

# Teorijsko modeliranje emisije ekstragalaktičkih bljeskova gama zračenja

---

**Maruševac, Petra**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:576162>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Petra Maruševac

TEORIJSKO MODELIRANJE EMISIJE  
EKSTRAGALAKTIČKIH BLJESKOVA GAMA  
ZRAČENJA

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Petra Maruševac**

Diplomski rad

**Teorijsko modeliranje emisije  
ekstragalaktičkih bljeskova gama  
zračenja**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Željka Marija Bošnjak

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem se svojoj mentorici na pruženoj pomoći i strpljenju bez kojih izrada ovog rada ne bi bila moguća. Zahvaljujem se i kolegama i prijateljima što su mi uljepšali cijelo razdoblje studiranja, a ponajviše svojoj obitelji na neograničenoj podršci i razumijevanju.

## Sažetak

Bljeskovi gama zračenja su snažni, nepravilni pulsevi  $\gamma$ -zračenja s netermalnim spektrom koji se nalaze na kozmičkim udaljenostima. Pokazano je da su ovi događaji energijski najsnažnije eksplozije u svemiru te još nije sa sigurnošću poznato njihovo fizikalno porijeklo, pa teorija emisije bljeskova gama zračenja predstavlja jedno od danas najaktivnijih područja u astrofizici. U ovom su radu, pod pretpostavkom modela internih udara za promptno zračenje bljeskova gama zračenja, određeni parametri sinkrotronske emisije i pridružene inverzne Comptonove emisije koji opisuju spektar bljeskova. Pomoću numeričkog modela spomenutih radijativnih procesa, generirani su elektronski i fotonski spektri bljeskova gama zračenja koji su uspoređeni s opaženim vrijednostima. Dobivene su vrijednosti parametara emisije (u sustavu relativističkog mlaza) za minimalni elektronski Lorentzov faktor,  $\gamma_{\min} \sim 10^{3.5} - 10^4$ , normu elektronske distribucije,  $\text{norm} \sim 10^9 - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , koja daje gustoću relativističkih elektrona  $n_e \sim 10^3 - 10^9 \text{ cm}^{-3}$ , magnetsko polje u emisijskom području,  $B \sim 10^{3.5} - 10^4 \text{ G}$  i radijus emisijskog područja,  $R \sim 10^{11.5} - 10^{13.5} \text{ cm}$ . Uspoređivanjem rezultata numeričkog modela s vremenski razlučenim spektrima bljeskova gama zračenja GRB 140206A i GRB 140512A, dobivene su vrijednosti parametara emisije uz pretpostavljenu linearnu evoluciju Lorentzovog faktora mlaza u vremenu, te je predloženo moguće ponašanje parametara emisije u vremenu.

Ključne riječi: bljeskovi gama zračenja, netermalni radijativni mehanizmi

# Theoretical modelling of the gamma-ray burst emission

## Abstract

Gamma-ray bursts are powerful, irregular pulses of gamma-ray radiation which are observed at cosmic distances. These events are the most energetic explosions in the universe and there is no consensus on their physical origin. In this work, we have determined the parameters of the synchrotron and its associated inverse Compton emission for the prompt emission of gamma-ray bursts. Using a numerical model for these radiative processes, we have generated electron and photon spectra of gamma-ray bursts which were compared to observations. Resulting order of magnitude values of emission parameters in the comoving frame include the minimum electron Lorentz factor,  $\gamma_{\min} \sim 10^{3.5} - 10^4$ , the norm of the injected electron energy distribution,  $\text{norm} \sim 10^9 - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , which gives the relativistic electron density  $n_e \sim 10^3 - 10^9 \text{ cm}^{-3}$ , the magnetic field in the emission region,  $B \sim 10^{3.5} - 10^4 \text{ G}$  and the radius of the emission region,  $R \sim 10^{11.5} - 10^{13.5} \text{ cm}$ . Assuming a linear time evolution of the bulk Lorentz factor, the results of the numerical model were compared to time-resolved spectra of GRB 140206A and GRB 140512A, which produced a possible time evolution of the emission parameters.

Keywords: gamma-ray burst, nonthermal radiation mechanisms

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Opažanja bljeskova gama zračenja . . . . .	1
1.2	Modeli emisije u bljeskovima gama zračenja . . . . .	3
1.2.1	Model nastajanja . . . . .	4
1.2.2	Problem kompaktnosti i relativističko gibanje . . . . .	4
1.2.3	Modeli disipacije energije (interni udari i interakcija s okolnom materijom) . . . . .	6
1.3	Motivacija: određivanje parametara emisijskog modela . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Osnovne veličine i njihove definicije</b>	<b>8</b>
2.1	Luminozitet . . . . .	8
2.2	Tok fotona . . . . .	8
2.3	Intenzitet i emisivnost . . . . .	9
2.4	Dopplerov efekt i crveni pomak . . . . .	9
2.5	Luminozitetna udaljenost . . . . .	11
2.6	Optička dubina . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Sinkrotronsko zračenje</b>	<b>14</b>
3.1	Relativistička kinematika . . . . .	14
3.2	Relativističke invarijante . . . . .	15
3.3	Emisija relativističkih čestica . . . . .	16
3.4	Dinamika nabijenih čestica u magnetskom polju . . . . .	17
3.5	Ukupna snaga zračenja . . . . .	19
3.6	Spektar sinkrotronskog zračenja . . . . .	21
3.6.1	Spektar sinkrotronskog zračenja - detaljan izvod . . . . .	24
3.7	Sinkrotronsko zračenje jednostavne distribucije energija elektrona . . .	34
3.8	Sinkrotronski spektar bljeskova gama zračenja . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Inverzno Comptonovo raspršenje</b>	<b>38</b>
4.1	Prijenos energije pri raspršenju na elektronima u gibanju . . . . .	38
4.2	Snaga inverznog Comptonovog raspršenja za jedno raspršenje . . . . .	40

<b>5</b>	<b>Numerički model</b>	<b>44</b>
5.1	Svojstva spektara bljeskova gama zračenja . . . . .	44
5.1.1	Nagibi fotonskih spektara bljeskova gama zračenja . . . . .	45
5.2	Evolucija elektronske distribucije . . . . .	45
5.3	Ograničenja prostora parametara . . . . .	47
5.3.1	Magnetsko polje . . . . .	47
5.3.2	Elektronski Lorentzov faktor i distribucija elektrona . . . . .	48
5.3.3	Emisijsko područje . . . . .	49
5.3.4	Lorentzov faktor mlaza . . . . .	49
5.4	Ponašanje spektra u ovisnosti o parametrima emisije . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Usporedba opaženih spektara s numeričkim modelom</b>	<b>54</b>
6.1	GRB 140206A . . . . .	54
6.1.1	Evolucija Lorentzovog faktora mlaza . . . . .	55
6.1.2	Rezultati modela . . . . .	55
6.2	GRB 140512A . . . . .	67
6.2.1	Evolucija Lorentzovog faktora mlaza . . . . .	67
6.2.2	Rezultati modela . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>75</b>
8.1	Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike . . . . .	75
8.1.1	Interaktivne nastavne metode . . . . .	77
8.2	Hubbleov zakon i širenje svemira . . . . .	79
8.3	Tijek nastavnog sata . . . . .	84
8.3.1	Uvodni dio sata . . . . .	85
8.3.2	Središnji dio sata . . . . .	87
8.3.3	Završni dio sata . . . . .	91
	<b>Literatura</b>	<b>93</b>



# 1 Uvod

Prema [1], ekstragalaktički bljeskovi gama zračenja (eng. *gamma-ray burst*, GRB) otkriveni su potpuno slučajno kasnih šezdesetih godina prošlog stoljeća Vela satelitima te su predstavljali misterij astronomima nekoliko desetljeća. Bljeskovi gama zračenja su nepravilni pulsevi  $\gamma$ -zračenja koji obično traju kraće od minute s netermalnim spektrom zračenja koji ima maksimum oko  $10\text{--}10^4$  keV, te se mogu vidjeti nekoliko puta dnevno na raznim dijelovima neba. Zahvaljujući njihovoj detekciji na crvenom pomaku (eng. *redshift*) većem od 9 pomoću trenutne generacije instrumenata i povezanosti s eksplozijama supernovi i formacijama crnih rupa, teorija bljeskova gama zračenja je danas jedno od najaktivnijih područja u suvremenoj astrofizici.

Histogrami trajanja bljeskova gama zračenja obično imaju dva maksimuma, jedan na oko 0.3 s i drugi na oko 30 s, a između je lokalni minimum na oko 2 s. Tako se bljeskovi koji traju kraće od 2 s nazivaju kratkim bljeskovima, a oni koji traju duže od 2 s se nazivaju dugim bljeskovima. Promatrajući samo vremensku distribuciju zračenja u bljesku gama zračenja, prije nego se išta znalo o njihovom fizikalnom porijeklu, smatralo se da ta dva maksimuma zračenja predstavljaju dva različita fizikalna mehanizma zračenja koji se događaju unutar bljeska. Nedavna opažanja potvrđuju kako su dugi bljeskovi gama zračenja jedan mogući ishod kolapsa masivnih zvijezda ( $M \geq 15M_{\odot}$ ), te da su barem neki od kratkih bljeskova povezani sa spajanjem kompaktnih binarnih sustava (spajanje neutronske zvijezde ili neutronske zvijezde i crne rupe). Poveznica između vremenske klasifikacije bljeskova gama zračenja i njihovog fizikalnog porijekla je puno kompliciranija (budući da ne postoji jasan prijelaz od kratkih događaja prema dugim) i još se uvijek istražuje.

## 1.1 Opažanja bljeskova gama zračenja

Prema [1], udaljenosti do izvora bljeskova gama zračenja bile su potpuno neodređene sve do lansiranja Compton Gamma Ray opservatorija (CGRO) sa svemirskog broda Atlantis 5. travnja 1991. godine. Taj je opservatorij nosio 4 instrumenta koja su omogućila pokrivanje širokog raspona energija od 20 keV do 30 GeV. Instrumenti na CGRO koji su bili namijenjeni opažanju bljeskova gama zračenja su BATSE (eng. *Burst and Transient Source Experiment*, koji je pokrивao raspon 20 keV – 8 MeV) i EGRET (eng. *Energetic Gamma Ray Experiment Telescope*, koji je pokrивao raspon

20 MeV – 30 GeV). Opažanja BATSE instrumenta su indicirala da su bljeskovi gama zračenja izotropno distribuirani te da se nalaze na udaljenostima puno većim od lokalne grupe galaksija.

Potvrda kozmološke udaljenosti bljeskova gama zračenja dobivena je 1997. godine, kada je BeppoSAX satelit, lansiran 30. travnja 1992. godine, izmjerio angularni položaj bljeskova s rezolucijom do unutar 4 lučne minute, što je bilo više od 20 puta bolje u odnosu na CGRO opažanja, te se je tada omogućilo da se iste pojave dodatno istraže opažanjima u optičkim i radio područjima. Otprilike jedan dan nakon detekcije bljeska gama zračenja 27. veljače 1997. godine, otkrivena je emisija koja ga je pratila u optičkom i X području, a koja brzo slabi, odnosno otkriven je takozvani popratni sjaj (eng. *afterglow*) bljeska gama zračenja. Opažanje popratnog sjaja je dovelo do određivanja crvenog pomaka (potpoglavlje 2.4) tog bljeska,  $z = 0.695$ . Time je započela nova era u proučavanju bljeskova gama zračenja iz koje je proizašlo mnoštvo novih informacija i dublje razumijevanje ovih eksplozija.

Iz izmjerenog crvenog pomaka i fotonskog toka bljeska (potpoglavlje 2.2), poznato je da bljeskovi gama zračenja emitiraju između  $10^{48}$  i  $10^{55}$  erg energije, ako su izotropni. To znači da su bljeskovi gama zračenja energijski najsnažnije eksplozije u svemiru te da je luminozitet (potpoglavlje 2.1) najsnažnijih bljeskova usporediv s luminozitetom cijelog svemira na svim valnim duljinama, makar na samo nekoliko sekundi.

Naše razumijevanje bljeskova gama zračenja značajno se poboljšalo u zadnjih 20 godina zahvaljujući opažanjima nekoliko satelita namijenjenima  $\gamma$  i X području frekvencija (BeppoSAX, KONUS/Wind, HETE-2, Swift, Integral, AGILE, Fermi) te popratnim opažanjima mnogih optičkih, IR, milimetarskih i radio opservatorija na Zemlji. Velik dio ovog napretka omogućen je zahvaljujući monitoriranju i teorijskom modeliranju dugoživuće popratne emisije koja slijedi bljesak gama zračenja. Visokoenergijsko zračenje (GeV i TeV raspon energija) iz bljeskova gama zračenja se može opažati sa Zemlje sa teleskopima koji detektiraju Cherenkovljevo zračenje povezano s ulaskom visokoenergijskih zraka u atmosferu (npr. MAGIC teleskopi ili budući Cherenkov Telescope Array, opisani u [2]).

## 1.2 Modeli emisije u bljeskovima gama zračenja

Prema [1], iz promjene nagiba u svjetlosnim krivuljama (eng. *light curve*) koje odgovaraju optičkom i X području popratnog sjaja, zaključeno je da je emisija bljeskova gama zračenja fokusirana unutar određenog kuta, tj. nije izotropna (potpoglavlje 3.6, slika 3.3). Prava količina energije koja se oslobodi u ovim eksplozijama (reducirana u odnosu na izotropnu energiju) je između  $10^{48}$  i  $10^{52}$  erg. Emisija koja prati bljesak na većim valnim duljinama (X, optičko i radio područje) je pokazala da svjetlosne krivulje popratnog sjaja često padaju kao zakon potencije (eng. *power-law*) u vremenu ( $F_\nu \propto t^{-1.0}$ ), te je njihov spektar također zakon potencije ( $F_\nu \propto \nu^{-0.9 \pm 0.5}$ ). Sinkrotronsko zračenje nastalo prilikom interakcije materijala izbačenog eksplozijom bljeska gama zračenja sa okolnim medijem (takozvani model udara s okolnom tvari - *external forward-shock model*) dobro opisuje podatke o krivuljama popratnog sjaja bljeskova na više različitih frekventnih područja. U mnogim slučajevima, nagib optičkih i X svjetlosnih krivulja postane strmiji ( $F_\nu \propto t^{-2.2}$ ) otprilike 1 dan nakon inicijalne detekcije bljeska. Najprirodnije objašnjene ove pojave je da izbačaj bljeskova nije sferičnog oblika, već je kolimiran u uske mlazove. Kako se izbačeni materijal usporava i snaga relativističke kolimacije smanjuje, rub mlaza postaje vidljiv opažačima.

Jedno od glavnih neodgovorenih pitanja o bljeskovima gama zračenja je pitanje fizikalnog mehanizma koji producira promptno  $\gamma$ -zračenje koje okida detektore na satelitima koji opažaju bljeskove. Neki popularni modeli koji opisuju te mehanizme su ranije spomenut model udara s okolnom tvari i model internih udara (eng. *internal shock model*). U modelu internih udara, dio kinetičke energije mlaza se pretvara u termalnu energiju kada segment mlaza koji se giba brže naleti na sporiju ljusku koja je bila izbačena ranije. Termalna energija koja nastane u tom sudaru se onda emitira u obliku  $\gamma$ -zraka putem niza različitih mehanizama kao što su sinkrotronsko zračenje i proces inverznog Comptonovog raspršenja. Oba su ova mehanizma detaljnije prezentirana u narednim poglavljima. U nastavku su ukratko prezentirani neki modeli koji opisuju emisiju promptnog zračenja bljeskova gama zračenja.

### 1.2.1 Model nastajanja

Jedan od najraširenijih modela kojim se opisuju bljeskovi gama zračenja je model vruće vatrene kugle (eng. *hot fireball model*). Prema [1] i [3], otkriveno je kako se bljeskovi gama zračenja nalaze na kozmološkim udaljenostima te imaju luminozitet reda veličine  $10^{51}$  erg/s koji se producira unutar radijusa  $\lesssim 10^7$  cm, što se može razaznati iz varijabilnosti u opaženim svjetlosnim krivuljama (vremenska skala na kojoj se događa varijacija svjetlosne krivulje daje informaciju o veličini objekta koji zrači). Ovo upućuje na to da se unutar bljeskova postižu temperature reda veličine  $10^{10}$  K pa se elektron - pozitron parovi mogu pronaći u termalnoj ravnoteži s fotonima. Osim elektron - pozitron plazme, u relativističkim vatrenim kuglama mogu se naći i barioni, odnosno protoni koji su injektirani u kuglu zajedno sa zračenjem ili su se našli u atmosferi koja okružuje početnu eksploziju. U većini slučajeva pokazuje se kako će takva vatrena kugla s barionskom komponentnom tokom svoje adijabatske ekspanzije prebaciti svu svoju energiju u kinetičku energiju bariona te ih time ubrzati do relativističkih brzina. Dakle, većina je energije u početnom trenutku sadržana u fotonima i elektron - pozitron parovima, a energija koju nosi jedan proton je prema modelu vatrene kugle reda veličine 100 GeV. Radijus na kojem se stvara vatrena kugla određen je veličinom kompaktnog objekta koji se formira kao rezultat takve eksplozije, a smatra se da se radi ili o crnoj rupi, ili o milisekundnom magnetaru (neutronska zvijezda čije je magnetsko polje puno veće od magnetskog polja tipičnog pulsara). Kinetička energija relativističkog mlaza se potom ponovo pretvara u termalnu energiju i zrači se u obliku  $\gamma$ -zraka daleko od mjesta na kojem je nastala vatrena kugla.

### 1.2.2 Problem kompaktnosti i relativističko gibanje

Model vruće vatrene kugle osim pitanja nastajanja opaženih visokoenergijskih fotona, rješava i takozvani problem kompaktnosti bljeskova gama zračenja, odnosno pitanje zašto nastalo zračenje može izaći iz emisijske regije. Prema [3], problem kompaktnosti se odnosi na činjenicu da opaženi spektri bljeskova gama zračenja sadrže veliku količinu visokoenergijskih fotona, koji bi u suštini mogli interagirati s fotonima niže energije te producirati elektron - pozitron parove putem foton - foton anihilacije. Ono što se vrlo rano primjetilo jest da je prosječna optička dubina (pot-

poglavlje 2.6) gama zrake za takve interakcije izrazito velika te da sukladno tome ne bi smjelo biti moguće detektirati te fotone. Problem kompaktnosti proizlazi iz pretpostavke da je veličina izvora opaženog zračenja određena vremenskom varijabilnošću opaženih spektara, a taj se problem rješava uzimanjem u obzir relativističkih efekata. Konkretno, razmotri li se bljesak s opaženim ukupnim tokom energije (integrirano po cijelom trajanju bljeska, eng. *fluence*),  $F$ , koji izotropno emitira zračenje na udaljenosti  $D$  od opažača, onda vrijedi da je ukupna emitirana energija jednaka:

$$E = 4\pi D^2 F. \quad (1.1)$$

Kozmološki efekti utječu na gornju jednakost s faktorom reda veličine 1, pa se zbog toga u nastavku razmatranja zanemaruju. Brza vremenska varijabilnost na skali od  $\delta T \approx 10$  ms implicira da se radi o kompaktnom izvoru veličine  $R_i < c\delta T \approx 3000$  km. Kao što je navedeno ranije, opaženi spektar bljeska sadrži velik broj fotona visokih energija ( $E_1$ ) koji mogu interagirati s fotonima nižih energija ( $E_2$ ) ako vrijedi  $\sqrt{E_1 E_2} > m_e c^2$  (do na angularni faktor). Označi li se udio parova fotona koji zadovoljavaju taj uvjet s  $f_p$ , prosječna optička dubina za proces foton - foton anihilacije je:

$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{f_p \sigma_T F D^2}{R_i^2 m_e c^2},$$

ili

$$\tau_{\gamma\gamma} = 10^{13} f_p \left( \frac{F}{10^{-7} \text{ erg/cm}^2} \right) \left( \frac{D}{3000 \text{ Mpc}} \right)^2 \left( \frac{\delta T}{10 \text{ ms}} \right)^{-2}, \quad (1.2)$$

gdje je  $\sigma_T$  Thomsonov udarni presjek. Kao što je rečeno, ova optička dubina je iznimno velika, što znači da čak i kada u početnom trenutku nema elektron - pozitron parova, oni će se brzo formirati i Comptonски raspršiti fotone nižih energija što će rezultirati u velikoj optičkoj dubini za sve fotone. Ipak, iz opaženih netermalnih spektara vidi se kako izvori bljeskova gama zračenja moraju biti optički prozirni. Ono što dosad nije uzeto u obzir jest da se izvori bljeskova gama zračenja gibaju relativističkim brzinama. Razmotri li se izvor zračenja koji se giba prema mirujućem opažaču relativističkom brzinom koja se karakterizira Lorentzovim faktorom  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \gg 1$ , zbog Dopplerovog efekta (potpoglavlje 2.4) će fotoni s opaženom energijom  $h\nu_{\text{obs}}$  biti pomaknuti u plavo (njihova je frekvencija, a time i energija povećana), što znači da je energija tih fotona kod samog izvora bila manja,

odnosno  $h\nu_{\text{obs}}/\Gamma$ . Budući da je energija fotona kod izvora bila manja, onda je udio fotona koji zadovoljavaju uvjet za proizvodnju parova manji. Dakle, opaženi udio fotona  $f_p$  koji mogu proizvesti parove je veći od udjela fotona kraj izvora, i to za faktor  $\Gamma^{-2\beta}$ , gdje je  $\beta$  visokoenergijski spektralni indeks (potpoglavlje 5.1). Nadalje, relativistički efekti također dozvoljavaju da radijus  $s$  kojeg je emitirano zračenje,  $R_e$ , bude veći od ranije procjene ( $R_i < c\delta T$ ) za faktor  $\Gamma^2$ , odnosno  $R_e < \Gamma^2 c\delta T$ . Stoga slijedi:

$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{f_p \sigma_T F D^2}{\Gamma^{2\beta} R_e^2 m_e c^2},$$

ili

$$\tau_{\gamma\gamma} \approx \frac{10^{13}}{\Gamma^{4+2\beta}} f_p \left( \frac{F}{10^{-7} \text{ erg/cm}^2} \right) \left( \frac{D}{3000 \text{ Mpc}} \right)^2 \left( \frac{\delta T}{10 \text{ ms}} \right)^{-2}. \quad (1.3)$$

Dakle, problem kompaktnosti se može riješiti ako se izvor zračenja giba relativistički prema nama sa Lorentzovim faktorom

$$\Gamma > 10^{13/(4+2\beta)} \approx 100. \quad (1.4)$$

Neki od načina disipacije energije unutar vatrene kugle su dodatno razmotreni u narednom dijelu potpoglavlja.

### 1.2.3 Modeli disipacije energije (interni udari i interakcija s okolnom materijom)

Postoji više modela kojima se opisuje disipacija energije u bljeskovima gama zračenja, a oni koji su često diskutirani u literaturi su model internih udara (eng. *internal shock model*) za promptnu emisiju i interakcija s okolnom materijom (eng. *external shock model*) za popratni sjaj.

Prema [3], najbolji opis vremenske strukture emisije bljeskova gama zračenja daje kombinacija spomenutih modela. Interni udari se događaju na udaljenostima od  $\sim 10^{15}$  cm od centra eksplozije te pretvaraju određeni udio kinetičke energije relativističkog mlaza u termalnu energiju. Interni udari se događaju kada brža ljuska vatrene kugle prestigne sporiju ljusku, što znači da taj model zahtjeva varijabilni tok relativističkih čestica. Udari s okolnom materijom pak podrazumijevaju interakciju između ljuske koja putuje prema van i međuzvjezdanog medija koji se nalazi oko emisijske regije bljeska gama zračenja. Interakcija se odvija u obliku 2 udara: jedan udar

koji putuje prema van i propagira se u međuzvezdani medij te povratni udar koji se propagira natrag u relativističku ljusku plazme. Ako je područje emisije okruženo međuzvezdanim medijem, za očekivati je da će relativistička ljuska plazme disipirati energiju i udarom s okolnom materijom što će vjerojatno producirati još jedan bljesak čija je energija ista ili veća od prvotnog bljeska gama zračenja. Smatra se stoga da je upravo ova interakcija relativističke ljuske i ISM-a ta koja uzrokuje popratni sjaj (eng. *afterglow*) koji prati bljeskove gama zračenja.

Glavni problem kod modela internih udara jest slaba efikasnost konverzije kinetičke energije mlaza u gama zračenje. Ta efikasnost je uz povoljne uvjete reda veličine 20%, a u drugim slučajevima može biti puno niža. Ako se pretpostavi da "centralni pogon" eksplozija bljeskova gama zračenja potječe od gravitacijske energije kompaktnog objekta, niska efikasnost konverzije može se popraviti uključivanjem relativističkih efekata kolimacije (eng. *beaming*) kako bi se smanjio nedostatak energije.

### **1.3 Motivacija: određivanje parametara emisijskog modela**

U ovom radu ćemo pod pretpostavkom modela internih udara za promptno zračenje bljeskova gama zračenja odrediti parametre sinkrotronskog zračenja i pridruženog inverznog Comptonovog zračenja koji opisuju spektar. Vrijednost ovih parametara nije potpuno poznata, te postoji tek nekolicina radova u kojima su određeni rasponi vrijednosti za individualne bljeskove zračenja ([4], [5]).

Struktura ovog rada je sljedeća: u drugom poglavlju navodimo definicije osnovnih veličina vezanih uz emisiju zračenja. U trećem i četvrtom poglavlju opisani su detalji sinkrotronskog zračenja i pridruženog inverznog Comptonovog raspršenja. U petom poglavlju predstavljen je korišteni numerički model, a u šestom poglavlju dana je usporedba opaženih spektara bljeskova gama zračenja s rezultatima numeričkog modela. U sedmom poglavlju dan je zaključak, dok je u osmom poglavlju dan metodički dio diplomskog rada.

## 2 Osnovne veličine i njihove definicije

U narednim potpoglavljima dan je pregled nekih osnovnih veličina u astrofizici koje su potrebne za nastavak razmatranja.

### 2.1 Luminozitet

Prema [6], luminozitet je fizikalna veličina koja opisuje količinu energije koja se emitira iz nekog izvora u sekundi. Mjeri se uglavnom u jedinicama  $\text{erg s}^{-1}$ , te ne ovisi o prostornom kutu. Definiiraju se *monokromatski* luminizotet  $L(\nu)$ , koji je luminozitet po jedinici frekvencije  $\nu$  (odnosno,  $\text{Hz}^{-1}$ ), dok se *bolometrijski* luminozitet dobije integriranjem luminoziteta po frekvenciji:

$$L = \int_0^{\infty} L(\nu) d\nu. \quad (2.1)$$

Luminozitet se može definirati i tako da se integrira u danom pojasu energija (ili frekvencija).

### 2.2 Tok fotona

Prema [7], kada je veličina sustava koji se promatra puno veća od valne duljine svjetlosti, može se smatrati da zračenje (svjetlost) putuje pravocrtno u praznom prostoru ili homogenom mediju (model zrake svjetlosti). Jedan od bitnih koncepata koji se može izvesti iz ovog modela jest koncept toka fotona ili toka energije (eng. *flux*). Promotri li se element površine  $dA$  koji je izložen zračenju tokom vremena  $dt$ , količina energije koja prođe kroz taj element površine biti će proporcionalna umnošku  $dAdt$ , te se može zapisati kao  $FdAdt$ . Tok energije  $F$  obično se onda mjeri u jedinicama  $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$  te može ovisiti o orijentaciji elementa površine u prostoru. Također,  $F$  se može povezati s luminozitetom tijela koje zrači. Prema [6], ako tijelo emitira luminozitet  $L$  te se nalazi na udaljenosti  $R$ , onda vrijedi:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2}; \quad F(\nu) = \frac{L(\nu)}{4\pi R^2}; \quad F = \int_0^{\infty} F(\nu) d\nu. \quad (2.2)$$



### 2.3 Intenzitet i emisivnost

Prema [6], intenzitet zračenja  $I$  je energija po vremenu koja prolazi kroz element površine okomit na smjer upada fotona, po jediničnom prostornom kutu. Stoga je obično mjerna jedinica za intenzitet  $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ . Definira se i monokromatski intenzitet, čija je mjerna jedinica  $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$ , te se može pokazati da pri prelasku iz sustava  $S'$  vezanog uz neko tijelo u laboratorijski sustav  $S$ , za intenzitete mjerene u ta dva sustava vrijedi:

$$\frac{I(\nu)}{\nu^3} = \frac{I'(\nu')}{\nu'^3} = \text{invarijantno na Lorentzovu transformaciju}, \quad (2.3)$$

gdje se veličine označene s ( $'$ ) mjere u sustavu  $S'$ . Bitno je primjetiti kako intenzitet zračenja ne ovisi o udaljenosti od izvora zračenja, već je on mjera emitirane energije koju nosi zraka svjetlosti (ili točnije, setovi zraka svjetlosti).

Emisivnost  $j$  označava količinu energije koju emitira jedinični volumen u jediničnom vremenskom intervalu po jedinici prostornog kuta:

$$j = \frac{\text{energija}}{dV dt d\Omega}. \quad (2.4)$$

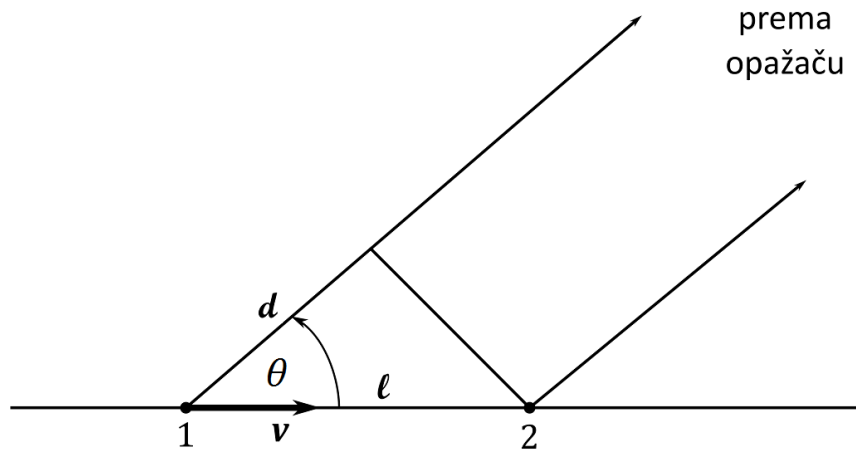
Ako je izvor *optički tanak* ili *proziran* (potpoglavlje 2.6), onda vrijedi jednostavna relacija između intenziteta i emisivnosti:

$$I = jR, \quad \text{za optički tanak izvor}, \quad (2.5)$$

gdje je  $R$  udaljenost promatrača od izvora.

### 2.4 Dopplerov efekt i crveni pomak

Prema [7], bilo koji periodički fenomen koji se pojavljuje u putujućem sustavu  $S'$  će imati period u laboratorijskom sustavu  $S$  naizgled povećan za Lorentzov faktor  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Ovaj efekt se naziva dilatacijom vremena, te je posljedica relativnosti istovremenosti događaja u različitim inercijalnim sustavima. Ako se pak mjeri vrijeme dolaska pulseva ili nekih drugih indikacija periodičkog fenomena koji se propagiraju brzinom svjetlosti, tada će opaženi period biti dodatno promijenjen zbog efekata kašnjenja propagacije svjetlosti. Ukupan efekt se naziva *Dopplerov efekt*.



Slika 2.1: Prikaz geometrije za Dopplerov efekt.

U laboratorijskom sustavu  $S$  može se zamisliti kako neki izvor u gibanju emitira jedan period zračenja kada se pomiče iz točke 1 u točku 2 brzinom  $v$ . Ako je frekvencija zračenja u sustavu mirovanja izvora  $S'$  jednaka  $\omega' = 2\pi\nu'$ , tada je vrijeme potrebno da se izvor pomakne iz točke 1 u točku 2 u laboratorijskom sustavu dano s efektom dilatacije vremena:

$$\Delta t = \frac{2\pi\gamma}{\omega'}. \quad (2.6)$$

Pogleda li se slika 2.1, može se vidjeti kako vrijedi da je  $l = v\Delta t$  i  $d = v\Delta t \cos \theta$ . Razlika vremena dolaska dvaju signala  $\Delta t_A$  zračenja emitiranih u točkama 1 i 2 jednaka je  $\Delta t$  minus vrijeme potrebno da zračenje prođe udaljenost  $d$ . Stoga slijedi

$$\Delta t_A = \Delta t - \frac{d}{c} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right). \quad (2.7)$$

Dakle, opažena frekvencija  $\omega$  će onda biti

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t_A} = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}. \quad (2.8)$$

Ovo je relativistička Dopplerova formula. Faktor  $1/\gamma$  je čisto relativistički efekt, dok se faktor  $1 - (v/c) \cos \theta$  pojavljuje čak i u klasičnom razmatranju. Jedna distinkcija između relativističkog i klasičnog pogleda koju vrijedi spomenuti jest ta da klasični Dopplerov efekt (primjerice za zvučne valove) zahtijeva poznavanje informacije o ne samo relativnoj brzini izvora i opažača, već i o brzini izvora i opažača s obzirom

na medij kojim se val propagira (na primjer, zrak). Relativistička formula ne sadrži nikakvu ovisnost o mediju propagacije svjetlosti, već se pojavljuje samo relativna brzina izvora i opažača.

Dopplerova formula može se zapisati i kao:

$$\omega' = \omega\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right), \quad (2.9)$$

odnosno, u inverznom obliku:

$$\omega = \omega'\gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right). \quad (2.10)$$

Prilikom opažanja apsorpcijskih linija spektara zračenja koje dolazi s udaljenih objekata u svemiru primjećen je takozvani crveni pomak ili *redshift*. Prema [8], crveni pomak  $z$  nekog objekta je parcijalni Dopplerov pomak njegove emitirane svjetlosti zbog radijalnog gibanja objekta:

$$z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1, \quad (2.11)$$

gdje su  $\nu_o$  i  $\lambda_o$  opažena frekvencija i valna duljina, a  $\nu_e$  i  $\lambda_e$  emitirane. U specijalnoj teoriji relativnosti, crveni pomak je povezan s radijalnom brzinom udaljavanja objekta  $v$  kao:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (2.12)$$

Bitno je napomenuti kako se crveni pomak nekog objekta može direktno mjeriti, dok se radijalna brzina  $v$  ne može.

