Kinematika dvočestičnih reakcija

Žugec, Petar; Milin, Matko

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2017, 267, 185 - 193**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:007817

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb





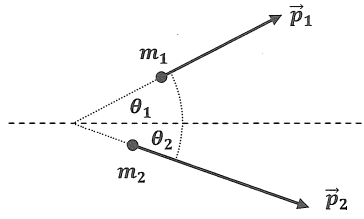
Kinematika dvočestičnih reakcija

Petar Žugec, Matko Milin[1]

Na primjeru jednog od osnovnih problema kinematike – raspršenja dviju čestica – pokazat ćemo da ponekad nije dovoljno tek odrediti analitičko rješenje promatranog problema. Naprotiv, jednom kad rješenje imamo, tek onda počinje ozbiljan posao njegove analize kako bismo ga u potpunosti razumjeli.

Problem i izvod rješenja

Promotrimo sudar dviju čestica A i B, pripadnih masa m_A i m_B. Promatrat ćemo najopćenitiji slučaj u kojem prije sudara obje čestice imaju proizvoljne količine gibanja $\vec{p}_A$ i $\vec{p}_B$. Dakle, niti smo nužno u sustavu centra mase, niti u sustavu u kojem bi jedna čestica prije sudara bila mirujuća meta. Dozvolit ćemo općenit, neelastičan oblik sudara, s obzirom da je elastično raspršenje samo poseban slučaj neelastičnog. Pri neelastičnom sudaru općenito dolazi do promjene identiteta čestica: početne čestice A i B prelaze u konačne čestice 1 i 2, što podrazumijeva i promjenu njihovih masa u m_1 i m_2 (slika 1). Stoga je neelastični sudar obilježen tzv. Q-vrijednošću, koja je energijski ekvivalent razlike ukupnih masa prije i poslije reakcije:



Slika 1.

$$Q = [(m_A + m_B) - (m_1 + m_2)]c^2 \tag{1}$$

Postojanje Q-vrijednosti opravdano je slavnom Einsteinovom ekvivalencijom mase i energije $E = mc^2$, uz brzinu svjetlosti c u vakuumu. Više o samoj Q-vrijednosti, njenoj ulozi unutar nerelativističkog pristupa, a i o ostalim bitnim pojmovima korištenim u ovom članku zainteresirani čitatelj može naći u jednom od ranijih brojeva MFL-a [1].

Jedna od ključnih veličina koja nas zanima nakon raspršenja je energija raspršenih čestica. Skica geometrije raspršenja prikazana je slikom 1. U ovom članku vodit ćemo se nerelativističkim pristupom, što je sasvim opravdano sve dok se sve čestice gibaju bitno sporije od brzine svjetlosti. Pri izračunu kinematičkih veličina nakon raspršenja oslanjamo se na zakone očuvanja energije i količine gibanja. Ukupna *kinetička* energija E_0 prije sudara jednaka je:

$$E_0 = E_A + E_B \tag{2}$$

Međutim, tijekom sudara ostaje očuvana *ukupna* energija sustava, kojoj osim kinetičkih energija E_x $(x \in \{A, B, 1, 2\})$ doprinose i energije mirovanja $m_x c^2$:

$$(m_A + m_B)c^2 + E_A + E_B = (m_1 + m_2)c^2 + E_1 + E_2 \tag{3}$$

Kako pri neelastičnom sudaru dolazi do promjene ukupne mase čestica – što upravo motivira definiciju Q-vrijedosti – nakon sudara dolazi do promjene ukupne kinetičke

[1] Autori su s Fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu

energije, koju ćemo označiti s E_Q:

$$E_Q \equiv E_1 + E_2 = E_0 + Q \tag{4}$$

Prelazimo na očuvanje količine gibanja. Za ukupnu količinu gibanja $\vec{p}_0$ prije sudara vrijedi:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_\mathrm{A} + \vec{p}_\mathrm{B} \tag{5}$$

U slučaju da se čestice prije sudara gibaju u istom smjeru ($\vec{p}_\mathrm{A} \parallel \vec{p}_\mathrm{B}$), iznos ukupne količine gibanja pojednostavnjuje se na $p_0 = |p_\mathrm{A} \pm p_\mathrm{B}|$, pri čemu predznak ovisi o tome jesu li se gibale u istom $(+)$ ili suprotnom $(-)$ smjeru. Iako ćemo u daljem računu zadržati samo ukupne veličine E_Q i p_0 kao relevantne parametre, izrazi (4) i (5) jasno pokazuju da ih uvijek znamo odrediti izravno iz početnih uvjeta[2]. Nakon sudara definiramo kutove θ_1 i θ_2 kao otklon izlaznih čestica s obzirom na smjer ukupne količine gibanja $\vec{p}_0$. Ovaj smjer smatrat ćemo *horizontalnim*, a bilo koji od smjerova okomitih na $\vec{p}_0$ *vertikalnim*. Prema tome, očuvanje količine gibanja u horizontalnom smjeru nalaže:

