uzrokovano dvjema činjenicama: (1) Zemljina rotacijska os nije okomita na ravninu gibanja oko Sunca; (2) tijekom revolucije oko Sunca[2] Zemljina rotacijska os ne mijenja svoje usmjerenje u prostoru (ne zakreće prema Suncu; slika 1), što je uzrokovano očuvanjem kutne količine gibanja kao vektorske veličine. Istina je da Zemljina rotacijska os polagano i blago mijenja svoje usmjerenje u prostoru *precesijom* i *nutacijom*, međutim unutar vremenskog raspona jednog dana (24 h) ti efekti su potpuno zanemarivi. Trenutno, nagib Zemljine rotacijske osi s obzirom na njenu revolucijsku os (tj. na okomicu ravnine gibanja oko Sunca) iznosi $\Theta = 23.4^\circ$. Primijetimo i sljedeće: čak i kad bi Zemljina rotacijska i revolucijska os bile paralelne, duljina dana kroz godinu još uvijek bi varirala zbog činjenice da se planeti oko svoje zvijezde općenito ne gibaju po kružnicama, već elipsama (*prvi Keplerov zakon*). Stoga promjena Zemljine udaljenosti od Sunca dovodi do promjene kuta upada Sunčevih zraka na Zemljin obod gdje dolazi do prijelaza između dana i noći. No čak i više od toga! Prema *drugom Keplerovom zakonu* Zemlja se zbog očuvanja kutne količine gibanja brže giba kad je bliža Suncu, a sporije kad je dalja. Ovisno o dobu godine (tj. blizini Suncu), Zemlja tijekom jednog dana prebriše različite kutove oko Sunca, što također iz čisto geometrijskih razloga dovodi do promjene u duljini dnevnog svjetla.

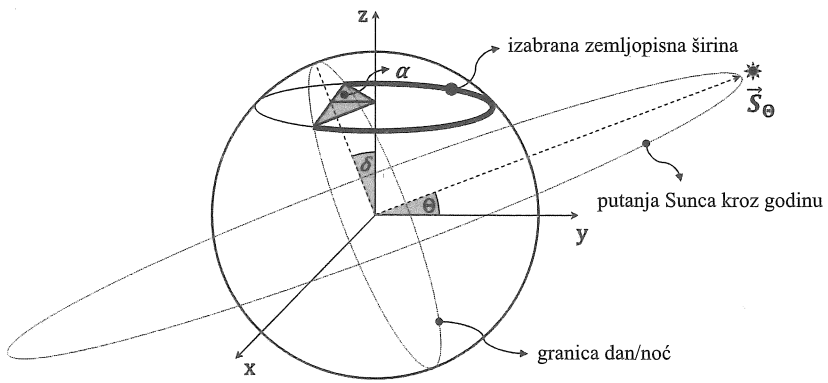
Cilj ovog članka je izvesti ovisnost duljine dana o kalendarskom trenutku i položaju na Zemlji. Drugim riječima, o promatračevu položaju u vremenu i prostoru. Budući da se trend duljine dana ponavlja iz godine u godinu, očito se radi o nekoj oscilatornoj, tj. periodičkoj funkciji vremena. Sasvim prirodno, prvo se nameće ideja da bi ta ovisnost mogla ili čak trebala biti (ko)sinusna. Međutim, dovoljno je prisjetiti se polarnog dana i polarne noći kako bismo se brzo razuvjerili. Svima nam je poznato da na polovima dan i noć u kontinuitetu traju po 6 mjeseci. Dakle, vremenska ovisnost duljine dana ondje nije glatka, već diskontinuirana funkcija, sastavljena od dvaju konstantnih doprinosa: 0 h (polarna noć) tijekom 6 mjeseci i 24 h (polarni dan) tijekom sljedećih 6 mjeseci. A kako prijelaz između trajanja dana na polovima i bilo gdje drugdje na Zemlji mora biti kontinuiran, zaključujemo da ta ovisnost ne može svugdje biti jednostavna (ko)sinusna. Štoviše, isti argument kontinuiranog prijelaza daje nam naslutiti da nije nigdje! Ali to tek imamo vidjeti jer je pitanje duljine dana upravo postalo izazovno, zanimljivo i vrijedno nalaženja odgovora.

