Nožišni poligoni

Bošković, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:234076

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ivan Bošković

Nožišni poligoni

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik
2. _____ , član
3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvala

Hvala mentoru na savjetima, pomoći i vremenu uloženom na konzultacije oko rada.
Posebno hvala mojim roditeljima na bezuvjetnoj podršci tijekom cijelog studiranja, veliko hvala i sestrama Mateji, Vlatki i Dori, te bratu Vedranu na porukama podrške i ohrabrenjima u teškim trenutcima. Veliko hvala zaručnici Antoniji na podršci i molitvama.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Karakteristične točke trokuta i njihova svojstva **3**

3 Svojstva nožišnih četverokuta **12**

4 Geometrijske nejednakosti u nožišnim četverokutima **18**

5 Neka svojstva nožišnih poligona **28**

6 Literatura: **39**

7 Sažetak **40**

8 Summary **41**

9 Životopis **42**

1 Uvod

U euklidskoj geometriji trokuta poznat je niz zanimljivih rezultata o nožišnim trokutima, a to su trokuti dobiveni spuštanjem okomica iz neke točke na stranice zadanog trokuta. Posebno, nožišne točke bit će kolinearne ako i samo ako se okomice povuku iz neke točke T kružnice opisane trokutu. Pravac kojem tada pripadaju nožišta naziva se Simsonov pravac točke T za zadani trokut.

Cilj ovog diplomskog rada je prikaz raznovrsnih svojstava nožišnih poligona za četverokute te nekih njihovih analogona koji vrijede za n-terokute općenito. Izabrani su uglavnom rezultati objavljeni u posljednjih desetak godina. No, u prvom poglavlju izložene su najprije neke osnovne činjenice iz geometrije trokuta, radi potpunosti i povezivanja s daljnjim dijelovima rada. Dio svojstava o nožišnim mnogokutima izražen je u obliku nejednakosti pa je stoga uvršten i Erdös-Mordellov teorem, koji govori da je zbroj udaljenosti točke T od vrhova trokuta ABC, unutar kojeg se T nalazi, barem dvostruko veći od zbroja njezinih udaljenosti do vrhova nožišnog trokuta pridruženog točki T.

Za opće četverokute istražuje se uvjet da sve nožišne točke budu kolinearne, što bi onda odgovaralo Simsonovom pravcu za trokut, a ishod je takav da postoji samo jedna točka za koju su pripadne nožišne točke kolinearne i to pod uvjetom da četverokut nije paralelogram. Takvom četverokutu pripada, dakle, jedinstvena točka koja se onda naziva Simsonovom točkom četverokuta. U daljnjem promatranju nožišnih četverokuta česta je dodatna pretpostavka da je osnovni četverokut tetivni, jer se tada uočava više geometrijskih pravilnosti. Primjerice, od interesa je tzv. anticentar tetivnog četverokuta, a to je sjecište četiri okomice povučene iz središta stranica na suprotne stranice. Proučavanje svojstava anticentra dovodi do zanimljivih rezultata. Na tetivne četverokute odnosi se i spomenuti svojevrsni analogon Erdös-Mordellovog teorema za trokut.

Uvršten je i Steinerov teorem, kao jedan od klasičnih rezultata o nožišnim poligonima, ujedno vrlo različitog tipa od prethodnih. Za zadani poligon promatraju se točke takve da njihovi nožišni poligoni imaju površinu jednaku nekoj konstanti. Geometrijsko mjesto takvih točaka je kružnica, a tako odeđene kružnice za različite vrijednosti konstante su koncentrične.

U završnom dijelu izložena su dosta jednostavna poopćenja nekih prije dokazanih nejednakosti, kad se umjesto četverokuta uzme općeniti n-terokut.

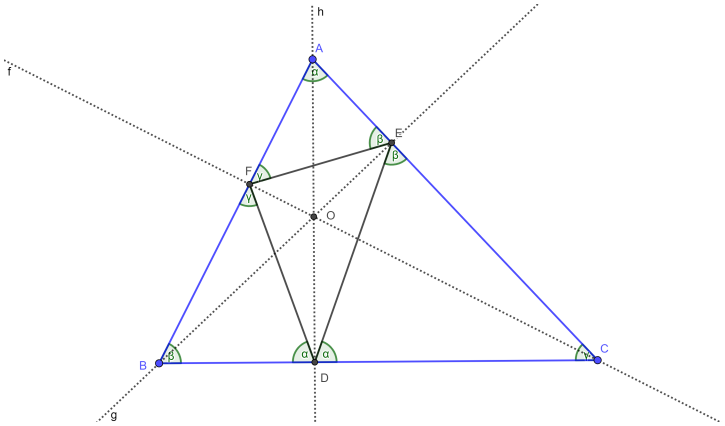
Prikazani rezultati daju naslutiti kako u ovom području geometrije mnogokuta ima još dosta mogućnosti za istraživanje, bilo da je riječ o poopćavanju poznatih rezultata, nalaženju jednostavnijih dokaza pojedinih tvrdnji, rješavanju otvorenih problema ili otkrivanju sasvim novih geometrijskih zakonitosti.

2 Karakteristične točke trokuta i njihova svojstva

U ovom dijelu ćemo se prisjetiti nekih karakterističnih točaka trokuta, njihovih defininicija i dokaza.
Pa krenimo redom.

Definicija 2.1.: Okomice spuštene iz vrhova danog trokuta ABC na suprotne stranice zovemo **visinama trokuta** ABC.

Teorem 2.1.: (Teorem o ortocentru) Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.



Slika 1.

Dokaz:
Promotrimo točke B, F, E i C. Uočavamo da su one koncikličke, odnosno da se nalaze na istoj kružnici promjera BC jer su kutovi pri točkama F i E pravi pa je četverokut $BFEC$ tetivan. Kut $\angle CEF = 180° - \beta$ pa je kut $\angle AEF = \beta$. Analogno zaključimo da je kut $\angle AFE = \gamma$. Primjenom ovog postupka na četvorke točaka A, B, D, E i A, F, D, C dolazimo do zaključka da su trokuti AEF, DBF, DEC slični tokutu ABC. Promotrimo sada trokut DEF.
Njegovi vrhovi su nožišta visina trokuta ABC, a prethodnim postupkom smo pokazali da je kut $\angle FDE = 180° - 2\alpha$, a kako je visina iz vrha A okomita na pravac BC slijedi da je ta visina i simetrala kut $\angle FDE$. Analogno se pokaže da su visine iz vrhova B i C simetrale kutova $\angle DEF$ i $\angle EFD$ pa po teoremu o simetralama kutova trokuta možemo zaključiti da se i visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki.

Time je teorem dokazan.

Točku u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta spuštene iz vrhova tog trokuta zovemo **ortocentar** trokuta i najčešće ga označavamo sa H. Točku u kojoj se sijeku pravac na kojem leži stranica trokuta i pravac na kojem leži visina na tu stranicu zovemo **nožište visine**. Trokut koji čine nožišta visina na stranica trokuta zovemo nožišni trokut.
Primjetimo da visinu na stranicu trokuta možemo spustiti iz bilo koje točke ravnine, pa tako ovisno o točki iz koje spuštamo visine nožišni trokut nazivamo nožišnim trokutom točke P ili T.

Definicija 2.2.: Kružnica koja prolazi kroz vrhove trokuta ABC nazivamo opisanom kružnicom trokuta.

Polumjer trokutu opisane kružnice označavamo s R. Središte te kružnice se nalazi na sjecištu simetrala stranica trokuta ABC jer je simetrala dužine geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku udaljenost do krajeva dužine, odnosno vrhova trokuta.

Kako smo definirali neke od karakterističnih točki trokuta, postoji i pravac na kojemu se nalaze karakteristične točke.

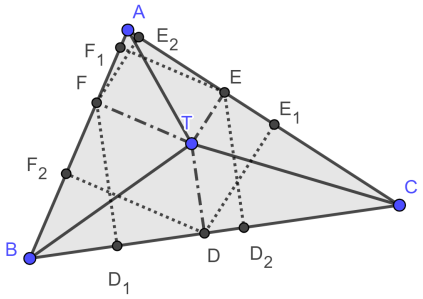
Teorem 2.2.: Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H nekog trokuta ABC leže na jednom pravcu e koji nazivamo **Eulerovim pravcem** tog trokuta.