$$p_0 = p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2. \tag{6}$$

Iz činjenice da ukupna količina gibanja u vertikalnom smjeru po konstrukciji iščezava, slijedi

$$p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2. \tag{7}$$

Jednadžbu (6) strateški preuređujemo kao $p_2 \cos\theta_2 = p_0 - p_1 \cos\theta_1$ te je kvadriramo zajedno s jednadžbom (7), nakon čega ih zbrajamo i koristimo relaciju $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} p_2^2 \cos^2\theta_2 &= p_1^2 \cos^2\theta_1 - 2p_0p_1\cos\theta_1 + p_0^2 \\ p_2^2 \sin^2\theta_2 &= p_1^2 \sin^2\theta_1 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} p_2^2 = p_1^2 - 2p_0p_1\cos\theta_1 + p_0^2. \tag{8}$$

Zatim koristimo vezu kinetičke energije i količine gibanja $p_x = \sqrt{2m_xE_x}$ koja vrijedi za svaku česticu zasebno ($x \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, 1, 2\}$) kako bismo jednadžbu (8) preveli u

$$2m_2E_2 = 2m_1E_1 - 2p_0\sqrt{2m_1E_1}\cos\theta_1 + p_0^2. \tag{9}$$

Naposlijetku, pozivamo se na zakon očuvanja energije (4) kako bismo supstitucijom $E_2 = E_Q - E_1$ uklonili ovisnost o posljednjoj nepoznanici s indeksom 2. Nakon uvrštavanja i prebacivanja svih članova na istu stranu jednakosti

$$2(m_1 + m_2)E_1 - 2p_0\sqrt{2m_1E_1}\cos\theta_1 + (p_0^2 - 2m_2E_Q) = 0 \tag{10}$$

primjećujemo da smo dobili kvadratnu jednadžbu u varijabli $\sqrt{E_1}$. Stoga je rješenje za energiju E_1 jedne od raspršenih čestica određeno rješenjem ove kvadratne jednadžbe:

$$(\sqrt{E_1})_\pm = \frac{p_0\sqrt{m_1}\cos\theta_1 \pm \sqrt{p_0^2m_1\cos^2\theta_1 - (m_1+m_2)(p_0^2 - 2m_2E_Q)}}{\sqrt{2}(m_1+m_2)}. \tag{R1}$$

Konačno, primijetimo sljedeće: niti u izvodu niti u početnim uvjetima nigdje nije bilo ikakve asimetrije između čestica 1 i 2. Da smo rješavali problem za E_2 umjesto E_1, sve što bi se dogodilo bila bi zamjena indeksa $1 \leftrightarrow 2$. Stoga po uzoru na rješenje (R1) odmah možemo zapisati rješenje za energiju druge raspršene čestice, što se jednostavno

[2] Primijetimo da će upravo zbog ove neosjetljivosti na detalje ulaznog kanala reakcije konačno rješenje biti valjano za sve reakcije koje u izlaznom kanalu imaju točno dvije čestice. Takav je, na primjer, α-raspad nestabilnih jezgara ili pak sudar više od dviju čestica, pri kojem dolazi do stvaranja samo dvaju izlaznih produkata. Pri tome su bitne samo ukupna količina gibanja $p_0 = |\sum_i \vec{p}_i|$ i ukupna kinetička energija $E_0 = \sum_i E_i$ dostupna prije reakcije.

postiže zamjenom indeksa $1 \leftrightarrow 2$ kroz čitav izraz:

$$(\sqrt{E_2})_{\pm} = \frac{p_0\sqrt{m_2}\cos\theta_2 \pm \sqrt{p_0^2 m_2 \cos^2\theta_2 - (m_1+m_2)(p_0^2 - 2m_1E_Q)}}{\sqrt{2}(m_1+m_2)}. \qquad \text{(R2)}$$

A. Analiza rješenja

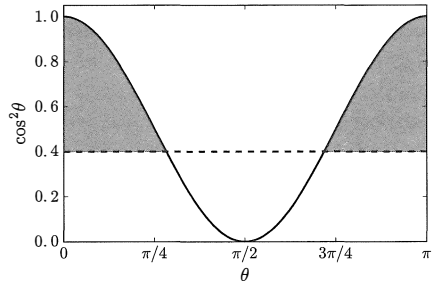
Iako nam je rješenje dostupno u zatvorenoj analitičkoj formi koja nosi potpunu informaciju o svim njegovim aspektima, možemo li reći da ga potpuno razumijemo; sva njegova svojstva, ograničenja i implikacije? Osim ako je ta forma izrazito jednostavna, teško je bez dodatne analize iz golog analitičkog izraza iščitati ponašanje rješenja u slučaju općenite, a često i u slučaju vrlo specifične i restriktivne kombinacije parametara. Ponekad iscrtavanje grafova za neke konkretne numeričke vrijednosti parametara uvelike pomaže u razumijevanju, navodeći na ispravne uvide i zaključke. Nasuprot tome, svjež pogled na stvari iz neke druge, komplementarne perspektive ili polazišne točke ne samo da može pomoći u razotkrivanju prirode rješenja, već može i dovesti do njegovog potpunog razumijevanja. Čak i ako nam neka otvorena pitanja u ovom trenutku nisu sasvim očita, vidjet ćemo da će se pojaviti tijekom dublje analize, kao dodatne komplikacije koje je potrebno razriješiti kako bismo u potpunosti odgovorili na sama polazna pitanja. Prva dva, koja se redovito vežu uz rješenja kvadratne jednadžbe su: pod kojim uvjetima rješenje postoji i koje je prihvatljivo (odnosno, koliko je prihvatljivih)?