---

[1] Autor je docent fizike na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta pzugec@phy.hr

[2] Primijetimo korištenje dvaju distinktnih pojmova za dva oblika Zemljinog kružnog gibanja: *rotacija* je vrtnja Zemlje oko vlastite osi, dok je *revolucija* gibanje Zemlje oko Sunca. U tom smislu, glavni uzrok promjenjivoj duljini dana je to što Zemljina rotacijska i revolucijska os nisu paralelne.

Od brojnih efekata koji u većoj ili manjoj mjeri utječu na duljinu dana, ovdje ćemo se zadržati samo na najvažnijem za Zemlju, dok ćemo se ostalih samo dotaknuti na kraju. A osnovni doprinos duljini dana na Zemlji dolazi zbog same Zemljine rotacije. Za promatrača na Zemlji pitanje je: koliko će vremena provesti na suncu[3] između svitanja zore (izlaska Sunca) i spuštanja noći (zalaska Sunca)? U prvoj aproksimaciji i Sunce i Zemlju tretiramo kao statičke objekte u svemiru, unaprijed znajući da je kut koji Zemlja prebriše oko Sunca tijekom 24 sata (u prosjeku 1/365 punog kuta od 360°) zanemariv prema punom kutu za koji se Zemlja zakrene oko vlastite osi. Sad se postavlja pitanje koji je sustav najbolje izabrati za opis geometrije problema i kako u njemu postaviti koordinatni sustav? Dobar izbor je sustav Zemlje, s time da se ishodište kooridnatnog sustava postavi u središte Zemlje, a z-os kartezijevog sustava usmjeri duž njenje rotacijske osi. Ovakva geometrija prikazana je slikom 2. U ovakvom sustavu, naravno, Sunce kruži oko Zemlje, što je na slici 2 i prikazano krajnje pojednostavnjenom skicom. Valja primijetiti da ravnina Sunčevog gibanja sada siječe koordinatnu xy-ravninu upravo pod kutom $\Theta = 23.4°$, što je ranije spomenuti nagib Zemljine rotacijske osi.



Slika 2.

Da bismo odredli duljinu trajanja dnevnog svjetla, moramo naći koliki je dio oboda Zemlje definiranog izabranom zemljopisnom širinom izložen suncu tijekom 24 sata (zadebljani kružni luk sa slike 2). Kao što slika 2 unaprijed sugerira, kut koji ćemo prvo morati izračunati je α sa zamračene strane Zemlje, dok će kut zatvoren osvjetljenim lukom odgovarati ostatku do punog kuta: $2\pi - 2\alpha$. U tu svrhu prvo moramo odrediti kut δ koji ravnina razgraničenja dana i noći zatvara s rotacijskom osi Zemlje, tj. sa z-osi koordinatnog sustava[4]. Iz prikazane geometrije jasno je da taj kut odgovara onome koji spojnica Sunce-Zemlja $\vec{S}_\Theta$ zatvara s xy-ravninom te da uvijek vrijedi:

$$\delta + \sphericalangle(\vec{S}_\Theta, \hat{z}) = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Da bismo odredili položaj Sunca $\vec{S}_\Theta$ u bilo kojem trenutku u godini, zamislimo da smo u koordinatnom sustavu 'S' čije je ishodište i dalje u središtu Zemlje, no u kojem

---

[3] Trebalo bi biti suvišno isticati da je *Sunce* zvijezda, a *sunce* Sunčeva svjetlost.

[4] Radi jasnoće i jednostavnosti crteža slika 2 prikazuje vrlo specifičan slučaj koji bi mogao lažno sugerirati da je $\delta = \Theta$. Da to općenito ne vrijedi najlakše se vidi iz slučaja kad se Sunce nađe na x-osi, a kada očito vrijedi: $\delta = 0$.

putanja Sunca leži u pripadnoj xy-ravnini. Slika 2 odmah nam daje uočiti da je s obzirom na početni sustav 'Z' u koji smo postavili Zemlju, sustav 'S' samo zarotiran oko x-osi za kut Θ. Pri tome je prednost sustava 'S' u tome što nam je vremenska ovisnost koordinata putanje $\vec{S}_0$ odmah poznata:

$$\vec{S}_0 = \begin{bmatrix} R_S \cos\Omega(t-t_0) \\ R_S \sin\Omega(t-t_0) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