Ovdje ćemo odmah navesti još jedan pravac koji ćemo spominjati kroz rad:

Teorem 2.3.: Neka je ABC trokut, točke D, E, i F koje se nalaze na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ili na njihovim produženjima, su kolinearne ako i samo ako točka T leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Pravac na kojem su točke D, E i F se naziva **Simsonov pravac** točke T u odnosu na trokut ABC.

Teorem 2.4. (Erdös-Mordell): Neka je T bilo koja točka unutar danog trokuta ABC, a D, E i F nožišta okomica spuštenih iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ tog trokuta.
Zbroj udaljenosti točke T od vrhova danog trokuta je veći (ili jednak) od dvostrukog zbroja udaljenosti točke T od stranica danog trokuta. Vrijedi dakle

$$|TA| + |TB| + |TC| \geqslant 2(|TD| + |TE| + |TF|)$$



Slika 2.

Dokaz:
Neka su D_1 i D_2 nožišta okomica spuštenih iz točaka F i E na stranicu BC; E_1 i E_2 su nožišta okomica spuštenih iz D i F na AC; F_1 i F_2 su nožišta okomica spuštenih iz E i D na AB (slika 3.). Iz slike je odmah vidljivo:

$$|D_1D_2| = |D_1D| + |DD_2| \leqslant |FE|$$

$$|E_1E_2| = |E_1E| + |EE_2| \leqslant |DF|$$

$$|F_1F_2| = |F_1F| + |FF_2| \leqslant |DE|$$

Slijedi da je

$$|TA| \geqslant \frac{|TA|(|D_1D| + |DD_2|)}{|FE|}$$

$$|TB| \geqslant \frac{|TB|(|E_1E| + |EE_2|)}{|DF|}$$

$$|TC| \geqslant \frac{|TC|(|F_1F| + |FF_2|)}{|DE|}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobijemo

$$|TA|+|TB|+|TC| \geqslant \frac{|TA|(|D_1D|+|DD_2|)}{|FE|}+\frac{|TB|(|E_1E|+|EE_2|)}{|DF|}$$

$$+\frac{|TC|(|F_1F|+|FF_2|)}{|DE|} \tag{1}$$

Kako su zbog dva prava kuta točke B, F, T i D koncikličke, onda je i $\angle FTB = \angle FBD$, pa su trokuti DFD_1 i TBF slični.

Iz toga slijedi da je

$$|D_1D| = |DF|\frac{|TF|}{|TB|}$$

Ponavljanjem ovog zaključka na ostale koncikličke četvorke točaka dobivamo sljedeće relacije

$$|DD_2| = |DE|\frac{|TE|}{|TC|};$$
$$|E_1E| = |ED|\frac{|TD|}{|TC|};$$
$$|EE_2| = |EF|\frac{|TF|}{|TA|};$$
$$|F_1F| = |FE|\frac{|TE|}{|TA|};$$
$$|FF_2| = |FD|\frac{|TD|}{|TB|};$$

Uvrštavanjem ovih šest jednakosti u (1) i grupiranjem tako da se izluči $|TD|, |TE|$ i $|TF|$ dobivamo

$$|TA|+|TB|+|TC| \geqslant |TD|\Big(\frac{|DE|\cdot|TB|}{|DF|\cdot|TC|}+\frac{|DF|\cdot|TC|}{|DE|\cdot|TB|}\Big)$$

$$+|TE|\Big(\frac{|DE|\cdot|TA|}{|FE|\cdot|TC|}+\frac{|FE|\cdot|TC|}{|DE|\cdot|TA|}\Big)$$

$$+|TF|\Big(\frac{|DF|\cdot|TA|}{|FE|\cdot|TB|}+\frac{|FE|\cdot|TB|}{|DF|\cdot|TA|}\Big) \tag{2}$$

Kako za svaka dva pozitivna realna broja a i b vrijedi

$$(a-b)^2 \geqslant 0,$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \tag{3}$$

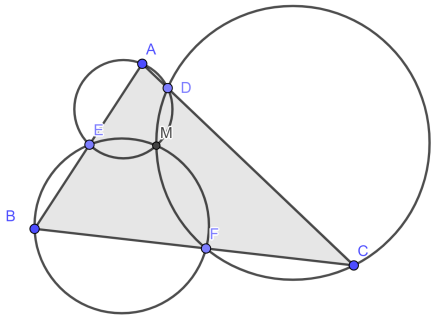
Dakle, zbroj recipročnih brojeva je veći ili jednak 2, a vidimo da su u (2) u zagradama izrazi baš takvog oblika, pa je svaki od njih $\geqslant 2$ iz čega na temelju (3) zaključujemo

$$|TA| + |TB| + |TC| \geqslant 2(|TD| + |TE| + |TF|).$$

Time je teorem dokazan.

Za trokut postoje mnoge točke za koje vrijede neka zanimljiva svojstva, a sada ćemo pobliže upoznati još jednu od njih.

Teorem 2.5.: Ako na svakoj stranici trokuta (ili njihovim produženjima) odaberemo po jednu točku, tada se kružnice određene vrhom i dvjema točkama na stranicama koje prolaze tim vrhom sijeku u jednoj točki.



Slika 3.

Dokaz:
Promotrimo slučaj kada se točka M nalazi unutar trokuta kao na slici 3. (slučaj kada je točka M izvan trokuta se dokazuje slično).
Neka se kružnice kroz točke A, E, D i B, E, F sijeku u točki M.
Sada u tetivnom četverkutu $AEMD$ vrijedi

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle A$$

Slično, u tetivnom četverokutu $BEMF$ vrijedi

$$\angle EMF = 180^\circ - \angle B$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\angle EMD + \angle EMF = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$$

$$\angle DMF = \angle A + \angle B$$

Također, u trokutu ABC vrijedi da je

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$$

pa je

$$\angle DMF = 180^\circ - \angle C$$

iz čega slijedi da je četverokut $CDMF$ također tetivni, pa prema tome točka M leži i na kružnici određenoj točkama C, D, F.
Time je teorem dokazan.

Definicija 2.3.: Neka je ABC zadani trokut i D, E i F bilo koje točke na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ ili na njihovim produženjima, redom.
Točka u kojoj se sijeku kružnice opisane trokutima ADF, BED i CFE zove se **Miquelova točka** trokuta ABC.

Kružnice opisane trokutima ADF, BED i CFE zovu se **Miquelove kružnice** trokuta ABC.

Primijetimo da smo do sada govorili o trokutima općenito, pa stoga sada možemo prijeći na uže područje tako da ćemo sada govoriti isključivo o nožišnim trokutima i njihovim svojstvima.

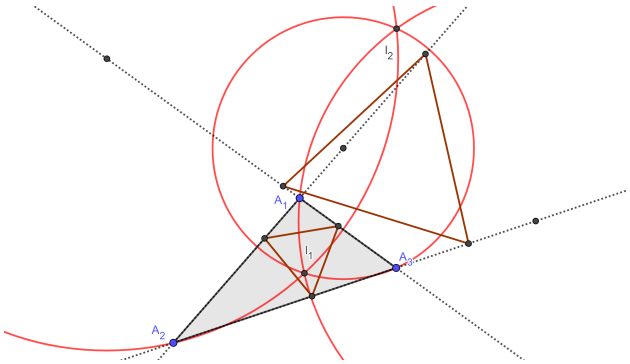
Nožišni trokut u odnosu na središte opisane kružnice trokutu ABC je takozvani *medijalni* trokut od trokuta ABC, a nožišni trokut u odnosu na ortocentar trokuta ABC je takozvani *ortički* trokut u odnosu na trokut ABC,

dok se za nožišni trokut u odnosu na središte upisane kružnice, nožišni trokut naziva *Gergonneov* trokut.

Teorem 2.6.: Točke trokuta ABC, za koje je nožišni trokut jednakokračan, su one i samo one točke koje leže na barem jednoj Apolonijevoj kružnici pridruženoj nekom od vrhova trokuta ABC.

Napomena: Apolonijeva kružnica je lokus točke T za koju vrijedi da je omjer udaljenosti od dviju zadanih točaka stalan. U ovom slučaju primijenimo taj omjer na vrhove trokuta ABC pa vrijedi:
TB:TC=AC:AB.
Tri Apolonijeve kružnice su koaksijalne i sijeku se u dvije izodinamičke točke I_1 i I_2.