Postojanje rješenja

Realna rješenja postoje kad je izraz pod korijenom (diskriminanta) nenegativan, što odmah navodi na:

$$\cos^2\theta_{1,2} \geqslant \frac{(m_1+m_2)(p_0^2 - 2m_{2,1}E_Q)}{p_0^2 m_{1,2}}. \qquad (11)$$

Notacijom smo odmah obuhvatili slučajeve obiju raspršenih čestica: prvi indeks uvijek se odnosi na prvu česticu, drugi na drugu. Ovako izražen, prethodni izraz predstavlja uvjet na dozvoljene kutove raspršenja pod pretpostavkom početnih kinematičkih parametara p_0 i E_Q. S obzirom da se uvjet odnosi na kvadrat kosinusa, ovom relacijom općenito su dozvoljena dva odvojena kutna raspona (slika 2): jedan na prednjim (oko $\theta = 0$), a drugi na stražnjim (oko $\theta = \pi$) kutovima raspršenja. Samo iz (11) ne možemo ništa više zaključiti o ta dva intervala – jesu li dozvoljena oba ili samo jedan od njih, i točno koji. No kasnija analiza razjasnit će nam ovu dilemu.



Slika 2.

Dodatna pitanja vežu se uz sam uvjet (11). Kada su dozvoljeni svi kutovi raspršenja ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), a kada nije nijedan? Budući da su vrijednosti kvadrata kosinusa ograničene

unutar intervala $0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1$, slijedi da su svi kutovi dozvoljeni kad je izraz s desne strane (donja granica nejednakosti) manji ili jednak 0:

$$\frac{(m_1+m_2)(p_0^2-2m_{2,1}E_Q)}{p_0^2 m_{1,2}} \leqslant 0 \implies p_0^2 \leqslant 2m_{2,1}E_Q. \tag{12}$$

Primijetimo da svaka od dviju izlaznih čestica ima svoj uvjet, određen masom "one druge" čestice. Pema tome, dok je jednoj otvoren čitav kutni raspon $\theta \in [0,\pi]$, drugoj može biti ograničen. Raspršenje je još uvijek dozvoljeno (pa makar u ograničenom rasponu kutova) dok je isti izraz manji ili jednak jedinici:

$$\frac{(m_1+m_2)(p_0^2-2m_{2,1}E_Q)}{p_0^2 m_{1,2}} \leqslant 1 \implies p_0^2 \leqslant 2(m_1+m_2)E_Q. \tag{13}$$

U suprotnom, reakciju je nemoguće pokrenuti! Primjećujemo da je ovaj uvjet jednak za obje čestice, što je savršeno smisleno i očekivano – ili imamo obje čestice u izlaznom kanalu ako se reakcija dogodi, ili nemamo nijednu ako reakcije nema. Kad je $E_Q < 0$, odmah vidimo da je reakciju nemoguće pokrenuti, bez potrebe za provjeravanjem numeričkog odnosa dviju strana prethodne nejednakosti. Prisjetimo li se definicije $E_Q = E_0 + Q$ iz (4), vidimo da je uvjet $E_Q < 0$ moguće ostvariti samo uz negativnu Q-vrijednost, što znači da je potrebno uložiti energiju u pokretanje reakcije. A ovo zapažanje nas prirodno navodi na sljedeći zaključak: ako postoji scenarij u kojem je reakciju nemoguće pokrenuti, tada je to zbog postojanja energijskog praga reakcije.