## 2.5 Luminozitetna udaljenost

Prema [8], *luminozitetna udaljenost*  $d_L$  definira se relacijom između bolometrijskog toka fotona  $F$  (integriranog po svim frekvencijama  $\nu$ ) i bolometrijskog luminoziteta  $L$ :

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (2.13)$$

Ako je potrebno raditi s diferencijalnim tokom  $dF/d\nu = F_\nu$  i luminozitetom  $L_\nu$ , onda treba korigirati izraz za tok ili luminozitet zbog činjenice da objekt koji ima

određen crveni pomak emitira energiju u drukčijem intervalu frekvencija u odnosu na ono što se opaža na Zemlji. Ova korekcija se naziva  $k$  - korekcijom i ona ovisi o spektru objekta koji emitira zračenje. Osim u slučaju kada je spektar objekta opisan sa  $\nu L_\nu = \text{konstanta}$ , diferencijalni tok  $F_\nu$  je povezan s diferencijalnim luminozitetom  $L_\nu$  na sljedeći način:

$$F_\nu = (1 + z) \frac{L_{(1+z)\nu}}{L_\nu} \frac{L_\nu}{4\pi d_L^2}, \quad (2.14)$$

gdje je  $z$  crveni pomak objekta, omjer luminoziteta izjednačava razliku u tokovima između emitiranog i opaženog intervala, a faktor  $(1 + z)$  pojavljuje se zbog crvenog pomaka širine intervala opaženog spektra u odnosu na emitirani. Sličan se izraz može zapisati i za diferencijalni tok po jedinici valne duljine:

$$F_\lambda = \frac{1}{1 + z} \frac{L_{\lambda/(1+z)}}{L_\lambda} \frac{L_\lambda}{4\pi d_L^2}. \quad (2.15)$$

Smatra se kako je najprirodniji zapis toka fotona diferencijalni tok po jedinici logaritma frekvencije (ili jedinici logaritma valne duljine)  $\nu F_\nu = \lambda F_\lambda$  za koji nema pomicanja širine spektra u crveno, pa je onda

$$\nu F_\nu = \frac{\nu_e L_{\nu_e}}{4\pi d_L^2}, \quad (2.16)$$

gdje je  $\nu_e = (1 + z)\nu$  emitirana frekvencija. Ovi se izrazi mogu lako proširiti za slučaj konačne širine spektra.

## 2.6 Optička dubina

Koncept optičke dubine u astrofizici ima bitnu ulogu. Prema [7], ona se obično definira preko takozvanog apsorpcijskog koeficijenta fotona  $\alpha_\nu$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] koji predstavlja gubitak u intenzitetu zrake koja u nekom mediju prođe udaljenost  $ds$ :

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds,$$

gdje je  $I_\nu$  specifičan intenzitet zrake. Po konvenciji je  $\alpha_\nu$  pozitivan kada se energija zračenja gubi. U mikroskopskom modelu medija s gustoćom  $n$  (broj čestica po jedinici volumena), svaka čestica predstavlja efektivnu površinu apsorpcije ili udarni presjek veličine  $\sigma_\nu$  [ $\text{cm}^2$ ]. Uz pretpostavku da su ti apsorberi nasumično distribuirani,

može se pokazati kako vrijedi:

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds,$$

odnosno

$$\alpha_\nu = n\sigma_\nu. \quad (2.17)$$

Korištenjem ovog koeficijenta može se definirati optička dubina  $\tau_\nu$  kao

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds,$$

ili

$$d\tau_\nu = n\sigma_\nu ds \quad (2.18)$$

te se onda tako definirana optička dubina mjeri po putu koji zraka prođe. Smatra se da je medij *optički debeo* ili *neproziran* kada se integriranjem  $\tau_\nu$  po tipičnom putu zrake kroz medij dobije da  $\tau_\nu > 1$ . Isto tako, kada vrijedi  $\tau_\nu < 1$ , smatra se da je medij *optički tanak* ili *proziran*. Drugim riječima, optički tanak medij je onaj u kojem tipični foton frekvencije  $\nu$  može putovati medijem bez da bude apsorbiran.

U narednim poglavljima slijedi izvod oblika  $\nu F_\nu$  spektra za slučaj sinkrotronskog zračenja relativističkih elektrona i inverzne Comptonove emisije.

### 3 Sinkrotronsko zračenje

U ovom poglavlju prikazana je relativistička kinematika čestica i njihova emisija te je dan izvod sinkrotronskog zračenja jedne relativističke čestice kao i zračenja snopa relativističkih elektrona.

Prema [7], nabijene čestice ubrzane magnetskim poljem  $\vec{B}$  uvijek zrače. Za ne-relativističke brzine čestica, priroda zračenja je jednostavna i naziva se ciklotronskim zračenjem. Frekvencija emitiranog zračenja jednaka je frekvenciji rotacije ili žirofrekvenciji (eng. *gyration frequency*) čestice u magnetskom polju. Međutim, za ekstremno relativističke čestice, frekventni spektar zračenja je puno kompliciraniji i može se protezati do iznosa koji je nekoliko puta veći od žirofrekvencije čestice. Ovakav oblik zračenja naziva se sinkrotronskim zračenjem.

#### 3.1 Relativistička kinematika

Kako bismo mogli opisati zračenje nabijene čestice koja se giba relativističkom brzinom, potrebno je razmotriti njene jednadžbe gibanja. Prema [7], potrebno je pronaći jednadžbe koje opisuju gibanje relativističke čestice u kovarijantnoj formi te zadovoljavaju principe relativnosti, a koje se za brzine puno manje od  $c$  reduciraju na Newtonove jednadžbe (koje nisu kovarijantne).

Masa mirovanja čestice,  $m_0$  je skalar po definiciji, a četverovektor impulsa čestice,  $P^\mu$  definira se kao:

$$P^\mu \equiv m_0 U^\mu, \quad (3.1)$$

gdje je  $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ , četverovektor brzine čestice, gdje je  $d\tau$  interval vlastitog vremena. Ono je definirano preko:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

te je veličina koja je invarijantna na Lorentzovu transformaciju ( $d\tau = d\tau'$ ). Vlastito vrijeme mjeri vremenske intervale između događaja koji su se dogodili u točkama razmaknutima za  $dx, dy, dz$  u prostoru i za  $dt$  u vremenu. Ako su se dva događaja dogodila na istom položaju u prostoru ( $dx = dy = dz = 0$ ),  $d\tau$  je onda ono vrijeme koje mjeri opažatelj u tom sustavu. Ako se diferencijali koordinata odnose na ishodište nekog sustava  $S'$  koje se s obzirom na sustav mirujućeg opažatelja giba brzinom  $v$ , tada

vrijedi:

$$d\tau = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{dt}{\gamma},$$

gdje je  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  Lorentzov faktor, iz čega se može vidjeti kako je  $d\tau$  vremenski interval kojeg mjeri opažač u gibanju (dilatacija vremena).

Budući da fotoni nemaju masu i putuju brzinom svjetlosti, njihov četverovektor impulsa ne može se definirati gornjim izrazom, već se trebaju koristiti kvantne relacije  $E = \hbar\omega$  i  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , gdje je  $E$  energija fotona,  $\omega$  frekvencija fotona,  $\vec{p}$  impuls fotona,  $\vec{k}$  valni vektor fotona i  $\hbar$  reducirana Planckova konstanta. Stoga se može pisati:

$$P^\mu = \hbar k^\mu = [\hbar\omega/c, \hbar\vec{k}]. \quad (3.2)$$

Može se definirati četverovektor akceleracije čestice,  $a^\mu$ , deriviranjem četverovektora brzine:

$$a^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (3.3)$$

Pomoću četverovektora akceleracije može se definirati četverovektor sile,  $F^\mu$  kako bi se dobila relativistička forma drugog Newtonovog zakona:

$$F^\mu \equiv m_0 a^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}. \quad (3.4)$$

U elektrodinamici,  $F^\mu$  može se eksplicitno dobiti iz poznate Lorentzove sile,

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = e \left[ \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right]. \quad (3.5)$$

### 3.2 Relativističke invarijante

Nekoliko veličina koje su invarijantne na relativističke Lorentzove transformacije će nam biti korisne u razmatranjima. Prema [9], prva od njih je transformacija stope gubitka energije zbog elektromagnetskog zračenja koju opažaju promatrači u različitim inercijalnim sustavima, tj. kako se  $dE/dt$  mijenja prelaskom iz jednog inercijalnog sustava u drugi.

Pokazuje se kako je  $dE/dt$  relativistička invarijanta, a najlakši način da se to pokaže je primjećivanjem kako je energija  $dE$  emitirana u obliku zračenja u vre-

menskom intervalu  $dt$  zapravo nulta komponenta četverovektora impulsa

$$P^\mu \equiv [dE/c, d\vec{p}],$$

gdje je  $\vec{p}$  vektor nerelativističkog impulsa čestice, a isto tako je  $cdt$  nulta komponenta četverovektora položaja

$$x^\mu \equiv [cdt, d\vec{r}],$$

gdje je  $\vec{r}$  vektor položaja čestice. Stoga se energija  $dE$  i vremenski interval  $dt$  transformiraju na jednak način prelaskom iz jednog inercijalnog sustava u drugi, pa je onda njihov omjer  $dE/dt$  invarijantan na Lorentzovu transformaciju.

### 3.3 Emisija relativističkih čestica

Cilj u ovom potpoglavlju je korištenjem relativističkih transformacija pronaći izraz za zračenje koje emitira čestica koja se giba relativističkom brzinom. Prema [7], potrebno je premjestiti se u takozvani *treuntni sustav mirovanja* (eng. *instantaneous rest frame*)  $S'$ , takav da je brzina promatrane čestice nula u određenom trenutku. Čestica neće ostati u mirovanju u ovom sustavu (jer se ona može ubrzati), ali će se barem u susjednim infinitezimalnim vremenskim intervalima gibati nerelativistički. Zbog toga se može emitirano zračenje čestice računati korištenjem *Larmorove formule* za emisiju jednog akceleriranog naboja  $q$ , kako je navedeno u [9]:

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 |\vec{a}_0|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (3.6)$$

gdje  $P = -dE/dt$  označava ukupnu snagu zračenja (ukupna rata gubljenja energije zračenjem čestice), a akceleracija  $\vec{a}_0$  odgovara vlastitoj akceleraciji (eng. *proper acceleration*) nabijene čestice u relativističkom smislu. Ukupna rata zračenja se mjeri u trenutnom sustavu mirovanja čestice. Pretpostavlja se kako je u trenutnom sustavu mirovanja čestice njena akceleracija približno jednaka nuli. Za nastavak razmatranja potrebna su dva općenita rezultata: norma četverovektora akceleracije čestice je invarijanta za svaki inercijalni sustav i četverovektor akceleracije čestice se može zapisati kao:

$$\mathbf{a} = \gamma \left[ c \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial(\gamma \vec{v})}{\partial t} \right] = \left[ \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^4 c, \gamma^2 \vec{a} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^4 \vec{v} \right], \quad (3.7)$$



gdje se akceleracija  $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$  i brzina čestice  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  mjere u sustavu opažača  $S$ . U trenutnom sustavu mirovanja čestice,  $S'$ , četvervektor akceleracije jednak je  $[0, \vec{a}_0]$ , gdje je  $\vec{a}_0$  ranije spomenuta vlastita akceleracija čestice. Izjednačavanjem normi četvervektora u sustavima  $S$  i  $S'$  dobije se:

$$-\vec{a}_0^2 = c^2\gamma^8 \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right)^2 - \left[ \gamma^2\vec{a} + \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) \gamma^4\vec{v} \right]^2. \quad (3.8)$$

Nakon sređivanja izraz postaje:

$$\vec{a}_0^2 = \gamma^4 \left[ \vec{a}^2 + \gamma^2 \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \right)^2 \right]. \quad (3.9)$$

Budući da je stopa zračenja  $dE/dt$  invarijantna na Lorentzove transformacije, vrijedi:

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_S = \left( \frac{dE'}{dt'} \right)_{S'} = \frac{q^2|\vec{a}_0|^2}{6\pi\epsilon_0c^3} = \frac{q^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0c^3} \left[ \vec{a}^2 + \gamma^2 \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \right)^2 \right], \quad (3.10)$$

gdje treba zamijetiti kako su sve veličine  $(\vec{a}, \vec{v})$  i  $\gamma$  mjerene u opažačkom (laboratorijskom) sustavu  $S$ . Gornji izraz može se raspisati tako da se separira akceleracija čestice na komponentu koja je paralelna vektoru brzine i komponentu koja je okomita na vektor brzine:

$$\vec{a} = a_{\parallel}\hat{i}_{\parallel} + a_{\perp}\hat{i}_{\perp} \quad i \quad |\vec{a}|^2 = |a_{\parallel}|^2 + |a_{\perp}|^2. \quad (3.11)$$

Uvrštavanjem u 3.10 slijedi da se stopa zračenja može zapisati kao:

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_S = \frac{q^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0c^3} (|a_{\perp}|^2 + \gamma^2|a_{\parallel}|^2). \quad (3.12)$$

### 3.4 Dinamika nabijenih čestica u magnetskom polju

Prema [9], česticu naboja  $q$  i mase  $m_0$  u uniformnom, statičnom magnetskom polju  $B$  može se opisati relativističkom jednažbom:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.13)$$

Lijeva strana gornjeg izraza može se proširiti:

$$m_0 \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) = m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \gamma^3 \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2},$$

jer je točniji zapis Lorentzovog faktora zapravo  $\gamma = (1 - \vec{v} \cdot \vec{v}/c^2)^{-1/2}$ . U magnetskom polju, vektor akceleracije  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  je uvijek okomit na vektor brzine  $\vec{v}$ , pa slijedi  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ . Stoga,

$$\gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.14)$$

Vektor brzine  $\vec{v}$  može se separirati na komponentu koja je paralelna magnetskom polju,  $v_{\parallel}$  i na komponentu koja je okomita na smjer magnetskog polja,  $v_{\perp}$  (slika 3.1). Definiramo kut nagiba  $\alpha$  između vektora brzine čestice  $\vec{v}$  i vektora magnetskog polja  $\vec{B}$  (eng. *pitch angle*), pa vrijedi  $\tan \alpha = v_{\perp}/v_{\parallel}$ . Budući da je  $v_{\parallel}$  paralelna s  $\vec{B}$ , iz 3.14 slijedi da je  $v_{\parallel}$  konstantno (nema promjene komponente brzine koja je paralelna magnetskom polju). Akceleracija nabijene čestice okomito na smjer magnetskog polja  $\vec{B}$  i na smjer komponente  $v_{\perp}$  je dana s:

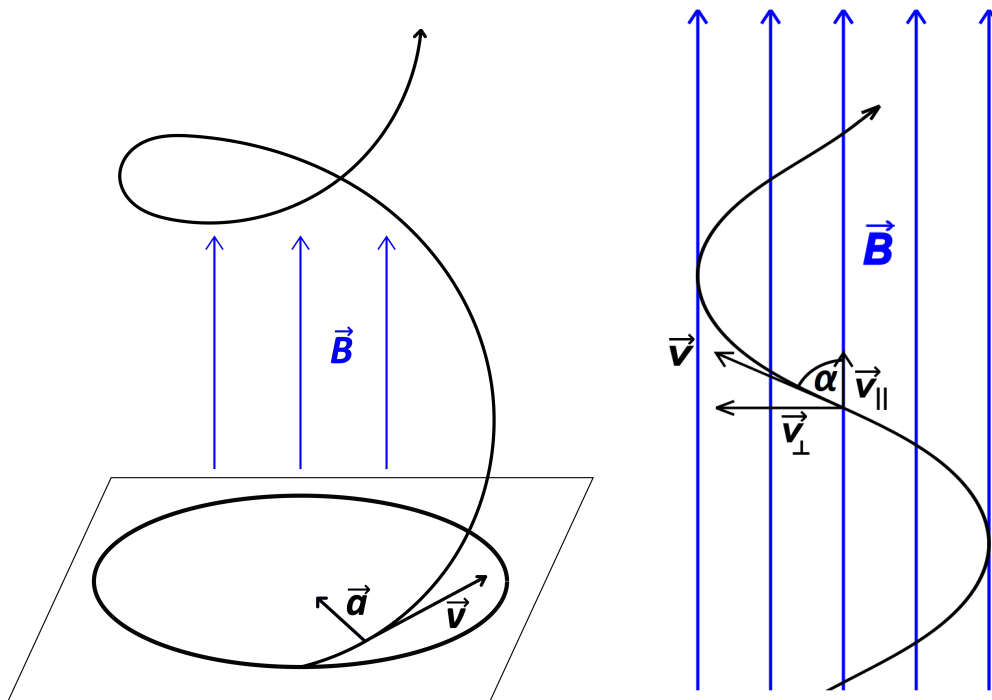
$$\gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q v_{\perp} |\vec{B}| (\hat{i}_{\vec{v}} \times \hat{i}_{\vec{B}}) = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \alpha (\hat{i}_{\vec{v}} \times \hat{i}_{\vec{B}}),$$

gdje su  $\hat{i}_{\vec{v}}$  i  $\hat{i}_{\vec{B}}$  jedinični vektori u smjeru vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ , respektivno.

Vektor akceleracije čestice je okomit na ravninu koju tvore vektor trenutne brzine čestice  $\vec{v}$  i vektor magnetskog polja  $\vec{B}$ . Budući da je magnetsko polje uniformno, konstantna akceleracija okomita na smjer brzine rezultira u kružnom gibanju čestice oko smjera magnetskog polja. Izjednačavanjem te akceleracije sa izrazom za centripetalno ubrzanje dobije se:

$$\frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \alpha}{\gamma m_0}, \text{ odnosno, } r = \frac{\gamma m_0 |\vec{v}| \sin \alpha}{q |\vec{B}|}. \quad (3.15)$$

Gibanje čestice se, dakle, sastoji od konstantne brzine u smjeru magnetskog polja i kružnog gibanja po radijusu  $r$  oko smjera magnetskog polja, drugim riječima, čestica opisuje spiralni put sa konstantnim kutom nagiba  $\alpha$ . Radijus  $r$  naziva se *žiroradijus* (eng. *gyroradius*) ili *ciklotronski radijus* čestice. Njena kutna frekvencija  $\omega_g$  oko smjera magnetskog polja naziva se *kutna ciklotronska frekvencija* ili *kutna*



Slika 3.1: Prikaz spiralne putanje nabijene čestice u uniformnom magnetskom polju (lijevo) te rastavljanje brzine čestice na komponente u magnetskom polju (desno).

žirofrekvencija (eng. *angular gyrofrequency*),

$$\omega_g = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{q|\vec{B}|}{\gamma m_0}. \quad (3.16)$$

Pripadna žirofrekvencija  $\nu_g$  (broj okreta čestice oko vektora magnetskog polja u sekundi) iznosi

$$\nu_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{q|\vec{B}|}{2\pi\gamma m_0}. \quad (3.17)$$

Za nerelativističku česticu vrijedi  $\gamma = 1$  pa je  $\nu_g = q|\vec{B}|/(2\pi m_0)$ .

### 3.5 Ukupna snaga zračenja

Iz dosadašnjih razmatranja može se zaključiti kako će se u uniformnom magnetskom polju elektron visoke energije gibati po spiralnom putu sa konstantnim kutom nagiba  $\alpha$ . Brzina u smjeru vektora magnetskog polja je konstantna dok se elektron okreće oko smjera magnetskog polja relativističkom žirofrekvencijom  $\nu_g = eB/(2\pi\gamma m_e)$ , gdje je  $\gamma$  Lorentzov faktor elektrona  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Elektron se stoga ubrzava prema centru svoje orbite te se njegova stopa zračenja može izvesti iz rezultata pot-

poglavlja 3.3, točnije iz izraza 3.12. Dakle, stopa gubljenja energije nabijene čestice naboja  $q$  koja ima akceleracije  $a_{\perp}$  i  $a_{\parallel}$  mjerene u laboratorijskom referentnom sustavu je:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{zračenje}} = \frac{q^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} (|a_{\perp}|^2 + \gamma^2|a_{\parallel}|^2). \quad (3.18)$$

Akceleracija je uvijek okomita na smjer vektora brzine čestice, pa vrijedi:

$$a_{\perp} = \frac{evB}{\gamma m_e} \sin \alpha \text{ i } a_{\parallel} = 0.$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobije se za ukupnu stopu gubitka energije elektrona:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dE}{dt}\right) &= \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |a_{\perp}|^2 = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2 \sin^2 \alpha}{\gamma^2 m_e^2} \\ &= \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c m_e^2} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Gornja se jednadžba može raspisati u sljedeći oblik korištenjem relacije  $c^2 = (\mu_0\epsilon_0)^{-1}$ :

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2 \left(\frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^2 c \frac{B^2}{2\mu_0} \gamma^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.20)$$

Veličina u prvoj zagradi s desne strane jednadžbe je Thomsonov udarni presjek,  $\sigma_T$ , dok izraz  $B^2/2\mu_0$  odgovara gustoći energije magnetskog polja  $U_{\text{mag}}$ , pa je onda:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_{\text{mag}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.21)$$

U ultrarelativističkoj granici,  $v \rightarrow c$ , ukupna snaga zračenja je:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_{\text{mag}} \gamma^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.22)$$

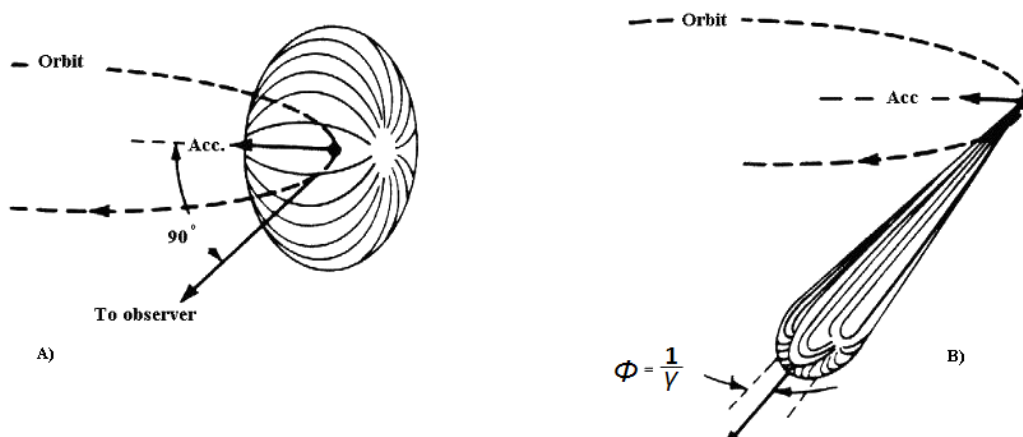
Ovi rezultati vrijede za elektrone koji imaju kut nagiba između brzine i smjera magnetskog polja jednak  $\alpha$ . Zbog utjecaja nepravilnosti u distribuciji magnetskog polja ili nestabilnostima u strujanju, za distribuciju kuta  $\alpha$  populacije elektrona visokih energija očekuje se da će biti izotropna. Također, visoko energijski elektroni mogu se slučajno raspršiti u kutu nagiba, pa se uprosječivanjem preko kuta  $\alpha$  može dobiti izraz za prosječnu stopu gubitka energije. Usrednjujemo, dakle, gornji izraz preko izotropne distribucije kutova  $\alpha$ :  $p(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$ , te dobivamo prosječnu stopu

gubitka energije (snaga sinkrotronskog zračenja):

$$P \equiv - \left( \frac{dE}{dt} \right) = 2\sigma_T c U_{\text{mag}} \gamma^2 \left( \frac{v}{c} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{mag}} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2. \quad (3.23)$$

### 3.6 Spektar sinkrotronskog zračenja

U ovom potpoglavlju prikazan je spektar sinkrotronskog zračenja relativističkih elektrona. Prema [9], jedno od generalnih svojstava zračenja relativističkih elektrona jest da je njihovo zračenje usmjereno u smjeru gibanja elektrona (eng. *beaming*), to jest, emitirano polje zračenja je koncentrirano u malom broju smjerova oko vektora brzine elektrona. Ovaj efekt je primarno posljedica relativističke aberacije svjetlosti prilikom prelaska između trenutnog sustava mirovanja elektrona i referentnog sustava promatrača. Nadalje, potrebno je razmotriti detalje vremenskog razvoja zračenja koje detektira udaljeni promatrač.



Slika 3.2: Prikaz relativističkog *beaming* efekta. Zbog aberacije svjetlosti prilikom prelaska iz trenutnog sustava mirovanja čestice (A) u laboratorijski sustav (B), emitirano zračenje je koncentrirano u konusu kuta  $\phi \sim 1/\gamma$  oko smjera brzine elektrona. Preuzeto i prilagođeno sa [10].

Za početak promatramo jedan elektron koji se okreće oko vektora magnetskog polja pod kutem nagiba  $\alpha = 90^\circ$ . Elektron je ubrzan prema centru svoje spiralne putanje (radijalno prema unutra) i u svom trenutnom sustavu mirovanja emitira dipolno zračenje s obzirom na smjer vektora akceleracije. Stoga se može pronaći izgled zračenja u laboratorijskom sustavu primjenjivanjem formula za aberaciju. Kutna distribucija intenziteta zračenja s obzirom na vektor akceleracije u trenutnom sustavu mirovanja elektrona  $S'$  je  $I_\nu \propto \sin^2 \theta' = \cos^2 \phi'$ , gdje je  $\phi' = 90^\circ - \theta'$ , a  $\theta'$  je kut između vektora akceleracije i vektora brzine elektrona u trenutnom sustavu mirova-

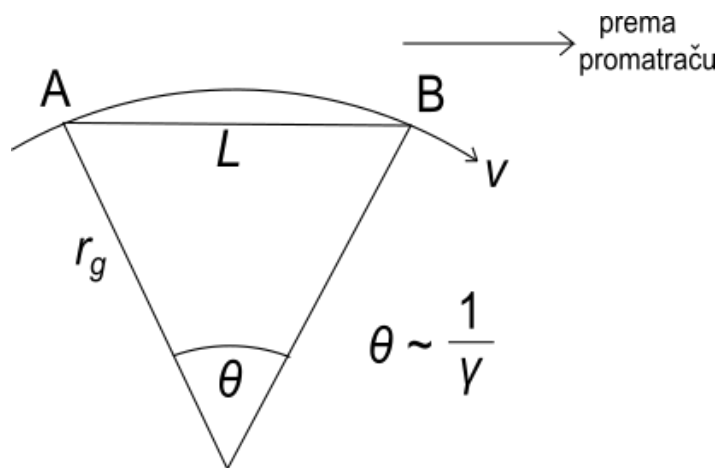
nja  $S'$ . Formule za relativističku aberaciju svjetlosti pomoću kojih se može prelaziti iz sustava  $S'$  u laboratorijski sustav su:

$$\sin \phi = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \phi'}{1 + \frac{v}{c} \cos \phi'}; \quad \cos \phi = \frac{\cos \phi' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \phi'}. \quad (3.24)$$

Maksimalna vrijednost intenziteta zračenja se pojavljuje za vrijednost kuta  $\phi' = \pi/2$  u trenutnom sustavu mirovanja elektrona, a kako bi se ilustrirali efekti *beaming*-a zračenja mogu se promotriti kutevi od  $\phi' = \pm\pi/4$  za koje intenzitet zračenja padne na polovicu svoje maksimalne vrijednosti. Odgovarajuće vrijednosti kuteva u laboratorijskom sustavu su:

$$\sin \phi \approx \phi \approx \pm \frac{1}{\gamma}, \quad (3.25)$$

gdje se uzelo u obzir kako je  $\gamma \gg 1$ . Zbog toga je zračenje koje se emitira unutar  $-\pi/4 < \phi' < \pi/4$  koncentrirano u konusu kuta  $-1/\gamma < \phi < 1/\gamma$  čija os gleda u smjeru gibanja elektrona gledano iz sustava opažača  $S$ . Dakle, u sustavu opažača je dipolno zračenje elektrona izduženo u smjeru gibanja elektrona (slika 3.2). Kada taj izduženi dio dođe do opažača, zapaža se puls zračenja svaki put kada vektor brzine elektrona dođe unutar  $\pm 1/\gamma$  u odnosu na pravac gledanja opažača. Spektar zračenja koji opaža udaljeni opažač je Fourierov transformat tog pulsa, nakon što se uzmu u obzir efekti kašnjenja zračenja. Ova analiza također dočarava zašto je opažena frekvencija zračenja puno veća od žirofrekvencije elektrona.



Slika 3.3: Prikaz segmenta orbite elektrona s kojeg se emitira zračenje. Po uzoru na [9].

Udaljeni opažač detektira zračenje samo sa  $1/\gamma$  radijana elektronove orbite, međutim je opažena duljina trajanja pulsa manja od  $1/\gamma$  puta period prelaska orbite. To je

zato jer zračenje emitirano na stražnjem kraju pulsa gotovo sustiže dio zračenja koji je emitiran na prednjem kraju pulsa. Ovaj se rezultat može pokazati jednostavnim računom vremena dolaska signala do udaljenog opažača u laboratorijskom sustavu  $S$ . Segment orbite elektrona iz kojeg se prima zračenje je prikazano na slici 3.3. Promatrač koji se nalazi na udaljenosti  $R$  od točke A prima zračenje nastalo u toj točki u trenutku  $R/c$  nakon emitiranja zračenja. U točki B se zračenje emitira u trenutku  $L/v$  nakon emitiranja u točki A, te onda zračenje iz točke B prelazi udaljenost od  $(R - L)$  brzinom svjetlosti kako bi stiglo do opažača. Zbog toga stražnji dio pulsa zračenja dolazi do opažača u vremenu  $L/v + (R - L)/c$ . Trajanje pulsa koje mjeri opažač je onda:

$$\Delta t = \left[ \frac{L}{v} + \frac{R - L}{c} \right] - \frac{R}{c} = \frac{L}{v} \left[ 1 - \frac{v}{c} \right]. \quad (3.26)$$

Opaženo trajanje pulsa je puno manje od vremenskog intervala  $L/v$  zato što se svjetlost kreće konačnom brzinom. Faktor u  $1 - v/c$  gornjem izrazu dolazi zbog činjenice da se izvor zračenja giba prema opažaču. Relativistički elektron gotovo sustigne fotone zračenja emitirane u točki A jer mu je brzina  $v \approx c$ , ali ne sasvim. Izraz 3.26 može se raspisati korištenjem činjenice da je:

$$\frac{L}{v} = \frac{r_g \theta}{v} \approx \frac{1}{\gamma \omega_r} = \frac{1}{\omega_g}, \quad (3.27)$$

gdje je  $\omega_g$  nerelativistička kutna žirofrekvencija, a  $\omega_r = \omega_g/\gamma$  je relativistička kutna žirofrekvencija. Faktor  $1 - v/c$  se također može raspisati:

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{(1 - v/c)(1 + v/c)}{1 + v/c} = \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v/c} \approx \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (3.28)$$

uzimanjem u obzir kako je  $v \approx c$ . Iz svega toga proizlazi da je opaženo trajanje pulsa zračenja

$$\Delta t \approx \frac{1}{2\gamma^2 \omega_g}. \quad (3.29)$$

Gornji izraz nam kaže kako je trajanje pulsa koje mjeri udaljeni opažač u laboratorijskom referentnom sustavu otprilike  $1/\gamma^2$  puta kraće od nerelativističkog perioda rotacije elektrona  $T_g = 2\pi/\omega_g$ . Maksimalna Fourierova komponenta spektralne dekompozicije opaženog pulsa zračenja odgovara frekvenciji  $\nu \sim \Delta t^{-1}$ , to jest,

$$\nu \sim \Delta t^{-1} \sim \gamma^2 \nu_g, \quad (3.30)$$

gdje je  $\nu_g = \omega_g/(2\pi)$  nerelativistička žirofrekvencija. U gornjem izvodu se pretpostavilo da se elektron giba s kutom nagiba  $\alpha = 90^\circ$ , no isti se račun može provesti i za proizvoljni kut  $\alpha$  s rezultatom

$$\nu \sim \gamma^2 \nu_g \sin \alpha. \quad (3.31)$$

*Beaming* efekt zračenja koji ovdje dolazi do izražaja je generalno svojstvo i ne ovisi o prirodi sile koja uzrokuje akceleraciju elektrona. Opažena frekvencija zračenja može se također zapisati kao:

$$\nu \approx \gamma^2 \nu_g = \gamma^3 \nu_r = \frac{\gamma^3 v}{2\pi r_g}, \quad (3.32)$$

gdje je  $\nu_r$  relativistička žirofrekvencija, a  $r_g$  radijus orbite elektrona. Općenito,  $r_g$  se može interpretirati kao trenutni radijus zakrivljenosti elektronske trajektorije dok je  $v/r_g$  odgovarajuća kutna frekvencija. Ovaj rezultat omogućuje nalaženje frekvencije na kojoj se emitira najviše zračenja, uz pretpostavku da je poznat radijus zakrivljenosti  $r_g$ . Dakle, ukupna stopa gubljenja energije relativističkih elektrona dana je izrazom 3.23 te se većina zračenja emitira na frekvenciji  $\nu \sim \gamma^2 \nu_g$ , gdje je  $\nu_g$  nerelativistička žirofrekvencija elektrona.

### 3.6.1 Spektar sinkrotronskog zračenja - detaljan izvod

U ovom dijelu potpoglavlja dan je kompletan izvod spektralne distribucije sinkrotronskog zračenja prezentiran u [7] i [9], sa sljedećim koracima:

1. uzme se izraz za energiju emitiranu po jediničnom intervalu frekvencija za elektron koji se proizvoljno giba,
2. izaberu se pogodne koordinate u kojima se izvedu komponente polja zračenja koje emitira elektron koji se giba po spirali u magnetskom polju,
3. izračuna se spektralna distribucija komponenta polja zračenja.