R_S je radijus Sunčeve putanje za koju, radi jednostavnosti, smatramo da je kružna, umjesto eliptične. $\Omega = 2\pi/T_{\text{god}}$ je kutna brzina Sunca oko Zemlje (odnosno Zemlje oko Sunca) uz $T_{\text{god}} = 365$ d, dok je t_0 neki početni trenutak u kojem se Sunce nalazi na pozitivnom dijelu x-osi. Budući da su sustavi 'S' i 'Z' vezani jednostavnom rotacijom oko x-osi, putanju $\vec{S}_\Theta$ u sustavu 'Z' lako nalazimo iz $\vec{S}_0$ primjenom matrice rotacije oko x-osi:

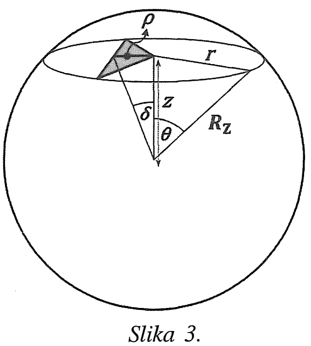
$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

odnosno:

$$\vec{S}_\Theta = \mathbf{R_x}\vec{S}_0 = \begin{bmatrix} R_S \cos\Omega(t-t_0) \\ R_S \cos\Theta \sin\Omega(t-t_0) \\ R_S \sin\Theta \sin\Omega(t-t_0) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Primjenom pravila $\vec{S}_\Theta \cdot \hat{z} = |\vec{S}_\Theta||\hat{z}| \cos \sphericalangle(\vec{S}_\Theta, \hat{z})$ za skalarni produkt vektora, odmah znamo izračunati kut $\sphericalangle(\vec{S}_\Theta, \hat{z})$ iz izraza (1), pri čemu radi jednostavnosti kasnijeg računa uvodimo pokratu $\varepsilon \equiv \sphericalangle(\vec{S}_\Theta, \hat{z})$:

$$\cos\varepsilon = \frac{\vec{S}_\Theta \cdot \hat{z}}{|\vec{S}_\Theta||\hat{z}|} = \sin\Theta \sin\Omega(t-t_0). \tag{5}$$



Slika 3.

Dalje se oslanjamo na sliku 3, koja prikazuje Zemlju na isti način kao i slika 2, ali zasebno kako nijedna slika ne bi ispala pretrpanom. Izravnu vezu s kutom α sa slike 2 sada uspostavlja duljina ρ sa slike 3, koju sada moramo izračunati. Parametrizirajmo izabranu zemljopisnu širinu konvencionalno definiranim sfernim kutom θ, koji odgovara kutnom otklonu od z-osi. Kao što vidimo sa slike 3, udaljenost z između središta Zemlje i ravnine određene danom zemljopisnom širinom jednaka je:

$$z = R_Z \cos\theta \tag{6}$$

uz R_Z kao radijus Zemlje. Radijus r oboda Zemlje pod kutom θ jednak je:

$$r = R_Z \sin\theta. \tag{7}$$

Za udaljenost ρ zamračenog dijela Zemlje od z-osi vrijedi:

$$\rho = z \tan\delta, \tag{8}$$

a za kut α sa slike 2 (koji odgovara jedome od osjenčanih trokuta):

$$\cos\alpha = \frac{\rho}{r}. \tag{9}$$

Uvrštavanjem (6–8) u (9) slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\tan\delta}{\tan\theta}. \tag{10}$$

Sada ostaje prisjetiti se veze $\delta + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$ iz (1), kako bismo se okoristili rezultatom (5), uz malu pomoć trigonometrijskih identiteta:

$$\tan\delta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon}}. \tag{11}$$

Još ćemo samo redefinirati parametrizaciju zemljopisne širine prijelazom s kuta θ na kut $\vartheta \equiv= \frac{\pi}{2} - \theta$, iz jednostavnog razloga što je to uobičajena parametrizacija zemljopisne širine u geografiji. Pri tome se ekvator nalazi na $\vartheta = 0°$, Sjeverni pol na $\vartheta = +90°$, a Južni pol na $\vartheta = -90°$. Izravno slijedi: $\tan\theta = \frac{1}{\tan\vartheta}$. Skupljanjem svih rezultata unutar (10), preostaje:

$$\cos\alpha = \frac{\tan\vartheta\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon}}. \tag{12}$$