B. Broj rješenja

Prelazimo na pitanje o broju prihvatljivih, tj. fizikalno ostvarivih rješenja iz izraza (R1) i (R2). Kako se oni ne odnose samo na kinetičku energiju – koja sama mora biti nenegativna – već i korijen energije, slijedi da sva prihvatljiva rješenja moraju biti nenegativna. Ako rješenja uopće postoje [u skladu s uvjetom (13)], pa makar samo unutar ograničenog raspona kutova raspršenja [definiranih uvjetom (11)], tada su rješenja $(\sqrt{E_{1,2}})_+$ s pozitivnim predznakom pred korijenom svakako ona koja su prihvatljiva. Međutim, što je s rješenjima $(\sqrt{E_{1,2}})_-$ s negativnim predznakom pred korijenom? I ona će biti nenegativna kad je sam brojnik nenegativan, odnosno:

$$\begin{gathered} p_0\sqrt{m_{1,2}}\cos\theta_{1,2} - \sqrt{p_0^2 m_{1,2}\cos^2\theta_{1,2} - (m_1+m_2)(p_0^2-2m_{2,1}E_Q)} \geqslant 0 \\ \implies p_0^2 \geqslant 2m_{2,1}E_Q. \end{gathered} \tag{14}$$

Pod ovim uvjetom[3] i drugo rješenje je nenegativno i doista je fizikalno ostvarivo! Drugim riječima, pod danim kutom raspršenja u eksperimentu se zaista mjere dvije različite energije raspršenja za jednu te istu vrstu izlazne čestice! Ovaj ishod može se isprva učiniti čudnovatim. Međutim, uskoro ćemo pokazati da je savršeno opravdan i razumljiv. Sam oblik uvjeta (14) također se može učiniti alarmantnim. Naime, on određuje kad će rješenja biti dvostruka, a ovisi samo o masi jedne, "one druge" čestice. Ako postoje dva rješenja za energiju jedne čestice, ne bi li istovremeno trebala postojati i dva rješenja za energiju druge, zbog zakona očuvanja energije? Ne bi li, stoga, uvjet

[3] Vrijedi primijetiti da je uvjet (14) upravo komplementaran uvjetu (12), odnosno dvostruka rješenja postoje onda i samo onda kad nisu dozvoljeni svi kutovi raspršenja. Tim više, kako je uvjet (14) neovisan o kutu raspršenja, slijedi da su za danu česticu ili sva rješenja jednostruka ili sva dvostruka! Ovi ishodi nisu nimalo slučajni, a uskoro ćemo vidjeti i zašto.

morao biti simetričan na mase obiju čestica, poput ranijeg uvjeta (13)? Prije prelaska na sljedeći odlomak, pozivamo čitatelja da samostalno pokuša odgovoriti na ovo pitanje.

Kakvim god da se ispostavi odgovor, valja istaknuti da je vrlo bitno opažati ovakva svojstva u promatranim rješenjima. Ne samo da ovakvo propitkivanje može dovesti do dubljeg razumijevanja čitavog problema, već može ukazati i na grešku u izvodu ili čak početnim jednadžbama, posebice ako je apsolutno jasno da rješenje mora pokazivati prisutnost ili odsutnost danog svojstva.

Povratkom na prethodno pitanje, nalazimo da je odgovor negativan: s uvjetom (14) sve je u redu! Opravdanje je u tome što je energija dane čestice [(R1) i (R2)] izražena u ovisnosti o kutu *te iste čestice*: $E_1(\theta_1)$ i $E_2(\theta_2)$. Drugim riječima, takav zapis "razvezuje" ovisnost između E_1 i E_2! Ako, na primjer, energiju druge čestice izrazimo u ovisnosti o kutu raspršenja prve: $E_2(\theta_1) = E_Q - E_1(\theta_1)$, tada vidimo da uvjet (14) doista može biti bilo kakvog oblika jer višestruka rješenja za $E_1(\theta_1)$ automatski podrazumijevaju višestruka rješenja za $E_2(\theta_1)$. Međutim, jednom te istom kutu raspršenja iz dvostrukog rješenja prve čestice (θ_1) odgovaraju *različiti* kutovi raspršenja druge čestice (θ_2)! Pri tome, zakon očuvanja energije zapisan preko kutova raspršenja obiju čestica: $E_1(\theta_1) + E_2(\theta_2) = E_Q$ upravo predstavlja implicitnu relaciju između θ_1 i θ_2. Dakle, rješenja $E_1(\theta_1)$ i $E_2(\theta_2)$ doista ne moraju biti dvostruka "istovremeno", što znači da za $E_Q > 0$ zaista postoji raspon parametra p_0:

$$\min(m_1, m_2) < \frac{p_0^2}{2E_Q} < \max(m_1, m_2)$$

unutar kojeg su rješenja za jednu česticu jednostruka, a za drugu dvostruka. Štoviše, čak i kad su rješenja za obje čestice "istovremeno" dvostruka [u slučaju $p_0^2/2E_Q \geqslant \max(m_1, m_2)$], dvama rješenjima s istim kutom prve čestice *ne korespondiraju* rješenja s istim kutom kod druge čestice. Drugi riječima, svakom paru dvostrukih rješenja jedne čestice pridružena su rješenja iz *različitih* parova rješenja druge čestice (uz iznimku trivijalnog slučaja $\theta_1 = \theta_2 = 0$).