Započinjemo generalizacijom formula za zračenje akceleriranog naboja koji se giba relativističkom brzinom, odnosno Liénard - Wiechertovim potencijalima izvedenima u [11]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \frac{q\vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{n}}{c}} \right]_{\text{ret}} ; \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{q}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{n}}{c}} \right]_{\text{ret}}, \quad (3.33)$$



gdje je  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  vektorski potencijal i  $\phi(\vec{r}, t)$  je skalarni potencijal u Lorentzovom baždarenju, a  $\hat{n}$  je jedinični vektor koji gleda od naboja u gibanju prema promatraču. U oba slučaja, potencijali se evaluiraju u retardiranim trenucima s obzirom na lokaciju promatrača. Faktori Dopplerovog pomaka  $1 - (\vec{v} \cdot \hat{n})/c$  u nazivnicima gornjih izraza su bitni za slučajeve kada se naboj giba relativističkom brzinom jer za slučaj gibanja naboja prema opažaču, čestica koja emitira zračenje gotovo sustiže to zračenje (jer se giba brzinom bliskom brzini svjetlosti). Zbog jednostavnosti koristi se pokrata  $\kappa \equiv 1 - (\vec{v} \cdot \hat{n})/c$ .

Prema [9], potencijali iz gornjih izraza vode do relacije između akceleracije i spektralne distribucije energije zračenja elektrona u proizvoljnom gibanju. Korištenjem Parsevalovog teorema i Fourierove analize može se dobiti izraz za spektar zračenja elektrona kada nema resultantnog pomaka. Fourierov transformat akceleracije je

$$I(\omega) = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{v}}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.34)$$

Odgovarajući rezultat za slučaj elektrona u gibanju može se zapisati kao:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{n} \times \left[ \left( \hat{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \right] \frac{1}{\kappa^3} \right\}_{\text{ret}} e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (3.35)$$

gdje se pojavljuje kutna ovisnost emitiranog zračenja. Jedinični vektor  $\hat{n}$  može se zapisati i kao  $\hat{n} = \vec{R}/|R|$ . Integriranjem gornjeg izraza po prostornom kutu  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  u nerelativističkoj granici dobije se izraz 3.34. Glavna razlika između izraza 3.34 i 3.35 je u uključivanju Dopplerovog faktora  $\kappa^3$  u nazivniku i činjenici da se izraz u vitičastim zagradama treba evaluirati u retardiranom trenutku  $t' = t - R(t')/c$ .

Sljedeći korak je zapisati izraz 3.35 u pogodnijem obliku. Prvo, prelazimo sa integrala po  $dt$  na integral po retardiranom vremenu  $dt'$ . Budući da je  $t' = t - R(t')/c$ , diferenciraju se obje strane jednakosti uzimajući u obzir da jedinični vektor  $\hat{n}$  pokazuje prema promatraču:

$$dt' = dt - \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} dt'; \quad dt = dt' \left( 1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) = \kappa dt'. \quad (3.36)$$

Daljnje pojednostavljenje je da se udaljenost promatrača i elektrona zapiše kao  $R(t') = |\vec{r}| - \hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')$ , gdje je  $\vec{r}_0(t')$  vektor položaja elektrona u sustavu čije je ishodište u vrhu

vektora  $\vec{r}$ . Budući da je  $\vec{r}_0(t') \ll \vec{r}$ , izraz 3.35 postaje:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \times \left[ \left( \hat{n} - \frac{\vec{v}(t')}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}(t')}{c} \right] \times \frac{1}{\kappa^2} \exp \left[ i\omega \left( t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} \right) \right] dt' \right|^2. \quad (3.37)$$

Sljedeći korak je pojednostavljivanje trostrukog vektorskog produkta unutar integrala u gornjem izrazu korištenjem identiteta

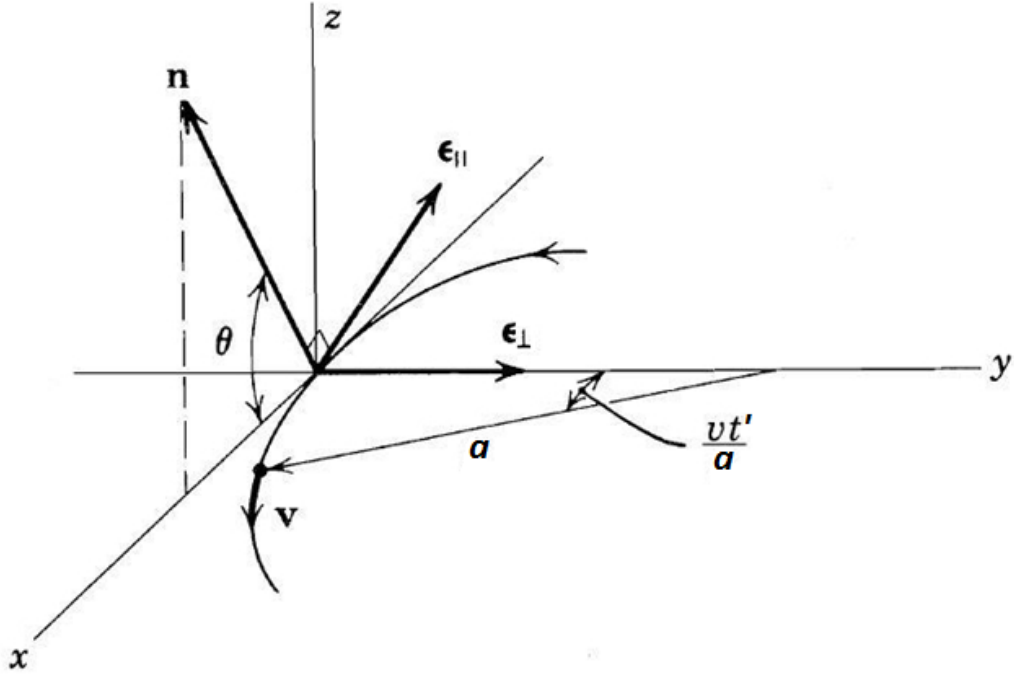
$$\hat{n} \times \left[ \left( \hat{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \right] \frac{1}{\kappa^2} = \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[ \hat{n} \times \left( \hat{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \right] \right\}, \quad (3.38)$$

koji se može dobiti tako da se izraz  $\kappa^{-1}[\hat{n} \times (\hat{n} \times (\vec{v}/c))]$  derivira po  $t'$  te se potom iskoristi pravilo za trostruki vektorski produkt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ . Uvrštavanjem izraza 3.38 u izraz 3.37 te parcijalnom integracijom izraza dobije se:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \times \left( \hat{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \exp \left[ i\omega \left( t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} \right) \right] dt' \right|^2. \quad (3.39)$$

U gornjem izrazu se može primjetiti kako se korištenjem identiteta 3.38 eliminirala ovisnost o akceleraciji naboja.

Nadalje, potrebno je izabrati pogodne koordinate za računanje integrala u izrazu 3.39. Elektron se giba po spirali oko smjera magnetskog polja kutnom frekvencijom  $\omega_r = eB/(\gamma m_e)$  pod kutem nagiba  $\alpha$  s obzirom na smjer magnetskog polja. U bilo kojem trenutku, orbita elektrona ima neki radijus zakrivljenosti  $a$  te se može uzeti kako se trenutna ravnina orbite elektrona poklapa sa  $x - y$  ravninom koordinatnog sustava. Račun se znatno pojednostavljuje izborom ishodišta sustava u točki gdje vektor brzine elektrona  $\vec{v}$  leži u  $x - z$  ravnini, što znači da je  $y$  os u smjeru trenutnog vektora radijusa zakrivljenosti orbite  $\vec{a}$  (slika 3.4). Dakle, vektor  $\hat{n}$  koji pokazuje od ishodišta koordinatnog sustava prema opažaču leži u  $x - z$  ravnini. Budući da je vektor  $\vec{v}$  tangenta na orbitu elektrona u  $x = y = 0$ , vektor  $\hat{n}$  je paralelan smjeru magnetskog polja u projekciji koju vidi daleki opažač. Zbog ovoga se može definirati drugi set ortogonalnih koordinata sa istim ishodištem kao i  $x, y, z$  koordinatni sustav. Dakle, definira se koordinatni sustav sa jediničnim vektorom  $\hat{e}_{\parallel}$  koji leži u ravnini koja sadrži  $\hat{n}$  i vektor magnetskog polja, te jedinični vektor  $\hat{e}_{\perp}$  koji je u smjeru  $y$  osi, tako da vrijedi  $\hat{e}_{\parallel} = \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}$ . Jedinični vektori  $\hat{e}_{\parallel}$  i  $\hat{e}_{\perp}$  stoga formiraju prirodan sistem



Slika 3.4: Grafički prikaz geometrije problema za evaluaciju intenziteta i polarizacije sinkrotronskog zračenja. U trenutku  $t = 0$ , brzina elektrona  $\vec{v}$  je u smjeru osi  $x$ , dok je  $\vec{a}$  radijus zakrivljenosti elektronske putanje. Vektor  $\vec{n}$  pokazuje od elektrona prema udaljenom opažaču i leži u  $x - z$  ravnini. Preuzeto iz [12] i adaptirano po uzoru na [9].

koordinata za opisivanje opažene polarizacije zračenja jer su komponente označene simbolima  $\parallel$  i  $\perp$  paralelne i okomite smjeru magnetskog polja u projekciji koji vidi udaljeni opažač.

Za početak se odvojeno razmatraju trostruki vektorski produkt i eksponent izraza 3.39. Za evaluaciju vektorskog produkta zapišu se koordinate elektrona u koordinatnom sustavu  $(\hat{n}, \hat{\epsilon}_{\parallel}, \hat{\epsilon}_{\perp})$ , uzimajući točku  $x = y = z = 0$  kao točku u kojoj je  $t' = 0$ . Dakle, nakon vremena  $t'$ , elektron je prošao put  $vt'$  po svojoj orbiti, što odgovara kutu  $\varphi = vt'/a$ , gdje je  $a$  radijus zakrivljenosti elektronske orbite. Iz slike 3.4 slijedi:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \left[ \hat{i}_x \cos \left( \frac{vt'}{a} \right) + \hat{\epsilon}_{\perp} \sin \left( \frac{vt'}{a} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Gornji izraz za brzinu raspiše se po komponentama u sustavu  $(\hat{n}, \hat{\epsilon}_{\parallel}, \hat{\epsilon}_{\perp})$ :

$$\vec{v} = |\vec{v}| \left[ \hat{\epsilon}_{\perp} \sin \left( \frac{vt'}{a} \right) + \hat{n} \cos \theta \cos \left( \frac{vt'}{a} \right) - \hat{\epsilon}_{\parallel} \sin \theta \cos \left( \frac{vt'}{a} \right) \right], \quad (3.41)$$

gdje je  $\theta$  kut između vektora  $\hat{n}$  koji gleda prema opažaču i ravnine  $x - y$ . Konačno,

uzimajući da je  $\hat{\epsilon}_{\parallel} = \hat{n} \times \hat{\epsilon}_{\perp}$  i  $\hat{\epsilon}_{\perp} = -\hat{n} \times \hat{\epsilon}_{\parallel}$ , računamo vektorski produkt:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{v}) = |\vec{v}| \left[ -\sin\left(\frac{vt'}{a}\right) \hat{\epsilon}_{\perp} + \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) \hat{\epsilon}_{\parallel} \right]. \quad (3.42)$$

Dakle, trostruki vektorski produkt se reducira na sumu vektora u smjerovima paralelnim i okomitima na smjer magnetskog polja u projekciji koju vidi opažač.

Nadalje, evaluiramo član u vitičastim zagradama eksponenta izraza 3.39;  $[t' - \hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c]$ . Pomoću slike 3.4 vektor položaja elektrona u njegovoj orbiti,  $\vec{r}_0(t')$  može se zapisati kao:

$$\vec{r}_0(t') = 2a \sin\left(\frac{vt'}{2a}\right) \left[ \hat{\epsilon}_{\perp} \sin\left(\frac{vt'}{2a}\right) + \hat{n} \cos\theta \cos\left(\frac{vt'}{2a}\right) - \hat{\epsilon}_{\parallel} \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{2a}\right) \right]. \quad (3.43)$$

Uvrštavanjem  $\vec{r}_0(t')$  u  $t' - \hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c$  slijedi:

$$\left[ t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} \right] = t' - \frac{a}{c} \cos\theta \sin\left(\frac{vt'}{a}\right). \quad (3.44)$$

Sada se mogu istražiti glavni doprinosi integralu iz izraza 3.39. Najveći doprinosi dolaze od malih vrijednosti izraza  $[t' - \hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c]$  jer ako bi ta veličina bila velika, postojalo bi puno 'oscilacija' u integralu koje bi se uprosječile u vrlo malu vrijednost. Nadalje, pokazano je da je većina sinkrotronskog zračenja snažno usmjerena u smjeru gibanja elektrona zbog *beaming* efekta. Stoga, glavni doprinosi spektralnoj distribuciji zračenja dolaze od malih vrijednosti  $\theta$  i malih vrijednosti  $vt'/a$ , kao što se može vidjeti iz geometrije problema prikazane na slici 3.4. Razvijanjem izraza 3.44 u red do trećeg člana po malim vrijednostima  $\theta$  i  $vt'/a$  slijedi:

$$t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} = t' \left( 1 - \frac{v}{c} \right) + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} t' + \frac{v^3}{6ca^2} t'^3. \quad (3.45)$$

Budući da je  $v \approx c$  i  $\gamma \gg 1$ , može se iskoristiti izraz 3.28 te se dobije:

$$\begin{aligned} t' - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} &= \frac{1}{2\gamma^2} \left[ t' \left( 1 + \gamma^2 \frac{v}{c} \theta^2 \right) + \frac{v^3 \gamma^2 t'^3}{3ca^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \left[ t' (1 + \gamma^2 \theta^2) + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

gdje je u zadnjem retku upotrebjeno  $v = c$ .

Iste aproksimacije malih kuteva mogu se napraviti i za vektorski produkt  $\hat{n} \times (\hat{n} \times$

$\vec{v}/c$ ), iz čega slijedi:

$$\hat{n} \times \left( \hat{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) = \frac{|\vec{v}|}{c} \left[ -\sin \left( \frac{vt'}{a} \right) \hat{e}_\perp + \sin \theta \cos \left( \frac{vt'}{a} \right) \hat{e}_\parallel \right] \approx \left( -\frac{vt'}{a} \hat{e}_\perp + \theta \hat{e}_\parallel \right). \quad (3.47)$$

Sada se mogu zapisati integrali za intenzitet u  $\hat{e}_\perp$  i  $\hat{e}_\parallel$  smjerovima uvrštavanjem prethodna dva izraza u 3.39:

$$\frac{dI_\perp(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{vt'}{a} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^2} \left[ t'(1 + \gamma^2\theta^2) + \frac{c^2\gamma^2}{3a^2} t'^3 \right] \right\} dt' \right|^2, \quad (3.48)$$

$$\frac{dI_\parallel(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2\theta^2}{16\pi^3\epsilon_0c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^2} \left[ t'(1 + \gamma^2\theta^2) + \frac{c^2\gamma^2}{3a^2} t'^3 \right] \right\} dt' \right|^2. \quad (3.49)$$

Kako bi se integrali reducirali na tablični oblik uvode se pokrate:

$$\theta_\gamma^2 = (1 + \gamma^2\theta^2); \quad y = \gamma ct'/(a\theta_\gamma); \quad \eta = \omega\theta_\gamma^3/(3c\gamma^3). \quad (3.50)$$

Tada slijedi:

$$\frac{dI_\perp(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0c} \left( \frac{a\theta_\gamma^2}{c\gamma^2} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} y \exp \left[ i\eta \frac{3}{2} \left( y + \frac{y^3}{3} \right) \right] dy \right|^2, \quad (3.51)$$

$$\frac{dI_\parallel(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2\theta^2}{16\pi^3\epsilon_0c} \left( \frac{a\theta_\gamma}{c\gamma} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i\eta \frac{3}{2} \left( y + \frac{y^3}{3} \right) \right] dy \right|^2. \quad (3.52)$$

Gornji integrali se mogu izraziti u terminima modificiranih Besselovih funkcija korištenjem sljedećih relacija:

$$\int_0^\infty \cos \left[ \frac{3\eta}{2} \left( x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\eta), \quad (3.53)$$

$$\int_0^\infty \sin \left[ \frac{3\eta}{2} \left( x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\eta), \quad (3.54)$$

gdje su  $K_{1/3}$  i  $K_{2/3}$  modificirane Besselove funkcije redova 1/3 i 2/3, respektivno. Zbog simetrije integranada u izrazima 3.51 i 3.52, vrijedi:

$$\frac{dI_\perp(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{12\pi^3\epsilon_0c} \left( \frac{a\theta_\gamma^2}{c\gamma^2} \right)^2 K_{2/3}^2(\eta), \quad (3.55)$$

$$\frac{dI_\parallel(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2\theta^2}{12\pi^3\epsilon_0c} \left( \frac{a\theta_\gamma}{c\gamma} \right)^2 K_{1/3}^2(\eta). \quad (3.56)$$

Na kraju je još potrebno integrirati po kutu  $\theta$ . Budući da je većina zračenja emitirana

unutar malog kuta  $\theta$  u odnosu na kut nagiba elektrona  $\alpha$ , može se pretpostaviti da, tijekom jednog preioda rotacije elektrona oko smjera magnetskog polja, kut preko kojeg se treba integrirati je  $2\pi \sin \alpha d\theta$ , jer se element prostornog kuta malo mijenja po  $d\theta$ , dok je oblik zračenja vrlo ovisan o  $\theta$ . Stoga nije velika greška pustiti granice integrala po  $\theta$  u  $\pm\infty$  jer je svo zračenje koncentrirano unutar kuta  $d\theta$  oko kuta nagiba  $\alpha$ . Iz toga slijedi:

$$I_{\perp}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2 a^2 \sin \alpha}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \gamma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2(\eta) d\theta, \quad (3.57)$$

$$I_{\parallel}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2 a^2 \sin \alpha}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^2 \theta^2 K_{1/3}^2(\eta) d\theta. \quad (3.58)$$

Integrali u gornjim izrazima izvrjednjeni su u [13] te iznose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2\left(\frac{x}{2}\theta_{\gamma}^3\right) d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz + K_{2/3}(x) \right], \quad (3.59)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \theta^2 \theta_{\gamma}^2 K_{1/3}^2\left(\frac{x}{2}\theta_{\gamma}^3\right) d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz - K_{2/3}(x) \right]. \quad (3.60)$$

Obično se koriste oznake

$$F(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz; \quad G(x) = x K_{2/3}(x), \quad (3.61)$$

pa se uvrštavanjem pokrata  $\theta_{\gamma} = (1 + \gamma^2 \theta^2)$  i  $x = 2\omega a / (3c\gamma^3)$  za izraze 3.57 i 3.58 dobije:

$$I_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2 \gamma \sin \alpha}{8\pi \varepsilon_0 c} [F(x) + G(x)], \quad (3.62)$$

$$I_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2 \gamma \sin \alpha}{8\pi \varepsilon_0 c} [F(x) - G(x)]. \quad (3.63)$$

Kako bi se razmotrili ovi rezultati, definira se *karakteristična kružna frekvencija*  $\omega_k$  kao  $\omega_k = 3c\gamma^3 / (2a)$ , pa je onda  $x = \omega / \omega_k = v / \nu_k$ , gdje je  $a$  radijus zakrivljenosti elektronske spiralne orbite. U danom trenutku, ravnina elektronske orbite nagnuta je pod kutem  $\alpha$  s obzirom na smjer magnetskog polja. Stoga, s obzirom na centar spiralne putanje elektrona vrijedi da je radijus zakrivljenosti  $a = v / (\omega_r \sin \alpha)$ , te onda slijedi

$$\omega_k = 2\pi \nu_c = \frac{3}{2} \left( \frac{c}{v} \right) \gamma^3 \omega_r \sin \alpha, \quad (3.64)$$

a uzimanjem limesa  $v \rightarrow c$  i zapisivanjem izraza u terminima nerelativističke žirofrekvencije  $\nu_g = eB/(2\pi m_e)$ , dobije se za karakterističnu frekvenciju:

$$\nu_k = \frac{3}{2}\gamma^2\nu_g \sin \alpha. \quad (3.65)$$

Ovo je ključni rezultat te je vrlo sličan izrazu za frekvenciju na kojoj je emitirana većina zračenja (3.32);  $\nu \approx \gamma^2\nu_g$ . Integracijom izraza 3.57 i 3.58 po prostornom kutu  $2\pi \sin \theta d\theta$ , dobiju se izrazi 3.62 i 3.63 koji predstavljaju energiju emitiranu u dvije ortogonalne polarizacije tokom jednog perioda orbitiranja elektrona, to jest u vremenu  $T_r = \nu_r^{-1} = 2\pi\gamma m_e/(eB)$ . Stoga su emisivnosti elektrona za svaki smjer polarizacije dane s

$$j_{\perp}(\omega) = \frac{I_{\perp}(\omega)}{T_r} = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} [F(x) + G(x)], \quad (3.66)$$

$$j_{\parallel}(\omega) = \frac{I_{\parallel}(\omega)}{T_r} = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} [F(x) - G(x)]. \quad (3.67)$$

Ukupna emisivnost sinkrotronskog zračenja jednog elektrona je suma  $j_{\perp}(\omega)$  i  $j_{\parallel}(\omega)$ :

$$j(\omega) = j_{\perp}(\omega) + j_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2 B \sin \alpha}{8\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} F(x). \quad (3.68)$$

Ovo je spektralna emisivnost sinkrotronskog zračenja jednog elektrona u ultrarelativističkoj granici. Funkcija  $F(x)$  prikazana je grafički u linearnoj i logaritamskoj skali na slikama 3.5 i 3.6, na kojima se vidi kako je spektar gladak i kontinuiran te ima maksimum emisije na frekvenciji  $\nu_{\max} = 0.29\nu_k$ .

Integriranjem emisijskog spektra sinkrotronskog zračenja 3.68 po svim frekvencijama može se dobiti izraz za ukupnu snagu sinkrotronskog zračenja (stopa kojom sinkrotronski elektroni gube energiju):

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= \int_0^{\infty} j(\omega) d\omega = \frac{\sqrt{3}e^2 B \sin \alpha}{8\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} \int_0^{\infty} F(x) dx \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2} c \frac{B^2}{2\mu_0} \gamma^2 \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} F(x) dx \\ &= \sigma_T c U_{\text{mag}} \gamma^2 \sin^2 \alpha \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{\infty} F(x) dx. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Prema [7], za raspisivanje gornjeg izraza može se iskoristiti sljedeća jednakost:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right). \quad (3.70)$$

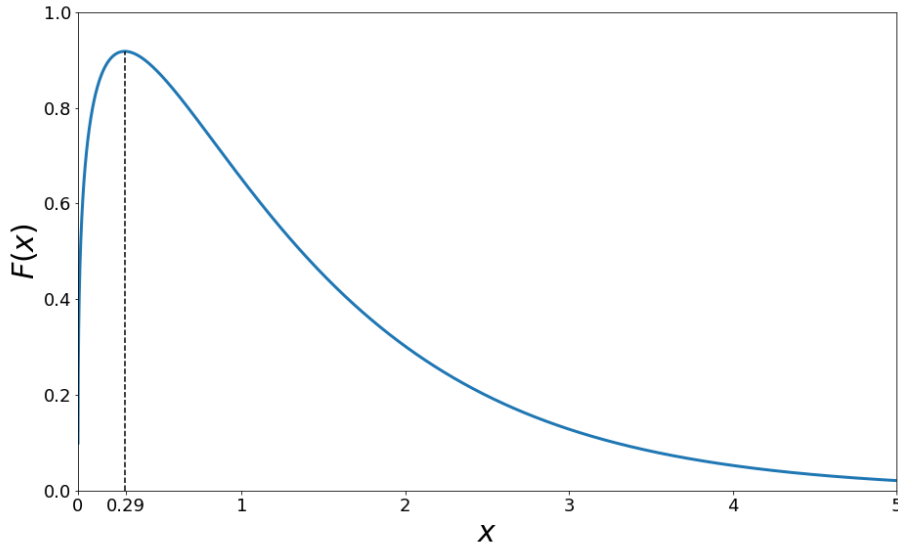
Stavljanjem  $\mu = 0$  u gornji izraz te korištenjem rekurzivnih relacija za  $\Gamma$  - funkcije, može se dobiti

$$\frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{\infty} F(x) dx = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2, \quad (3.71)$$

iz čega konačno slijedi već dobiveni izraz (3.22):

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_{\text{T}}cU_{\text{mag}}\gamma^2 \sin^2 \alpha, \quad (3.72)$$

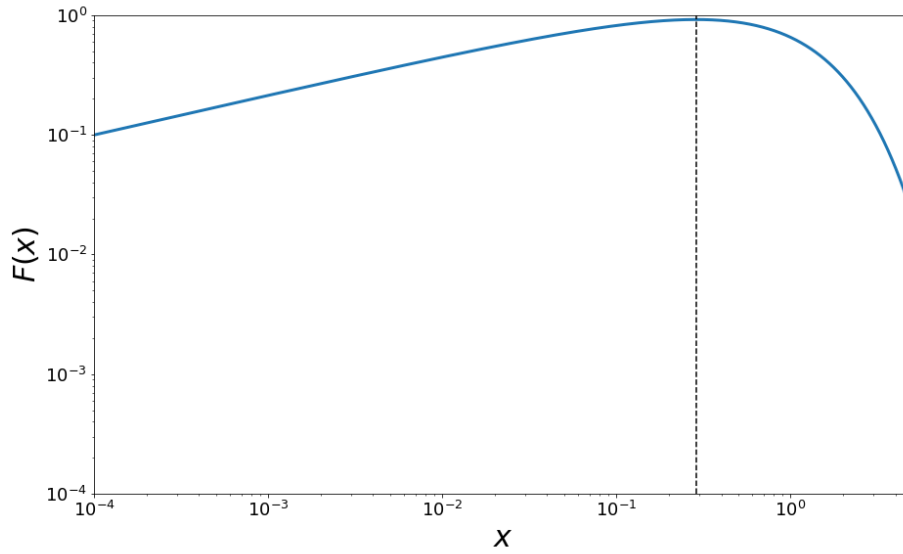
ranije izvedeni rezultat za ukupnu snagu sinkrotronskog zračenja.



Slika 3.5: Grafički prikaz funkcije  $F(x)$  definirane u izrazu 3.61, koja predstavlja oblik sinkrotronskog zračenja jednog elektrona u ultrarelativističkoj granici te lokacije njenog maksimuma, nacrtano u linearnoj skali. Funkcija je prikazana u ovisnosti o  $x = \nu/\nu_k$ , gdje je  $\nu_k = 3/2\gamma^2 \sin \alpha \nu_g$  karakteristična žirofrekvencija elektrona izražena u terminima nerelativističke žirofrekvencije  $\nu_g = eB/(2\pi m_e)$  te kuta nagiba elektrona  $\alpha$ .

Preostaje još pogledati asimptotske izraze za emisivnost elektrona u granicama





Slika 3.6: Grafički prikaz funkcije  $F(x)$  koja predstavlja oblik sinkrotronskog zračenja jednog elektrona u ultrarelativističkoj granici i lokacije njenog maksimuma u logaritamskoj skali. Funkcija je nacrtana u ovisnosti o  $x = \nu/\nu_k$ , gdje je  $\nu_k = 3/2\gamma^2 \sin \alpha \nu_g$  karakteristična žirofrekvencija elektrona izražena u terminima nerelativističke žirofrekvencije  $\nu_g = eB/(2\pi m_e)$  te kuta nagiba elektrona  $\alpha$ .

visokih i niskih frekvencija. Prema [7],

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \ll 1 \quad (3.73)$$

$$F(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} x^{1/2} \exp(-x), \quad x \gg 1. \quad (3.74)$$

Stoga je prema [9], emisivnost elektrona na visokim frekvencijama dana s

$$j(\nu) \propto \nu^{1/2} \exp(-\nu/\nu_k), \quad (3.75)$$

gdje na visokim frekvencijama  $\nu \gg \nu_k$  dominira eksponencijalni *cut-off*. Na visokim frekvencijama je snaga sinkrotronskog zračenja elektrona vrlo malena jer je jako malo zračenja elektrona emitirano pod kutevima  $\theta \ll \gamma^{-1}$ .

Na niskim frekvencijama ( $\nu \ll \nu_k$ ), spektar sinkrotronskog zračenja je dan s

$$\begin{aligned} j(\nu) &= \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{2\pi\nu}{2\nu_k}\right)^{1/3} \\ &= \frac{e^2}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3}) \varepsilon_0 c} \left(\frac{eB \sin \alpha}{2\pi\gamma m_e}\right)^{2/3} \nu^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

odnosno, emisivnost je proporcionalna s  $\nu^{1/3}$ .

### 3.7 Sinkrotronsko zračenje jednostavne distribucije energija elektrona

Sljedeće se izvodi izraz za spektar zračenja distribucije energija elektrona. Prema [9] i [7], energijski spektri kozmičkih zraka i elektrona mogu se aproksimirati potencijalnim distribucijama (eng. *power-law distribution*) te se spektri netermalnih izvora često mogu reprezentirati istim oblikom. Dakle, zadaje se distribucija energija elektrona sa  $N_e(E)dE = CE^{-p}dE$ , gdje je  $N_e(E)dE$  gustoća elektrona u energijskom intervalu od  $E$  do  $E + dE$ . Korištenjem činjenice da spektar sinkrotronskog zračenja ima oštar maksimum blizu karakteristične frekvencije  $\nu_k$  (slike 3.5 i 3.6), može se pretpostaviti kako elektron energije  $E$  zrači svoju energiju na karakterističnoj frekvenciji  $\nu_k$ , koja se može aproksimirati sa

$$\nu \approx \nu_k \approx \gamma^2 \nu_g = \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \nu_g; \quad \nu_g = \frac{eB}{2\pi m_e}. \quad (3.77)$$

Stoga se energija emitirana u frekventnom intervalu od  $\nu$  do  $\nu + d\nu$  može pripisati elektronima s energijom u rasponu od  $E$  do  $E + dE$ . Ukupna snaga zračenja po volumenu i frekvenciji takve distribucije dana je integralom emisivnosti po frekventnom intervalu, a emisivnost distribucije jednaka je umnošku snage zračenja jedne čestice i distribucije čestica po energijama:

$$dP_{\text{tot}} = J(\nu)d\nu = \left( -\frac{dE}{dt} \right) N_e(E)dE. \quad (3.78)$$

Veličine s desne strane jednakosti gornjeg izraza su

$$E = \gamma m_e c^2 = \left( \frac{\nu}{\nu_g} \right)^{1/2} m_e c^2 \Rightarrow dE = \frac{m_e c^2}{2\nu_g^{1/2}} \nu^{-1/2} d\nu \quad (3.79)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_{TC} \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \frac{B}{2\mu_0}. \quad (3.80)$$

Uvrštavanjem u 3.78, dobije se izraz za emisivnost u terminima  $c$ ,  $B$ ,  $\nu$  i fundamentalnih konstanti:

$$J(\nu) = (\text{konstante}) C B^{(p+1)/2} \nu^{-(p-1)/2}. \quad (3.81)$$

Dakle, emitirani spektar  $J(\nu) \propto \nu^{-s}$ , gdje se  $s$  naziva *spektralnim indeksom*, ovisi o nagibu energijskog spektra elektrona  $p$ , a ne o obliku emisijskog spektra jednog elektrona. Kvadratna povezanost emitirane frekvencije i energije elektrona uzrokuje razliku u nagibima emisijskog spektra i energijskog spektra elektrona,  $s = (p - 1)/2$ .

Na kraju se još mogu kratko rezimirati kvalitativni rezultati ovog i nekoliko prethodnih potpoglavlja o sinkrotronskom zračenju. Prema [7]:

1. Kutna distribucija zračenja jedne čestice leži unutar konusa čiji je polukut jednak kutu nagiba elektrona.
2. Spektar zračenja jedne relativističke čestice širi se do vrijednosti reda veličine karakteristične frekvencije  $\nu_k$ , odnosno, spektar ovisi samo o  $\nu/\nu_k$ .
3. Za jednostavnu distribuciju energija čestica s potencijom  $p$  na dovoljno širokom rasponu energija, spektralni indeks zračenja je  $s = (p - 1)/2$ .

### 3.8 Sinkrotronski spektar bljeskova gama zračenja

Pretpostavljamo da su elektroni akcelerirani u relativističkim udarima u distribuciju oblika:

$$N_e(\gamma_e)d\gamma_e \propto \gamma_e^{-p}d\gamma_e \text{ kada je } \gamma_e \geq \gamma_{\min}. \quad (3.82)$$

Uobičajena pretpostavka je da je  $p = 2.5$  ([14]). Snaga zračenja sinkrotronskog zračenja i karakteristična frekvencija (za jedan elektron) u sustavu relativističkog mlaza elektrona dane su s:

$$P(\gamma_e) = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma_e^2 \frac{B^2}{8\pi}, \quad (3.83)$$

$$\nu(\gamma_e) = \gamma_e^2 \frac{eB}{2\pi m_e c}. \quad (3.84)$$

Kako bi se prešlo u opažački sustav, potrebno je snagu zračenja množiti s kvadratom Lorentzovog faktora kojim se giba mlaz,  $\Gamma^2$ , a karakterističnu frekvenciju s  $\Gamma$ . U sustavu mlaza definiramo  $\gamma_c$  kao Lorentzov faktor elektrona koji gube energiju sinkrotronskim zračenjem na vremenskoj skali  $t_{\text{ex}}$  koja odgovara hlađenju uslijed adijabatske ekspanzije:

$$\gamma_c m_e c^2 = P(\gamma_c) t_{\text{ex}}, \quad (3.85)$$

gdje je

$$\gamma_c = \frac{6\pi m_e c}{\sigma_T B^2 t_{\text{ex}}}. \quad (3.86)$$

Dakle, prema [15], elektron koji inicijalno ima Lorentzov faktor  $\gamma_e > \gamma_c$  se hladi (gubi energiju) do Lorentzovog faktora  $\gamma_c$  u vremenu  $t_{\text{ex}}$ . Prilikom hlađenja elektrona, sinkrotronska emisija se mijenja s  $\nu \propto \gamma_e^2$ , dok se energija elektrona mijenja s  $\gamma_e$ . Iz toga slijedi da se spektralna snaga zračenja mijenja s  $\nu^{-1/2}$  po intervalu frekvencija  $\nu_c < \nu < \nu(\gamma_e)$ , gdje je  $\nu_c \equiv \nu(\gamma_c)$  karakteristična frekvencija zračenja elektrona koji ima Lorentzov faktor jednak  $\gamma_c$ . Ukupan spektar zračenja takvog elektrona se onda sastoji od tri dijela: niskoenergijski dio za  $\nu < \nu_c$ , gdje se snaga zračenja  $P_\nu$  ponaša kao  $\nu^{1/3}$ ; zatim potencijski segment između  $\nu_c$  i  $\nu(\gamma_e)$ , gdje se snaga  $P_\nu$  ponaša kao  $\nu^{-1/2}$ ; te eksponencijalni *cut-off* za frekvencije  $\nu > \nu(\gamma_e)$ . Opažena maksimalna emisivnost se pojavljuje na frekvenciji  $\nu_c$  i dana je s:

$$P_{\nu, \text{max}} \approx \frac{P(\gamma_e)}{\nu(\gamma_e)} = \frac{m_e c^2 \sigma_T B}{3e} \Gamma, \quad (3.87)$$

iz čega se vidi kako ona ne ovisi o elektronskom Lorentzovom faktoru  $\gamma_e$ .