Konačno, prisjetimo se da se u dano doba godine t duljina dnevnog svjetla $T(t,\vartheta)$ prema duljini punog dana ($T_{\text{dan}} = 24$ h) odnosi kao raspon osvjetljenog luka sa slike 2 prema punom kutu:

$$\frac{T(t,\vartheta)}{T_{\text{dan}}} = \frac{2\pi - 2\alpha}{2\pi} \tag{13}$$

odakle za osnovni doprinos duljini dana izravno dobivamo:

$$T(t,\vartheta) = T_{\text{dan}}\left[1 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{\tan\vartheta\sin\Theta\sin\Omega(t-t_0)}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Omega(t-t_0)}}\right)\right]. \tag{14}$$

Još ostaje odrediti početni trenutak t_0 kad se Sunce nalazi na pozitivnom dijelu x-osi. Promotrimo li pobliže geometriju sa slike 2, možemo zaključiti da taj trenutak odgovara prvom danu proljeća. Kako je u neprijestupnoj godini 21. ožujka osamdeseti dan po redu, slijedi da je $t_0 = 79$ d (jer je za prvi dan $t_0 = 0$).

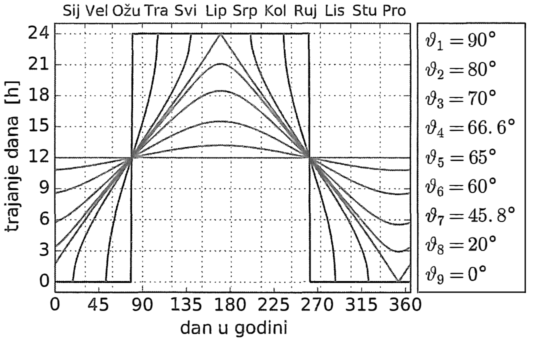
Kako bismo ručno natjerali izraz (14) da vraća vrijednosti između 0 h i 24 h – i uopće osigurali da su sve vrijednosti realne – potrebno ga je ponešto prilagoditi. Kako je upravo $T_{\text{dan}} = 24$ h, a funkcija arkus kosinus vraća vrijednosti s intervala $[0,\pi]$, odmah vidimo da će se sve vrijednosti iz (14) po konstrukciji naći između 0 h i 24 h, ali samo dok smo u području gdje je arkus kosinus realan, odnosno sve dok je njegov argument χ:

$$\chi \equiv \frac{\tan\vartheta\sin\Theta\sin\Omega(t-t_0)}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\sin^2\Omega(t-t_0)}} \tag{15}$$

unutar dozvoljenog područja $\chi \in [-1,1]$, tj. $|\chi| \leqslant 1$. Pri tome vidimo da za graničnu vrijednost $\chi = -1$ izraz (14) predviđa 0 h, dok se 24 h postiže za $\chi = 1$. Stoga ga za izvrjednjavanje uređujemo na način:

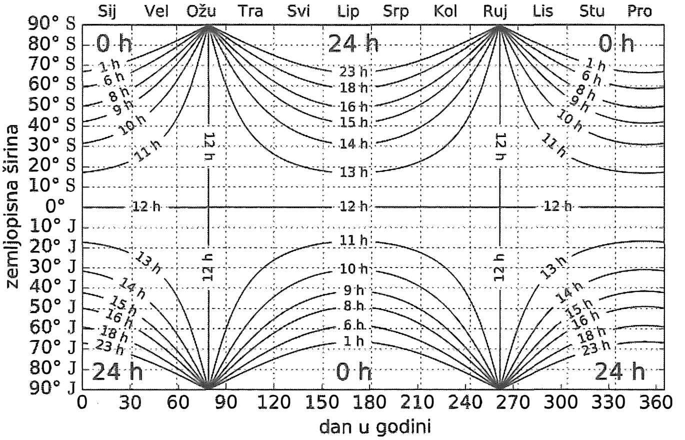
$$T(t,\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{ako } \chi < -1 \\ T_{\text{dan}}\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos\chi\right) & \text{ako } |\chi| \leqslant 1 \\ T_{\text{dan}} & \text{ako } \chi > 1 \end{cases} \tag{16}$$

te ovaj izraz predstavlja konačno rješenje za trajanje dana kroz godinu, u ovisnosti o položaju na Zemlji.



Slika 4.