Stoga, *izodinamičke točke* od trokuta ABC su jedine točke čija nožišta na trokut ABC čine jednakostranične nožište trokute.



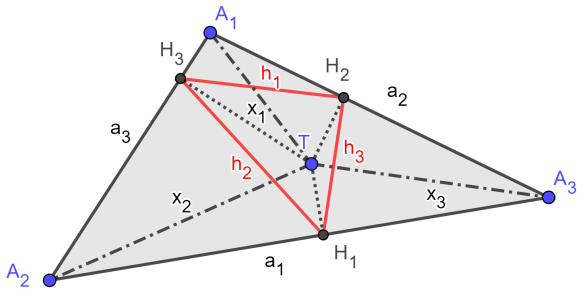
Slika 4.

Naći ćemo točke T za koje je nožišni trokut točke jednakokračan i šiljastokutan.

Radi lakšeg obilježavanja i računa nadalje ćemo koristiti oznake A_1, A_2, A_3 za vrhove trokuta,a, ujedno i pripadne kutove, te H_1, H_2 i H_3 za nožišta visina na stranice.

Neka je T točka i neka je $A_iA_{i+1} = a_{i+2}$, $TA_i = x_i$, $H_iH_{i+1} = h_{i+2}$. Kako je četverokut $A_iH_iTH_{i+1}$ tetivni četverokut, vrijedi: $h_i = x_i sinA_i$.
Po Pitagorinom poučku i njegovom obratu, nožišni trokut točke T je pravokutni u H_i ako i samo ako je

$$x_i^2 sin^2 A_i = x_{i+1}^2 sin^2 A_{i+1} + x_{i+2}^2 sin^2 A_{i+2}$$



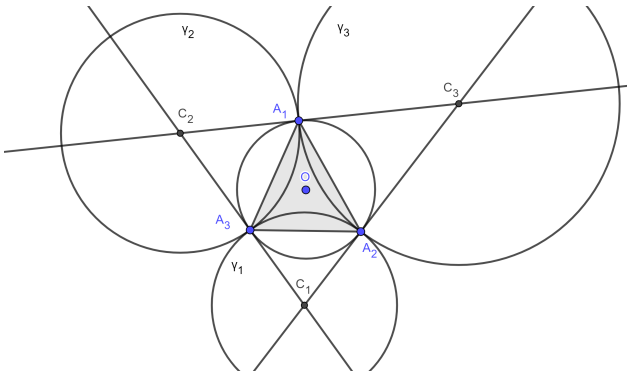
Slika 5.

Po poučku o sinusu, to je ekvivalentno s

$$a_i^2 x_i^2 = a_{i+1}^2 x_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 x_{i+2}^2 \tag{4}$$

Ova relacija predstavlja lokus γ_i točke T za koje je trokut $H_1H_2H_3$ pravokutan u H_i.
Stoga, lokus točke T za koju je nožišni trokut pravokutan je $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$.

Uočimo da γ_i sadrži točke A_{i+1} i A_{i+2}, štoviše γ_i i γ_{i+1} sijeku se samo u točki A_{i+2}.



Slika 6.

Dokažimo sada da je γ_1 kružnica.
Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A_2 \equiv (1,0)$ i $A_3 \equiv (-1,0)$; neka je $A_1(a,b)$ i $T \equiv (x,y)$.

Sada relacija (4) poprima oblik

$$\begin{aligned}
4((x-a)^2+(y-b)^2) &= ((a+1)^2+b^2)((x-1)^2+y^2) \\
&\quad +((a-1)^2+b^2)((x+1)^2+y^2) \\
4((x^2-2xa+a^2)+(y^2-2yb+b^2)) &= (a^2+2a+1+b^2)(x^2-2x+1+y^2) \\
&\quad +(a^2-2a+1+b^2)(x^2+2x+1+y^2) \\
4(x^2+y^2+a^2+b^2-2(xa+yb)) &= 2(x^2+y^2+1)(a^2+b^2+1)-8ax
\end{aligned}$$

Pojednostavljivanjem ovog izraza do kraja uočavamo da je to kružnica

$$(a^2+b^2-1)(x^2+y^2)+4by-(a^2+b^2-1)=1$$

Štoviše, sada nije teško dokazati da tangente iz A_2 i A_3 na opisanu kružnicu od $A_1A_2A_3$ prolaze središtem od γ_1.

Analogno se dokaže za γ_2 i γ_3.
Sada možemo zaključiti da su γ_i kružnice koje prolaze kroz A_{i+1} i A_{i+2}, tangente iz A_{i+1} i A_{i+2} na kružnicu opisanu $A_1A_2A_3$ prolaze kroz središte C_i od γ_i, pa se γ_i i γ_{i+1} dodiruju u A_{i+2}. Stoga, ako je $C_1C_2C_3$ tangencijalni trokut od kružnice opisane trokutu $A_1A_2A_3$, γ_i je kružnica sa središtem u C_i i prolazi kroz točke A_{i-1} i A_{i+1} (Slika 6.).

Promotrimo sada sliku 5. ponovno. Po poučku o kosinusu, kut u H_i u nožišnom trokutu je tup ako i samo ako je:

$$a_i^2x_i^2 > a_{i+1}^2x_{i+1}^2 + a_{i+2}^2x_{i+2}^2$$

pa ova nejednakost vrijedi ako točka T leži unutar kružnice γ_i.

Time smo došli do sljedećeg teorema

Teorem 2.7.: Nožišni trokut točke T je:

a) pravokutni trokut akko T leži na kružnici γ_i

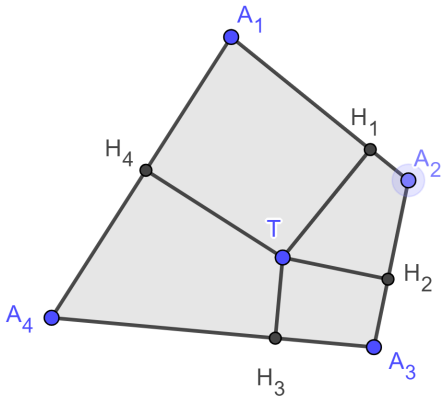
b) tupokutni trokut akko T leži unutar kružnice γ_i

c) šiljastokutni akko T leži izvan kružnice γ_i

Ovim teoremom smo završili dio o nožišnim trokutima i njihovim svojstvima.

3 Svojstva nožišnih četverokuta

U ovom poglavlju ćemo na početku izreći i dokazati neka svojstva nožišnih četverokuta, te ćemo zatim iskazati i dokazati neke geometrijske nejednakosti koje vrijede u nožišnim četverokutima.



Slika 7.

Oznake koje ćemo koristiti su iste kao i u drugom dijelu poglavlja o nožišnim trokutima, odnosno, četverokut će imati oznake A_1, A_2, A_3, A_4 dok će nožišta iz točke T biti točke na stranici A_1A_2 točka H_1, na stranici A_2A_3 točka H_2, na stranici A_3A_4 točka H_3 i na stranici A_4A_1 točka H_4 što se vidi i na slici 7.

Također, smatramo da je promatrani četverokut tetivni četverokut i kad to nije navedeno, osim u slučajevima kada je istaknuto da je četverokut općeniti.

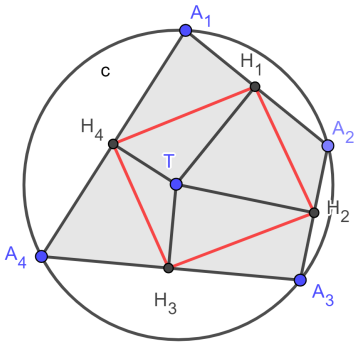
Promotrimo neke od zanimljivih točaka tetivnih i tangencijalnih četverokuta.

Prva od tih točaka je svakako, središte pripadne kružnice tog četverokuta.

Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut. Nožišni četverokut točke T koja je središte opisane kružnice četverokuta $A_1A_2A_3A_4$ je takozvani *Varignonov paralelogram* s obzirom $A_1A_2A_3A_4$ i njegov anticentar je glavni ortički četverokut.

Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tangencijalni četverokut. Nožišni četverokut upisane kružnice od $A_1A_2A_3A_4$ je dirališni četverokut, to jest, četverokut kojem su vrhovi točke u kojima upisana kružnica dodiruje stranice.