Kako bi se izračunao ukupan spektar jednostavne (potencijske) distribucije elektrona, potrebno je snagu zračenja integrirati po elektronskom Lorentzovom faktoru  $\gamma_e$ . Ovdje se pojavljuju dva rezultata ovisno o tome vrijedi li  $\gamma_{\text{min}} > \gamma_c$  ili  $\gamma_{\text{min}} < \gamma_c$ . Ako je ukupan broj elektrona jednak  $N_e = 4\pi R^3 n/3$ , gdje je  $n$  gustoća elektrona, a  $R$  radijus područja u kojem se događa emisija, onda slijedi da kada je minimalni elektronski Lorentzov faktor veći od  $\gamma_c$  ( $\gamma_{\text{min}} > \gamma_c$ ), svi se elektroni hlade do otprilike  $\gamma_c$ , te se spektralna snaga zračenja na frekvenciji  $\nu_c$  može aproksimirati s  $N_e P_{\nu, \text{max}}$ . Ovaj se slučaj naziva *režim brzog hlađenja* (eng. *fast cooling regime*). Tok fotona  $F_{\nu, \text{obs}}$  koji mjeri opažatelj je onda jednak:

$$F_{\nu, \text{obs}} = \begin{cases} (\nu/\nu_c)^{1/3} F_{\nu, \text{max}}; & \nu_c > \nu, \\ (\nu/\nu_c)^{-1/2} F_{\nu, \text{max}}; & \nu_m > \nu > \nu_c, \\ (\nu_m/\nu_c)^{-1/2} (\nu/\nu_m)^{-p/2} F_{\nu, \text{max}}; & \nu > \nu_m, \end{cases} \quad (3.88)$$

gdje su  $\nu_m \equiv \nu(\gamma_{\text{min}})$  karakteristična frekvencija zračenja elektrona s minimalnim Lorentzovim faktorom  $\gamma_{\text{min}}$  i  $F_{\nu, \text{max}} \equiv N_e P_{\nu, \text{max}}/(4\pi D^2)$  opaženi maksimalni tok fotona na udaljenosti  $D$  od izvora.

Kada vrijedi  $\gamma_c > \gamma_{\min}$ , samo oni elektroni koji imaju Lorentzov faktor veći od  $\gamma_c$  se mogu hladiti, te se ovaj režim naziva *sporim hlađenjem* (eng. *slow cooling regime*) zbog toga što se elektroni s  $\gamma_e \sim \gamma_{\min}$  (kojih ima najviše) ne hlade u vremenu koje odgovara adijabatskoj ekspanziji (uslijed koje se elektronska distribucija hladi), pa je spektar dan s:

$$F_{\nu, \text{obs}} = \begin{cases} (\nu/\nu_m)^{1/3} F_{\nu, \text{max}}, & \nu_m > \nu, \\ (\nu/\nu_m)^{-(p-1)/2} F_{\nu, \text{max}}, & \nu_c > \nu > \nu_m, \\ (\nu_c/\nu_m)^{-(p-1)/2} (\nu/\nu_c)^{-p/2} F_{\nu, \text{max}}, & \nu > \nu_c. \end{cases} \quad (3.89)$$

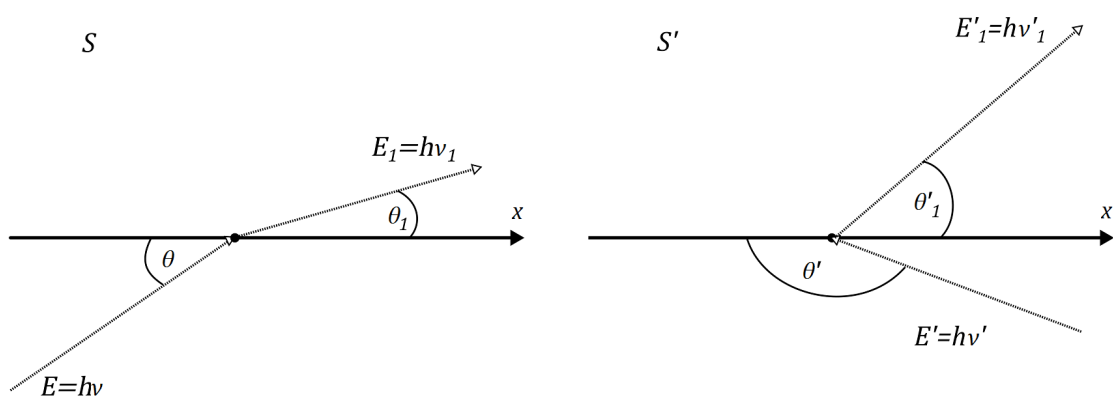
Kako bi se opravdala količina visokoenergijskih fotona koja se opaža u spektrima bljeskova gama zračenja, numerički model (poglavlje 5) kojim se računaju spektri simuliranih bljeskova gama zračenja u ovom radu pretpostavlja režim brzog hlađenja elektrona.

## 4 Inverzno Comptonovo raspršenje

U ovom poglavlju dan je izvod relacija relevantnih za razmatranje inverznog Comptonovog raspršenja fotona na elektronima koji se smatra još jednim od mehanizama gubljenja energije elektrona u bljeskovima gama zračenja. U slučaju bljeskova gama zračenja, fotoni koji se raspršuju na relativističkim elektronima su primarni fotoni sinkrotronskog zračenja, te je ova komponenta zračenja uvijek asocirana uz primarno sinkrotronsko zračenje. Visokoenergijski fotoni (GeV energije) koji bi mogli biti povezani sa ovom komponentom su opaženi tek s LAT instrumentom (mjeri energije u rasponu 20 MeV – 300 GeV, [16]) Fermi satelita, no pretpostavlja se da će biti opaženi s opservatorijima sa Zemlje, kao što su npr. MAGIC ili CTA.

### 4.1 Prijenos energije pri raspršenju na elektronima u gibanju

Prema [7], pretpostavlja se da u sustavu mirovanja elektrona vrijedi  $h\nu \ll m_e c^2$ , pa se relativističke korekcije mogu zanemariti. Kad elektron u gibanju ima dovoljno kinetičke energije u odnosu na foton, razlika u energiji se može prenijeti s elektrona na foton, što je razlika u odnosu na tipično Comptonovo raspršenje (prijenos energije s fotona na elektron). U tom slučaju proces se naziva *inverzno Comptonovo raspršenje*.



Slika 4.1: Prikaz geometrije Comptonovog raspršenja u sustavu opažača  $S$  i sustavu mirovanja elektrona  $S'$ .

Prateći dosad korištene oznake,  $S$  označava laboratorijski referentni sustav, dok  $S'$  označava sustav mirovanja elektrona. Promatramo proces raspršenja u sustavu elektrona (slika 4.1):

$$E' = E\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right), \quad (4.1)$$

$$E_1 = E'_1 \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'_1\right), \quad (4.2)$$

gdje  $E$  označava energiju upadnog fotona,  $E_1$  označava energiju fotona nakon raspršenja,  $\theta$  je upadni kut fotona s obzirom na smjer brzine elektrona  $v$  (koja je u smjeru  $x$  osi koordinatnog sustava),  $\theta_1$  je kut u odnosu na brzinu elektrona pod kojim se giba foton nakon raspršenja, a veličine označene crticom ( $'$ ) predstavljaju veličine izmjerene u sustavu  $S'$ . U gornjim izrazima su upotrebljene formule za relativistički Dopplerov pomak 2.9 i 2.10. Iz zakona očuvanja energije i zakona očuvanja količine gibanja može se dobiti:

$$E_1 = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}, \quad (4.3)$$

ili u terminima valnih duljina

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad \text{uz } \lambda_c = \frac{h}{m_e c}, \quad (4.4)$$

gdje se  $\lambda_c$  naziva *Comptonova valna duljina*, te za elektrone ona iznosi  $\lambda_c = 0.02426 \text{ \AA}$ . Iz gornjeg izraza može se vidjeti kako pri raspršenju dolazi do promjene u valnoj duljini fotona reda veličine  $\lambda_c$ . Za velike valne duljine  $\lambda \gg \lambda_c$  (to jest,  $h\nu \ll m_e c^2$ ) raspršenje se može smatrati elastičnim, odnosno da nema promjene u energiji fotona u sustavu elektrona  $S'$ . Stoga vrijedi:

$$E'_1 \approx E' \left[ 1 - \frac{E'}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta) \right], \quad (4.5)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta' + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1), \quad (4.6)$$

gdje su  $\phi'$  i  $\phi'_1$  azimutalni kutevi upadnog i raspršenog fotona u sustavu mirovanja elektrona  $S'$ .

U slučaju relativističkih elektrona,  $\gamma^2 - 1 \gg h\nu/(m_e c^2)$ , energija fotona prije raspršenja, energija u sustavu  $S'$  te energija fotona nakon raspršenja su u približnom omjeru:

$$1 : \gamma : \gamma^2, \quad (4.7)$$

uz pretpostavku da je zadovoljen uvjet za Thomsonovo raspršenje u sustavu mirovanja elektrona ( $\gamma E \ll m_e c^2$ ), što slijedi iz izraza 4.1 i 4.2, budući da su kutevi  $\theta'$  i  $\theta'_1$  obično

blizu  $\pi/2$ .

Ovaj proces, dakle, pretvara foton niske energije u foton visoke energije s faktorom reda veličine  $\gamma^2$ . Budući da energija fotona u sustavu elektrona može biti reda veličine i 100 keV i još uvijek zadovoljavati Thomsonov limit, može se vidjeti kako je moguće na ovaj način producirati fotone ogromnih energija ( $\gamma \times 100$  keV). Ako je energija fotona previsoka, efikasnost procesa se smanjuje jer  $E'_1 < E$  te je vjerojatnost raspršenja manja. Sami kinematički efekti ograničavaju najveću moguću dobivenu energiju fotona: iz zakona očuvanja energije slijedi  $E_1 < \gamma m_e c^2 + E$ , te uz fiksiranje energije  $E$  i puštanjem da  $\gamma$  raste, vidi se da energije fotona veće od  $\sim \gamma m_e c^2$  nije moguće postići.

## 4.2 Snaga inverznog Comptonovog raspršenja za jedno raspršenje

U prethodnom potpoglavlju razmatrano je Comptonovo raspršenje jednog fotona na jednom elektronu, a sada izvodimo formule za prosječnu snagu zračenja u slučaju dane izotropne distribucije fotona koja se raspršuje na izotropnoj distribuciji elektrona. Prema [7], funkcija distribucije fotona u faznom prostoru dana s  $n(p)$  je invarijantna na Lorentzovu transformaciju. Neka je  $v dE$  gustoća fotona koji imaju energiju u rasponu  $dE$ . Tada su  $v$  i  $n$  povezani kao:

$$v dE = n d^3 p. \quad (4.8)$$

Uzimanjem u obzir Lorentzove transformacije za  $d^3 p$  (isto kao i energija, tj.  $d^3 p = \gamma d^3 p'$ ), slijedi da je  $v dE/E$  invarijanto:

$$\frac{v dE}{E} = \frac{v' dE'}{E'}. \quad (4.9)$$

Ukupna emitirana (odnosno raspršena) snaga zračenja u sustavu mirovanja elektrona može se naći iz:

$$\frac{dE'_{e1}}{dt'} = c \sigma_T \int E'_1 v' dE', \quad (4.10)$$

gdje je  $E'_{e1}$  energija elektrona nakon raspršenja u sustavu elektrona, a  $v' dE'$  je gustoća upadnih fotona. Pretpostavljamo kako je promjena energije fotona u sustavu mirovanja elektrona zanemariva u odnosu na promjenu energije u laboratorijskom sustavu,  $\gamma^2 - 1 \gg E/(m_e c^2)$ , pa vrijedi  $E'_1 = E'$ . Također vrijedi kako je rata zračenja invari-



jantna na Lorentzovu transformaciju, tj.

$$\frac{dE_{e1}}{dt} = \frac{dE'_{e1}}{dt'}. \quad (4.11)$$

Stoga slijedi:

$$\frac{dE_{e1}}{dt} = c\sigma_T \int E'^2 \frac{v' dE'}{E'} = c\sigma_T \int E'^2 \frac{v dE}{E}. \quad (4.12)$$

Gornji su izrazi također izvedeni pod pretpostavkom da je  $\gamma E \ll m_e c^2$  kako bi se mogla primjeniti formula za Thomsonov udarni presjek. Potrebno je raspisati integral u gornjem izrazu, a za to se može iskoristiti formula za relativistički Dopplerov pomak, koja kaže kako je promjena u energiji pri prelasku iz sustava  $S$  u  $S'$ :

$$E' = \gamma E \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right), \quad (4.13)$$

pa se uvrštavanjem u prethodni izraz dobiva za ratu zračenja:

$$\frac{dE_{e1}}{dt} = c\sigma_T \gamma^2 \int \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2 E v dE \quad (4.14)$$

gdje je bitno zamijetiti kako su sve veličine u izrazu mjerene u sustavu  $S$ . Za izotropnu distribuciju fotona, gornji izraz se može integrirati po prostornom kutu u sustavu  $S$ :

$$\begin{aligned} \int E v dE \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2 d\Omega &= U_{\text{rad}} \int_0^\pi \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^2 \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \\ &= U_{\text{rad}} \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{4\gamma^2} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdje je

$$U_{\text{rad}} \equiv \int E v dE, \quad (4.16)$$

pa je onda

$$\frac{dE_{e1}}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left( \gamma^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (4.17)$$

Prema [9], ovo je energija koju dobije polje fotona zbog raspršenja niskoenergijskih fotona na elektronima. Zbog toga je potrebno je oduzeti početnu energiju niskoenergijskih fotona kako bi se našao ukupan dobitak energije fotona u sustavu  $S$ . Stopa

kojom niskoenergijski fotoni gube energiju je  $\sigma_T c U_{\text{rad}}$ , pa slijedi:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left( \gamma^2 - \frac{1}{4} \right) - \sigma_T c U_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} (\gamma^2 - 1). \quad (4.18)$$

Korištenjem identiteta  $(\gamma^2 - 1) = \gamma^2 v^2 / c^2$ , ukupna snaga zračenja (rata kojom elektroni gube energiju, a koja se pretvara u povećanje zračenja) jest

$$P_{\text{IC}} \equiv \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{IC}} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2. \quad (4.19)$$

U ovom se izrazu može primjetiti sličnost sa izrazom za ratu gubljenja energije elektrona sinkrotronskim zračenjem (3.23):

$$P_{\text{sinkr}} \equiv \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{sinkr}} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{mag}} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2.$$

Razlog za ovo je taj da brzina gubljenja energije ovisi o električnom polju koje ubrzava elektron u njegovom sustavu trenutnog mirovanja te nije bitno što je zapravo izvor tog polja. U slučaju sinkrotronskog zračenja, električno polje je  $\vec{v} \times \vec{B}$  te nastaje gibanjem elektrona u magnetskom polju, dok u slučaju inverznog Comptonovog raspršenja, električno polje o kojem ovisi snaga zračenja je suma električnih polja elektromagnetskih valova koji padaju na elektron. Drugi način objašnjavanja sličnosti među gornjim izrazima može se naći u [11] gdje je pokazano kako se sinkrotronsko zračenje može smatrati raspršenjem 'virtualnih fotona' koje opaža elektron koji se okreće oko magnetskog polja.

Iz jednadžbe 4.19 može se izračunati ukupna snaga zračenja inverznog Comptonovog raspršenja po jediničnom volumenu medija koji sadrži relativističke elektrone, jednako kao i za sinkrotronsko zračenje. Uzme li se da je  $N_e(\gamma_e) d\gamma_e$  broj elektrona po volumenu sa Lorentzovim faktorom  $\gamma_e$  u rasponu od  $\gamma_e$  do  $\gamma_e + d\gamma_e$ , vrijedi:

$$P_{\text{tot}}[\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3}] = \int P_{\text{IC}} N_e(\gamma_e) d\gamma_e. \quad (4.20)$$

Primjerice, ako je

$$N_e(\gamma_e) = \begin{cases} C \gamma_e^{-p}, & \gamma_{\text{min}} \leq \gamma_e \leq \gamma_{\text{max}} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (4.21)$$

onda uzimanjem da je  $v/c \sim 1$ , dobije se:

$$P_{\text{tot}} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\text{rad}} C \frac{\gamma_{\text{max}}^{3-p} - \gamma_{\text{min}}^{3-p}}{3-p}. \quad (4.22)$$

Prema [6], razmotri li se populacija relativističkih elektrona unutar regije koja sadrži magnetsko polje, jasno je kako će ti elektroni producirati fotone putem sinkrotronskog zračenja. Ono što je pokazano u ovom poglavlju jest da se za distribuciju elektrona i fotona dovoljno velike gustoće može očekivati kako će doći do inverznog Comptonovog raspršenja dobivenih fotona na elektronima koji su ih proizveli. Navedeni proces naziva se *synchrotron self-Compton* (SSC) emisija. Dakle, elektroni prvo sinkrotronskim zračenjem emitiraju fotone, koji se potom inverzno Comptonski rasprše na tim istim elektronima te time sebi dodatno povećaju energiju. Ukupni učinak ovog mehanizma emisije razmatra se u simuliranim spektrima u nastavku ovog rada.

## 5 Numerički model

U ovom je poglavlju opisan numerički model koji se koristi za simuliranje spektara bljeskova gama zračenja. Na početku su opisana svojstva spektara koji se proučavaju u literaturi te su potom prezentirane jednačbe koje opisuju evoluciju elektronske distribucije. Nakon toga su prikazana odabrana ograničenja na parametre emisije dok se na kraju poglavlja nalazi primjer rezultata generiranih numeričkim modelom.

Uzrok promptnog zračenja bljeskova gama zračenja još uvijek nije identificiran te trenutno ne postoji konsenzus oko porijekla ovih eksplozija. Prema [4], priroda disipacije i radijativnih mehanizama unutar bljeskova gama zračenja nisu sasvim određene, što znači da se ne zna što točno pogoni i oblikuje promptno zračenje. Ovaj nedostatak informacija usko je povezan s još uvijek otvorenim pitanjima o fundamentalnim svojstvima emisije bljeskova gama zračenja, kao što su primjerice kompozicija relativističkog mlaza, lokacija disipacijske regije, efikasnost i priroda mehanizma akceleracije te jakost i svojstva magnetskog polja u emisijskoj regiji. Područja vrijednosti ovih parametara mogu se odrediti usporedbom numerički generiranih spektara s opaženim spektrima.

### 5.1 Svojstva spektara bljeskova gama zračenja

Kao što je rečeno ranije, spektri bljeskova gama zračenja su netermalni. Prema [1], spektri se često računaju preko cijelog trajanja bljeska te se nazivaju vremenski integriranim spektrima bljeskova gama zračenja. Budući da je opažena snažna evolucija u spektrima nekih bljeskova, potrebno je promatrati i vremenski razlučene spektre bljeskova kako bi se bolje razumjela fizička pozadina tih događaja.

Kada je energijski raspon detektora dovoljno velik, tipični se fotonski spektar bljeskova gama zračenja može opisati empirijskom Bandovom funkcijom ([17]):

$$N(E) = \begin{cases} A \left(\frac{E}{100 \text{ keV}}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{E}{E_0}\right) & \text{za } E < (\alpha - \beta)E_0, \\ A \left[\frac{(\alpha - \beta)E_0}{100 \text{ keV}}\right]^{\alpha - \beta} \exp(\beta - \alpha) \left(\frac{E}{100 \text{ keV}}\right)^\beta & \text{za } E \geq (\alpha - \beta)E_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

gdje je  $N(E)dE$  broj fotona s energijom unutar intervala  $dE$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  su fotonski spektralni indeksi ispod i iznad energije prijeloma  $E_0$  (eng. *break energy*) i oba su negativna. U niskoenergijskim se spektrima obično koristi spektar gustoće toka ( $F_\nu$ )

te to odgovara spektru  $EN(E)$ . U visokoenergijskoj astrofizici se često računa  $\nu F_\nu$  spektar, odnosno spektralna distribucija energije (eng. *spectral energy distribution* ili SED), što odgovara  $E^2N(E)$ . Maksimum  $\nu F_\nu$  ili  $E^2N(E)$  spektra,  $E_{\text{peak}}$ , obično se naziva vrh distribucije energije. Pomoću numeričkog modela opisanog u ovom poglavlju računaju se upravo ovakvi fotonski spektri simuliranih bljeskova gama zračenja i uspoređuju se s opažanjima u narednom poglavlju.

### 5.1.1 Nagibi fotonskih spektara bljeskova gama zračenja

Nagibi fotonskih spektara u izrazu 5.1 mogu poslužiti kao izvor informacija o mehanizmima zračenja i energijskoj distribuciji elektrona koji su ih producirali. Prema [18], vrijednost visokoenergijskog fotonskog indeksa  $\beta$  se povezuje s nagibom  $p$  energijske distribucije elektrona koja je emitirala fotonski spektar, dok se vrijednost niskoenergijskog fotonskog indeksa,  $\alpha$ , povezuje s mehanizmom emisije fotona. Različiti modeli emisije predviđaju različite vrijednosti indeksa  $\alpha$ , te se njegovi iznosi analiziraju u numeričkom modelu opisanom u nastavku. Primjerice, prema [19], u slučaju zračenja crnog tijela je  $\alpha \approx 1$ , što se iznimno rijetko opaža u spektrima bljeskova gama zračenja. Za mehanizam sinkrotronskog zračenja u režimu brzog hlađenja elektrona (potpoglavlje 3.8) teorija predviđa vrijednost  $\alpha \simeq -3/2$ , a u režimu sporog hlađenja elektrona  $\alpha \simeq -2/3$ . S obzirom da se opažene vrijednosti niskoenergijskog fotonskog indeksa obično kreću između tih vrijednosti, sinkrotronsko zračenje se i dalje razmatra kao jedan od glavnih mehanizama emisije fotona u bljeskovima gama zračenja.

## 5.2 Evolucija elektronske distribucije

U svrhu simuliranja spektara emisije bljeskova gama zračenja u ovom se radu koriste metode prezentirane u [20]. U tom se radu istražuje emisija blazara pomoću numeričkog modela koji uključuje korištenje programskog paketa *naima* za programski jezik *python*. Paket *naima* je prezentiran u [21] te uključuje različite funkcije kojima se mogu numerički računati radijativni procesi u astrofizici.

Iako se metode iz [20] tiču blazara i njihove emisije, jednadžbe koje opisuju zračenje i spektre bljeskova gama zračenja su istog oblika. Prema [20], pretpostavlja se da je emisija producirana distribucijom relativističkih elektrona koji su injekti-

rani u regiju tipične dimenzije  $R$  s magnetskim poljem  $B$  stopom  $Q(\gamma)$ , [ $\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$ ]. Elektroni gube energiju putem sinkrotronskog zračenja i inverznog Comptonovog raspršenja (*synchrotron self-Compton* emisijom). Osim toga, elektroni mogu izaći iz emisijske regije na vremenskoj skali  $t_{\text{esc}}$ , koja ne ovisi o energiji elektrona. Cilj nam je odrediti parametre emisije u spektrima bljeskova gama zračenja, posebice na frekventnim intervalima oko i iznad maksimuma spektralne energijske distribucije bljeskova. U ovim su spektralnim područjima zanemarivi doprinosi od sinkrotronske samoapsorpcije, pa se taj efekt zanemaruje u računu. Jednadžba kontinuiteta koja vlada vremenskom evolucijom elektronske distribucije  $N(\gamma, t)$  [ $\text{cm}^3$ ] jest:

$$\frac{\partial N_e(\gamma_e, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \gamma_e} [\dot{\gamma}_e(\gamma_e, t) N_e(\gamma_e, t)] + Q(\gamma_e, t) - \frac{N_e(\gamma_e, t)}{t_{\text{esc}}}, \quad (5.2)$$

gdje je  $\dot{\gamma}_e = \dot{\gamma}_{eS} + \dot{\gamma}_{eC}$  ukupna brzina hlađenja dana s:

$$\dot{\gamma}_e = \frac{4}{3} \frac{\sigma_T c}{m_e c^2} [U_{\text{mag}} + U_{\text{rad}}(\gamma_e, t)] \gamma_e^2, \quad (5.3)$$

gdje je  $\sigma_T$  Thomsonov udarni presjek,  $U_{\text{mag}}$  je gustoća energije magnetskog polja, a  $U_{\text{rad}}(\gamma_e, t)$  je gustoća energije polja zračenja.

Vremenska skala hlađenja odgovara radijativnim gubicima zbog SSC emisije:

$$t_{\text{cooling}} = \frac{3m_e c^2}{4\sigma_T c \gamma_e (U_{\text{mag}} + U_{\text{rad}})}. \quad (5.4)$$

Ova se relacija može zapisati i u obliku:

$$\frac{t_{\text{cooling}}}{R/c} = \frac{3\pi}{\gamma_e l (1 + U_{\text{mag}}/U_{\text{rad}})}, \quad (5.5)$$

gdje je  $l = 4\pi R \sigma_T U_{\text{rad}} / (m_e c^2)$  parametar kompaktnosti, uz pretpostavku da sva gustoća energije polja zračenja podliježe raspršenju. Iz gornjeg se izraza može vidjeti kako će se za određene vrijednosti parametra kompaktnosti  $l$ , elektroni visokih energija hladiti brže od vremena prelaska fotona (eng. *light crossing time*)  $R/c$ , što je očekivana situacija za emisiju bljeskova gama zračenja. Tipično, ova je vremenska skala puno manja od  $R/c$ .

### 5.3 Ograničenja prostora parametara

U ovom potpoglavlju dana su ograničenja i argumentacija istih za svaki parametar spektara emisije bljeska gama zračenja koji se razmatraju u nastavku rada. Parametri koji se mogu mijenjati u numeričkom modelu uključuju:

1. magnetsko polje u sustavu mlaza (eng. *comoving system*),  $B$  [G],
2. minimalni elektronski Lorentzov faktor,  $\gamma_{\min}$ ,
3. Lorentzov faktor volumena relativističkog mlaza elektrona (eng. *bulk Lorentz factor*),  $\Gamma$ ,
4. radijus emisijskog područja u sustavu mlaza,  $R$  [cm],
5. norma energijske distribucije injektiranih elektrona, norm.

U svim razmatranjima u ovom radu pretpostavlja se kontinuirana injekcija elektrona u emisijsko područje tokom cijelog trajanja emisije, što znači da je vrijeme injekcije jednako vremenu trajanja emisije ( $t_{\text{inj}} = t = 1 \times R/c$ ). Isto tako, s obzirom da se radi o emisiji bljeska gama zračenja, očekuje se kako će elektroni boraviti u emisijskom području dovoljno dugo da se velik dio njih stigne ohladiti. Stoga je vremenska skala izlaska elektrona iz područja emisije izabrana da bude puno veća od trajanja emisije ( $t_{\text{esc}} = 5 \times R/c \gg t$ ). Osim toga, za sve navedene parametre promotrena je i vremenska evolucija njihovih vrijednosti u usporedbi s opažanjima u narednom poglavlju. Izabrani prostori parametara su opisani u nastavku.

#### 5.3.1 Magnetsko polje

Magnetsko polje unutar područja emisije uzrokuje u sustavu relativističkog mlaza emisiju sinkrotronskih fotona. Razmatrana magnetska polja su uniformna unutar emisijskog područja i kreću se od 10 G do  $10^5$  G uz promjenu eksponenta s korakom od 0.5, što je slično analizi prikazanoj u [22]. Dakle,

$$\log\left(\frac{B}{\text{G}}\right) = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\} \quad (5.6)$$

### 5.3.2 Elektronski Lorentzov faktor i distribucija elektrona

Distribucija energije elektrona u sustavu mlaza koji se injektiraju u emisijsko područje dana je s:

$$N_e(\gamma_e) = A\gamma_e^{-p} \text{ kada je } \gamma_e \geq \gamma_{\min}, \quad (5.7)$$

gdje je  $p = 2.5$  indeks energijskog spektra elektrona izabran u skladu s [14], dok veličina  $A$  predstavlja broj elektrona (po jedinici volumena) koji imaju Lorentzov faktor  $\gamma_e = 1$ . Minimalni Lorentzov faktor elektrona  $\gamma_{\min}$  izabran je u skladu s vrijednostima korištenim u [22] te se promatraju vrijednosti od 10 do  $10^5$  uz promjenu eksponenta s korakom od 0.5, odnosno:

$$\log(\gamma_{\min}) = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}. \quad (5.8)$$

Parametar norm je povezan s energijskom distribucijom elektrona kao:

$$\text{norm} = N_e(\gamma_e = 1) = A, \quad (5.9)$$

te se može varirati u modelu. Izbor vrijednosti koje se promatraju u nastavku rada sličan je onom u [22]. U tom se radu koristi relativistička gustoća elektrona  $n_e$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] (integral elektronske distribucije energija po energiji) koja je dana s:

$$n_e = \int_{\gamma_{\min}}^{+\infty} N_e(\gamma_e) d\gamma_e = \int_{\gamma_{\min}}^{+\infty} A\gamma_e^{-p} d\gamma_e = A \frac{\gamma_e^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{\gamma_{\min}}^{+\infty} = A \frac{\gamma_{\min}^{-p+1}}{p-1}. \quad (5.10)$$

Dakle, vrijednosti  $n_e$  u radu [22] povezane su s veličinom  $A$  iz 5.7, odnosno s varijabilnim parametrom norm kao:

$$\text{norm} = A = n_e \frac{p-1}{\gamma_{\min}^{1-p}} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\min=10^4} \\ p = 2.5 \end{array} \right\} = n_e \times 1.5 \times 10^6. \quad (5.11)$$

Stoga je raspon promatranih vrijednosti parametra norm jednak  $10^9 - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  uz promjenu eksponenta s korakom od 0.5, odnosno:

$$\log\left(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}}\right) = \{9, 9.5, 10, 10.5, 11, 11.5, 12, 12.5, 13, 13.5, 14, 14.5, 15, 15.5, 16\}. \quad (5.12)$$



### 5.3.3 Emisijsko područje

U numeričkom kodu, širina ljske (u sustavu mlaza) u kojoj se događa emisija zračenja povezana je s vremenom u kojem se prati emisija  $t = R/c$  i s vremenom izlaska elektrona iz područja emisije  $t_{\text{esc}} = 5 \times R/c$ . Kod odabira vrijednosti za  $R$ , želimo slične vrijednosti kakve su se koristile u [22]. U tom je radu vrijeme u kojem se promatra emisija dano u sustavu mlaza s  $t = R_{\text{GRB}}/(\Gamma c)$ , gdje je  $R_{\text{GRB}}$  tipična prostorna dimenzija potrebna za adijabatsko hlađenje, a  $\Gamma$  Lorentzov faktor mlaza. Zbog toga se uvodi analogija  $R = R_{\text{GRB}}\Gamma$  i razmatraju se vrijednosti u rasponu  $10^{12} - 10^{17}$  cm uz promjenu eksponenta s korakom od 0.5, odnosno:

$$\log\left(\frac{R}{\text{cm}}\right) = \{12, 12.5, 13, 13.5, 14, 14.5, 15, 15.5, 16, 16.5, 17\}. \quad (5.13)$$

Tipično se vrijeme za adijabatsko hlađenje koristi kao maksimalna vremenska skala na kojoj se obično razmatra hlađenje elektrona, budući da će se elektroni na toj skali ohladiti ako ne zbog sinkrotronske emisije, onda zbog adijabatske ekspanzije.

### 5.3.4 Lorentzov faktor mlaza

Relativistički mlaz elektrona giba se s Lorentzovim faktorom  $\Gamma$  te je u potpoglavlju 1.2.2 pokazano kako je minimalna vrijednost tog faktora za bljeskove gama zračenja 100 (izraz 1.4). Postoje predviđanja i za vrijednost maksimalnog Lorentzovog faktora koju relativistički mlaz postiže tokom svoje dinamičke faze, a u ovom slučaju se uzima empirička korelacija između energije na kojoj se pojavljuje maksimum vremenski integriranog  $\nu F_\nu$  spektra bljeska gama zračenja,  $E_{\text{peak}}$ , i maksimalnog Lorentzovog faktora kojeg relativistički mlaz može postići,  $\Gamma_{\text{max}}$ , iz [23]:

$$\log\left(\frac{E_{\text{peak},*}}{300 \text{ keV}}\right) = m \log\left(\frac{\Gamma_{\text{max}}}{100}\right) + q, \quad (5.14)$$

gdje je  $m$  korelacijski nagib i  $q$  normalizacija modela, a  $E_{\text{peak},*}$  je energija maksimuma u sustavu vezanom za izvor bljeska gama zračenja. Veza između energije u tom sustavu i energije u opažračkom sustavu je  $E_{\text{peak}} = E_{\text{peak},*} \times (1 + z)$ , gdje je  $z$  crveni pomak bljeska. Za potrebe ovog rada uzete su vrijednosti

$$m = 1.47 \text{ i } q = -0.24, \quad (5.15)$$

koje su rezultat razmatranja homogenog medija koji okružuje vatrenu kuglu.