Slika 4 prikazuje rješenje (16) za nekoliko izabranih zemljopisnih širina na sjevernoj polutci. Krivulje od "vanjske" (one s diskontinuiranim skokom između 0 h i 24 h) do "unutarnje" (konstante na 12 h) redom odgovaraju popisanim vrijednostima od ϑ_1 do ϑ_9. Pri tome, naravno, $\vartheta_1 = 90°$ predstavlja Sjeverni pol, a $\vartheta_9 = 0°$ ekvator. Zemljopisna širina $\vartheta_4 = 90° - \Theta = 66.6°$ je ona na kojoj unutar ovakvog osnovnog modela počinje pojava polarnog dana i noći, tj. dana i noći u trajanju duljem od 24 h, dok je $\vartheta_7 = 45.8°$ zemljopisna širina Zagreba. Slika 5 "ekvipotencijalnim" linijama prikazuje predviđanje izraza (16) kroz čitavu godinu i na svim zemljopisnim širinama.



Slika 5.

Polarni dan i noć

Izraz (16) također nam omogućuje izračunati trajanje polarnoga dana, odnosno polarne noći na zemljopisnim širinama gdje uopće dolazi do njihove pojave. Pod "polarnim" podrazumijevamo svaki dan ili noć u trajanju duljem od 24 h. Na slici 4 to trajanje je predstavljeno duljinom ravnog horizontalnog platoa na 0 h (polarna noć) i na 24 h (polarni dan). Već znamo da su ti dijelovi definirani uvjetom $|\chi| > 1$, za koji je lako pokazati da se svodi na:

$$|\sin \Omega(t - t_0)| > \frac{\cos \vartheta}{\sin \Theta}. \tag{17}$$

Rubne vrijednosti ove nejednakosti, koje određuju širinu područja unutar kojeg nejednakost vrijedi, oni su vremenski trenuci t za koje nejednakost prelazi u jednakost. U vremenskom rasponu od T_{god} ukupno su 4 rješenja:

$$t_1 = t_0 + \frac{T_{\text{god}}}{2\pi} \arcsin\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right), \qquad t_2 = t_0 + \frac{T_{\text{god}}}{2\pi}\left[\pi - \arcsin\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right)\right],$$
$$t_3 = t_0 + \frac{T_{\text{god}}}{2\pi}\left[\pi + \arcsin\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right)\right], \qquad t_4 = t_0 + \frac{T_{\text{god}}}{2\pi}\left[2\pi - \arcsin\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right)\right] \tag{18}$$

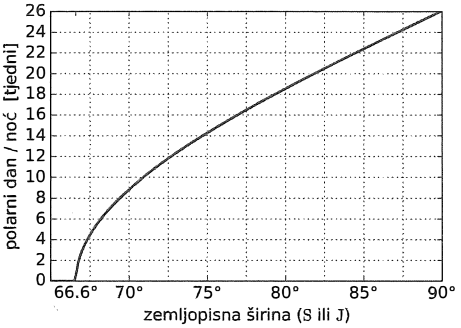
od kojih je dovoljno zadržati samo prvi ili posljednji par jer ako u vremenu od t_1 do t_2 traje polarni dan, tada od t_3 do t_4 traje polarna noć, i suprotno. Prema tome, za trajanje polarnog dana ili noći očekujemo da vrijedi: $T_{\text{pol}} = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$. Međutim, još preostaje odrediti gdje je taj izraz realan, odnosno na kojim se zemljopisnim širinama uopće javlja polarni efekt. Slično kao i ranije, to određujemo iz uvjeta da apsolutna vrijednost argumenta arkus sinusa ne smije biti veća od 1, odakle za $\vartheta \in [-90°, 90°]$ slijedi:

$$\left|\frac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right| \leqslant 1 \implies |\vartheta| \geqslant \frac{\pi}{2} - \Theta. \tag{19}$$

Dakle, konačno rješenje za trajanje polarnoga dana ili noći možemo zapisati kao:

$$T_{\text{pol}}(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{ako } |\vartheta| < 90° - \Theta \\ \dfrac{T_{\text{god}}}{2\pi}\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{\cos\vartheta}{\sin\Theta}\right)\right] & \text{ako } |\vartheta| \geqslant 90° - \Theta \end{cases} \tag{20}$$

Ova ovisnost[5] prikazana je slikom 6. Izražena je u tjednima, gdje 26 tjedana odgovara polovici godine.



Slika 6.