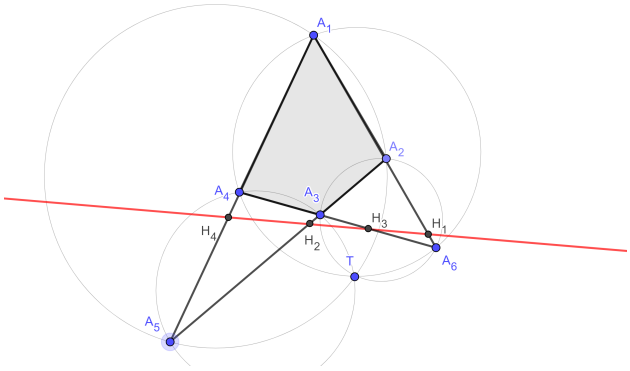
Za opće četverokute promatramo problem pronalaska nožišta tako da su točke H_i kolinearne.



Slika 8.

Lako je provjeriti da ako $A_1A_2A_3A_4$ ima samo jedan par paralelnih stranica, onda postoji samo jedna nožišna točka T za koju su točke H_i kolinearne. T je zajednička točka onih stranica koje su suprotne i nisu paralelne, a točke H_i leže na okomici iz T na paralelne stranice od $A_1A_2A_3A_4$.
S druge strane, ako je $A_1A_2A_3A_4$ paralelogram tada ne postoji točka T za koju bi točke H_i bile kolinearne.

Pretpostavimo da je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut bez paralelnih stranica kao na slici 9.



Slika 9.

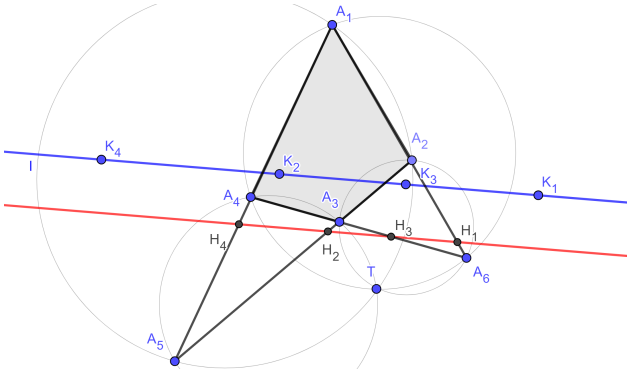
Neka je A_5 zajednička točka pravaca A_1A_4 i A_2A_3 i A_6 zajednička točka pravaca A_1A_2 i A_3A_4.
Promatrajmo 4 trokuta: $A_1A_2A_5$, $A_3A_4A_5$, $A_1A_4A_6$, $A_2A_3A_6$, te neka su $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ redom njihove opisane kružnice.
Ako točka T leži na jednoj od kružnica γ_i tada, po Teoremu 1.3., barem tri točke H_i su kolinearne. Iz toga sijedi da su sve četiri točke H_i kolinearne ako i samo ako točka T leži na svakoj kružnici γ_i.
Te četiri kružnice se sijeku u *Miquelovoj točki* četiri pravca na kojima leže

stranice od $A_1A_2A_3A_4$.
Time smo došli do sljedećeg teorema

Teorem 3.1.: Ako je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut koji nije paralelogram, onda postoji točno jedna nožišna točka od $A_1A_2A_3A_4$ za koju su točke H_1, H_2, H_3, H_4 kolinearne.

Tu točku zovemo *Simsonova točka* četverokuta $A_1A_2A_3A_4$ i označavamo je sa S. Pravac na kojem leže točke H_i nazivamo *Simsonovim pravcem.*
Uočimo da točke H_i čine četverokut ako i samo ako $T \notin \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

Teorem 3.2.: Ako je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut koji nije paralelogram, zrcalne slike Simsonove točke u odnosu na pravce koji sadrže stranice od $A_1A_2A_3A_4$ su kolinearne točke i leže na pravcu l, a pravac l je paralelan sa Simsonovim pravcem.

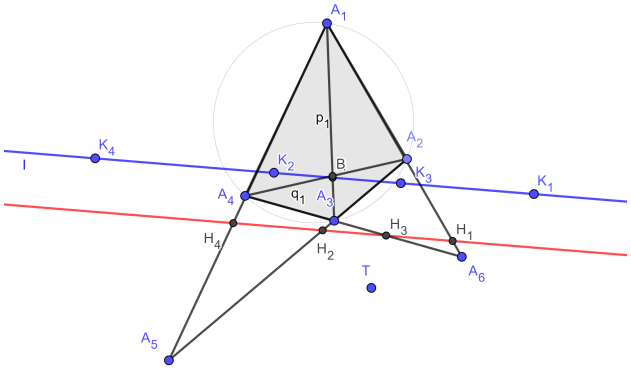


Slika 10.

Dokaz:
Teorem je trivijalan ako četverokut $A_1A_2A_3A_4$ ima jedan par paralelnih stranica.
Pretpostavimo da četverokut nema paralelnih stranica, (Slika 10.). Neka su K_1, K_2, K_3, K_4 točke u koje se zrcalno preslika točka T u odnosu na pravce A_iA_{i+1}.
Točke T, H_i i K_i su kolinearne i $|TH_i| = |H_iK_i|$. Iz ovoga slijedi da je K_i slika od H_i u homotetiji $h(T, 2)$.
Budući da su po Teoremu 2.1. H_i kolinearne, točke K_i su također kolinearne. Stoga, pravac l sadrži točke K_i i paralelan je sa Simsonovim pravcem od $A_1A_2A_3A_4$.
Time je teorem dokazan.

U članku [1] postavljena je sljedeća hipoteza:

Hipoteza: Ako je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut bez paralelnih stranica, pravac l prolazi kroz sjecište dijagonala B četverokuta A_1, A_2, A_3, A_4 i Simsonov pravac raspolavlja segment TB.



Slika 11.

Autori navode da ih je na ovu hipotezu navelo razmatranje pomoću dinamičkog softvera (Slika 11.). Međutim, to još nisu uspjeli dokazati.

Razmotrimo neke od slučajeva.

Ako je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut s paralelnim stranicama, onda je to jednakokračan trapez. To jest, pravac koji spaja polovišta osnovica trapeza prolazi i sjecištem dijagonala od $A_1A_2A_3A_4$. U ovom slučaju Simsonov pravac sadrži segment TH.

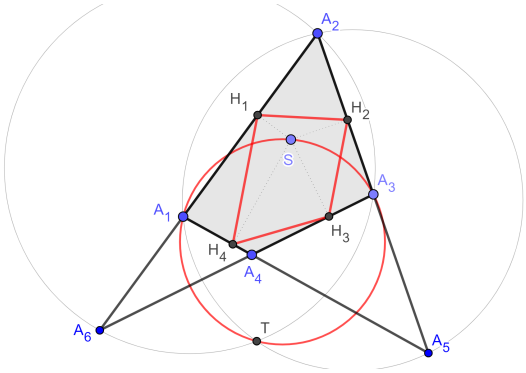
Naglasimo da smo dosad smatrali da je točka T Miquelova točka četverokuta.

Sada tražimo točke S koje nisu Miquelova točka četverokuta $A_1A_2A_3A_4$, a nožišni poligon točke S ima barem jedan par paralelnih stranica.
Ako je $A_1A_2A_3A_4$ paralelogram, onda je točka S čiji nožišni poligon ima barem jedan par paralelnih stranica bilo koja točka dijagonala od $A_1A_2A_3A_4$.

Pretpostavimo da $A_1A_2A_3A_4$ nije paralelogram.

Sada možemo dokazati sljedeće:

Lokus točke S, čiji nožišni četverokut ima paralelne stranice $\overline{H_1H_4}$ i $\overline{H_2H_3}$, je kružnica kroz točke A_1A_3T. (Slika 12.)



Slika 12.

Prvo uočimo da je T točka u odnosu na koju su $\overline{H_1H_4}$ i $\overline{H_2H_3}$ paralelni jer su H_i kolinearne.
Postavimo sada pravokutni koordinatni sustav tako da je: $A_1 \equiv (-1,0), A_3 \equiv (1,0), A_2 \equiv (a,b), A_4 \equiv (c,d)$ i $T \equiv (x,y)$.