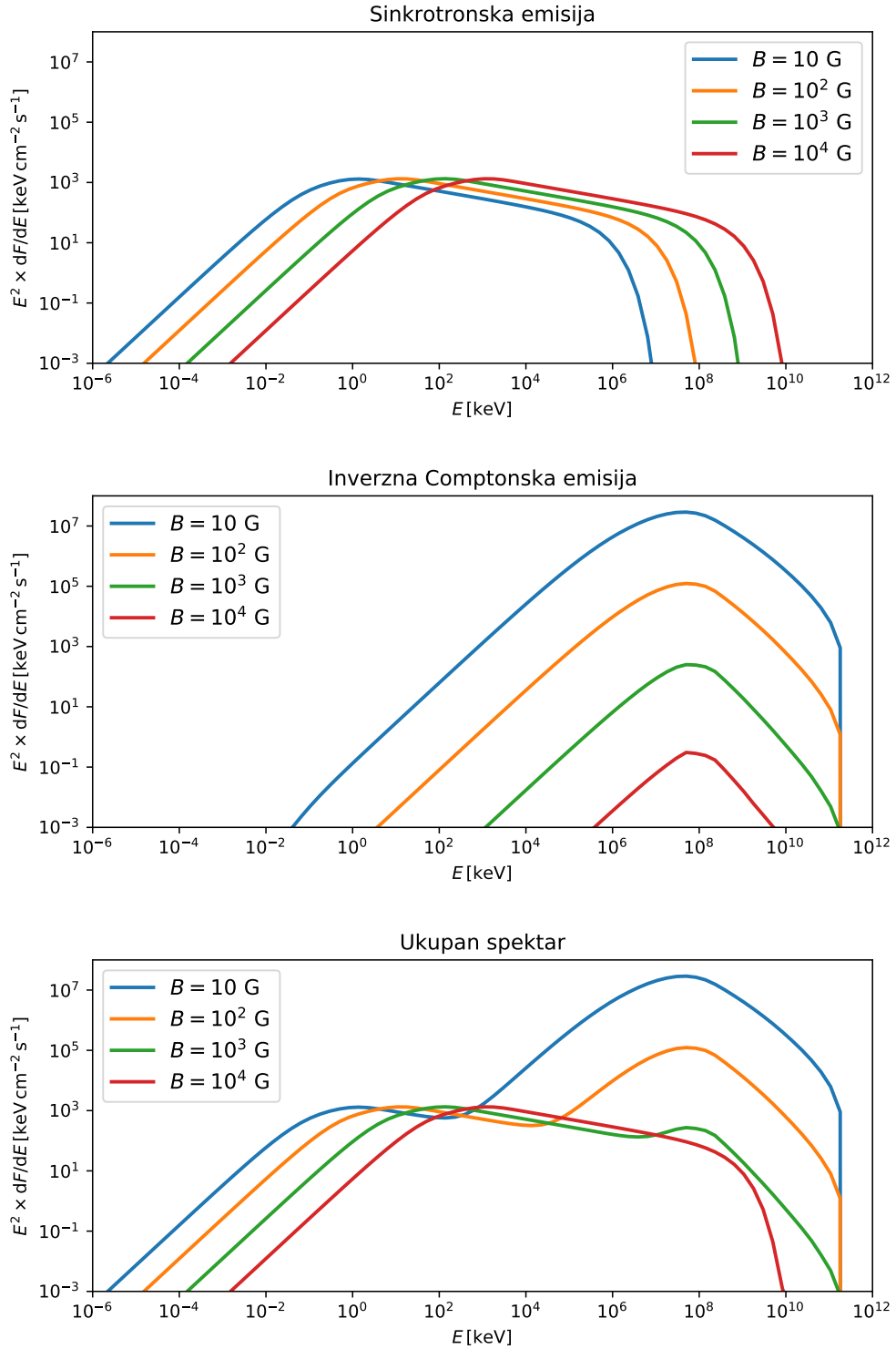
Da bi se promatrala vremenska evolucija parametara emisije, potrebno je pretpostaviti određena ponašanja. Primjerice, nakon formacije pulsa u svjetlosnoj krivulji bljeska, istraživanje provedeno u [22] pokazuje kako će se Lorentzov faktor mlaza,  $\Gamma$ , povećavati u vremenu, radijus područja emisije,  $R$ , će rasti, dok se ostali parametri ( $\gamma_{\min}$ ,  $B$  i  $\text{norm}$ ) smanjuju. Pokazuje se kako se tipičan oblik pulsa (kakav se vidi u svjetlosnim krivuljama) s naglim usponima i eksponencijalnim padovima (eng. *fast rise exponential decay*, FRED) u modelu internih udara može postići ako se distribucija Lorentzovih faktora ljusaka mijenja od nižih vrijednosti na početku izbacivanja ljusaka iz izvora, prema višim vrijednostima na kraju izbacivanja ljusaka. Stoga se raspodjela Lorentzovih faktora emisijskog područja nakon sudara unutar mlaza može aproksimirati lineranom evolucijom, kakva je korištena u narednom poglavlju.

Relevantni rezultati numeričkog modela uključuju veličine koje se mogu uspoređivati s opažanjima, a u ovom radu se promatraju:

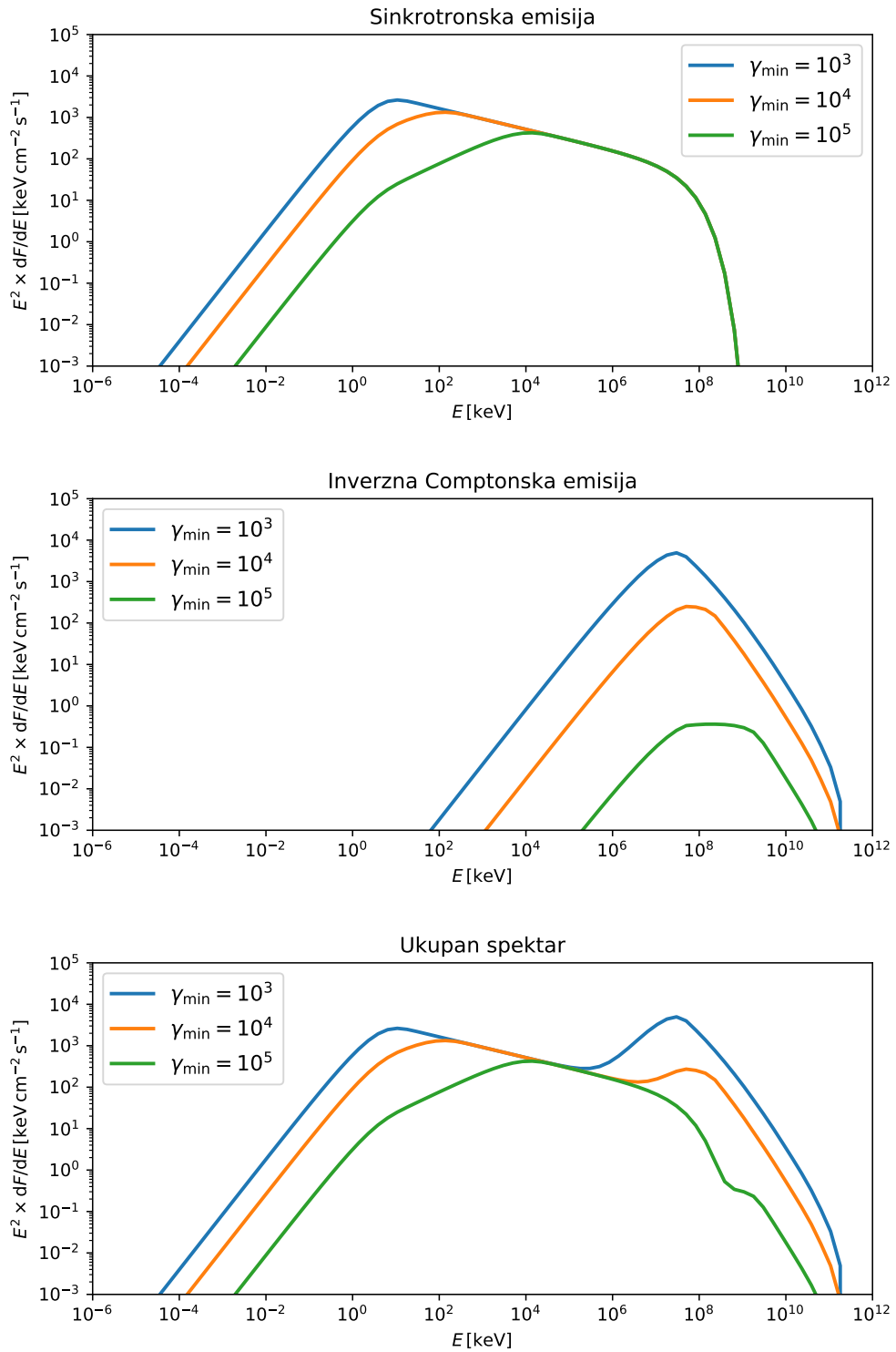
1. tok fotona  $F$  [ $\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})$ ] integriran u energijskom rasponu  $0.5 \text{ keV} - 10 \text{ MeV}$ ,
2. energija na kojoj se pojavljuje vrh  $\nu F_\nu$  spektra,  $E_{\text{peak}}$  [ $\text{keV}$ ],
3. nagib fotonskog spektra ispod  $E_{\text{peak}}$ ,  $\alpha$ .

#### 5.4 Ponašanje spektra u ovisnosti o parametrima emisije

U ovom potpoglavlju je prikazan primjer simulacije emisije bljeska gama zračenja na kojem se može vidjeti ponašanje fotonskih spektara u ovisnosti o parametrima emisije. Na slikama 5.1 i 5.2 prikazani su numerički spektri za različite vrijednosti magnetskog polja u sustavu relativističkog mlaza,  $B$ , i za različite vrijednosti minimalnog elektronskog Lorentzovog faktora,  $\gamma_{\min}$ , respektivno. Ostali parametri su konstantni i izabrani u skladu s vrijednostima razmatranim u [22]. Tako su u slučaju variranja magnetskog polja ostali parametri  $\gamma_{\min} = 10^4$ ,  $R = 10^{14} \text{ cm}$ ,  $\text{norm} = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\Gamma = 100$ , dok su u slučaju variranja  $\gamma_{\min}$  izabrani  $B = 10^3 \text{ G}$ ,  $R = 10^{14} \text{ cm}$ ,  $\text{norm} = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\Gamma = 100$ . Svi su spektri izračunati s izborom crvenog pomaka  $z = 1$ , što znači da je simulirani bljesak na luminozitetnoj udaljenosti od  $6700 \text{ Mpc}$  od nas. Ova je udaljenost izračunata uz pretpostavku standardnog modela kozmologije, odnosno  $H_0 = 69.6 \text{ (km/s)/Mpc}$ ,  $\Omega_M = 0.3$  i  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , prema [24].



Slika 5.1: Prikaz numerički izračunatih spektara sinkrotronske, inverzne Compton-ske i ukupne emisije bljeska gama zračenja za različite vrijednosti magnetskog polja u sustavu mlaza,  $B$ . Konstantni parametri su  $\gamma_{\min} = 10^4$ ,  $R = 10^{14}$  cm,  $\text{norm} = 10^{10}$  cm $^{-3}$ ,  $\Gamma = 100$  uz izabrani crveni pomak  $z = 1$ .



Slika 5.2: Prikaz numerički izračunatih spektara sinkrotronske, inverzne Comptonske i ukupne emisije bljeska gama zračenja za različite vrijednosti minimalnog elektronskog Lorentzovog faktora,  $\gamma_{\min}$ . Konstantni parametri su  $B = 10^3$  G,  $R = 10^{14}$  cm,  $\text{norm} = 10^{10}$  cm $^{-3}$ ,  $\Gamma = 100$  uz izabrani crveni pomak  $z = 1$ .

Na slici 5.1 primjećuje se kako se energija vrha energijske distribucije sinkrotronskog dijela spektra,  $E_{\text{syn,peak}}$ , pomiče prema većim energijama kako  $B$  raste. Isto tako, primjećuje se kako energija maksimuma inverznog Comptonskog dijela emisije ostaje ista, ali se smanjuje maksimum spektra kako  $B$  raste, te za određene vrijednosti magnetskog polja bude ispod sinkrotronskog spektra.

Na slici 5.2 je vidljiv pomak energije maksimuma sinkrotronskog ( $E_{\text{syn,peak}}$ ) i inverznog Comptonskog spektra ( $E_{\text{IC,peak}}$ ), prema višim energijama i pad visine vrha energijske distribucije s povećanjem minimalnog elektronskog Lorentzovog faktora

$\gamma_{\text{min}}$ .

## 6 Usporedba opaženih spektara s numeričkim modelom

U ovom su poglavlju dani rezultati numeričkog modela (opisanog u prethodnom poglavlju) u usporedbi s opaženim spektrima dvaju bljeskova gama zračenja. Rezultati za svaki razmatrani bljesak gama zračenja opisani su i diskutirani u zasebnim potpoglavljima. Prvo je prezentirana pretpostavljena vremenska evolucija Lorentzovog faktora mlaza,  $\Gamma$ , te su potom dani rezultati za svaki promatrani vremenski interval opaženog zračenja.

U radu [4] je prezentirana spektralna analiza nekoliko bljeskova gama zračenja. Prema [25], spektri bljeskova gama zračenja obično se računaju prilagodbom odziva detektora na pretpostavljeni empirijski model (npr. Bandova funkcija, 5.1). Pritom se onda za različite modele traže one kombinacije slobodnih parametara koje daju najbolje slaganje u konvoluciji s odzivom detektora. Relevantni modeli za one rezultate iz [4] koji se uspoređuju s rezultatima našeg modela uključuju zakon potencije s eksponencijalnim *cutoff*-om sa i bez promjene u nagibu na niskim energijama (CPL ili BCPL - od eng. *break at low energies*). Modeli koji uključuju eksponencijalni *cutoff* obično se koriste kod onih bljeskova koji nemaju puno visokoenergijskih fotona. Ti su modeli ekvivalentni Bandovoj funkciji 5.1 uz uzimanje visokoenergijskog fotonskog indeksa  $\beta \rightarrow -\infty$  ([26]).

### 6.1 GRB 140206A

Prvi promatrani bljesak gama zračenja je GRB 140206A koji je analiziran u radu [4]. Tamo su dani rezultati prilagodbe opaženih svjetlosnih krivulja za nekoliko bljeskova, a ovaj je bljesak izabran zbog svoje relativno glatke svjetlosne krivulje i činjenice da su izračunati parametri vremenski razlučenih fotonskih spektara za velik broj vremenskih intervala te zato što mu je određen crveni pomak,  $z = 2.73$ . Iz crvenog pomaka izračunata je luminozitetna udaljenost  $d_L = 23\,150$  Mpc uz pretpostavku standardnog modela kozmologije, prema [24]. One veličine dobivene iz numeričkog modela koje se uspoređuju s opažanjima su energija maksimuma  $\nu F_\nu$  spektra,  $E_{\text{peak}}$ , fotonski tok integriran na rasponu energija  $[0.5 - 10^4 \text{ keV}]$ ,  $F$ , i iznos niskoenergijskog fotonskog indeksa,  $\alpha$ . Svaka se od ovih veličina promatra na 7 uzastopnih vremen-

skih intervala. Ti su intervali izabrani zbog toga što svjetlosna krivulja tog bljeska ima gladak pad u vremenu. Budući da nas zanima vremenska evolucija parametara koji određuju model emisije, izabrani su intervali od 55. do 100. sekunde opažene krivulje te je za svaki interval generiran fotonski spektar koji daje najbolje slaganje s rezultatima prilagodbe danima u tablici 3 iz [4]. Razlog zbog kojeg je odabran glatki pad u svjetlosnoj krivulji bljeska je taj što je se u tom intervalu očekuje ponašanje parametara emisije diskutirano u [22].

### 6.1.1 Evolucija Lorentzovog faktora mlaza

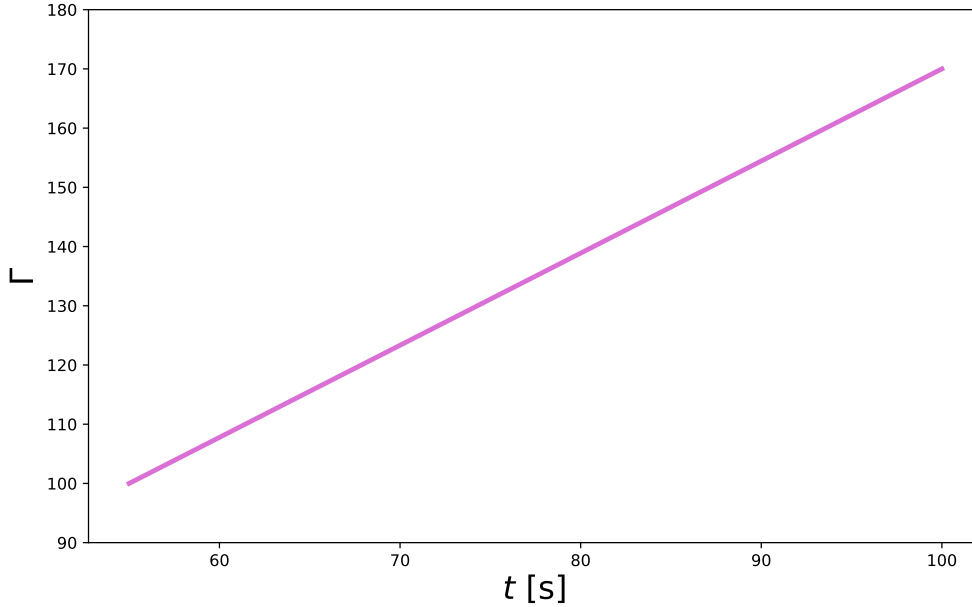
Kako je rečeno ranije, pretpostavlja se vremenska evolucija Lorentzovog faktora mlaza,  $\Gamma$ , tokom trajanja bljeska. Koristi se empirička korelacija 5.14, gdje se za  $E_{\text{peak},*}$  uzima energija maksimuma  $\nu F_\nu$  spektra izračunatog na vremenskom intervalu od 50.25 do 100. sekunde (tablica 3 iz [4]):

$$E_{\text{peak},*} = 102 \text{ keV}. \quad (6.1)$$

Uz pomoć ove vrijednosti je izračunati maksimalni  $\Gamma$  koji se postiže na kraju spomenutog vremenskog intervala te on iznosi 170. Zbog argumenata opisanih u 5.3.4, pretpostavlja se da je evolucija  $\Gamma$  u vremenu linearna te je prikazana na slici 6.1. Za vrijednost Lorentzovog faktora mlaza u određenom vremenskom intervalu uzima se vrijednost evolucije na sredini danog intervala.

### 6.1.2 Rezultati modela

Korištenjem odabira različitih parametara opisanih u potpoglavlju 5.3, generirani su elektronski i fotonski spektri za svaki vremenski interval uz pretpostavljenu evoluciju Lorentzovog faktora mlaza. Odabrane su kombinacije parametara koje daju rezultate u najboljem slaganju s opaženim vrijednostima. Pritom su prvo pronađene vrijednosti minimalnog elektronskog Lorentzovog faktora  $\gamma_{\text{min}}$  i magnetskog polja  $B$  koje daju  $E_{\text{peak}}$  najbližu opaženim vrijednostima, budući da se promjenom ostalih parametara (norm i  $R$ ) ta vrijednost ne mijenja. Potom su pronađene kombinacije ostalih parametara koje daju vrijednost integriranog toka fotona  $F$  najbližu opaženoj. Također, razmatrani su samo oni rezultati kod kojih se postiže režim brzog hlađenja, odnosno  $\gamma_{\text{min}} > \gamma_c$ , gdje je  $\gamma_c$  definirana u 3.86 (uz  $t_{\text{ex}} = R/c$ ). Osim toga, odabrani su rezul-



Slika 6.1: Prikaz vremenske evolucije Lorentzovog faktora kojim se giba relativistički mlaz. Pretpostavljena je linearna evolucija faktora u vremenu uz početnu vrijednost  $\Gamma_i = 100$  i konačnu vrijednost  $\Gamma_f = 170$ , dobivenu iz 5.14.

tati kod kojih vrijedi da je maksimum fotonskog toka od sinkrotronske emisije iznad maksimuma toka inverzne Comptonske emisije ([22]). Niskoenergijski nagib fotonskog spektra,  $\alpha$ , izračunat je kao maksimalni nagib fotonskog spektra na intervalu energije  $[E_{\text{peak}}/100, E_{\text{peak}}]$  te je poželjno da on bude blizu  $-1$  ([27]). Rezultati za svaki vremenski interval su prikazani u tablicama 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 i 6.7.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	4	13	13	102.33	2.38	-0.76	76	1071
3.5	4	13.5	11	102.33	0.75	-0.76	76	1071
3.5	4	14	10	102.33	0.23	-0.76	76	1071

Tablica 6.1: Tablica s rezultatima za prvi promatrani interval (55.00-58.00 s) bljeska GRB 140206A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	4	13	13	106.22	2.46	-0.76	79	1244
3.5	4	13.5	11.5	106.22	0.78	-0.76	79	1244
3.5	4	14	10	106.22	0.25	-0.76	79	1244

Tablica 6.2: Tablica s rezultatima za drugi promatrani interval (58.00-60.00 s) bljeska GRB 140206A.

Ono što se može vidjeti iz gornjih rezultata jest da se za svaki vremenski interval može naći nekoliko rješenja koja daju jednake opservabilne rezultate za fotonski



$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	4	13	13	109.33	2.53	-0.76	82	1396
3.5	4	13.5	11.5	109.33	0.80	-0.76	82	1396
3.5	4	14	10	109.33	0.25	-0.76	82	1396

Tablica 6.3: Tablica s rezultatima za treći promatrani interval (60.00-62.00 s) bljeska GRB 140206A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	4	12.5	14	112.44	8.25	-0.76	84	494
3.5	4	13	12.5	112.44	2.61	-0.76	84	494
3.5	4	13.5	11	112.44	0.82	-0.76	84	494
3.5	4	14	9.5	112.44	0.26	-0.76	84	494

Tablica 6.4: Tablica s rezultatima za četvrti promatrani interval (62.00-64.00 s) bljeska GRB 140206A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	4	12.5	13.5	118.67	8.71	-0.76	89	194
3.5	4	13	12	118.67	2.75	-0.76	89	194
3.5	4	13.5	10.5	118.67	0.87	-0.76	89	194
3.5	4	14	9	118.67	0.26	-0.76	89	194

Tablica 6.5: Tablica s rezultatima za peti promatrani interval (64.00-70.00 s) bljeska GRB 140206A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	3.5	12.5	12.5	131.11	96.18	-0.77	35	31
3.5	3.5	13	11	131.11	30.41	-0.77	35	31
3.5	3.5	13.5	9.5	131.11	9.61	-0.77	35	31

Tablica 6.6: Tablica s rezultatima za šesti promatrani interval (70.00-80.00 s) bljeska GRB 140206A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	3.5	12.5	12	154.44	113.30	-0.77	41	18
3.5	3.5	13	10.5	154.44	35.83	-0.77	41	18
3.5	3.5	13.5	9	154.44	11.33	-0.77	41	18

Tablica 6.7: Tablica s rezultatima za sedmi promatrani interval (80.00-100.00 s) bljeska GRB 140206A.

spektar ( $E_{\text{peak}}$ ,  $\alpha$ ,  $F$ ). Jedino što se mijenja jest  $\gamma_c$ , Lorentzov faktor kojim se definira režim brzog hlađenja, zbog njegove ovisnosti o  $t_{\text{ex}} = R/c$ . Jedan način da se izaberu fizikalna rješenja iz gornjih rezultata jest uzimanjem u obzir vremenske evolucije parametara emisije diskutirane u [22]. Tamo je pokazano kako bi se vrijednosti parametara  $\gamma_{\min}$ ,  $B$  i  $\text{norm}$  trebale smanjivati u vremenu, dok vrijednost  $R$  raste. Ova

ponašanja se očekuju na odabranim vremenskim intervalima bljeska. Jedna je takva moguća vremenska evolucija parametara emisije prikazana u tablici 6.8. Odabrane

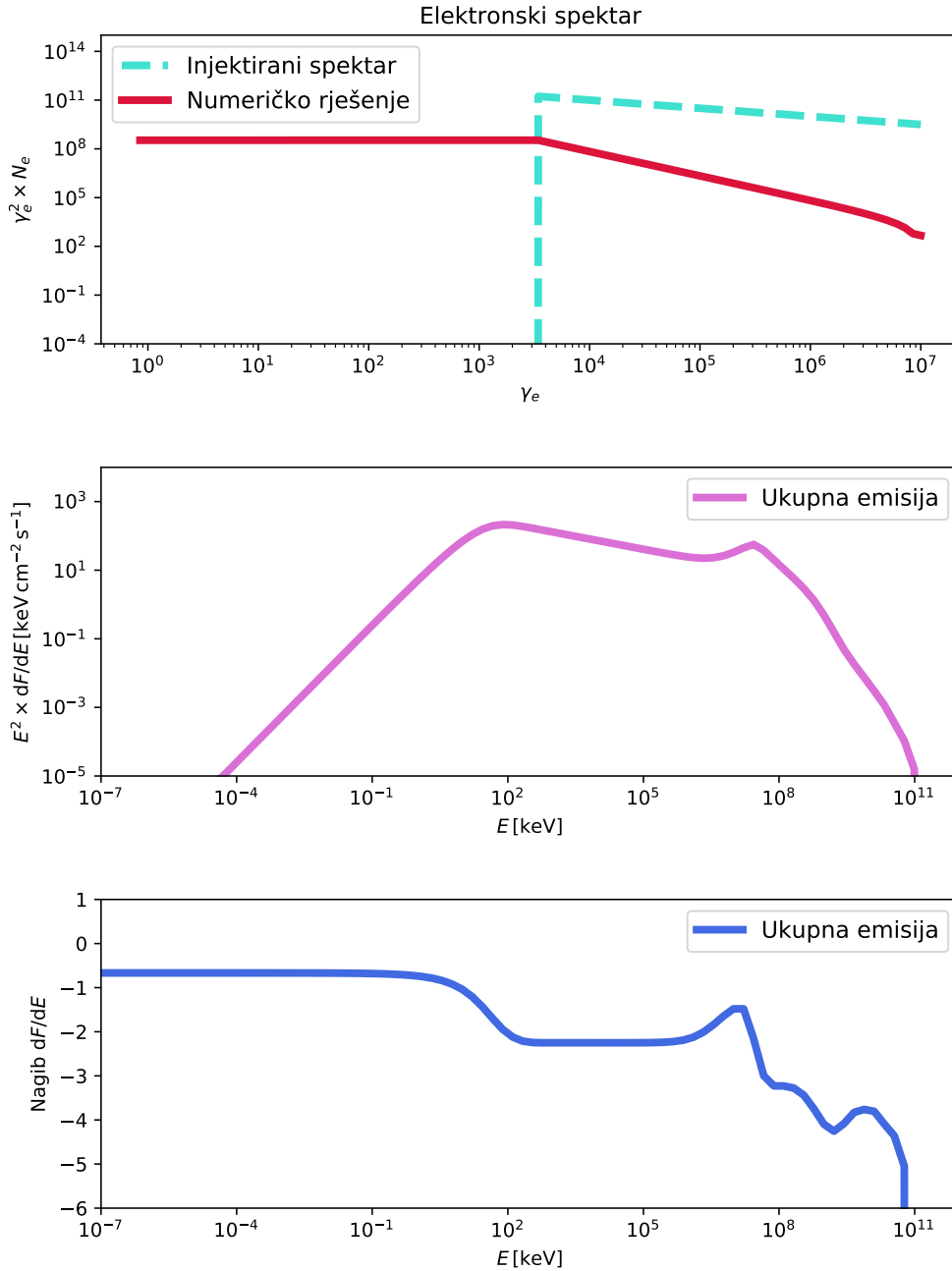
Interval [s]	$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
[55.00 – 58.00]	3.5	4	13	13	102.33	-0.76	76	1071
[58.00 – 60.00]	3.5	4	13	13	106.22	-0.76	79	1244
[60.00 – 62.00]	3.5	4	13	13	109.33	-0.76	82	1396
[62.00 – 64.00]	3.5	4	13	12.5	112.44	-0.76	84	494
[64.00 – 70.00]	3.5	4	13	12	118.67	-0.76	89	194
[70.00 – 80.00]	3.5	3.5	13	11	131.11	-0.77	35	31
[80.00 – 100.00]	3.5	3.5	13.5	9	154.44	-0.77	41	18

Tablica 6.8: Tablica s mogućim rezultatima za vremensku evoluciju parametara emisije bljeska GRB 140206A.

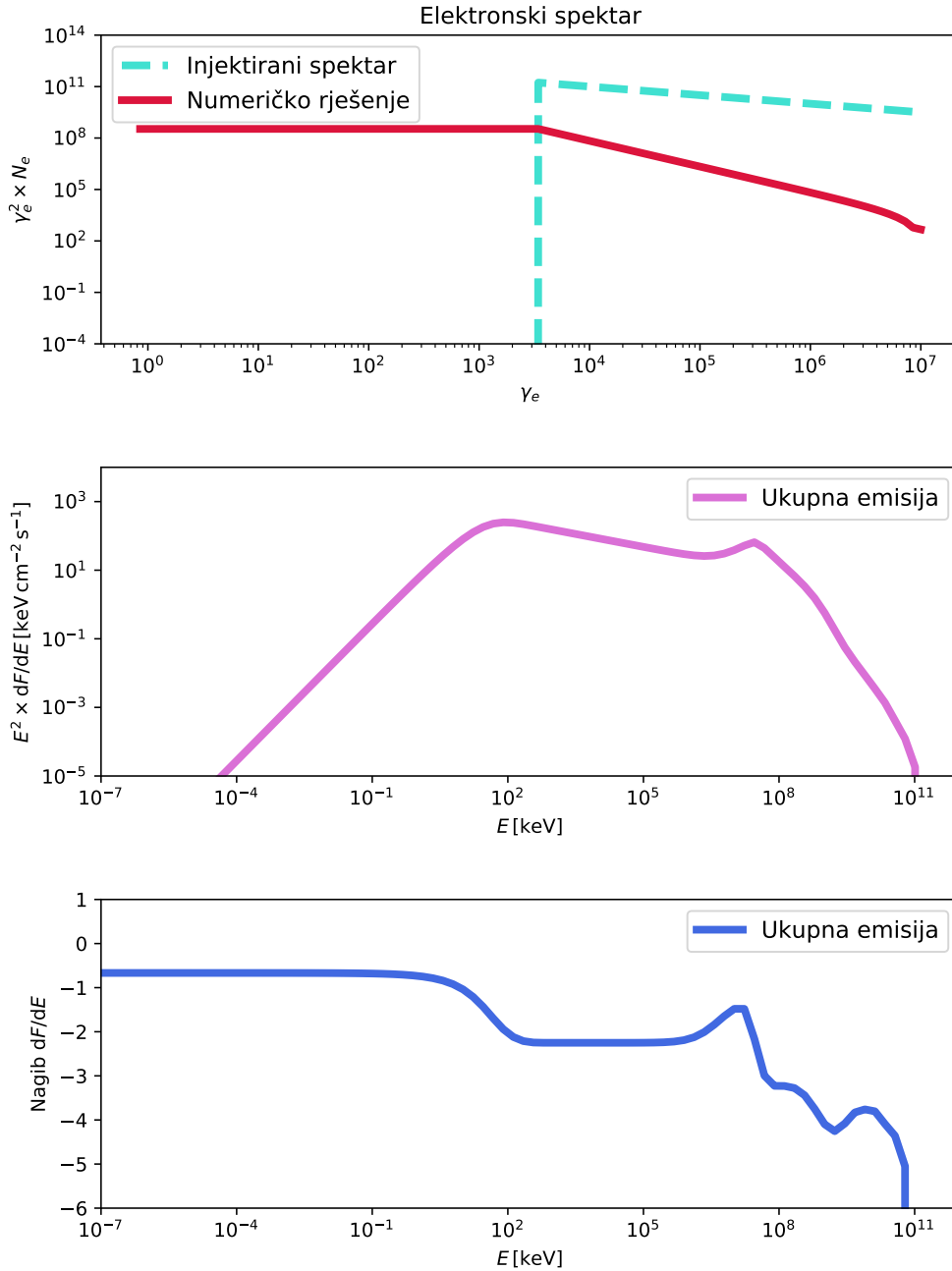
su kombinacije takve da je radijus  $R$  maksimalan u zadnjem vremenskom intervalu, a minimalan u početnom vremenskom intervalu. On se, dakle, mijenja od  $10^{13}$  cm do  $10^{13.5}$  cm. Parametar norm pada s vrijednosti  $10^{13}$   $\text{cm}^{-3}$  na  $10^9$   $\text{cm}^{-3}$ , što znači da gustoća relativističkih elektrona pada s  $\sim 10^7$   $\text{cm}^{-3}$  na  $\sim 10^3$   $\text{cm}^{-3}$  te se najveće promjene vrijednosti događaju na duljim vremenskim intervalima. Magnetsko polje pada s  $10^4$  G na  $10^{3.5}$  G, a minimalni elektronski Lorentzov faktor ostaje jednak tokom svih promatranih intervala. Ovakvo ponašanje je očekivano s obzirom na to da je opažena svjetlosna krivulja bljeska glatka na tom intervalu, pa se ne očekuju velike promjene vrijednosti  $B$  i  $\gamma_{\min}$ .