Posljednjih nekoliko tvrdnji na razini je još uvijek neopravdanih spekulacija, s obzirom da ih nismo strogo dokazali. Jedan način na koji bismo to mogli napraviti je rješavanjem implicitne relacije $E_1(\theta_1) + E_2(\theta_2) = E_Q$ u svrhu nalaženja eksplicitne ovisnosti između kutova θ_1 i θ_2, da bismo zatim tu ovisnost detaljno analizirali. No mnogo jednostavniji, a i uvjerljiviji pristup je onaj koji slijedi. Geometrijske je prirode, s polazišnom točkom u sustavu centra mase. Kao što ćemo vidjeti, ne samo da će na transparentan način opravdati sve generalne zaključke do kojih smo došli apstraktnom analizom više ili manje složenih izraza, već će sve one nedokazane tvrdnje strogo dokazati geometrijskom konstrukcijom.

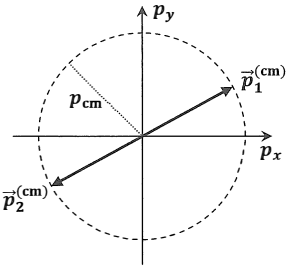
Pogled iz sustava centra mase

Pri pokušaju razumijevanja fizikalnog procesa u laboratorijskom sustavu, vrlo je instruktivno krenuti od scenarija u sustavu centra mase pa ga jednostavno prevesti u laboratorijski sustav. Specifičnost sustava centra mase proizlazi iz same njegove definicije: to je onaj sustav u kojem ukupna količina gibanja (kao vektorska veličina!) u potpunosti iščezava: $\sum_i \vec{p}_i^{\,(\mathrm{cm})} = \vec{0}$.

U slučaju dvije čestice uvjet se svodi na: $\vec{p}_1^{\,(\mathrm{cm})} + \vec{p}_2^{\,(\mathrm{cm})} = \vec{0}$, odnosno:

$$\vec{p}_1^{\,(\mathrm{cm})} = -\vec{p}_2^{\,(\mathrm{cm})} \tag{15}$$

što znači da u sustavu centra mase dvije čestice uvijek imaju količine gibanja jednakog iznosa, a suprotnog smjera ($\theta_1^{(\mathrm{cm})} + \theta_2^{(\mathrm{cm})} = \pi$)! Pokušajmo sada zaključiti kako izgleda vektorski prostor vektora količine gibanja dostupnih dvjema česticama. Iz (15) znamo da obje količine gibanja imaju međusobno isti iznos (p_{cm}) za svaki kut raspršenja, a iz zakona očuvanja energije:



Slika 3.

$$\frac{(p_1^{(\mathrm{cm})})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{(\mathrm{cm})})^2}{2m_2} = \frac{p_{\mathrm{cm}}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = E_Q^{(\mathrm{cm})} \implies p_{\mathrm{cm}} = \sqrt{2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} E_Q^{(\mathrm{cm})}} \tag{16}$$

vidimo da je i sam taj iznos potpuno neovisan o kutu raspršenja. Dakle, u sustavu centra mase dozvoljeni vektori količine gibanja svi su iste duljine, a to znači da u vektorskom prostoru leže na sferi radijusa p_{cm}, odnosno generaliziranoj hipersferi promatramo li problem u prostoru proizvoljne dimenzionalnosti. Ovu (hiper)sferu, ilustriranu slikom 3, zvat ćemo $\vec{p}$*-ljuskom*.

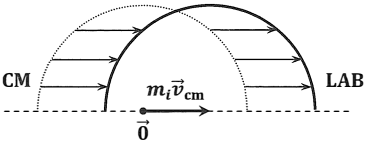
Promotrimo što se događa s $\vec{p}$-ljuskom pri prijelazu u laboratorijski sustav. Za to trebamo znati kako se količina gibanja transformira pri prijelazu između sustava. U nerelativističkoj kinematici transformacija je krajnje jednostavna, oblika

$$\vec{p}_i^{\,(\mathrm{lab})} = \vec{p}_i^{\,(\mathrm{cm})} + m_i \vec{v}_{\mathrm{cm}} \tag{17}$$

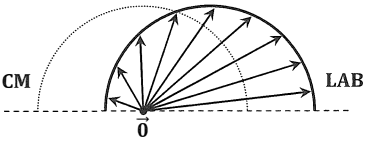
gdje je $\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ brzina gibanja centra mase u laboratorijskom sustavu:

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i \vec{p}_i^{\,(\mathrm{lab})}}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{p}_0}{\sum_i m_i}. \tag{18}$$

Vidimo da je $\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ izravno određena ukupnom količinom gibanja $\vec{p}_0$, koja je uvijek očuvana zbog zakona očuvanja[4]. Prema tome, pomak $m_i \vec{v}_{\mathrm{cm}}$ iz (17) neovisan je o kutu raspršenja, što znači da se pri prijelazu između sustava sve točke $\vec{p}$-ljuske pomiču za jednak iznos i u istom smjeru, a to odgovara translaciji čitave ljuske! Prema tome, $\vec{p}$-ljuska u laboratorijskom sustavu ponovno je (hiper)sfera istog radijusa p_{cm}, samo što joj je središte za $m_i \vec{v}_{\mathrm{cm}}$ pomaknuto od ishodišta vektorskog prostora. Geometrija prijelaza skicirana je slikom 4. Radi ekonomičnosti prikazivat ćemo samo polovicu čitave $\vec{p}$-ljuske, no sva razmatranja, naravno, jednako vrijede i za izostavljenu polovicu.