Ako su $\overline{H_1H_4}$ i $\overline{H_2H_3}$ paralelni, onda T leži na kružnici γ čija je jednadžba

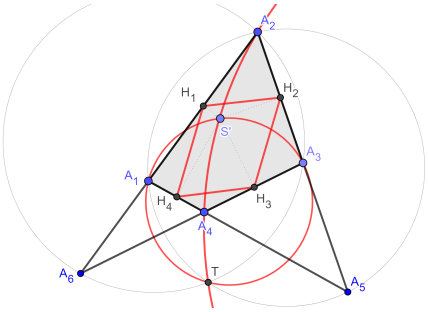
$$(hd+kb)x^2+(hd+kb)y^2-(hk-4bd)y=hd+kb$$

pri čemu je $h=a^2+b^2-1, k=c^2+d^2-1$.
Primijetimo da su točke A_1 i A_3 na kružnici γ, i kružnica γ je kružnica kroz A_1A_3T.

Analogno se dokaže da točka S, čiji nožišni četverokut ima paralelne stranice $\overline{H_1H_2}$ i $\overline{H_3H_4}$, leži na kružnici kroz A_2A_4T što nas dovodi do sljedećeg teorema:

Teorem 3.3.: Točke S čiji, nožišni četverokut ima barem jedan par paralelnih stranica, su samo one točke koje leže na kružnicama kroz A_1A_3T ili A_2A_4T.

Općenito, kružnice A_1A_3T i A_2A_4T sijeku se u dvije točke, Simsonovoj točki T i drugoj točki S'. (Slika 13.).
Nožišni četverokut točke S' je paralelogram, stoga točku S' zovemo paralelogramska točka četverokuta $A_1A_2A_3A_4$.
Uočimo da ako je $A_1A_2A_3A_4$ paralelogram, paralelogramska točka će biti sjecište dijagonala od $A_1A_2A_3A_4$.
Ako je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut sa središtem opisane kružnice O, nožišni četverokut je Varignonov paralelogram od $A_1A_2A_3A_4$, pa je u ovom slučaju O paralelogramska točka od $A_1A_2A_3A_4$.



Slika 13.

Iz toga slijedi:
Ako je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut, Simsonova točka je sjecište kružnica A_1A_3O i A_2A_4O različita od točke O.

4 Geometrijske nejednakosti u nožišnim četverokutima

U ovom poglavlju ćemo navesti i dokazati neke od zanimljivih i poznatih geometrijskih nejednakosti koje vrijede u nožišnim četverokutima.

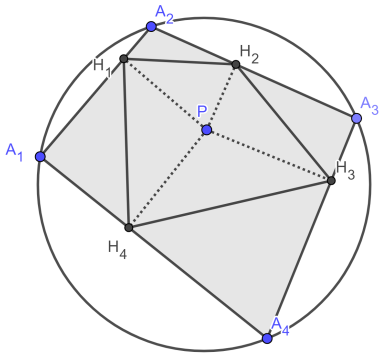
Propozicija 4.1.: Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut i P točka u unutrašnjosti tog četverokuta. Ako su nožišta okomica iz točke P na stranice $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_1A_4}$ redom točke H_1, H_2, H_3, H_4 i ako je radijus četverokutu opisane kružnice R, onda je

$$|H_1H_2| = \frac{|A_1A_3| \cdot |PA_2|}{2R}$$

$$|H_2H_3| = \frac{|A_2A_4| \cdot |PA_3|}{2R}$$

$$|H_3H_4| = \frac{|A_1A_3| \cdot |PA_4|}{2R}$$

$$|H_4H_1| = \frac{|A_2A_4| \cdot |PA_1|}{2R}$$



Slika 14.

Dokaz:
Kao što se vidi na slici (Slika 14.) i budući da su $\angle A_2H_1P, \angle A_1H_4P, \angle A_3H_3P, \angle A_4H_2P, = 90°$ četverokuti $A_1H_1PH_4, A_2H_2PH_1, A_3H_3PH_2, A_4H_4PH_3$ su tetivni četverokuti.
Po poučku o sinusu slijedi

$$|PA_2| = \frac{|H_1H_2|}{sin(\angle H_1PH_2)}$$

i

$$2R = \frac{|A_1A_3|}{sin(\pi - \angle H_1PH_2)} = \frac{|A_1A_3|}{sin(\angle H_1PH_2)}$$

Iz ovoga sada imamo

$$|H_1H_2| = \frac{|A_1A_3| \cdot |PA_2|}{2R}$$

Sada se lako dokaže da je

$$|H_2H_3| = \frac{|A_2A_4| \cdot |PA_3|}{2R}$$

$$|H_3H_4| = \frac{|A_1A_3| \cdot |PA_4|}{2R}$$

$$|H_4H_1| = \frac{|A_2A_4| \cdot |PA_1|}{2R}.$$

Time je tvrdnja dokazana.
Ovaj dokaz nam je bio uvod u sljedeću tvrdnju:

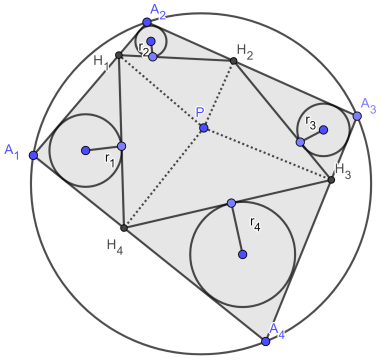
Propozicija 4.2.: Neka je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut i P točka u unutrašnjosti tog četverokuta. Ako su nožišta okomica iz točke P na stranice $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_1A_4}$ redom točke H_1, H_2, H_3, H_4 onda vrijedi

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqslant \frac{M \cdot C}{2\sqrt{2}}$$

gdje su r_1, r_2, r_3, r_4 redom polumjeri upisanih kružnica trokutima: $A_1H_1H_4$, $H_1A_2H_2, H_2A_3H_3, H_3A_4H_4$ i

$$M = max\Big\{\frac{1}{\sqrt{1 - cosA_1} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_2} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_3} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_4} + \sqrt{2}}, \Big\}$$

i C je opseg četverokuta $A_1A_2A_3A_4$.
Jednakost vrijedi ako je $A_1A_2A_3A_4$ kvadrat i točka P je izabrana kao središte kvadrata.



Slika 15.

Dokaz:
Promotrimo trokut $H_1A_2H_2$.
Po poučku o kosinusu slijedi da je

$$|H_1H_2| = \sqrt{|H_1A_2|^2 + |A_2H_2|^2 - 2 \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot cosA_2} \tag{5}$$

Ako je $S_{H_1A_2H_2}$ površina trokuta $H_1A_2H_2$, onda je

$$S_{H_1A_2H_2} = \frac{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot sinA_2}{2} \tag{6}$$

Kako je $2 \cdot S_{H_1A_2H_2} = (|H_1A_2| + |A_2H_2| + |H_1H_2|)r_2$ sada imamo

$$r_2 = \frac{2 \cdot S_{H_1A_2H_2}}{|H_1A_2| + |A_2H_2| + |H_1H_2|} \tag{7}$$

Iz jednakosti (6) i (7) sada imamo

$$r_2 = \frac{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot sinA_2}{|H_1A_2| + |A_2H_2| + |H_1H_2|} \tag{8}$$

to slijedi iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti

$$|H_1A_2|^2 + |A_2H_2|^2 \geqslant 2 \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \tag{9}$$

Ako se nejednakosti (5) i (9) promotre zajedno, onda je

$$\begin{aligned} |H_1H_2| &= \sqrt{|H_1A_2|^2 + |A_2H_2|^2 - 2 \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot cosA_2} \\ &\geqslant \sqrt{2 \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| - 2 \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot cosA_2} \end{aligned}$$

odnosno,

$$|H_1H_2| \geqslant \sqrt{2} \cdot \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|} \cdot \sqrt{1 - cosA_2} \tag{10}$$

Također je očito iz A-G nejednakosti da je

$$|H_1A_2| + |A_2H_2| \geqslant 2 \cdot \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|} \tag{11}$$

S druge strane, iz nejednakosti (10) i (11) uočavamo da je

$$|H_1A_2|+|A_2H_2|+|H_1H_2| \geqslant 2\cdot\sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|}\cdot\sqrt{1 - cosA_2} \tag{12}$$