Elektronski i fotonski spektri za sve intervale s odabranim parametrima prikazani su na slikama ispod (s izračunatom gustoćom relativističkih elektrona). Na elektronskim spektrima (gornji grafovi) prikazanim na slikama 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 i 6.8 prikazane su injektirana (početna) distribucija elektrona i numeričko rješenje (konačna distribucija). Općenito se može vidjeti kako su se najviše ohladili elektroni najviših energija. Pogleda li se izraz 3.86, može se primjetiti da je vremenska skala hlađenja elektrona obrnuto proporcionalna njegovom Lorentzovom faktoru, tj.  $t \sim 1/\gamma_e$  ([22]), što znači da će se elektroni s najvišim Lorentzovim faktorima ohladiti u najkraćem mogućem vremenu. Na fotonskim spektrima ( $E^2 \times F_E$ , srednji grafovi) se može vidjeti kako sinkrotronska emisija dominira na većem dijelu spektra, dok se vidljiv doprinos inverzne Comptonske emisije pojavljuje tek na energijama reda veličine 100 GeV. Fermi LAT opaža energije fotona od nekoliko desetaka GeV, te se ponekad opaze fotoni ovih energija. Najviša energija fotona iz bljeska gama

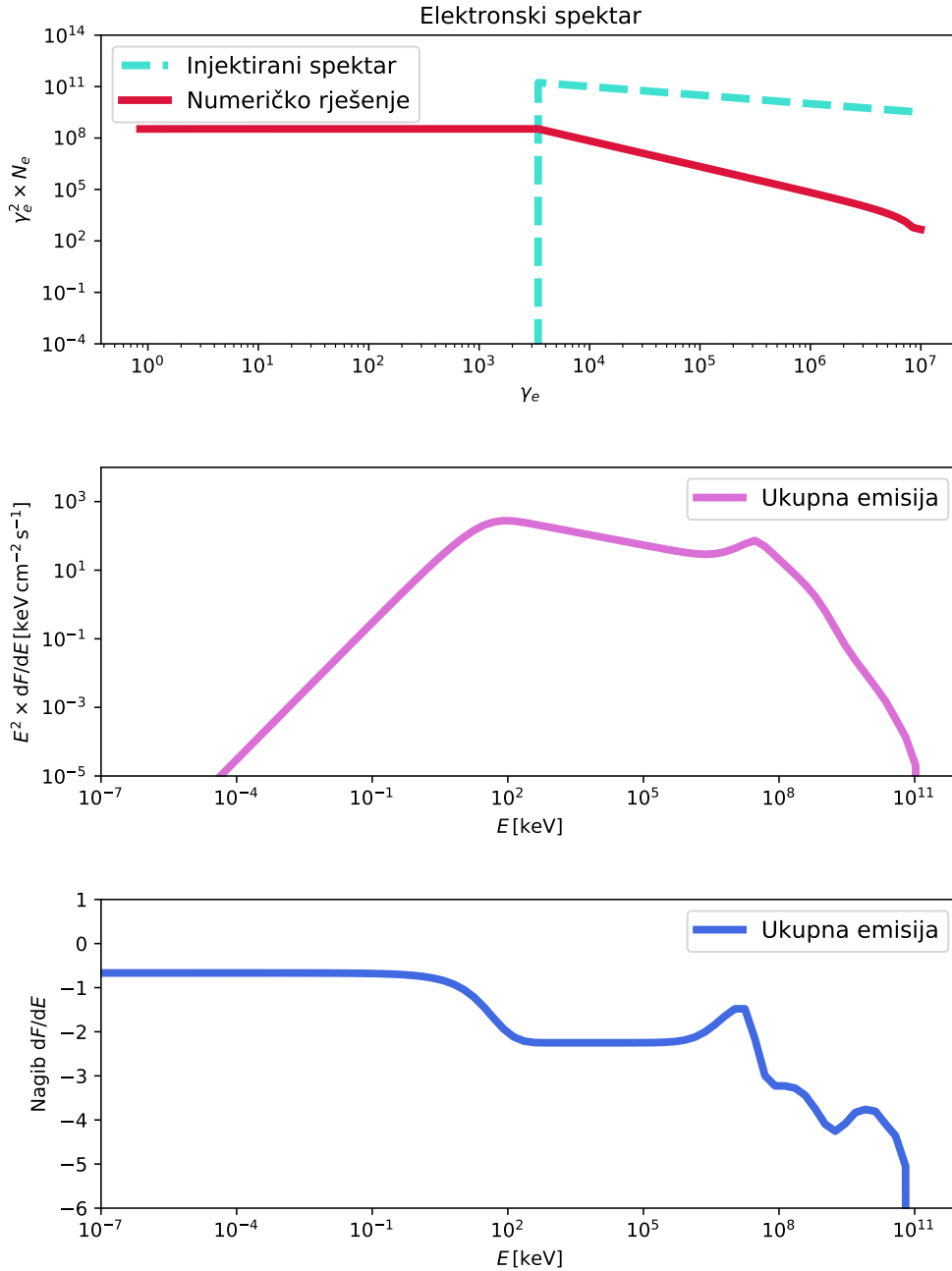
zračenja koja je opažena za GRB 130427A iznosi 94 GeV ([16]). U donjim grafovima su nacrtani nagibi fotonskih spektara na cijelom intervalu energija. Bitno je napomenuti kako je nacrtan nagib  $F_E$  spektra, a ne spektra prikazanog u srednjem grafu ( $E^2 \times F_E$ , što bi u terminima frekvencije odgovaralo  $\nu F_\nu$  spektru). Razlog tomu je što se iz nagiba  $F_E$  spektra može iščitati nagib fotonskog spektra  $\alpha$ . Razmatrani nagib  $\alpha$  dan u tablicama s rezultatima, uzima se kao maksimalna vrijednost nagiba na intervalu energija  $[E_{\text{peak}}/100, E_{\text{peak}}]$ , jer to odgovara nagibu koji se uspoređuje s opaženim vrijednostima, odnosno niskoenergijskom spektralnom indeksu iz Bandove funkcije, 5.1. Ti su nagibi obično oko  $\alpha \sim -0.8$ , što je u relativno dobrom slaganju s opažanjima.



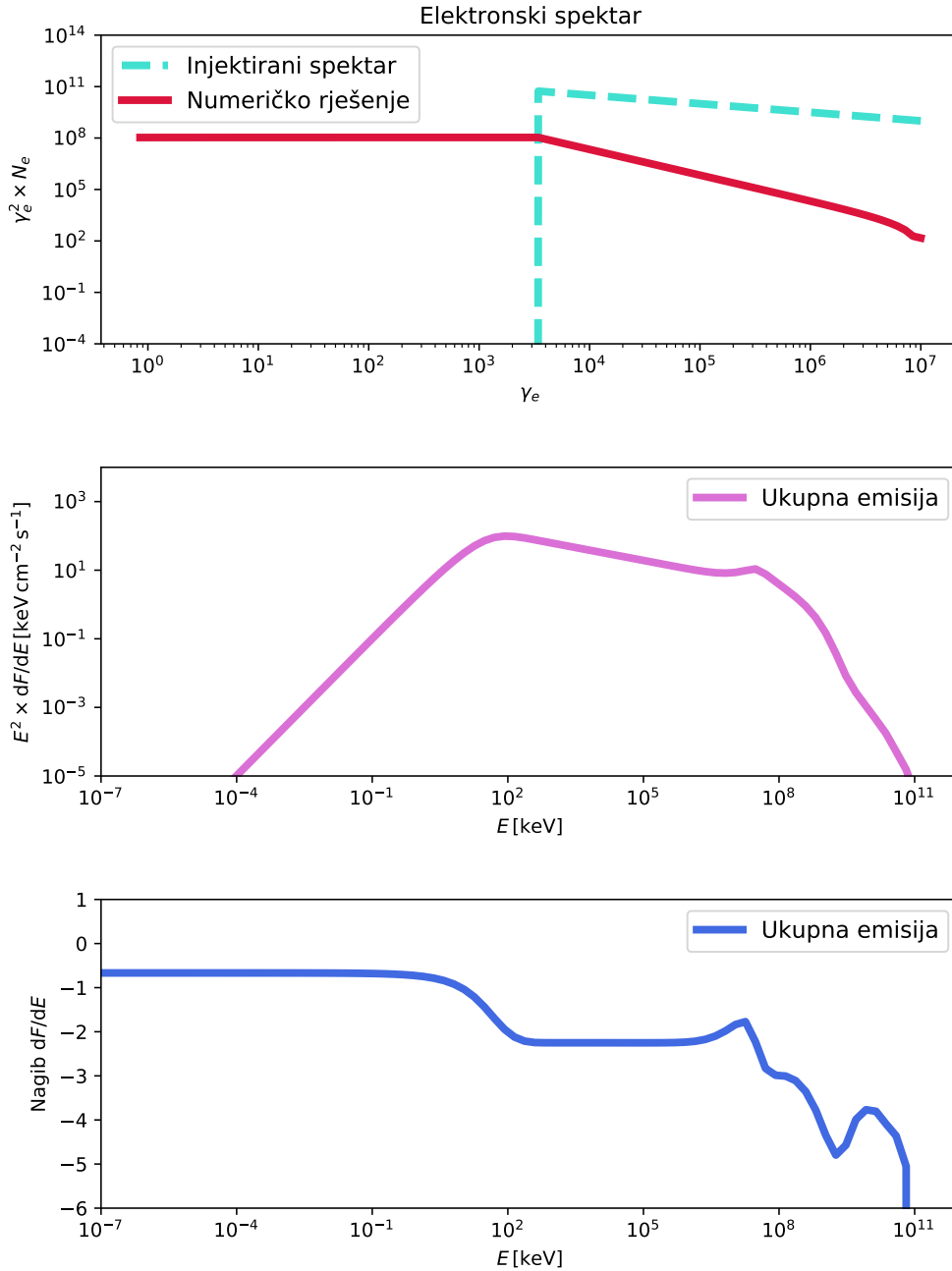
Slika 6.2: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na prvom promatranom vremenskom intervalu, 55.00 – 58.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektra su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ .



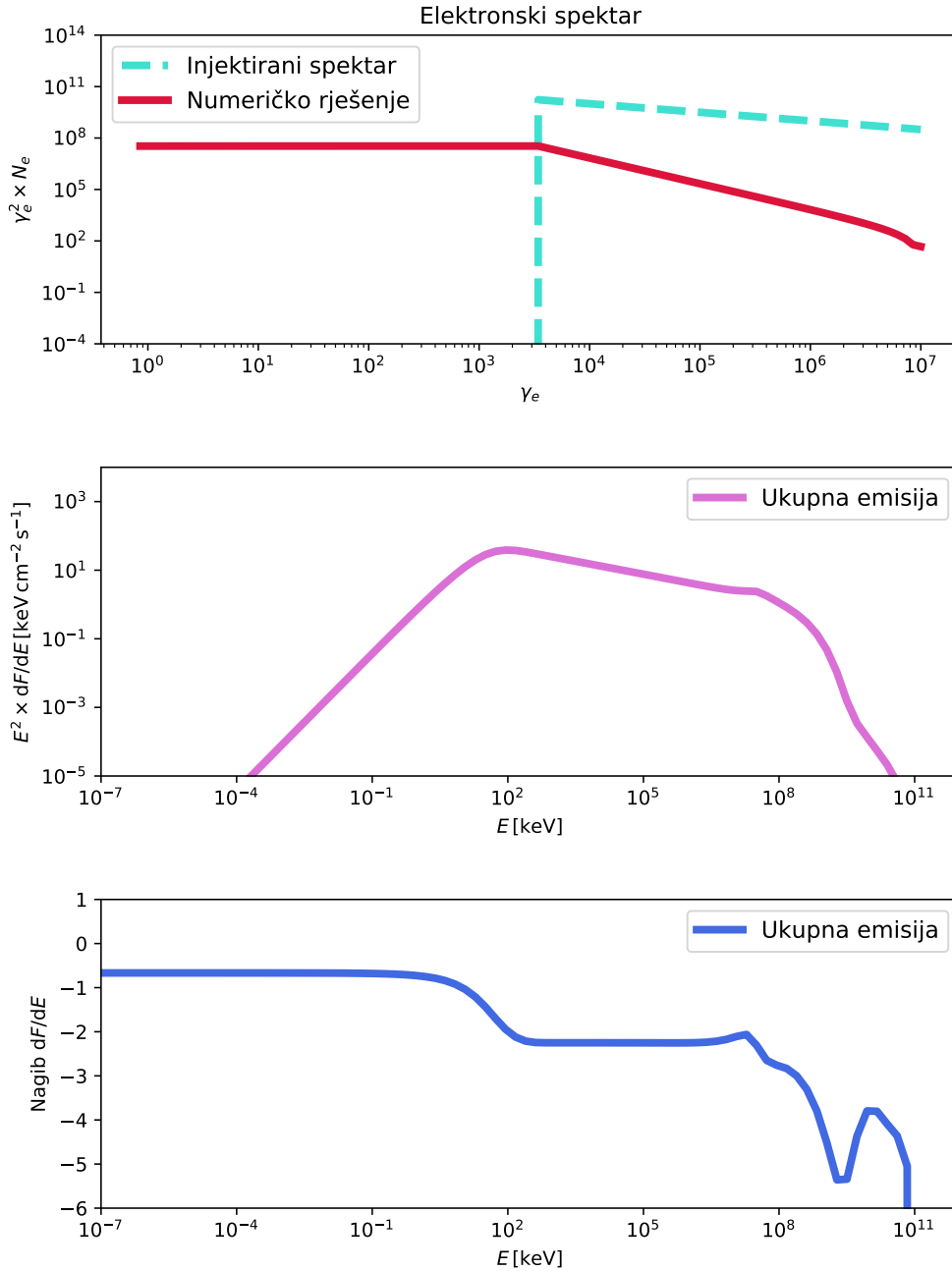
Slika 6.3: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na drugom promatranom vremenskom intervalu, 58.00 – 60.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektara su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ .



Slika 6.4: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na trećem promatranom vremenskom intervalu, 60.00 – 62.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektra su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ .

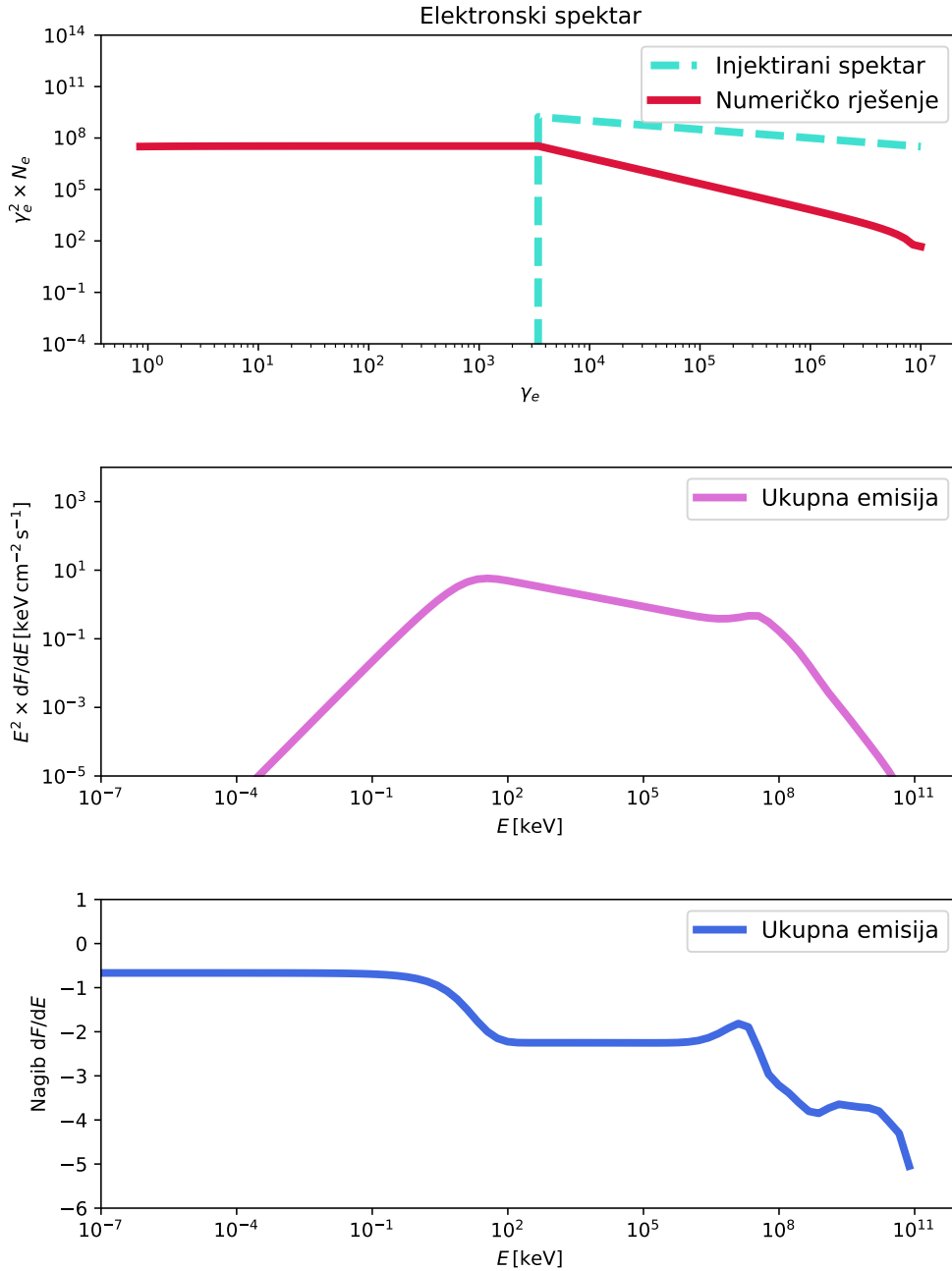


Slika 6.5: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na četvrtom promatranom vremenskom intervalu, 62.00 – 64.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektara su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 1.2 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ .

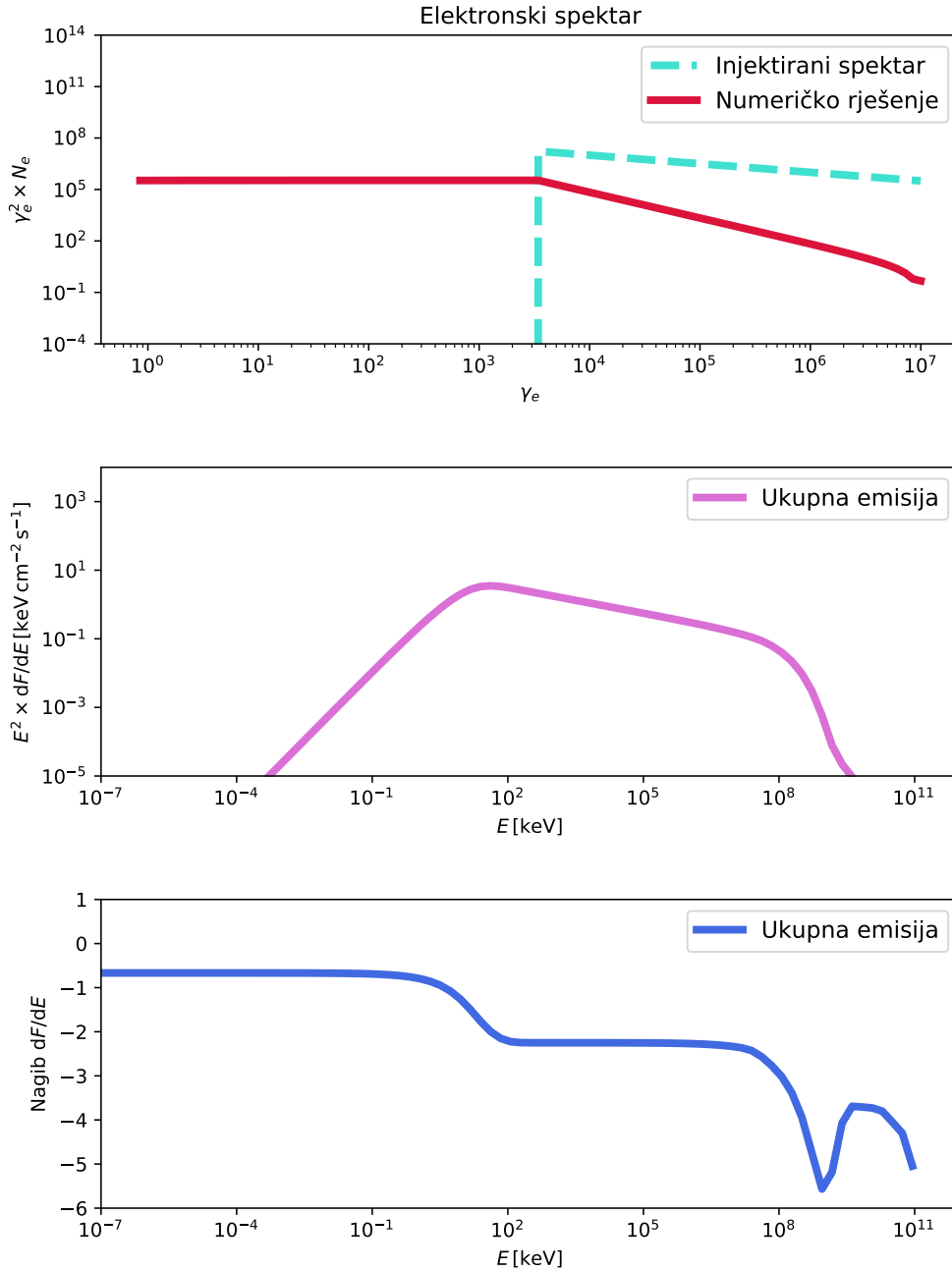


Slika 6.6: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na petom promatranom vremenskom intervalu, 64.00 – 70.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektra su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$ .





Slika 6.7: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na šestom promatranom vremenskom intervalu, 70.00 – 80.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektra su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$ .



Slika 6.8: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140206A na sedmom promatranom vremenskom intervalu, 80.00–100.00 s. Parametri korišteni za generiranje spektara su prikazani u tablici 6.8. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 3.7 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ .

## 6.2 GRB 140512A

Analizu sličnu opisanoj gore proveli smo i na bljesku gama zračenja GRB 140512A, koji je također opisan u [4] s izmjerenim crvenim pomakom  $z = 0.725$ . Iz crvenog pomaka izračunata je luminozitetna udaljenost  $d_L = 4500$  Mpc uz pretpostavku standardnog modela kozmologije, prema [24]. Za ovaj bljesak su odabrana tri vremenska intervala iz tablice 3 u [4] na kojima se zamjećuje slično ponašanje svjetlosne krivulje, tj. relativno gladak pad. Odabrani vremenski intervali su [118.22 – 123.34 s], [123.34 – 128.46 s] i [133.58 – 138.70 s]. Zadnja dva intervala nisu uzastopna, a razlog tome je što za interval između ova dva nisu navedeni svi rezultati prilagodbe.

### 6.2.1 Evolucija Lorentzovog faktora mlaza

Slično kao i ranije, pretpostavljena je linearna evolucija Lorentzovog faktora mlaza,  $\Gamma$ , na promatranim vremenskim intervalima. Maksimalna vrijednost Lorentzovog faktora koju mlaz može postići dobivena je iz energije maksimuma  $\nu F_\nu$  spektra integriranog na vremenskom intervalu 102.86 – 158.16 s (tablica 3 iz [4]):

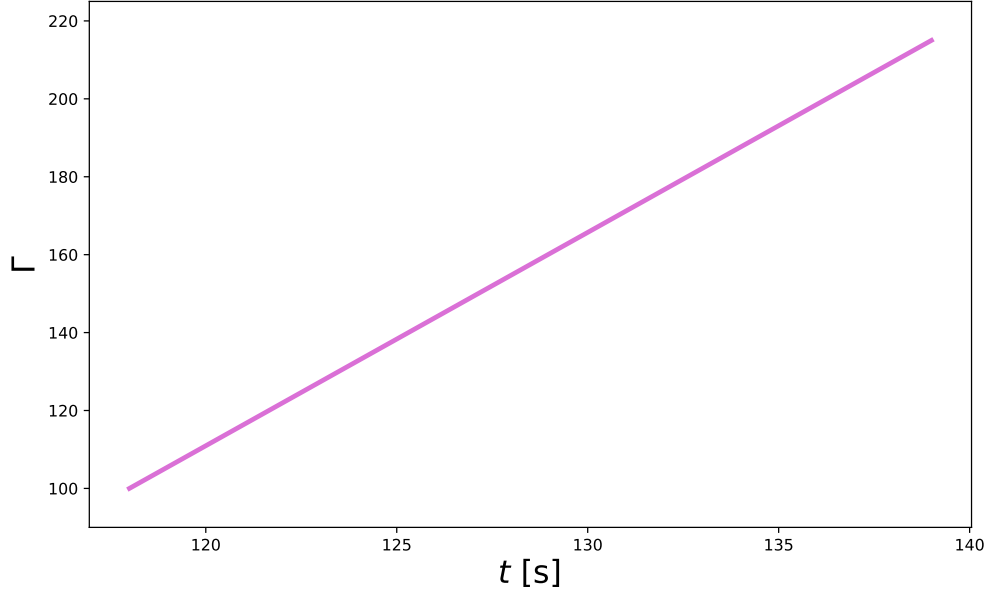
$$E_{\text{peak},\star} = 532 \text{ keV}. \quad (6.2)$$

Korištenjem relacije 5.14, dobije se da je maksimalni Lorentzov faktor mlaza jednak 215. Vremenska evolucija  $\Gamma$  je prikazana na slici 6.9.

### 6.2.2 Rezultati modela

Ponovo su korištenjem odabira različitih parametara opisanih u 5.3 generirani elektronski i fotonski spektri za svaki vremenski interval uz pretpostavljenu evoluciju Lorentzovog faktora mlaza. Odabrane su kombinacije parametara koje daju rezultate u najboljem slaganju s opaženim vrijednostima. Na isti su način dobiveni rezultati za svaki vremenski interval prikazani u tablicama 6.9, 6.10 i 6.11.

Kao i ranije, primjećuje se degeneracija u rezultatima za svaki promatrani vremenski interval. S istim argumentima kao i prije, prijedlog rješenja (slijedeći diskusiju iz [22]) je prikazan u tablici 6.12. Odabrane su kombinacije ponovo takve da je radijus  $R$  maksimalan u zadnjem vremenskom intervalu, a minimalan u početnom vremenskom intervalu. On se mijenja od  $10^{11.5}$  cm do  $10^{13}$  cm. Parametar norm pada s



Slika 6.9: Prikaz vremenske evolucije Lorentzovog faktora kojim se giba relativistički mlaz. Pretpostavljena je linearna evolucija faktora u vremenu uz početnu vrijednost  $\Gamma_i = 100$  i konačnu vrijednost  $\Gamma_f = 215$ , dobivenu iz 5.14.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
4	4	11.5	16	116.43	85.41	-1.04	1454	692
4	4	12.5	14.5	116.43	27.01	-1.04	1454	692
4	4	12.5	13	116.43	8.54	-1.04	1454	692
4	4	13	11.5	116.43	2.70	-1.04	1454	692
4	4	13.5	10	116.43	0.85	-1.04	1454	692

Tablica 6.9: Tablica s rezultatima za prvi promatrani interval (118.22-123.34 s) bljeska GRB 140512A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
4	3.5	12	14	143.81	333.61	-0.95	645	619
4	3.5	12.5	12.5	143.81	105.50	-0.95	645	619
4	3.5	13	11	143.81	33.36	-0.95	645	619
4	3.5	13.5	9.5	143.81	10.55	-0.95	645	619

Tablica 6.10: Tablica s rezultatima za drugi promatrani interval (123.34-128.46 s) bljeska GRB 140512A.

$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\gamma_c$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
3.5	3.5	12	12.5	198.57	460.646	-0.77	115	123
3.5	3.5	12.5	11	198.57	145.67	-0.77	115	123
3.5	3.5	13	9.5	198.57	46.06	-0.77	115	123

Tablica 6.11: Tablica s rezultatima za treći promatrani interval (133.58-138.70 s) bljeska GRB 140512A.

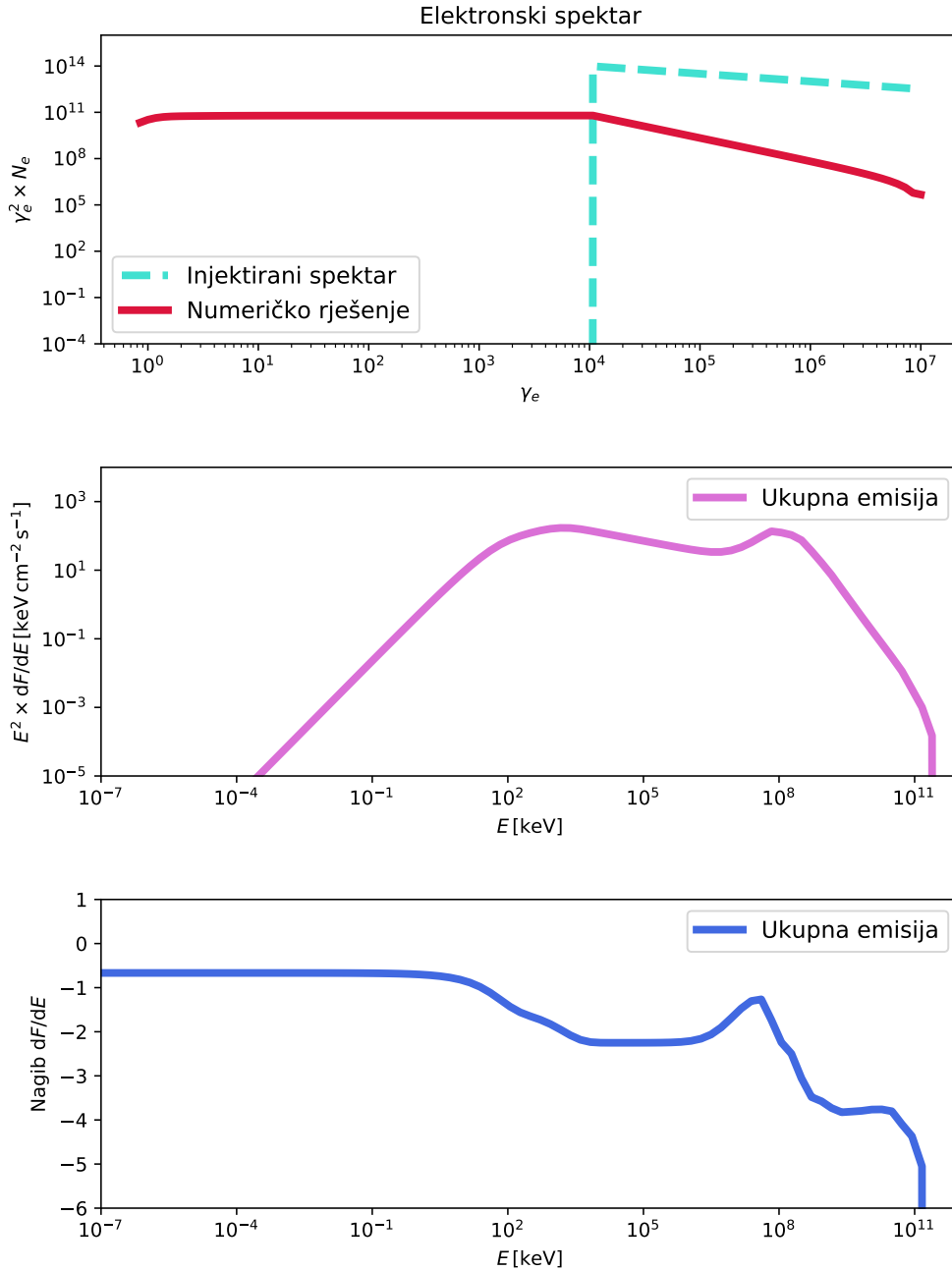
Interval [s]	$\log(\gamma_{\min})$	$\log(\frac{B}{G})$	$\log(\frac{R}{\text{cm}})$	$\log(\frac{\text{norm}}{\text{cm}^{-3}})$	$\Gamma$	$\alpha$	$\frac{E_{\text{peak}}}{\text{keV}}$	$\frac{F}{\text{keV}/(\text{cm}^2\text{s})}$
[118.22 – 123.34]	4	4	11.5	16	116.43	-1.04	1454	692
[123.34 – 128.46]	4	3.5	12.5	12.5	143.81	-0.95	645	619
[133.58 – 138.70]	3.5	3.5	13	9.5	198.57	-0.77	115	123

Tablica 6.12: Tablica s mogućim rezultatima za vremensku evoluciju parametara emisije bljeska GRB 140512A.