Slika 4.



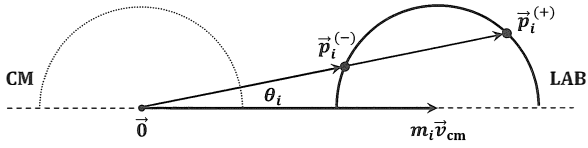
Slika 5.

Podrazumijeva se da je u laboratorijskom sustavu početno hvatište svih vektora količine gibanja i dalje u ishodištu koordinatnog sustava, dok se krajnje hvatište nalazi

[4] Pažljivi čitatelj primjetit će da zbog Q-vrijednosti može doći do promjene ukupne mase svih čestica nakon reakcije, što bi prema (18) značilo promjenu brzine centra mase s obzirom na onu prije reakcije, a bez djelovanja vanjskih sila na sustav. Ovo je opasan i neispravan koncept kojeg treba biti svjestan, a koji nastaje kao posljedica miješanja Q-vrijednosti i nerelativističkog pristupa, koji su u osnovi nekompatibilni. Poseban osvrt na ovaj problem čitatelj može naći u [1].

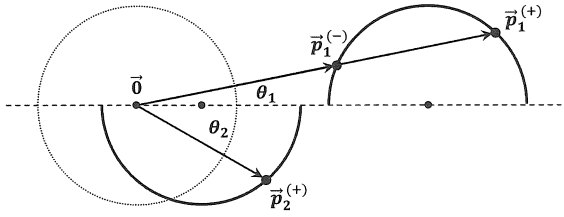
negdje duž translatirane $\vec{p}$-ljuske (slika 5). Deformacija skupa dozvoljenih vektora sa slike 5 upravo čini bit prijelaza između referentnih sustava te u potpunosti rasvjetljuje pojavu kutne ovisnosti u rješenjima (R1) i (R2), s obzirom da je energija čestice u izravnoj vezi s normom vektora količine gibanja: $E_i = p_i^2/2m_i$.

Slika 5 instruktivna je i jer pokazuje kako izgleda skup rješenja u slučaju blagog pomaka $\vec{p}$-ljuske od ishodišta: iz geometrijskog zora jasno je da su svi kutovi dozvoljeni i da svakom kutu raspršenja odgovara točno jedno rješenje. Ovo opažanje u izravnoj je vezi s ranije identificiranim uvjetima (12) i (14). No što se događa kad je pri prijelazu između sustava pomak $\vec{p}$-ljuske značajan? Sa slike 5 jasno je da "značajno" nastupa onda kada rub $\vec{p}$-ljuske prijeđe preko ishodišta, odnosno kad se ishodište nađe van $\vec{p}$-ljuske. Scenarij je prikazan slikom 6 i sada nas geometrijski zor zapljuskuje jasnoćom pojave dvostrukih rješenja! Sasvim je očito da u ovom slučaju istom kutu raspršenja odgovaraju dvije distinktne točke na $\vec{p}$-ljusci[5], što upravo odgovara dvama rješenjima pripadnih energija $(\sqrt{E_i})_+$ i $(\sqrt{E_i})_-$! Nadalje, slike 5 i 6 izravno su geometrijsko opravdanje kombiniranog zaključka izraza (12) i (14): svi kutovi raspršenja dozvoljeni su onda i samo onda kad su sva rješenja za danu česticu jednostruka! Tim više, iz geometrijskog zora je sada sasvim jasno da su doista (i zašto su) sva rješenja jednostruka ili sva dvostruka.



Slika 6.