Sada iz jednakosti (8) i (12) slijedi

$$r_2 \leqslant |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot \frac{sinA_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|} \cdot \sqrt{1 - cosA_2} + 2 \cdot \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|}} \tag{13}$$

$$\leqslant |H_1A_2| \cdot |A_2H_2| \cdot \frac{sinA_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|} \cdot (\sqrt{1 - cosA_2} + \sqrt{2})} \tag{14}$$

$$\leqslant \sqrt{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|} \cdot \frac{sinA_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cosA_2} + \sqrt{2}} \tag{15}$$

$$\leqslant \frac{|H_1A_2| \cdot |A_2H_2|}{2\sqrt{2}(\sqrt{1 - cosA_2} + \sqrt{2})} \tag{16}$$

Neka je

$$M = max\Big\{ \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_1} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_2} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_3} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - cosA_4} + \sqrt{2}}, \Big\},$$

Po nejednakosti (16)

$$r_2 \leqslant \frac{M \cdot |H_1A_2| \cdot |A_2H_2|}{2\sqrt{2}} \tag{17}$$

Slično se dobije

$$r_1 \leqslant \frac{M \cdot |H_1A_1| \cdot |A_1H_4|}{2\sqrt{2}} \tag{18}$$

$$r_3 \leqslant \frac{M \cdot |H_3A_3| \cdot |A_3H_2|}{2\sqrt{2}} \tag{19}$$

$$r_4 \leqslant \frac{M \cdot |H_3A_4| \cdot |A_4H_4|}{2\sqrt{2}} \tag{20}$$

Ako nejednakosti (17), (18), (19) i (20) zbrojimo po stranama, lako se vidi da je

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqslant \frac{M \cdot C}{2\sqrt{2}}$$

gdje je C opseg četverokuta $A_1A_2A_3A_4$.

Sada pretpostavimo da je $A_1A_2A_3A_4$ kvadrat s duljinom stranice $2a$, a točka P je u njegovom središtu.
Onda je površina trokuta $H_4A_1H_1 = S_{H_4A_1H_1}$, i onda je

$$S_{H_4A_1H_1} = \frac{2a + a\sqrt{2}}{2} \cdot r_1 = \frac{a^2}{2}$$

Stoga, sada imamo $r_1 = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$, a kako je $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, $C = 8a$ i $M = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ vrijedi sljedeća jednakost

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4 \cdot \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{8a \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{C \cdot M}{2\sqrt{2}}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

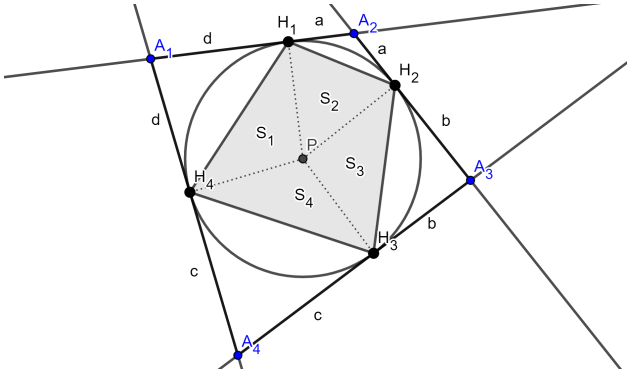
Propozicija 4.3.: Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tangencijalni četverokut površine S. Ako su središte četverokutu opisane kružnice točka P i njen radijus r, a nožišta okomica iz P na segmente $|A_1A_2|, |A_2A_3|, |A_3A_4|, |A_1A_4|$ redom H_1, H_2, H_3, H_4 onda vrijedi

$$\frac{S_N}{S} \leqslant 1 - \frac{1}{4r}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

gdje je $a = |A_2H_2|, b = |A_3H_2|, c = |A_4H_1|, d = |A_1H_1|$ i S_N je površina nožišnog četverokuta $H_1H_2H_3H_4$. Jednakost vrijedi ako je $A_1A_2A_3A_4$ kvadrat.

Dokaz:
Kao što se vidi iz slike 16. ako su S_1, S_2, S_3 i S_4 redom površine trokuta $H_4PH_1, H_1PH_2, H_2PH_3, H_3PH_4$ tada vrijedi

$$S_1 = d \cdot r - \frac{d^2 sinA_1}{2}$$
$$S_2 = a \cdot r - \frac{a^2 sinA_2}{2}$$
$$S_3 = b \cdot r - \frac{b^2 sinA_3}{2}$$
$$S_4 = c \cdot r - \frac{c^2 sinA_4}{2}$$



Slika 16.

Stoga, očito je

$$S_1+S_2+S_3+S_4 = r(a+b+c+d)-\frac{1}{2}(a^2sinA_2+b^2sinA_3+c^2sinA_4+d^2sinA_1)$$

Također vrijedi: $S = r(a+b+c+d)$, pa vrijedi

$$\frac{S_N}{S} = \frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S} = 1 - \frac{a^2sinA_2+b^2sinA_3+c^2sinA_4+d^2sinA_1}{2r(a+b+c+d)} \tag{21}$$

Iz Cauchy-Schwarz nejednakosti slijedi

$$a+b+c+d = a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1 \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}$$
$$= 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

stoga,

$$-\frac{1}{a+b+c+d} \leqslant -\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Iz jednakosti (21) sada slijedi

$$\begin{aligned}\frac{S_N}{S} &= 1 - \frac{a^2sinA_2+b^2sinA_3+c^2sinA_4+d^2sinA_1}{2r(a+b+c+d)}\\ &\leqslant 1 - \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4r\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}\\ &= 1 - \frac{1}{4r}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $A_1A_2A_3A_4$ kvadrat i da je $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_1A_4| = 2a$.
Budući da je $r = a$, onda je $S = 4a^2$, a $S_N = 2a^2$ imamo da je

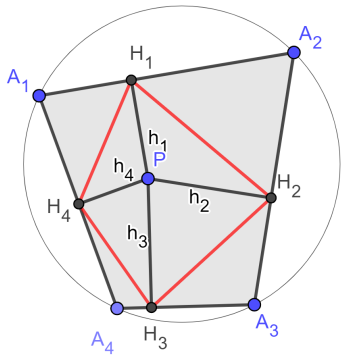
$$\frac{S_N}{S} = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4a}\sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + a^2} = 1 - \frac{1}{4r}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

Sada izvodimo i dokazujemo nejednakost koja se može smatrati analogonom poznate Erdös-Mordellove nejednakosti za trokut (Teorem 2.4. u ovom radu).

Teorem 4.4.: Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut i P točka unutar četverokuta. Ako su nožišta okomica iz P na segmente $|A_1A_2|, |A_2A_3|, |A_3A_4|, |A_1A_4|$ redom H_1, H_2, H_3, H_4 onda vrijedi

$$|PA_1| + |PA_2| + |PA_3| + |PA_4| > 4\sqrt[4]{|PH_1| \cdot |PH_2| \cdot |PH_3| \cdot |PH_4|}$$



Slika 17.

Dokaz:
Neka je $|PH_1| = h_1, |PH_2| = h_2, |PH_3| = h_3, |PH_4| = h_4$. Tada po poučku o kosinusu imamo

$$|H_1H_2| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2cos(\pi - A_2)}$$

$$|H_2H_3| = \sqrt{h_2^2 + h_3^2 - 2h_2h_3cos(\pi - A_3)}$$

$$|H_3H_4| = \sqrt{h_3^2 + h_4^2 - 2h_3h_4cos(\pi - A_4)}$$

$$|H_4H_1| = \sqrt{h_4^2 + h_1^2 - 2h_4h_1cos(\pi - A_1)}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}|H_1H_2|^2 &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2cos(\pi - A_2)\\ &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2cos(A_1 + A_3 + A_4 - \pi)\\ &= h_1^2 + h_2^2 + 2h_1h_2cos(A_1 + A_3 + A_4)\\ &= h_1^2 + h_2^2 + 2h_1h_2cos(A_1 + A_3)cosA_4 - 2h_1h_2sin(A_1 + A_3)sinA_4\end{aligned}$$

Sada uočimo da grupiranjem članova na pravi način imamo

$$h_2^2(sin^2A_4 + cos^2A_4) = h_2^2$$

i

$$h_1^2(sin^2(A_1 + A_3) + cos^2(A_1 + A_3) = h_1^2$$

pa sada prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$|H_1H_2|^2 = (h_2sinA_4 - h_1sin(A_1 + A_3))^2 + (h_2cosA_4 + h_1cos(A_1 + A_3))^2$$