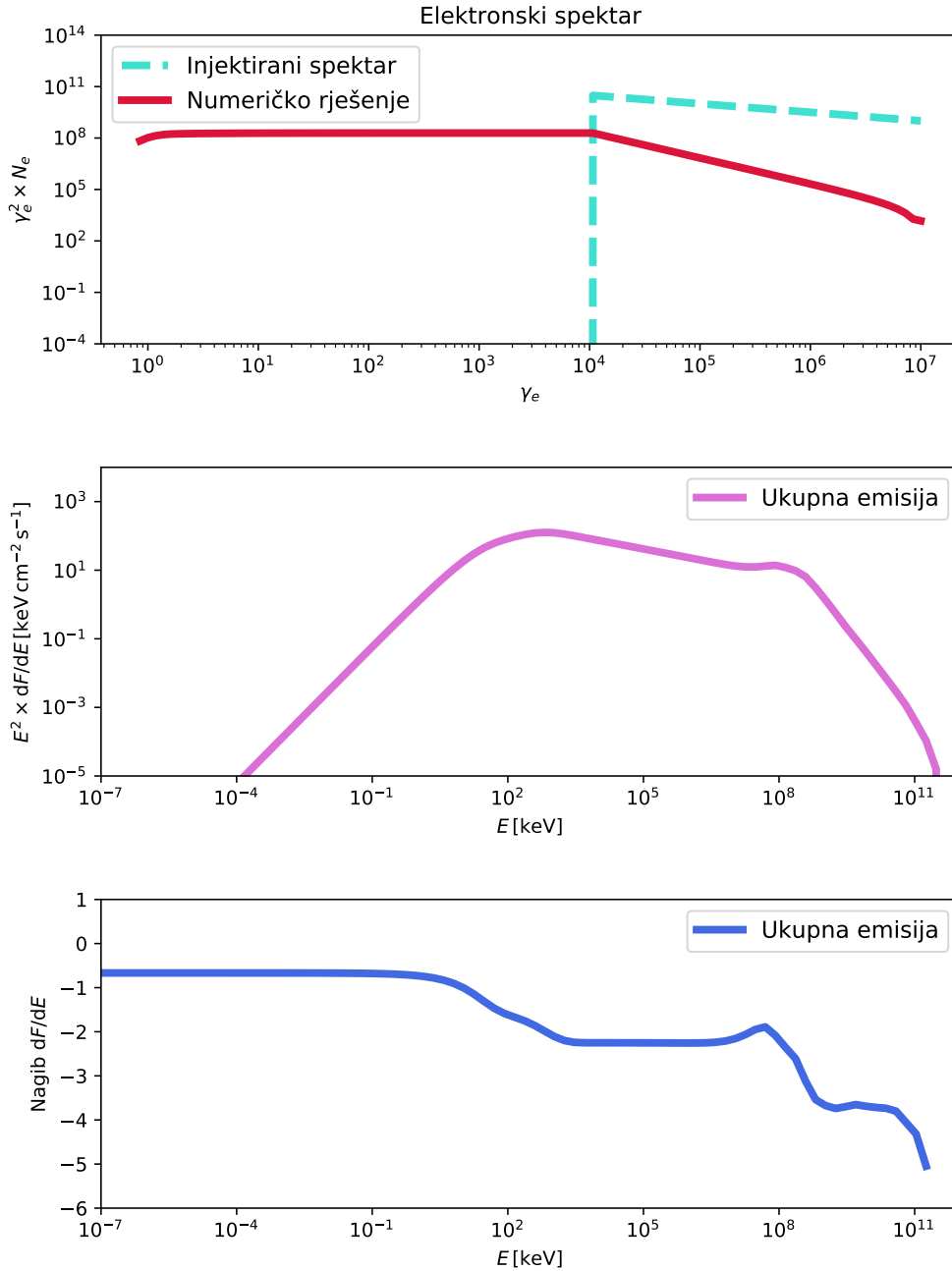
vrijednosti  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  na  $10^{9.5} \text{ cm}^{-3}$ , što znači da gustoća relativističkih elektrona pada s  $\sim 10^9 \text{ cm}^{-3}$  na  $\sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$ , magnetsko polje pada s  $10^4 \text{ G}$  na  $10^{3.5} \text{ G}$ , a minimalni elektronski Lorentzov faktor pada s  $10^4$  na  $10^{3.5}$ . Opažena svjetlosna krivulja bljeska na tim intervalima pokazuje relativno gladak, ali strmi pad, pa je ovakvo ponašanje parametara očekivano.

Elektronski i fotonski spektri za sve intervale s odabranim parametrima prikazani su na slikama ispod. Na elektronskim spektrima prikazanim na slikama 6.10, 6.11 i 6.12 ponovo opažamo kako su se najviše ohladili elektroni najviših energija. Na fotonskim se spektrima opet može vidjeti kako sinkrotronska emisija dominira na većem dijelu spektra, dok se inverzna Comptonska emisija primjećuje tek na visokim energijama. Na kraju su, kao i prije, nacrtani nagibi fotonskih spektara. Nagibi  $\alpha$  kreću se od  $\sim -0.8$  do  $\sim -1$ , što je u vrlo dobrom slaganju s opažanjima.

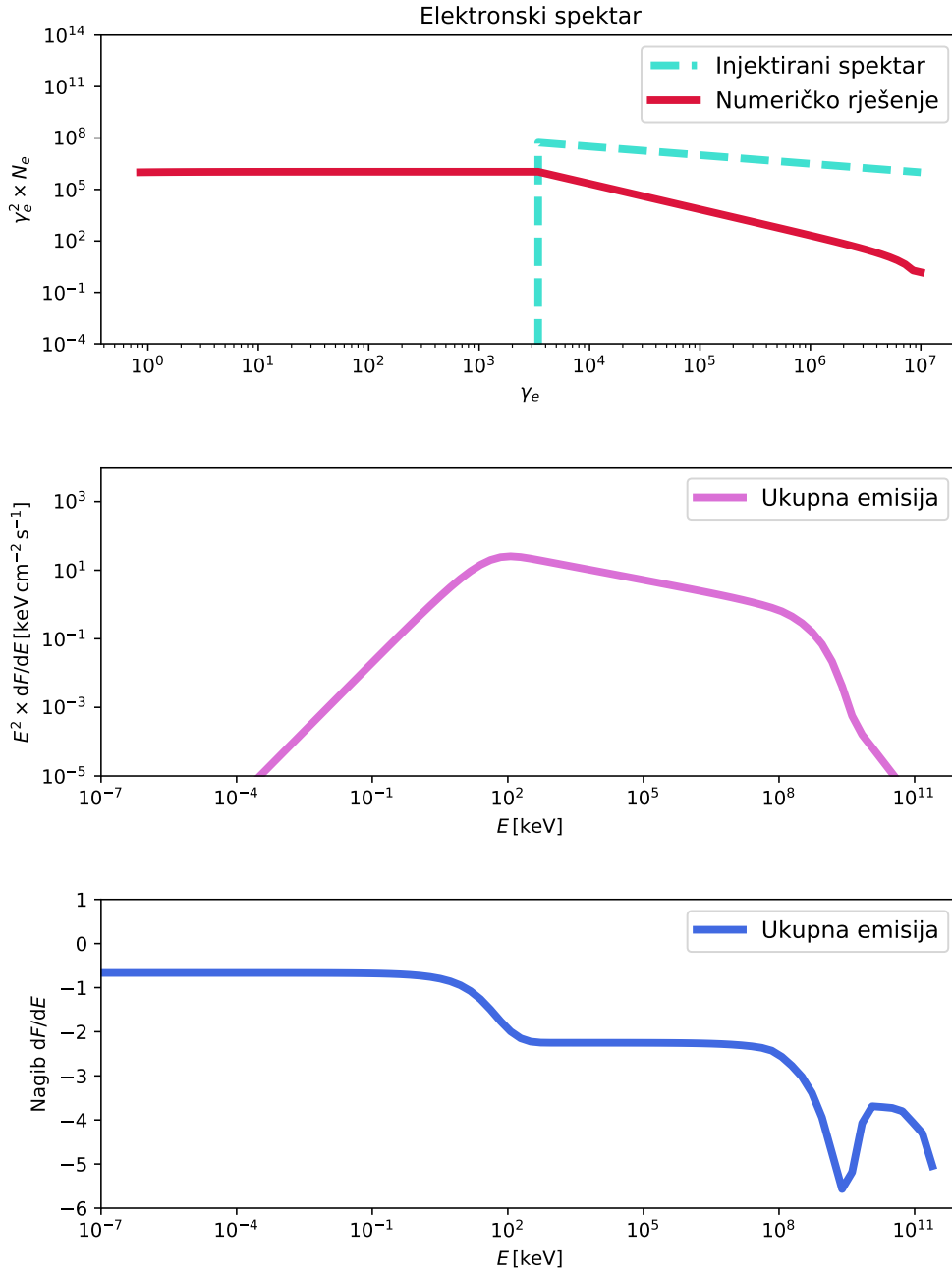
Pokazuje se kako su dobivene vrijednosti parametara emisije u sustavu mlaza za minimalni elektronski Lorentzov faktor ( $\gamma_{\min} \sim 10^{3.5} - 10^4$ ) i normu elektronske distribucije  $\text{norm} \sim 10^9 - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  (što daje gustoću relativističkih elektrona u rasponu  $n_e \sim 10^3 - 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) u dobrom slaganju s rezultatima slične analize objavljene u nedavnom radu [28]. Dobivene vrijednosti magnetskog polja u emisijskom području ( $B \sim 10^{3.5} - 10^4 \text{ G}$ ) su više od vrijednosti iz [28], dok su vrijednosti radijusa emisijskog područja ( $R \sim 10^{11.5} - 10^{13.5} \text{ cm}$ ) niže. To bi se moglo objasniti činjenicom da su razmatrani Lorentzovi faktori mlazova u tamo proučavanim bljeskovima gama zračenja ( $\Gamma > 450$ ) veći od onih korištenih u ovom radu ( $\Gamma \sim 100 - 200$ ).



Slika 6.10: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140512A na prvom promatranom vremenskom intervalu, 118.22 – 123.34 s. Parametri korišteni za generiranje spektara su prikazani u tablici 6.12. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 6.7 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ .



Slika 6.11: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140512A na drugom promatranom vremenskom intervalu, 123.34 – 128.46 s. Parametri korišteni za generiranje spektra su prikazani u tablici 6.12. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 2.1 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$ .



Slika 6.12: Prikaz injektiranog i konačnog elektronskog spektra, fotonskog  $E^2 F_E$  spektra i nagiba fotonskog  $F_E$  spektra za ukupnu emisiju bljeska GRB 140512A na trećem promatranom vremenskom intervalu, 133.58 – 138.70 s. Parametri korišteni za generiranje spektara su prikazani u tablici 6.12. Gustoća relativističkih elektrona (prema izrazu 5.11) je  $n_e = 1.2 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$ .



## 7 Zaključak

U ovom radu je pod pretpostavkom modela internih udara za promptno zračenje bljeskova gama zračenja proučeno ponašanje parametara sinkrotronskog zračenja i pridruženog inverznog Comptonovog zračenja koji opisuju spektar bljeskova. Model internih udara pretpostavlja da promptna emisija bljeskova gama zračenja nastaje kada brža ljuska relativističkog mlaza elektrona naleti na sporiju ljusku koja je izbačena ranije. Tipičan oblik pulsa koji se vidi u svjetlosnoj krivulji, s naglim usponom i eksponencijalnim padom (eng. *fast rise exponential decay*, FRED) se može u modelu internih udara postići ako se početna distribucija Lorentzovih faktora ljusaka mijenja kontinuirano od nižih vrijednosti na početku izbacivanja ljusaka iz izvora, prema višim vrijednostima na kraju izbacivanja ljusaka ([22]). Ovakva će distribucija nakon sudara unutar mlaza rezultirati s aproksimativnim Lorentzovim faktorima emisijskih područja kakvi su korišteni u radu (slike 6.1 i 6.9). Dominantni mehanizmi kojima se elektroni u relativističkom mlazu hlade uključuju sinkrotronsko zračenje i inverzno Comptonovo raspršenje.

U radu je dan pregled osnovnih veličina i svojstava sinkrotronskog i inverznog Comptonovog zračenja relativističkih elektrona. Izvedeni su spektri zračenja za slučaj zračenja jednog elektrona i zračenja distribucije elektrona. Prezentirani su modeli kojima se opisuju spektri emisije bljeskova gama zračenja koji se najviše koriste u literaturi, kao i njihova svojstva.

Primjenom numeričkog modela iz [20] (koji je izrađen za modeliranje emisije blazara), generirani su elektronski i fotonski spektri bljeskova gama zračenja koji su uspoređeni s opaženim vrijednostima iz [4]. Dobivene su vrijednosti parametara emisije (u sustavu mlaza) za minimalni elektronski Lorentzov faktor ( $\gamma_{\min} \sim 10^{3.5} - 10^4$ ), gustoću relativističkih elektrona ( $n_e \sim 10^3 - 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ), magnetsko polje u emisijskom području ( $B \sim 10^{3.5} - 10^4 \text{ G}$ ) i radijus emisijskog područja ( $R \sim 10^{11.5} - 10^{13.5} \text{ cm}$ ). Uspoređivanjem rezultata numeričkog modela s vremenski razlučenim spektrima dvaju opaženih bljeskova gama zračenja, dobivene su vrijednosti parametara emisije uz pretpostavljenu linearnu evoluciju Lorentzovog faktora mlaza u vremenu, te je predloženo moguće ponašanje parametara emisije u vremenu, u skladu s [22].

Istraživanje prezentirano u ovom radu može se proširiti u nekoliko aspekata. Primjerice, bolje slaganje opservabilnih veličina ( $E_{\text{peak}}$ ,  $F_\nu$ ,  $\alpha$ ) s opaženim vrijednos-

tima moglo bi se postići smanjivanjem koraka u promjeni vrijednosti parametara emisije. Osim toga, numerički model korišten u ovom radu mogao bi se nadograditi uključivanjem još nekoliko mogućih mehanizama hlađenja elektrona i emisije fotona, poput hlađenja adijabatskom ekspanzijom i gubitaka zbog foton-foton anihilacije, slično onom što je napravljeno u [22]. Opisana analiza se u budućnosti može izvršiti na većem broju bljeskova gama zračenja koji imaju određen crveni pomak i glatku svjetlosnu krivulju, koja implicira linearnu promjenu Lorentzovog faktora mlaza.

## 8 Metodički dio

U ovom poglavlju dan je metodički dio diplomskog rada. Ukratko se prezentiraju neke suvremene ideje u metodici nastave fizike te je dan detaljan pregled primjene spomenutih metoda kroz jedan nastavni sat primjeren za četvrti razred gimnazijskog programa na temu Hubbleovog zakona i širenja svemira.

### 8.1 *Interaktivna istraživački usmjerena nastava fizike*

U ovom potpoglavlju kratko su prezentirane glavne ideje i metode u modernoj metodici nastave fizike, takozvanoj interaktivnoj istraživački usmjerenoj nastavi fizike. Ovakva nastava danas se nastoji uvesti u škole na svim razinama jer pokazuje puno veću efikasnost od dosad najzastupljenije klasične predavačke nastave.

Prema [29], istraživački usmjerena nastava fizike je vrsta nastave čiji je cilj postepeno građenje učeničkog razumijevanja fizikalnih sadržaja, kao i njihova sposobnost zaključivanja te eksperimentalne vještine kroz dobro strukturirana i vođena učenička istraživanja. Kroz takav oblik nastave učenici kvalitetnije usvajaju sadržaje i razvijaju mnoge važne sposobnosti. Osim toga obivaju i direktan uvid u istraživački karakter fizike. Istraživački usmjerena nastava fizike podrazumijeva dobro strukturirana i usmjeravana učenička istraživanja, ali istovremeno se nastoji osigurati dovoljno prostora učenicima da samostalno promišljaju i zaključuju, osmišljavaju pokuse, testiraju hipoteze i slično. Važnost je ovakve nastave ponajprije u njenom naglasku na proces istraživanja i formiranja znanja već u sklopu nastave fizike kako bi se poticalo razvijanje razmišljanja, zaključivanja, pismenog i verbalnog izražavanja te niz drugih sposobnosti kod učenika na samom satu.

Zbog postojanja dosta raširenih miskoncepcija o ovom tipu nastave, bitno je naglasiti kako je bit istraživački usmjerene nastave maksimalno omogućiti učenicima samostalno zaključivanje (u onoj mjeri u kojoj je to izvedivo u razredu) te da se kroz nastavu upozna znanost kao proces istraživanja, a ne kao katalog rezultata koji se trebaju memorirati. Najčešće se radi o vođenom istraživanju (eng. *guided inquiry*), u kojem učenici dobivaju značajno vođenje i pomoć od nastavnika, ali još uvijek imaju dovoljno prostora za samostalno opažanje i zaključivanje. Često se pojavljuje izjednačavanje istraživački usmjerene nastave sa samim izvođenjem pokusa na nastavi. Istina je da istraživački usmjerena nastava zahtijeva pokuse i učenička mjerenja,

no treba imati na umu da izvođenje pokusa samo po sebi, ukoliko ne uključuje intelektualni angažman učenika, neće imati željeni efekt. Ključni sastojak istraživački usmjerene nastave fizike, kako istraživanja pokazuju ([31]), jest upravo aktivno učenje i visok stupanj intelektualne angažiranosti učenika.

Planiranje nastavnog sata započinje proučavanjem predviđenog sadržaja i određivanjem željenih ishoda učenja. Ishodi učenja predstavljaju sposobnosti učenika koje će oni moći pokazati po završetku procesa učenja te se iskazuju pomoću aktivnosti koje su mjerljive i vidljive. Na temelju njih mogu se sastaviti zadaci koji provjeravaju njihovu ostvarenost. Kurikularni pristup nastavi bazira se na ishodima učenja i razvoju učeničkih kompetencija, koje predstavljaju kombinaciju učeničkih kognitivnih i metakognitivnih vještina, znanja i razumijevanja, međuljudskih i praktičnih vještina, te etičkih vrijednosti. Struktura nastavnog sata u okviru istraživački usmjerene nastave uključuje:

1. Uvodni dio sata započinje uvodnim pitanjem ili problemom koji će uvesti učenike u sadržaj sata, povezati ga s njihovim iskustvom, zainteresirati ih i prikupiti njihove relevantne postojeće ideje. U ovome je dijelu sata važno demonstrirati novu pojavu o kojoj će biti riječ na satu i dati učenicima vremena da vide pojavu, samostalno je opišu i uoče sva njena važna svojstva.
2. Središnji dio sata obično započinje postavljanjem istraživačkog pitanja koje daje usmjerenje cijelom satu, a ono obično bude zadano od strane nastavnika. Učenici tako doznaju što će istraživati i na koje pitanje svojim istraživanjem traže odgovor. Potom učenici pod vodstvom nastavnika predlažu svoje hipoteze i pokuse kojima bi ih mogli ispitati (ili u malim grupama, ili frontalno). Ključno je da učenici samostalno vrše opažanja i izvode zaključke koje potom prezentiraju i diskutiraju na satu. Ako se nastava izvodi u srednjoj školi, tada se konstruira i matematički model kojim se može opisati pojava.
3. Završni dio sata služi primjeni novoga znanja, a daje i priliku nastavniku da provjeri učeničku razinu usvojenosti novog sadržaja. Obično se kreće s nizom pitanja koja testiraju konceptualno razumijevanje, a potom mogu slijediti i jednostavni numerički zadaci, ukoliko je prikladno. U završnom se dijelu može izvesti i aplikacijski pokus (ili više njih), koji učenicima omogućuje primjenu novog znanja na novim problemima.

Učenička spremnost na surađivanje u ovakvom tipu nastave ovisi ponajviše o pripremljenosti nastavnika i motivaciji učenika, koja se može poboljšati odabirom prikladnih pitanja i primjera koja povezuju sadržaj gradiva s učeničkim iskustvom, ali i nagrađivanjem njihovog angažmana. Istraživanja pokazuju kako je ovakav tip nastave znatno učinkovitiji od klasičnog pristupa nastavi, i to najviše kroz primjenu različitih nastavnih strategija koje su usmjerene na podizanje relevantnosti gradiva za učenike ([32]). Kooperativno učenje, postavljanje kvalitetnih pitanja, eksperimentalna istraživanja i praktični rad, učestalo davanje povratne informacije učenicima o njihovom napretku te uporaba novih tehnologija također spadaju u načine kojima se može poboljšati učeničko razumijevanje i angažman. Unutar istraživački usmjerene nastave moguće je koristiti kombinacije različitih nastavnih strategija čime se poboljšava učinkovitost takvog tipa nastave u odnosu na klasičnu nastavu.

### **8.1.1 Interaktivne nastavne metode**

Prema [30], nastava fizike se, kao i svaka druga nastava, bazira na komunikaciji. U nastavi fizike se žele postići vrlo zahtjevni ciljevi koji uključuju puno više od prijenosa informacija učenicima. U te ciljeve spadaju razvijanje određenog načina razmišljanja, razumijevanje temeljnih koncepata i osposobljavanje učenika za primjenu tih koncepata u problemskim situacijama. Istraživanja pokazuju kako klasičan pristup predavanju fizike koji uključuje relativno pasivno slušanje predavanja, čitanje literature, rješavanje standardnih zadataka i izvođenje pokusa prema detaljnim uputama nisu učinkoviti načini postizanja tih ciljeva. Naprotiv, učenje fizike zahtijeva visoku razinu intelektualne aktivnosti od učenika, a to se u tipičnoj predavačkoj nastavi teško ostvaruje.

Interaktivnost u nastavi je neophodan alat kojim se razvija učeničko razmišljanje i konceptualno razumijevanje jer potiče verbalizaciju ideja i aktivno učenje te nastavniku olakšava identifikaciju eventualnih poteškoća. Interaktivnost se postiže primjenom interaktivnih nastavnih metoda poput:

1. vođenje razredne rasprave,
2. korištenje kartica za odgovaranje na konceptualna pitanja s ponuđenim odgovorima,
3. kooperativno rješavanje zadataka u malim skupinama,

4. interaktivno frontalno izvođenje demonstracijskih pokusa ili učeničko izvođenje pokusa u malim skupinama,
5. korištenje interaktivnih nastavnih računalnih programa uz diskusiju.

Učinkovitost nastave dosta ovisi o kvaliteti interakcije pa je zbog toga važno paziti na odabir i formulaciju pitanja te je dobra praksa pripremiti glavna pitanja i niz problema prije samog sata. Ono što se želi postići primjenom interaktivnih metoda u nastavi je čim veća intelektualna aktivnost učenika tokom same nastave, odnosno aktivno učenje. To uključuje aktivnosti poput testiranja vlastitog znanja i razumijevanja te samostalnog prepoznavanja područja u kojem je ono manjkavo. Većina će učenika u razredu trebati pomoć i vodstvo od strane nastavnika u razvijanju tih vještina. Kako bi se potaknula intelektualna aktivnost učenika na satu, potrebna je kvalitetna interakcija učenika i nastavnika, kao i interakcija učenika međusobno. Neke od ranije navedenih interaktivnih nastavnih metoda detaljnije su opisane u nastavku.

Razredna rasprava je najčešće korištena nastavna metoda, a odnosi se na razgovor nastavnika s razredom i učenika međusobno. Nastavnik otvara problem, čime pobuđuje interes i motivaciju učenika te prikuplja njihove ideje. Pritom treba paziti da se učenicima osigura dovoljno vremena da razmisle o postavljenom pitanju i sročie odgovor, a ukoliko odgovor ipak ne stiže, potrebno je dodatno pojasniti pitanje ili postaviti potpitanja. Pitanja trebaju biti kvalitetna, poticati razmišljanje i kao odgovor tražiti cijelu misao, a ne samo jednu riječ. Osim pažljivog postavljanja pitanja, bitno je i pažljivo slušati učenike. Treba dodatno naglasiti važne stvari iz njihovih odgovora, povezati odgovore i različite ideje učenika i stvoriti pozitivnu atmosferu u razredu, kako bi se uključio čim veći broj učenika.

Kooperativno rješavanje zadataka u malim skupinama pokazuje se kao vrlo korisna i efikasna metoda u nastavi. Rješavanje zadataka je općenito vrlo kompleksna aktivnost koja uključuje velik broj koraka i zahtijeva od učenika razne sposobnosti. Dobar je pristup razložiti učenicima sam zadatak na korake koje trebaju ispuniti kako bi rješavanje zadataka teklo lakše. Također, pokazuje se da su rezultati skupine redovito bolji od rezultata i najboljeg člana skupine (primjerice u [33] i [34]), jer kooperativan rad pomaže i slabijim i boljim učenicima. Slabiji učenici općenito lakše komuniciraju svoja pitanja i poteškoće kolegama, nego nastavniku. Dobri pak si

učenici mogu kroz poučavanje svojih kolega posvijestiti i verbalizirati vlastit pristup zadatku, čime također unaprijeđuju svoje znanje. Uloga je nastavnika da obilazi skupine i pomogne potpitanjima ako pojedina skupina zapne, te da se na kraju rješavanja prodiskutiraju dobiveni rezultati, kao i problemi u rješavanju na koje su učenici naišli.

Učeničko izvođenje pokusa u malim skupinama također je jedna od važnih interaktivnih metoda. Pokusi su u nastavi fizike izuzetno bitni jer mogu služiti upoznavanju nove pojave ili rješavanju problema, ovisno o tome u kojem se dijelu sata izvode. Kako bi se postigla uključenost učenika, važno je pitati ih za njihova očekivanja i predviđanja ishoda pokusa, a posebice je važno nakon izvedbe pokusa tražiti njihova opažanja. Ukoliko učenici samo pasivno promatraju pokus, on neće voditi boljem razumijevanju fizike. Stoga je aktivno uključivanje učenika u izvedbu pokusa odličan način poticanja njihovog angažmana i aktivnosti na nastavi. Također, ako se od učenika zatraži da sami osmisle pokus kojim bi riješili određeni problem, onda im se pruža prilika za razvijanje vještina poput sposobnosti identificiranja relevantnih veličina i kontrole varijabli.

Nije presudno koja će od pojedinih interaktivnih metoda biti odabrana, a najčešće se koristi kombinacija više metoda. Njihova primjena općenito zahtijeva veći angažman nastavnika u pripremi nastavnog sata, ali pokazuje se kako kvalitetna interakcija značajno povećava efikasnost nastave u odnosu na tradicionalnu predavačku nastavu. Ključno je postići intelektualnu aktivnost učenika na nastavi i usmjeriti je prema razumijevanju fizičkih koncepata te se truditi graditi kvalitetnije stavove prema učenju.

## **8.2 Hubbleov zakon i širenje svemira**

U nastavku ovog poglavlja prezentiran je tijek jednog nastavnog sata fizike koji je primjeren za četvrti razred gimnazijskog programa, a tema koja se obrađuje je Hubbleov zakon i širenje svemira. U ovom potpoglavljju je stoga dan pregled dosadašnjih saznanja o sadržaju koji se obrađuje u školi.

Svemir je jedna od vrlo popularnih tema istraživanja u fizici, kako kroz povijest ljudskog razvoja, tako i danas. Činjenica je da su ljudi od davnina promatrali zvijezde, planete, mjesec i Sunce, te da je astronomija jedna od prvih znanosti koja se razvila u našoj povijesti. Ideje o tome što okružuje planet na kojem živimo (kao i one o samoj Zemlji) bile su vrlo različite te je bilo potrebno puno vremena da se razviju

moderne teorije i modeli postanka svemira, što zbog sposobnosti ljudskog otkrivanja i razumijevanja različitih koncepata u prirodi, a što i zbog razvoja tehnologije i uređaja kojima se provode eksperimenti i opažanja.

Prema [35] i [36], širenje svemira je povećanje udaljenosti u vremenu između bilo koja dva gravitacijski nevezana dijela vidljivog svemira. Radi se o intrinzičnom širenju u kojem se skala svemira mijenja. Svemir se ne širi "u nečemu" niti mu je potreban prostor koji bi postojao "izvan njega". Zapravo, niti prostor, niti objekti unutar njega se ne pomiču, već se mijenja metrika koja vlada veličinom i geometrijom samog prostor-vremena. Iako svjetlost i objekti unutar prostor-vremena ne mogu putovati brzinom većom od brzine svjetlosti, ovo ograničenje ne vrijedi za samu metriku. Opažaču se čini kao da se prostor širi te da se svi objekti osim najbližih galaksija udaljavaju od njega.

Tijekom inflacijske epohe, otprilike  $10^{-32}$  sekundi nakon velikog praska, svemir se naglo proširio, a potom je uslijedila puno sporija i postepena ekspanzija prostora do otprilike 9.8 milijardi godina nakon velikog praska (prije 4 milijarde godina), kada je započelo postepeno brže širenje svemira koje traje i danas. Metričko širenje prostora je drugačije od eksplozija koje se susreću u svakodnevnom životu. Čini se da je ovo širenje intrinzično svojstvo svemira u cjelini, a ne fenomen koji se može primjeniti na samo neki dio svemira ili se može opaziti "izvana".

Metrička ekspanzija je ključni dio kozmologije velikog praska, modelira se matematički s Friedmann - Lemaitre - Robertson - Walker metrikom te je generičko svojstvo svemira u kojem živimo. Ipak, taj model je valjan samo na vrlo velikim skalama koje odgovaraju otprilike veličini klastera galaksija ili veće, jer gravitacijsko privlačenje veže materiju dovoljno snažno da se metrička ekspanzija trenutno ne može opaziti na skalama manjima od toga. Stoga su galaksije koje se međusobno udaljavaju uglavnom razdvojene na skalama koje su kozmološki relevantne i veće od onih koje se povezuju s gravitacijskim kolapsom.

Fizičari su postulirali postojanje tamne energije kroz pojavljivanje kozmološke konstante u najjednostavnijim gravitacijskim modelima kako bi se objasnilo ubrzavano širenje svemira. Prema najjednostavnijoj ekstrapolaciji trenutno najpopularnijeg kozmološkog modela,  $\Lambda$ CDM modela, ova će akceleracija širenja postati dominantnija u budućnosti. U lipnju 2016., znanstvenici iz NASA-a i ESA-e su izvjestili kako se svemir širi 5 – 9% brže nego što se smatralo ranije, zahvaljujući studijama



provedenim korištenjem Hubble Space teleskopa.

Dok specijalna teorija relativnosti zabranjuje objektima gibanje brzinama većim od brzine svjetlosti u odnosu na lokalni referentni sustav u kojem se prostor-vrijeme može tretirati ravnim i nepromjenjivim, to se ograničenje ne može primjeniti na situacije kada zakrivljenost prostor-vremena ili evolucija u vremenu postanu bitne. Takvi slučajevi mogu se opisati općom teorijom relativnosti, koja dozvoljava da se udaljenost između dva objekta povećava brzinom većom od brzine svjetlosti, međutim je tamo definicija udaljenosti različita od definicije udaljenosti u inercijalnom sustavu. Ova se razlika može vidjeti pri opažanju galaksija koje se nalaze na udaljenosti većoj od Hubbleovog radijusa (radijus vidljivog svemira, otprilike 13.7 milijardi svjetlosnih godina, prema [37]), jer te galaksije imaju brzinu udaljavanja veću od brzine svjetlosti. Svjetlost koju danas emitiraju te galaksije nikad neće doći do nas, međutim mi možemo vidjeti svjetlost koju su one emitirale u prošlosti. Zbog velike brzine širenja moguće je da udaljenost između dva objekta bude veća od udaljenosti koja se dobije množenjem brzine svjetlosti sa starošću svemira.

Prema [38], Hubbleov zakon, koji se još naziva i Hubble - Lemaitreov zakon, govori sljedeće:

1. objekti u dalekom svemiru (otprilike 10 Mpc od nas ili dalje) imaju crveni pomak (eng. *redshift*), odnosno smatra se da se udaljavaju od nas određenom relativnom brzinom,
2. brzina kojom se različite galaksije udaljavaju od nas izmjerena pomoću Dopplerovog pomaka približno je proporcionalna udaljenosti tih galaksija od nas, što vrijedi za galaksije koje se nalaze i do nekoliko stotina megaparseka od nas.

Prema [35], Hubbleov zakon smatra se prvom opservacijom koja upućuje na ekspanziju svemira te se danas često citira kao jedan od potvrda teorije velikog praska. Gibanja astronomskih objekata koja se pripisuju samo tom širenju nazivaju se Hubbleovim tokom. Takvo gibanje izražava se jednadžbom

$$v = H_0 D, \quad (8.1)$$

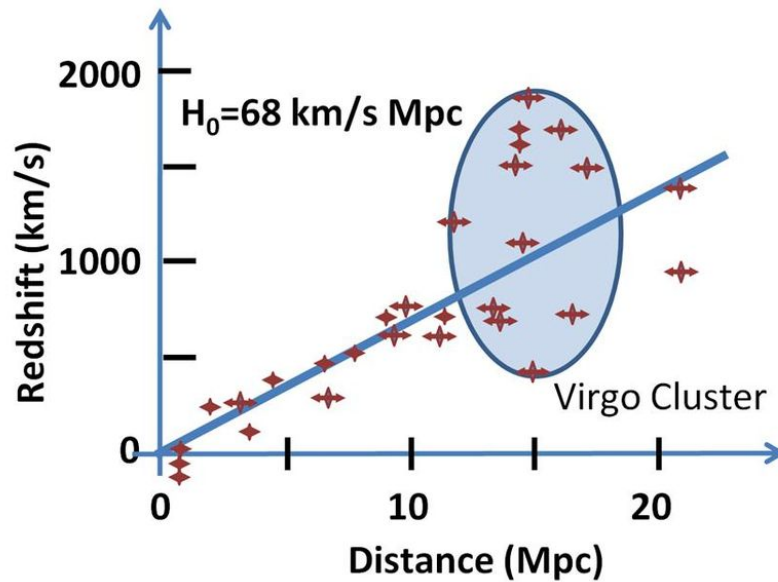
gdje je  $H_0$  konstanta proporcionalnosti (Hubbleova konstanta) između vlastite udaljenosti  $D$  od galaksije, koja se može mijenjati s vremenom, i brzine udaljavanja  $v$ , odnosno derivacije vlastite udaljenosti po kozmološkoj koordinati vremena.

Hubbleova konstanta se najčešće zapisuje u jedinicama od  $(\text{km/s})/\text{Mpc}$ , što daje brzinu u  $\text{km/s}$  za galaksiju koja je udaljena 1 Mpc od nas ( $1 \text{ Mpc} \approx 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$ ), te je njen iznos još uvijek tema intenzivnog istraživanja ([40]), a danas se smatra da je taj iznos oko  $70 (\text{km/s})/\text{Mpc}$ . Jedinica Hubbleove konstante u SI sustavu je  $\text{s}^{-1}$ , dok je jedinica recipročne Hubbleove konstante  $s$  te je ta vrijednost poznata kao Hubbleovo vrijeme.