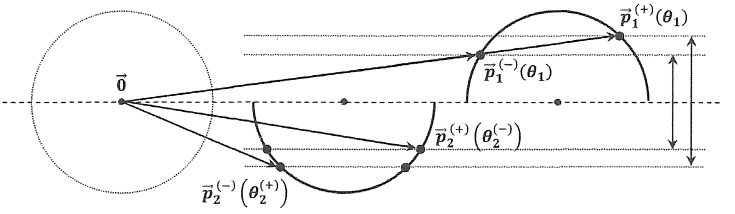
Do sada smo promatrali slučaj bilo koje čestice, ali svake zasebno. Razmotrimo ih sada zajedno, baš kao što izlaze iz reakcije. Pri tome uočimo da transformacija količine između referentnih sustava iz (17) ovisi o masi pojedine čestice, što se odražava u članu $m_i\vec{v}_{\rm cm}$. To znači da je, općenito, pomak $\vec{p}$-ljuske pri prijelazu između sustava *različit* za dvije čestice. Stoga je sasvim moguće da je pomak $\vec{p}$-ljuske jedne čestice (velike mase) tolik da ljuska pređe preko ishodišta te se nađe u režimu dvostrukih rješenja sa slike 6, a da je istovremeno pomak $\vec{p}$-ljuske druge čestice (male mase) toliko malen da ishodište ostane uhvaćeno unutar ljuske, a sva pripadna rješenja ostanu jednostruka, kao na slici 5. Cjelovit scenarij prikazan je slikom 7, gdje dvije odvojene poluljuske predstavljaju slučaj svake pojedine čestice. Kao što vidimo, geometrijskom konstrukcijom smo u potpunosti opravdali opažanje vezano uz oblik ranijeg uvjeta (14), koji je nam je već sugerirao da rješenja dviju čestica ne moraju istovremeno biti jednostruka ili dvostruka.



Slika 7.

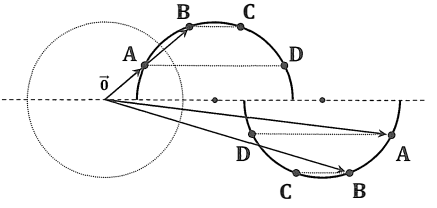
[5] Odnosno, dva odvojena skupa točaka u slučaju dimenzionalnosti prostora veće od 2, tj. dimenzionalnosti ljuske veće od 1.

U svjetlu prethodnih razmatranja prirodno se nameće pitanje o posljednjoj kombinaciji parametara, kad su mase dviju čestica dovoljno velike da se obje $\vec{p}$-ljuske u cjelosti odmaknu od ishodišta. Slučaj je prikazan slikom 8, iz koje je očito kako ispoljavaju dvostruka rješenja obiju čestica. Slika 8 također nam omogućuje opravdati i snažnu tvrdnju iz prethodnog odjeljka: da istom kutu raspršenja θ_1 iz para rješenja jedne čestice odgovaraju različiti kutovi $\theta_2^{(+)}$ i $\theta_2^{(-)}$, iz različitih parova rješenja druge čestice. Pri tome smo s $\theta_2^{(+)}$ i $\theta_2^{(-)}$ označili kutove *druge* čestice koji korespondiraju dvama rješenjima *prve* čestice: jednome s $+$ i drugome s $-$ predznakom pred korijenom, uz isti θ_1.



Slika 8.

Kako ta dva kuta jednoznačno odrediti geometrijskom konstrukcijom? Iz zakona očuvanja! Prvo se pozivamo na očuvanje količine gibanja u vertikalnom smjeru. Prema (7), vertikalne komponente moraju biti jednake za obje čestice. Krećući od dvaju rješenja prve čestice (dvije točke na gornjoj poluljusci sa slike 8), na $\vec{p}$-ljusci druge čestice tražimo točke s istim vertikalnim odmakom, na koji ukazuju horizontalne crtkane linije. Očito, isprva nam se nude 4 rješenja, prikazana četirima točkama presjeka s donje poluljuske. No sada se pozivamo na zahtjev (6), odnosno očuvanje količine gibanja u horizontalnom smjeru, prema kojem zbroj horizontalnih komponenata dviju čestica uvijek mora biti jednak. Odavde slijedi da da rješenju prve čestice s većom horizontalnom komponentom odgovara rješenje druge čestice s kraćom, i suprotno. Ovaj podatak je dovoljan da između četiri potencijalna rješenja s donje poluljuske eliminiramo dva, nakon čega preostaju dvije jednoznačno identificirane točke.



Slika 9.

Specifičan primjer sa slike 8 mogao bi lažno sugerirati da rješenju $\vec{p}_1^{\,(-)}$ prve čestice uvijek odgovara rješenje $\vec{p}_2^{\,(+)}$ druge, i suprotno: da rješenju $\vec{p}_1^{\,(+)}$ odgovara $\vec{p}_2^{\,(-)}$. Međutim, da nije uvijek tako lako je uvjeriti se sa slike 9, koja prikazuje protuprimjer, zajedno s općenitim rasporedom korespondirajućih točaka s $\vec{p}$-ljusaka dviju čestica. Pri tome među svim mogućim rješenjima uvijek korespondiraju ona s istom oznakom: rješenje *A* prve čestice dolazi u paru s rješenjem *A* druge, itd. Što se tiče samog protuprimjera, vidimo da se on pojavljuje kad god se oba rješenja jedne čestice nalaze

na prednjoj strani $\vec{p}$-ljuske (gledano iz ishodišta). U tom slučaju obama – i $\vec{p}_1^{\,(-)}(\theta_1)$ i $\vec{p}_1^{\,(+)}(\theta_1)$ – odgovaraju rješenja druge čestice sa stražnje strane pripadne $\vec{p}$-ljuske: $\vec{p}_2^{\,(+)}\big(\theta_2^{(-)}\big)$ i $\vec{p}_2^{\,(+)}\big(\theta_2^{(+)}\big)$. Drugim riječima, u oba slučaja su pripadne energije iz (R2) one s pozitivnim predznakom, samo za različite kuteve $\theta_2^{(-)}$ i $\theta_2^{(+)}$.