Kako je $A_1 + A_3 = \pi$ slijedi da je

$$|H_1H_2|^2 = (h_2sinA_4)^2 + (h_2cosA_4 - h_1)^2.$$

Pretpostavimo da je $(h_2cosA_4 - h_1)^2 = 0$, onda je $cosA_4 = \frac{h_1}{h_2}$.
Kako je $\angle H_1PH_2 = \angle A_4$ po poučku o kosinusu vrijedi

$$\begin{aligned}|H_1H_2|^2 &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2cos(\pi - A_4)\\ &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2\frac{h_1}{h_2}\\ &= h_2^2 - h_1^2\end{aligned}$$

Sada imamo da je $h_2^2 = |H_1H_2|^2 + h_1^2$ što povlači da je kut $\angle PH_1H_2 = 90°$, a to je kontradikcija.
Dakle, $(h_2cosA_4 - h_1)^2 \neq 0$.
Sada se lako dokaže da je:

$$|H_1H_2| > h_2sinA_4 \tag{22}$$

Slično se dokaže i

$$|H_2H_3| > h_3sinA_1 \tag{23}$$
$$|H_3H_4| > h_4sinA_2 \tag{24}$$
$$|H_4H_1| > h_1sinA_3 \tag{25}$$

Kako su $PH_1A_2H_2, PH_2A_3H_3, PH_3A_4H_4, PH_4A_1H_1$ tetivni četverokuti, primjenom poučka o sinusu na trokute $A_1H_1H_4, A_2H_2H_1, A_3H_3H_2, A_4H_4H_3$ dobivamo redom

$$|PA_1| = \frac{|H_1H_4|}{sinA_1} \tag{26}$$

$$|PA_2| = \frac{|H_1H_2|}{sinA_2} \tag{27}$$

$$|PA_3| = \frac{|H_2H_3|}{sinA_3} \tag{28}$$

$$|PA_4| = \frac{|H_3H_4|}{sinA_4} \tag{29}$$

Ako se nejednakosti (22), (23), (24) i (25) promatraju skupa s jednakostima (26), (27), (28) i (29), onda je

$$|PA_2| = \frac{|H_1H_2|}{sinA_2} > \frac{h_2 sinA_4}{sinA_2}$$
$$|PA_3| = \frac{|H_2H_3|}{sinA_3} > \frac{h_3 sinA_1}{sinA_3}$$
$$|PA_4| = \frac{|H_3H_4|}{sinA_4} > \frac{h_4 sinA_2}{sinA_4}$$
$$|PA_1| = \frac{|H_1H_4|}{sinA_1} > \frac{h_1 sinA_3}{sinA_1}$$

Sada se lako vidi da je

$$\begin{aligned} |PA_1| + |PA_2| + |PA_3| + |PA_4| &> \frac{h_1 sinA_3}{sinA_1} + \frac{h_2 sinA_4}{sinA_2} + \frac{h_3 sinA_1}{sinA_3} + \frac{h_4 sinA_2}{sinA_4} \\ &\geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{h_1 sinA_3}{sinA_1} \cdot \frac{h_2 sinA_4}{sinA_2} \cdot \frac{h_3 sinA_1}{sinA_3} \cdot \frac{h_4 sinA_2}{sinA_4}} \\ &= 4 \cdot \sqrt[4]{|PH_1| \cdot |PH_2| \cdot |PH_3| \cdot |PH_4|} \end{aligned}$$

što vrijedi po A-G nejednakosti.

Time je teorem dokazan.
Ovaj teorem neki geometričari smatraju analogonom Erdös-Mordellove nejednakosti za četverokute jer je poveznica zbroja udaljenosti neke točke P od vrhova četverokuta i udaljenosti te točke od njegovih stranica. Uočavamo kako je ova nejednakost kompliciranija od nejednakosti za trokut, pa možda

se u budućnosti uspije dokazati i neka jednostavnija jednakost ili nejednakost za nožišne četverokute.

5 Neka svojstva nožišnih poligona

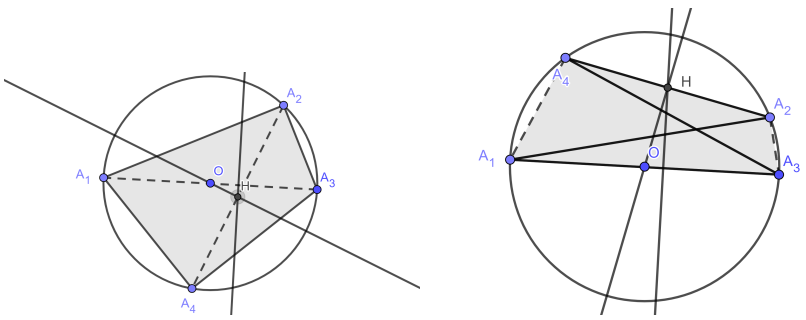
U ovom poglavlju ćemo navesti i dokazati neke od zanimljivih tvrdnji koje vrijede za nožišne poligone.
Kako bi zapis tvrdnji bio jednostavniji, uvedimo nove oznake.
Neka je N poligon s n stranica. Kod poligona N promatramo nožišni poligon H točke P s obzirom na N.
Označimo s Q_i četverokut $PH_iA_{i+1}H_{i+1}$ za $i = 1, 2, ..., n$. Kako su kutovi pri H_i i H_{i+1} pravi, Q_i ne može biti konkavan.
Prije nego krenemo dokazivati tvrdnje, definirajmo, odnosno ponovimo definicije nekih, ne tako čestih pojmova:

Definicija 5.1.: Maltituda je dužina u mnogokutu koja je okomita na jednu stranicu mnogokuta i prolazi kroz polovište njoj nasuprotne stranice.

Definicija 5.2.: Anticentar je sjecište maltituda.

Sada možemo dokazati sljedeću tvrdnju:

Propozicija 5.1.: Neka je $A_1A_2A_3A_4$ konveksan ili križni četverokut takav da su $\angle A_1A_2A_3$ i $\angle A_3A_4A_1$ pravi kutovi. Tada je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut. Nadalje, središte opisane kružnice je polovište od A_1A_3, a anticentar je polovište od A_2A_4.



Slika 18.

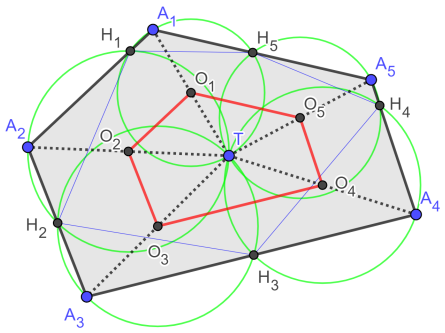
Dokaz:
Neka je $A_1A_2A_3A_4$ konveksan ili križni četverokut kojem su kutovi $\angle A_1A_2A_3$ i $\angle A_3A_4A_1$ pravi. Tada je on tetivan s dijagonalom A_1A_3 kao promjerom. (Kada je križni četverokut, tada je upisan u polukružnicu s promjerom A_1A_3). Tada je središte opisane kružnice O koja je polovište od A_1A_3.
Promotrimo okomice na dijagonale A_1A_3 i A_2A_4. Okomica kroz O je okomita

na tetivu A_2A_4 opisane kružnice, pa zato prolazi kroz polovište dužine $\overline{A_2A_4}$, točku H. Također, maltituda na A_1A_3 prolazi kroz H, stoga je H anticentar četverokuta $A_1A_2A_3A_4$. Primijetimo da se maltitude u križnom četverokutu također sijeku jer su one također maltitude u tetivnom četverokutu.
Time je tvrdnja dokazana.

Po propoziciji 5.1., četverokuti Q_i su tetivni. Označimo s O_i i A_i' središte opisane kružnice i anticentar od Q_i redom. Poligon $O_1O_2...O_n$ zovemo poligon središta opisanih kružnica od $A_1A_2...A_n$ u odnosu na točku T i označavamo ga s $P_c(T)$. Poligon $A_1'A_2'...A_n'$ zovemo poligon anticentara od $A_1A_2...A_n$ u odnosu na točku T i označavamo ga s $P_a(T)$.

Teorem 5.2.: Poligon $P_c(T)$ je slika od $A_1A_2...A_n$ po homotetiji $H(T, \frac{1}{2})$.