Prema [41], iako se najčešće pripisuje američkom astronomu Edwinu Powellu Hubbleu, ideja da se svemir širi nekom brzinom koja se može odrediti niknula je iz jednadžbi opće teorije relativnosti koje je 1922. izveo ruski znanstvenik Alexander Friedmann. Friedmann je publicirao set jednadžbi (Friedmannove jednadžbe) koje ukazuju na širenje svemira te je prezentirao brzinu kojom se svemir širi. Nakon toga je belgijski fizičar Georges Lemaitre u članku iz 1927. godine nezavisno zaključio da je moguće da se svemir širi, opazio je proporcionalnost između brzine udaljavanja i udaljenosti dalekih objekata te je procijenio iznos konstante proporcionalnosti. Nakon Hubbleove korekcije dvije godine kasnije, ta je konstanta potom postala poznata kao Hubbleova konstanta. Iako je Hubbleova konstanta  $H_0$  približno konstantna u prostoru brzina i udaljenosti u bilo kojem trenutku, Hubbleov parametar  $H$ , čija je trenutna vrijednost jednaka Hubbleovoj konstanti  $H_0$ , mijenja se u vremenu, pa se zbog toga smatra kako je naziv "konstanta" pomalo zavaravajuć. 1929. godine Hubble je svojim istraživanjem potvrdio da se svemir širi te je preciznije odredio iznos konstante proporcionalnosti koja od tad nosi njegovo ime. Hubble je brzine udaljavanja objekata odredio iz njihovih crvenih pomaka, većinu kojih je ranije izmjerio i povezo s brzinom američki astronom Vesto Slipher 1917. godine.

Prema [42], Hubble je pronašao svoju zapanjujuću relaciju korištenjem izmjerenih brzina i udaljenosti za 24 bliske galaksije koje je većinom izmjerio Slipher opažanjem spektroskopskog Dopplerovog pomaka. Udaljenosti tih galaksija (tada netočno određene) prezentirane u Hubbleovom članku ([43]) izmjerio je sam Hubble pomoću prividnog sjaja zvijezda u tim galaksijama ili sjaja cijele galaksije (za vrlo udaljene galaksije). Metoda koju je Hubble upotrebljavao koristi zvijezde (ili galaksije) kao takozvane "standardne svijeće", odnosno povezuje njihov dobro poznat intrinzičan luminozitet (koji se može saznati iz sličnih dobro kalibriranih objekata u blizini) sa njihovim opaženim prividnim sjajem, kako bi se dobila informacija o njihovoj udaljenosti. Što je objekt dalje od nas, to je njegov prividni sjaj manji. Hubbleova

mjerenja udaljenosti su bila dovoljno dobra kako bi se razaznale bliske galaksije od udaljenijih, te je prepoznata linearna ovisnost. Osim što je prikazao sve pojedinačne 24 galaksije u svom poznatom grafu prikazanom na slici 8.1, također je koristio podatke o brzinama još 22 galaksije koje je izmjerio Slipher.



Slika 8.1: Dijagram rasipanja crvenih pomaka (brzine) objekata u ovisnosti o njihovoj udaljenosti i prilagodba na Hubbleov zakon. Preuzeto s [44].

Iako su postojale indikacije o mogućoj relaciji između brzine i udaljenosti udaljenih objekata u prethodnim radovima, Hubbleov je članak taj koji je uvjerio znanstvenu zajednicu u postojanje ove opažene relacije, te posljedično i u to da se svemir širi. Njegov se rad temelji na dotad prikupljenim podacima, od kritično važnih mjerenja brzina koje je izveo Vesto Slipher, do raznih mjerenja udaljenosti korištenjem različitih standardnih svijeća te visoko poboljšane kalibracije koji je dala opažena relacija između perioda i luminoziteta varijabilnih zvijezda cefeida koju je otkrila Henrietta Swan Leavitt 1912. godine. Prema [45] i [46], cefeidi (ili varijablina cefeidi) su zvijezde koje pulsiraju (periodično mijenjaju sjaj) brzinom koja ovisi samo o njihovoj apsolutnoj magnitudi (koja je povezana s luminozitetom). Zbog ovakve povezanosti perioda pulsa i luminoziteta, cefeidi se mogu koristiti za procjenu udaljenosti objekata unutar kojih se zvijezda nalazi. Hubble je koristio rezultate Leavittinog otkrića za kalibraciju udaljenosti galaksija koje je promatrao. Osim toga, koristio je tada najsnažniji teleskop na svijetu, Hooker teleskop sa Mount Wilson opservatorija u Kaliforniji, kojim je mogao detektirati pojedinačne zvijezde u galaksijama i potom izmjeriti njihove udaljenosti. Mogao je odabrati i izmjeriti konzistentan set najbolje

određenih udaljenosti za odabrane galaksije te, usprkos velikoj sistematičnoj greški u kalibraciji rezultata, uvjerljivo pokazati postojanje znakovite relacije 8.1.

### **8.3 Tijek nastavnog sata**

U ovom potpoglavlju detaljno je opisan tijek jednog nastavnog sata fizike primjerenog za 4. razred gimnazijskog programa na temu Hubbleovog zakona i širenja svemira. U pripremanju nastavnog sata prvi je korak odabir obrazovnih i odgojnih ishoda tog sata, odnosno određivanje što će učenici znati ili moći napraviti nakon tog sata te koje će sposobnosti i vrijednosti učenici razvijati tokom sata te odabir primjerene literature. S obzirom da se radi o temi koja je općenito učenicima interesantna, ali i zahtjevna po svojoj prirodi, bitno je maksimalno angažirati učenike na samoj nastavi i iskoristiti njihov interes. Stoga su odabrana sljedeća učenička postignuća:

1. tumačiti kako se svemir širi,
2. iskazati Hubbleov zakon kao proporcionalnost između gibanja udaljene galaksije i njene udaljenosti od nas,
3. razvijati sposobnost logičkog razmišljanja i znanstvenog zaključivanja,
4. razvijati sposobnost sistematičnog opažanja,
5. razvijati sposobnost usmenog, pismenog i grafičkog izražavanja,

dok su odgojni ishodi sata:

1. izražavanje vlastitog mišljenja na argumentirani način i
2. uvažavanje tuđeg mišljenja.

Korištene nastavne metode su:

- učeničko izvođenje mjerenja ili pokusa u skupinama,
- usmjerena rasprava i
- kooperativno rješavanje zadataka u skupinama,

uz frontalni oblik rada i rad učenika u skupinama. Korištena literatura uključuje [47], [48], [49] i [50]. Kao što je vidljivo iz gore navedenih točaka, naglasak sata je na interakciji učenika i profesora kao i učenika međusobno te je cilj uključivanje svih učenika u rad na satu. Potrebna nastavna pomagala uključuju računalo s projektorom, nekoliko balona s točkicama i isprintane materijale za predviđeni grupni rad opisan niže.

### 8.3.1 Uvodni dio sata

Za uvodni dio sata predviđena je rasprava čiji je cilj prikupljanje ideja i otvaranje problema kojem je posvećen sat:

- Zašto su valne duljine apsorpcijskih spektara galaksija pomaknute u odnosu na linije izmjerene u laboratoriju?

Kako bi se do ovog pitanja došlo, može se otvoriti rasprava sljedećim nizom pitanja:

- Opišite kako zamišljate svemir.

Očekuje se kako će učenici spomenuti zvijezde, planete, galaksije i slično. Cilj je prikupiti učeničke ideje, predodžbe i prethodna saznanja.

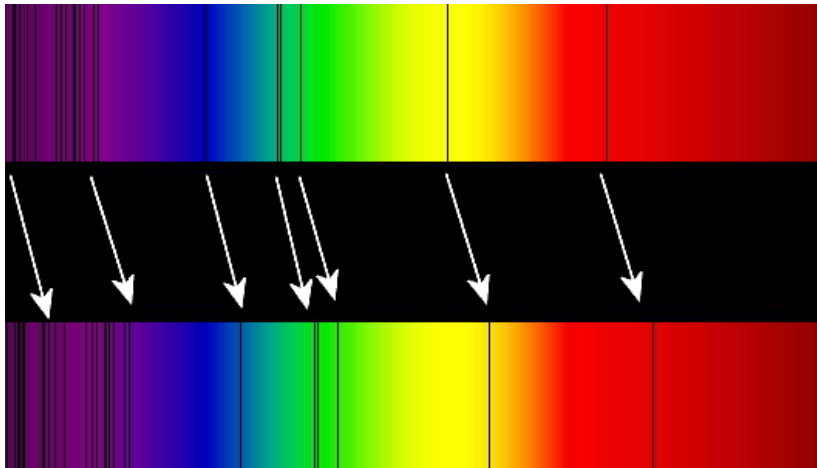
- Kako biste provjerili svoje pretpostavke?

Ovdje će učenici vjerojatno nabrojati niz metoda koja će uključivati neku vrstu opažanja. Može im se potom ukazati na neka od istraživanja koja su se provodila početkom dvadesetog stoljeća, koja su uključivala mjerenje i promatranje apsorpcijskih spektara udaljenih galaksija (koje su se tada nazivale maglicama).

- Što mislite, kako bi trebao izgledati spektar neke udaljene galaksije? Ima li razlike s obzirom na spektar zračenja koji bismo izmjerili u laboratoriju?

Očekuje se kako će učenici zaključiti kako bi se spektri galaksija i ostalih udaljenih objekata u svemiru trebali moći usporediti sa spektrima mjerenima u laboratoriju, te da ne bi trebalo biti razlike među spektrima atomima koji se nalaze tamo i spektrima atoma koji se nalaze ovdje. Potom im se može pokazati niz slika poput onog koji je prikazan na slici 8.2.

- Što primjećujete? Kako biste to objasnili?



Slika 8.2: Gore se nalazi prikaz apsorpcijskih linija u optičkom spektru Sunca u usporedbi sa spektralnim linijama optičkog spektra superklastera udaljenih galaksija (BAS11) ispod. Vidljivo je da udaljeni objekt sadržava pomak spektralnih linija prema crvenom dijelu spektra. Preuzeto sa [51].

Cilj ovog dijela sata je da učenici prepoznaju pojavu pomaka spektralnih linija apsorpcijskog spektra udaljenog objekta prema crvenom te da ju pokušaju samostalno objasniti. Pretpostavljamo da apsorpcijske linije u spektru zvijezde u udaljenoj galaksiji odgovaraju apsorpcijskim spektrima istih atoma izmjerenih u laboratoriju na Zemlji, ali detektirano zračenje sadrži pomak tih apsorpcijskih linija prema crvenom dijelu spektra. Iz toga se može zaključiti da se nešto događa s tim zračenjem između mjesta na kojem je ono nastalo i mjesta na kojem se detektira.

- Gdje ste već susreli promjenu valne duljine nekog vala?

Ovo pitanje usmjerava učeničko razmišljanje, a cilj je da se učenici sjete Dopplerovog efekta koji se obično upoznaje u kontekstu zvučnih valova.

- Što je Dopplerov efekt?

Prisjećanje svojstava Dopplerovog efekta na primjeru zvuka može se potpomoći promatranjem same pojave na videu, primjerice automobil koji se giba prema stacionarnom opažaču ili od njega.

- Kako se mijenja frekvencija zvuka kada automobil prolazi pored mirujućeg opažača? A valna duljina zvuka?

Bitno je da učenici ponove vezu između valne duljine i frekvencije vala i da se prisjete odnosa valne duljine detektiranog vala u odnosu na valnu duljinu izvora vala u ovisnosti o relativnoj brzini opažača i izvora. Dakle, učenici ovdje zaključuju kako

je valna duljina zvuka manja kada se automobil giba prema opažaču, a veća kada se giba od njega.

- Kako bismo objasnili pomake u spektralnim linijama galaksija?

Ono što tražimo od učenika je da prepoznaju kako ovaj pomak ukazuje na to da se udaljene galaksije gibaju od nas te su zbog toga valne duljine zračenja koje detektiramo veće od onih koje bismo mjerili u laboratoriju. Dakle, zaključak rasprave bi trebao ukazati na činjenicu da se udaljeni objekti u svemiru udaljavaju od nas.

### 8.3.2 Središnji dio sata

Nakon uvodne diskusije, potrebno je dodatno istražiti zamijećenu pojavu da se udaljene galaksije udaljavaju od nas. Prvo istraživačko pitanje sata je:

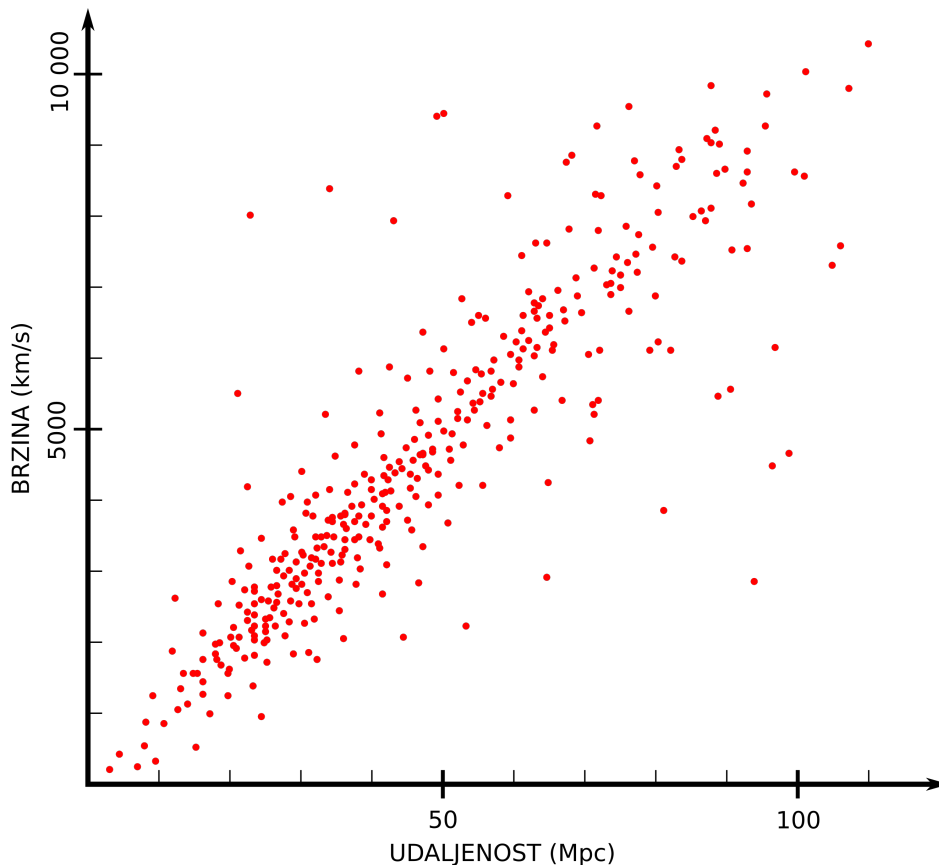
- Kako ovisi brzina galaksije o njenoj udaljenosti od nas?

Kao uvod u istraživanje može se postaviti pitanje:

- Što bismo još mogli saznati iz ovih spketara?

Budući da se spomenuo Dopplerov učinak, očekuje se da će učenici prepoznati kako bi se iz razlike u valnim duljinama u spektrima mogla saznati informacija o brzini kojom se udaljeni objekti gibaju. Potom se učenicima može ukratko opisati kako je upravo to radio i američki astronom Edwin Hubble, koji je za potrebe svojih istraživanja, uz ovakvo "mjerenje" brzina tih objekata, također mjerio i njihovu udaljenost od nas. Tu se može učenicima i ukazati na to kako su mjerenja u astrofizici općenito vrlo komplicirana, te se obično radi o različitim indirektnim metodama mjerenja. Metoda koju je koristio Hubble, između ostalog, uključivala je korištenje cefeida, zvijezda koje mijenjaju svoj sjaj periodično u vremenu, te je taj period povezan sa njihovim maksimalnim sjajem (luminozitetom), odnosno sa njihovom udaljenošću. Korisno je predočiti učenicima ovakvo svojstvo cefeida na grafu. Cefeidi se inače u astronomiji nazivaju "standardnim svijećama" i redovito se koriste za određivanje udaljenosti. Hubble je, dakle, raspolagao s podacima o brzini udaljenih galaksija i njihovoj udaljenosti od nas. Ti se rezultati (graf ovisnosti brzine o udaljenosti) mogu podijeliti učenicima u malim grupama (slika 8.3).

U ovom dijelu sata učenici imaju zadatak izvući zaključke na temelju rezultata istraživanja koje je proveo Hubble 1929. godine. Bitno je učenicima dobro objasniti



Slika 8.3: Prikaz grafa koji se može koristiti za određivanje Hubbleovog zakona. Značajno rasipanje podataka služi ilustriranju neodređenosti u opažanjima, kao i slučajnom gibanju objekata.

što trebaju napraviti i diskutirati eventualna pitanja koja oni imaju prije početka rada, kako bi se zadatak izvršio vremenski efikasnije. Za početak se graf prvo može prikazati na projektoru pa se onda s učenicima rasprave prvotni dojmovi i informacije koje oni zapažaju na grafu.

- Primjećujete li neki trend u podacima na grafu?

Očekuje se da će učenici prepoznati trend porasta brzine objekta kako mu je udaljenost od opažača veća. To je vrlo bitan zaključak, koji se potom treba matematički opisati.

- Kako bismo mogli matematički opisati rezultate na grafu?

Očekuje se da će učenici predložiti da se rezultati na grafu opišu pravcem. Potom slijedi grupni rad učenika gdje su im zadaci sljedeći:

1. Provući pravac koji najbolje opisuje rezultate na grafu.



2. Napisati matematičku formulu pravca korištenjem veličina koje su dane na grafu (brzina i udaljenost udaljenog objekta).
3. Izračunati koeficijent smjera pravca iz grafa pazeći pritom na mjerne jedinice.

Dobro bi bilo prije početka rada upozoriti učenike na mjerne jedinice koje se pojavljuju u grafu koji koriste. Primjerice, na grafu sa slike 8.3 se za udaljenost koristi mjerna jedinica Mpc, koju učenici većinom ne poznaju, pa bi bilo poželjno da im se objasni kako se definira mjerna jedinica parsek (udaljenost na kojoj se 1 astronomska jedinica vidi pod kutem od jedne lučne sekunde) te koliko on iznosi u SI jedinicama ( $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$ ), kako bi se izbjegle nedoumice. Potom učenici u grupama proučavaju podatke s grafa i izvode svoje zaključke. Nakon što su završili, prikupe se rezultati njihovog rada. Treba se komentirati jednadžba koju su grupe koristile kao i iznos koeficijenta pravca koji su dobili, a očekuje se kako će se te vrijednosti kretati oko  $100 \text{ (km/s)/Mpc}$ . Jednadžba se može napisati na ploču u obliku poput onog u izrazu 8.1, gdje se onda koeficijent pravca (nagib) identificira kao Hubbleova konstanta, a jednadžba pravca kao Hubbleov zakon.

- Kako biste objasnili značenje Hubbleovog zakona?

Ono što tražimo od učenika je da prepoznaju da se udaljeniji objekti u svemiru gibaju brže. Potom se s učenicima može raspraviti o danas prihvaćenom iznosu i značenju Hubbleove konstante.

- Kakvo je značenje Hubbleove konstante? Proučite njene mjerne jedinice.

Konstanta  $H_0 = 70 \text{ (km/s)/Mpc}$  se može interpretirati tako da se kaže da za svako povećanje udaljenosti za 1 Mpc, brzina udaljavanja galaksije se poveća za 70 km/s, pa se zato i piše u tom obliku. Ako se pokrate mjerne jedinice za udaljenost u izrazu Hubbleove konstante, dobije se da je dimenzija te veličine  $\text{s}^{-1}$ .

- Kako ovi rezultati utječu na sliku stanja svemira?

Cilj ove rasprave je da učenici prepoznaju da se svemir širi, odnosno da je on trenutno u stanju eksplozije. S obzirom da je u vremenu kada je Hubble proveo svoje istraživanje u znanosti vladala slika beskonačnog, statičnog svemira koji nema početak ni kraj, ovi rezultati (i rezultati mnogih drugih istraživanja) iznenadili su znanstvenu

zajednicu, te su doveli do rođenja nove teorije o postanku svemira, teorije velikog praska, koja je i danas vodeća kozmološka teorija.

Nakon toga se može preći na drugo istraživačko pitanje;

- Kako se svemir širi?

Od učenika se može zatražiti da opišu kako oni zamišljaju širenje svemira. Očekuje se kako će njihove ideje odgovarati slici koju gradi Hubbleov zakon, odnosno da se svi objekti u svemiru udaljavaju od nas.

- Znači li to da smo mi u nekakvom centru širenja svemira? Kako bismo to istražili pomoću balona s točkicama?

Očekuje se da će učenici pomoću balona modelirati svemir, a točkicama na balonu galaksije i ostale objekte u svemiru. Napuhivanjem tog balona se modelira širenje svemira, te se onda mogu promatrati točkice na balonu kako bi se izveo zaključak o tome postoji li centar širenja svemira. Nakon rasprave o tome što učenici u grupama trebaju napraviti i formuliranja njihovih hipoteza, podijeli im se pribor te učenici provode istraživanje. Nakon što su grupe završile s eksperimentima i formulirale svoje zaključke, prikupe se njihovi rezultati. Očekuje se kako će učenici zaključiti da su se sve točke na balonu međusobno udaljile napuhivanjem balona, to jest da nijedna točka ne miruje, odnosno da ne postoji jedinstven centar širenja svemira. Ovo se istraživanje može provesti i frontalno, pomoću primjerice dvije slike koje predstavljaju svemir u dva različita trenutka, kao što je opisano u [52]. Preklapanjem dviju točaka sa slika koje predstavljaju istu lokaciju u svemiru u dva različita trenutka, vidljivo je da su sve druge točke udaljile od nje, a odabirom drugih točaka za preklapanje dođe se do istog zaključka. Iz toga se može zaključiti kako je svaka točka u svemiru zapravo centar širenja svemira.

- Što mislite da će se događati u budućnosti?

Pretpostavlja se da će učenici prepoznati nekoliko mogućih scenarija, primjerice da će se svemir nastaviti širiti u beskonačnost i da će sva materija u njemu nestati (rastegnuti se do te mjere da više ne postoje atomi), ili da će se širiti do neke granice i onda se početi skupljati nazad u jednu točku (takozvana teorija velikog sažimanja ili *Big Crunch*) i slično, što su neki od mogućih scenarija u budućnosti svemira koji se još istražuju.

### 8.3.3 Završni dio sata

Za završni dio sata može provesti rasprava koja bi trebala povezati zaključke iz dosadašnjih rasprava i istraživanja u jednu cjelinu. Može se započeti konceptualnim pitanjem:

- Ako se svemir širi, kako to da mi to ne zamjećujemo oko nas?

Poželjno je dati učenicima dovoljno vremena da razmisle o ovom pitanju. Korisna potpitanja koja se mogu učenicima postaviti kao pomoć mogu biti:

- Gdje je zamijećeno širenje svemira, na kojim skalama?

Očekuje se da će učenici prepoznati da se širenje svemira ne zamjećuje na skali atoma, ili skali sunčevog sustava, pa čak ni na skali Mliječne staze, a na ovom satu su saznali da se širenje svemira zamjećuje na skali udaljenih galaksija i klastera galaksija.

- Što osigurava da manje skale od tih (naša galaksija ili Sunčev sustav) ostanu na okupu?

Očekivani je odgovor sila gravitacije. Uz prisjećanje o čemu sve ovisi sila gravitacije može se doći do zaključka kako se efekti širenja svemira zamjećuju na prostornim skalama na kojima je sila gravitacije preslaba da im se suprotstavi.

Potom se može riješiti jedan numerički zadatak čiji je krajnji cilj određivanje starosti svemira. Zadatak se može postaviti u obliku:

- Ako je Hubbleova konstanta jednaka 20 km/s po milijunu svjetlosnih godina, kolika je brzina galaksije koja je udaljena 400 milijuna svjetlosnih godina? Prije koliko godina je ta galaksija bila odmah kraj naše galaksije uz pretpostavku da se cijelo vrijeme udaljavala istom brzinom?

Ovaj se zadatak može rješavati i kooperativno. U prvom dijelu zadatka učenici trebaju primjeniti Hubbleov zakon na jednostavan primjer pazeći na mjerne jedinice. Očekuje se da će učenici prepoznati da nije potrebno pretvarati Hubbleovu konstantu u oblik koji se koristio ranije na satu jer je i udaljenost galaksije dana u svjetlosnim godinama. Rezultat koji učenici trebaju dobiti je 8000 km/s. U drugom dijelu zadatka potrebno je uočiti kako se rezultat može iščitati iz samog iznosa Hubbleove konstante ( $1/H_0 = t = 14.99 \times 10^9$  god), kao i da taj rezultat zapravo daje grubu procjenu

starosti svemira, jer je trenutak u kojem su sve galaksije bile na istom mjestu ujedno i trenutak u kojem je nastao svemir i počeo se širiti, što je potrebno s učenicima raspraviti.

Opisani je sat namijenjen učenicima gimnazijskog programa koji su već pri kraju svog srednjoškolskog obrazovanja. Stoga se pri izvedbi ovog sata može očekivati visok stupanj interesa, ali i postojećeg predznanja učenika, kao i visoka motivacija za istraživanje koju treba što bolje iskoristiti. Kao što je opisano u prethodnim poglavljima, poticanje intelektualne angažiranosti učenika na satu je bitno za postizanje aktivnog učenja. Zbog toga je u opisanom satu zastupljen velik broj različitih interaktivnih metoda i novih metodičkih strategija koje se nastoje čim više uvesti u modernu nastavu fizike.

## Literatura

- [1] Kumar, P.; Zhang, B. The Physics of Gamma-Ray Bursts & Relativistic Jets. // Physics Reports. Vol. 561, (2015), str. 1-109.
- [2] Imaging Atmospheric Cherenkov Telescope, (19.1.2020.) <https://en.wikipedia.org/wiki/IACT>, 20.1.2020.
- [3] Piran, T. Gamma-ray bursts and the fireball model. // Physics Reports. Vol. 314, 6(1999), str. 575-667.
- [4] Oganessian, G.; Nava, L.; Ghirlanda, G.; Celotti, A. Detection of Low-energy Breaks in Gamma-Ray Burst Prompt Emission Spectra. // The Astrophysical Journal. Vol. 846, 2(2017), str. 137.
- [5] Oganessian, G.; Nava, L.; Ghirlanda, G.; Celotti, A. Characterization of gamma-ray burst prompt emission spectra down to soft X-rays. // Astronomy & Astrophysics. Vol. 616, A138(2018), str. 21.
- [6] Ghisellini, G. Radiative Processes in High Energy Physics, 1st ed. Springer, 2013.
- [7] Rybicki, G. B.; Lightman, A. P. Radiative Processes in Astrophysics. revised ed. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH 62 Co. KGaA, 2004.
- [8] Hogg, D. W. Distance measures in cosmology, arXiv:astro-ph/9905116v4, 2000.
- [9] Longair, M. S. High Energy Astrophysics. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [10] Synchrotron radiation energy flux, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synchrotron\\_radiation\\_energy\\_flux.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synchrotron_radiation_energy_flux.png), 5.8.2019.
- [11] Jackson, John D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [12] By J.D. Jackson - Classical Electrodynamics 3rd edition, John Wiley & Sons., CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15591585>, 1.8.2019.

- [13] Westfold, C. K. The polarisation of synchrotron radiation. // *Astrophysical Journal*. Vol. 130, (1959), str. 247-249.
- [14] Sari, R.; Narayan, R.; Piran, T. Cooling Timescales and Temporal Structure of Gamma-Ray Bursts. // *The Astrophysical Journal*. Vol. 473, (1996), str. 204.
- [15] Sari, R.; Piran, T.; Narayan, R. Spectra and Light Curves of Gamma-Ray Burst Afterglows. // *The Astrophysical Journal*. Vol. 497, 1(1998), str. L17-L20.
- [16] Fermi Gamma-ray Space Telescope, (21.1.2020.), [https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi\\_Gamma-ray\\_Space\\_Telescope](https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_Gamma-ray_Space_Telescope), 21.1.2020.
- [17] Band, D.; Matteson, J.; Ford, L.; Schaefer, B.; Palmer, D.; Teegarden, B.; Cline, T.; Briggs, M.; Paciesas, W.; Pendleton, G.; Fishman, G.; Kouveliotou, C.; Meegan, C.; Wilson, R.; Lestrade, P. BATSE Observations of Gamma-Ray Burst Spectra. I. Spectral Diversity. // *The Astrophysical Journal*. Vol. 413, (1993), str. 281.
- [18] Lloyd, N.; Petrosian, V. Synchrotron Radiation as the Source of Gamma-Ray Burst Spectra. // *The Astrophysical Journal*. Vol. 543, 2(2000), str. 722-732.
- [19] Ghirlanda, G.; Celotti, A.; Ghisellini, G. Extremely hard GRB spectra prune down the forest of emission models. // *Astronomy & Astrophysics*. Vol. 406, 3(2003), str. 879-892.
- [20] Chiaberge, M.; Ghisellini, G. Rapid variability in the synchrotron self - Compton model for blazars. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Vol. 306, 3(1999), str. 551-560.
- [21] Zabalza, V. Naima: a Python package for inference of particle distribution properties from nonthermal spectra. // *Proceedings of the International Cosmic Ray Conference 2015*, (2015)
- [22] Bošnjak, Ž.; Daigne, F.; Dubus, G. Prompt high-energy emission from gamma-ray bursts in the internal shock model. // *Astronomy & Astrophysics*. Vol. 498, 3(2009), str. 677-703.

- [23] Ghirlanda, G.; Nappo, F.; Ghisellini, G.; Melandri, A.; Marcarini, G.; Nava, L.; Salafia, O. S.; Campana, S.; Salvaterra, R. Bulk Lorentz factors of gamma-ray bursts. // *Astronomy and Astrophysics*. Vol. 609, A112(2018)
- [24] Wright, E. L. A Cosmology Calculator for the World Wide Web. // *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. Vol. 118, 850(2006), str. 1711-1715.
- [25] Pe'er, A. Physics of Gamma-Ray Bursts Prompt Emission. // *Advances in Astronomy*. Vol. 2015, (2015)
- [26] Kaneko, Y.; Preece, R. D.; Briggs, M. S.; Paciesas, W. S.; Meegan, C. A.; Band, D. L. The Complete Spectral Catalog of Bright BATSE Gamma-Ray Bursts. // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. Vol. 166, 1(2006), str. 298-340.
- [27] Daigne, F.; Bošnjak, Ž.; Dubus, G. Reconciling observed gamma-ray burst prompt spectra with synchrotron radiation? // *Astronomy and Astrophysics*. Vol. 526, A110(2011)
- [28] Oganessian, G.; Nava, L.; Ghirlanda, G.; Melandri, A.; Celotti, A. Prompt optical emission as a signature of synchrotron radiation in gamma-ray bursts. // *Astronomy and Astrophysics*. Vol. 628, A59(2019), str. 25.
- [29] Planinić, M. Istraživački usmjerena nastava fizike – kako je približiti školskoj zbilji? // *Zbornik XII. hrvatskog simpozija o nastavi fizike / Zagreb: HFD, 2015. Str. 8-15.*
- [30] Planinić, M. Interaktivni načini poučavanja fizike. // *Zbornik devetog hrvatskog simpozija o nastavi fizike / Zagreb: HFD, 2009. Str. 17-23.*
- [31] Minner, D. D.; Levy, A. J.; Century, J. Inquiry-Based Science Instruction - What Is It and Does It Matter? Results from a Research Synthesis Years 1984 to 2002. // *Journal of Research in Science Teaching*. Vol. 47, 4(2010), str. 474-496.
- [32] Schroeder, C.; Scott, T.; Tolson, H.; Huang, T.; Lee, Y. A meta-analysis of national research: Effects of teaching strategies on student achievement in science in the United States. // *Journal of Research in Science Teaching*. Vol. 44, 10(2007), str. 1436-1460.

- [33] Heller, P.; Keith, R.; Anderson, S. Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 1: Group versus individual problem solving. // Am. J. Phys. Vol. 60, 7(1992), str. 627-636.
- [34] Heller, P.; Hollabaugh, M. Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups. // Am. J. Phys. Vol. 60, No. 7(1992), str. 637-644.
- [35] Overbye, D. Cosmos controversy: the universe is expanding, but how fast?, (20.02.2017.) <https://www.nytimes.com/2017/02/20/science/hubble-constant-universe-expanding-speed.html>, 1.12.2019.
- [36] Expansion of the universe, (19.11.2019.) [https://en.wikipedia.org/wiki/Expansion\\_of\\_the\\_universe](https://en.wikipedia.org/wiki/Expansion_of_the_universe), 1.12.2019.
- [37] Hubble radius, <https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803095948562>, 5.12.2019.
- [38] Hubble's law, (3.12.2019.) [https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law), 5.12.2019.
- [39] Riess, A. et al. Observational evidence from Supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. // The Astronomical Journal. Vol. 116, (1998), str. 1009-1038.
- [40] Macaulay, E. et al, First Cosmological Results using Type Ia Supernovae from the Dark Energy Survey: Measurement of the Hubble Constant // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. 486, 2(2019), str. 2184-2196
- [41] Nussbaumer, H., Bieri, L. Who discovered the expanding universe?, arXiv:1107.2281v3 [physics.hist-ph], 16.1.2012.
- [42] Bahcall, N. A. Hubble's Law and the expanding universe. // Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol. 112, 11(2015), str. 3173-3175.
- [43] Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. // Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol. 15, 3(1929), str.168-173.



- [44] By Ohare, B., CC 3.0, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hubble\\_constant.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hubble_constant.JPG), 5.12.2019.
- [45] Udalski, A.; Soszynski, I.; Szymanski, M.; Kubiak, M.; Pietrzynski, G.; Wozniak, P.; Zebrun, K. The Optical Gravitational Lensing Experiment. Cepheids in the Magellanic Clouds. IV. Catalog of Cepheids from the Large Magellanic Cloud
- [46] Cepheid variable stars, <http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/C/Cepheid+Variable+Stars>, 9.12.2019.
- [47] Labor J. Fizika 4. Zagreb: Alfa, 2014.
- [48] Krsnik, R. Fizika 4. Zagreb: Školska knjiga, 2000.
- [49] Andreis, T.; Plavčić, M.; Simić, N. Fizika 4. Zagreb: Profil International, 2013.
- [50] Paar, V. Fizika 4. Zagreb: Školska knjiga, 2009.
- [51] By Georg Wiora (Dr. Schorsch), CC BY-SA 2.5 [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Redshift\\_horizontal.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Redshift_horizontal.png), 5.12.2019.
- [52] Where is the centre of the universe?, (2.7.2019.) <https://www.exploratorium.edu/origins/hubble/tools/center.html>, 1.12.2019.