Konačno, dolazimo do jedne od najsnažnijih tvrdnji: da su kutovi $\theta_2^{(+)}$ i $\theta_2^{(-)}$ druge čestice pripadni istom kutu θ_1 prve čestice *uvijek* različiti (do na trivijalane slučajeve kad su svi jednaki 0). Prisjetimo se da su zakoni očuvanja doveli do toga da rješenju druge čestice s većim vertikalnim odmakom odgovara manji horizontalni odmak, i suprotno. Ovo izravno povlači da je vektor $\vec{p}_2$ jednog rješenja uvijek više polegnut prema horizontali od drugoga, u što se lako uvjeriti iz relacije: $\operatorname{tg}\theta_2 = p_2^{(\mathrm{ver})}/p_2^{(\mathrm{hor})}$, uz $p_2^{(\mathrm{ver})}$ i $p_2^{(\mathrm{hor})}$ kao vertikalnu i horizontalnu komponentu količine gibanja. Kako $p_2^{(\mathrm{ver})}$ i $p_2^{(\mathrm{hor})}$ imaju suprotne tendencije između dvaju rješenja – kad jedan raste, drugi pada – njihov omjer je u jednom slučaju svakako veći, a u drugom manji, što podrazumijeva različite kutove $\theta_2^{(+)}$ i $\theta_2^{(-)}$.

Naposlijetku, iz provedenih geometrijskih konstrukcija možemo izvesti još jedan zaključak do kojeg bismo formalno iz malo čega drugoga mogli doći. Prisjetimo se uvjeta (11) za dozvoljene kutove raspršenja. Zbog kvadarata nad kosinusom, njime su formalno dozvoljeni i prednji i stražnji kutovi raspršenja, kao što slika 2 zorno prikazuje. No zbog pomaka čitave $\vec{p}$-ljuske u danom smjeru, sasvim je jasno da je dozvoljeno samo jedno od tih dvaju odvojenih kutnih područja – ili ono pod prednjim kutovima ($\cos\theta > 0$) ili ono pod stražnjim ($\cos\theta < 0$). Uzmemo li dogovorno da je iznos p_0 ukupne količine gibanja pozitivan – što je ekvivalentno svjesnoj definiciji smjera horizontalne osi u smjeru vektora $\vec{p}_0$ – tada samo prednji kutovi ostaju kao prihvatljivo rješenje nejednakosti (11). Međutim, isto tako smo mogli dozvolili da horizontalna os samo leži duž vektora $\vec{p}_0$, a da joj je orijentacija proizvoljna. Da smo se, tako, našli u situaciji da $\vec{p}_0$ gleda u negativnom smjeru horizontalne osi, za p_0 kao vektorsku komponentu (umjesto norme) slijedilo bi: $p_0 < 0$. Znači li to da bi vodeći član $p_0\sqrt{m_{1,2}}\cos\theta_{1,2}$ pred korijenima iz (R1) i (R2) promijenio predznak pa bi sva rješenja $(\sqrt{E_{1,2}})_-$ odmah postala neprihvatljiva, a od $(\sqrt{E_{1,2}})_+$ bi samo ostala ona s dovoljno pozitivnim korijenom da se othrvaju negativnosti vodećeg člana? Ne bi li to dovelo do fundamentalne promjene fizikalnog ishoda samo zbog proizvoljne promjene orijentacije koordinatne osi? Odgovor je, naravno, ne. Sve što je potrebno za poništiti negativnost od p_0 je prebaciti se na stražnje kutove raspršenja, čime i član $\cos\theta_{1,2}$ postaje negativan, a čitav vodeći član pred korijenom ostaje pozitivan. Kao što vidimo, nejednakost (11) nas je već "preduhitrila" jer predviđa i u potpunosti dozvoljava ovakav ishod. No sama nije u stanju nedvosmisleno reducirati raspon dozvoljenih kutova na tek jedno od dvaju područja. Za to su nam bila potrebna "prizemna" geometrijska razmatranja.

U razumijevanju rješenja (R1) i (R2) poprilično smo se daleko odmaknuli od onoga koji nam nude goli analitički izrazi, zar ne?

Literatura

[1] Petar Žugec, Bruno Klajn, *Malo relativistike*, MFL LXV-3/ 259 (2015.).