[5] Izrazu za $T_{\text{pol}}(|\vartheta| \geqslant 90° - \Theta)$ mogli bismo ručno dodati još jedan čitav dan, s obzirom da smo polarni efekt počeli mjeriti tek nakon što je već ispunjen uvjet da dan ili noć traje barem 24 h. Međutim, to je samo stvar dogovora i konvencija iz (20) po potrebi nam omogućuje izravno upotpuniti ranije rješenje (16) na način:

$$T(t,\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{ako } \chi < -1 \\ T_{\text{dan}}\left(1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos\chi\right) & \text{ako } |\chi| \leqslant 1 \\ T_{\text{dan}} + T_{\text{pol}}(\vartheta) & \text{ako } \chi > 1 \end{cases}$$

Ovakvo rješenje vjerno odražava stvarno trajanje polarnoga dana, no vrlo je nezahvalno za grafičko prikazivanje jer bi zasićeni platoi sa slike 4 – čiji se relevantni dio nalazi unutar intervala od 24 h – morali pobjeći u visinu za iznose i do $T_{\text{god}}/2$!

Završna riječ

Izveli smo ovisnost trajanja dana na Zemlji, uzimajući u obzir samo jedan geometrijski efekt – naravno, onaj dominantan. Međutim, mnogo je sekundarnih efekata koji dodatno utječu na tu ovisnost, tako da se stvarna duljina dana ponešto razlikuje od one predviđene izrazom (16). Na ekvatoru ta razlika iznosi otprilike 7 minuta, dok se na zemljopisnoj širini Zagreba ona kroz godinu kreće između 5 – 30 minuta. Preciznije numeričke modele zainteresirani čitatelj može naći u članku [1]. Inačicu slike 5 koja prikazuje ispravnu duljinu dana možete pronaći na internetskoj stranici [2], pretragom pojma *Sunrise equation* na Wikipediji.

Za pojedina nebeska tijela neki od sekundarnih efekata bitniji su od drugih, što konkretno ovisi o njihovim geometrijskim detaljima i parametrima gibanja oko najbliže zvijezde kao izvora dnevnog svjetla. U svakom slučaju, njihovo uključivanje u analitički model postaje matematički sve zahtjevnije i zahtjevnije. Među njima ističemo sljedeće:

- Prijelaz između dana i noći nije diskontinuiran, već postupan proces, što je posebno uzrokovano raspršenjem svjetlosti u atmosferi. Stoga trajanje dana postaje osjetljivo na samu definicija njegova početka i prestanka.
- Sunce niti je beskonačno daleko od Zemlje, niti je istog radijusa kao Zemlja, stoga zrake koje upadaju na obod Zemlje (granicu dana i noći) nisu savršeno paralelne.
- Putanja planeta oko zvijezde općenito nije kružnica, nego elipsa. U slučaju značajnijeg gravitacijskog utjecaja ostalih nebeskih tijela pored najbliže zvijezde, putanja je još i složenija. Ovaj efekt – koji dovodi i do promjene udaljenosti planet-zvijezda, i do promjene njihove relativne brzine – već smo naveli na početku teksta.
- Planeti nisu savršeno sferični. Zemlja je, tako, blago spljoštena na polovima, a ispupčena na ekvatoru.
- Nagib Θ rotacijske osi planeta – koji se pojavljuje kao središnji parametar čak i najosnovnijeg modela – kroz povijest se mijenja precesijom i nutacijom. Tijekom jednog dana ta je promjena potpuno zanemariva, no u principu bi se mogla uključiti u račun.
- Odnos kutnih brzina rotacije i revolucije planeta.

Posljednji efekt posebno je bitan i zanimljiv. U prvom redu, sam smjer rotacije planeta utječe na duljinu dana. Za potrebe argumenta promotrimo poseban slučaj kad su rotacijska i revolucijska os paralelne. Za dani iznos kutnih brzina rotacije i revolucije, dan će trajati dulje ako planet rotira u istom smjeru u kojem obilazi zvijezdu, nego ako su smjerovi rotacije i revolucije suprotni. Pri tome je posebno zanimljivo razmotriti slučaj kad su obje kutne brzine potpuno jednake, i iznosom i smjerom. S takvog planeta uvijek bismo imali isti pogled prema zvijezdi jer kako se pomakne za određeni kut oko zvijezde, tako taj isti kut "nadoknadi" rotacijom oko svoje osi. Stoga bi u danoj točki takvog planeta dan i noć bili neprekidni, tj. na jednoj strani planeta vječno bi bio dan, a na drugoj vječna noć!

Literatura

[1] W. C. Forsythe et al., *A model comparison for daylength as a function of latitude and day of year*, Ecological Modelling 80, 87 (1995).

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sunrise_equation`