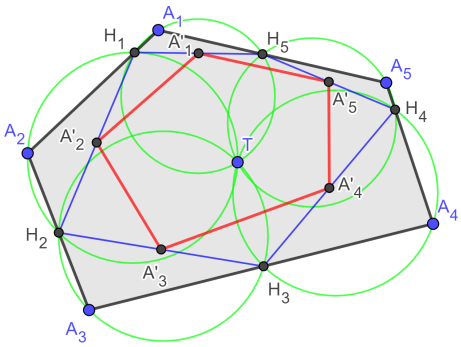
Dokaz:
Po propoziciji 5.1., središta opisanih kružnica od Q_i je polovište od A_iT te je time teorem dokazan. (Slika 19. za peterokut.)



Slika 19.

Primijetimo da mijenjanjem točke T, poligoni $P_c(T)$ su svi sukladni (po translaciji).

Teorem 5.3.: Poligon $P_a(T)$ je središnji poligon od $A_1A_2...A_n$ s vrhovima na polovištima dužina $\overline{H_iH_{i+1}}$ za $i = 1, 2, ..., n$



Slika 20.

Dokaz:
Po propoziciji 5.1., anticentar A_i' od $A_1A_2...A_n$ je polovište od $\overline{H_iH_{i+1}}$ te je time teorem dokazan. (Slika 20. za peterokut.)

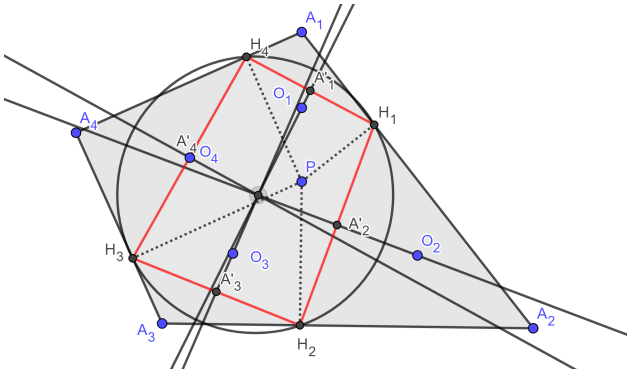
Korolar 5.4.:

a) Ako je $A_1A_2A_3$ trokut, $P_a(T)$ je medijalni trokut od $H_1H_2H_3$.

b) Ako je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut, $P_a(T)$ je Varignonov paralelogram od $H_1H_2H_3H_4$.

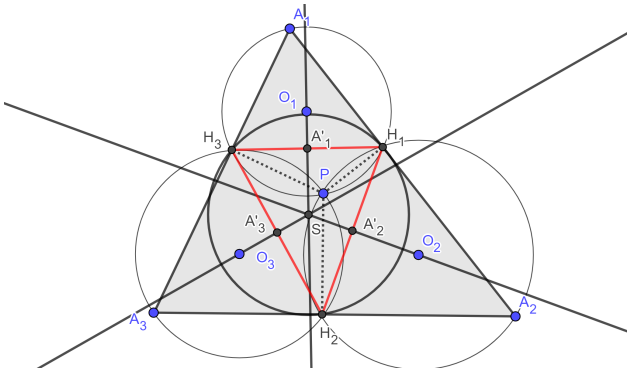
Teorem 5.5.: Ako je $H_1H_2H_3H_4$ tetivni četverokut, Eulerovi pravci četverokuta Q_i prolaze središtem opisane kružnice od $H_1H_2H_3H_4$.

Dokaz:
Eulerov pravac četverokuta Q_i prolazi kroz središta opisanih kružnica od Q_i i prolazi kroz anticentar A_i' od Q_i, a onda prolazi i kroz polovište od $\overline{H_iH_{i+3}}$ pa je onda okomit na stranice od H_i. (Slika 21. za četverokut). Time je teorem dokazan.



Slika 21.

Korolar 5.6.: Ako je $A_1A_2A_3$ trokut, Eulerovi pravci četverokuta Q_i sijeku se u središtu opisane kružnice od $H_1H_2H_3$. (Slika 22.)



Slika 22.

Napomena:
Ako je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut i $H_1H_2H_3H_4$ nije tetivan, Eulerovi pravci četverokuta Q_i određuju četverokut koji je afina slika četverokuta $H_1H_2H_3H_4$.

Sljedeći cilj nam je dokazati Steinerov teorem o zanimljivom svojstvu povezanom s površinom nožišnih poligona.
U tu svrhu najprije ćemo navesti činjenicu iz geometrije trokuta poznatu kao Stewartov teorem.

Teroem 5.7. (Stewart): Neka je ABC trokut i D točka na stranici $\overline{BC}$. Tada vrijedi:

$$a \cdot (|AD|^2 + |BD| \cdot |DC|) = b^2 \cdot |BD| + c^2 \cdot |DC|$$

Dokaz:
Primjenom poučka o kosinusu na trokute ABD i ADC dobivamo, uz oznaku $\angle BDA = \phi$ i zbog $\angle ADC = \pi - \phi$

$$c^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot cos\phi$$

$$b^2 = |AD|^2 + |CD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot cos\phi.$$

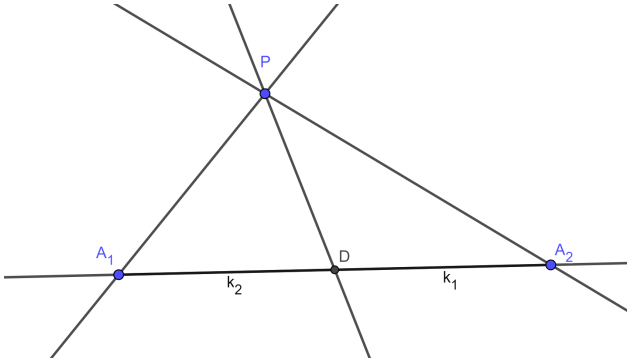
Eliminacijom $cos\phi$ i sređivanjem dobivenog izraza slijedi tražena jednakost.

Stewartov teorem primijenit ćemo u sljedećoj propoziciji koja je bitna za dokaz Steinerova teorema.

Propozicija 5.8.: Zadano je n točaka $A_1, ..., A_n$ u ravnini i n pozitivnih realnih brojeva $k_1, ..., k_n$. Neka je K neprazan skup svih točaka P u ravnini takvih da vrijedi

$$k_1 \cdot |PA_1|^2 + ... + k_n \cdot |PA_n|^2 = k$$

pri čemu je k konstanta. Tada je K kružnica. Pritom, sve takve kružnice za različite vrijednosti k su koncentrične.



Slika 23.

Dokaz:
Dokaz se provodi indukcijom po n.
Za $n = 2$ tvrdnja slijedi iz Stewartovog teorema, primijenjenog na trokut PA_1A_2.
Neka je D točka na stranici $\overline{A_1A_2}$ koja tu stranicu dijeli u omjeru

$$|\overline{A_1D}| : |\overline{DA_2}| = k_2 : k_1.$$

Budući da je $|\overline{A_1D}| + |\overline{DA_2}| = |\overline{A_1A_2}|$ lako uočavamo:

$$|A_1D| = \frac{k_2 \cdot |A_1A_2|}{k_1 + k_2}, |DA_2| = \frac{k_1 \cdot |A_1A_2|}{k_1 + k_2}.$$

Iz Stewartovog teorema slijedi

$$|\overline{A_1A_2}| \cdot (|\overline{PD}|^2 + \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot |\overline{A_1A_2}|^2}{(k_1 + k_2)^2}) = |\overline{PA_2}|^2 \cdot \frac{k_2 \cdot |\overline{A_1A_2}|}{k_1 + k_2} + |\overline{PA_1}|^2 \cdot \frac{k_1 \cdot |\overline{A_1A_2}|}{k_1 + k_2}$$

odnosno

$$|\overline{PD}|^2 = |\overline{PA_2}|^2 \cdot \frac{k_2}{k_1 + k_2} + |\overline{PA_1}|^2 \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot |\overline{A_1A_2}|^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Desna strana je konstanta zbog

$$k_1 \cdot |PA_1|^2 + k_2 \cdot |PA_2|^2 = k.$$

Stoga je $|PD|$ konstanta pa je D središte kružnice na kojoj se nalaze sve točke P s traženim svojstvima.
Za polumjer r te kružnice vrijedi

$$r^2 = \frac{k}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_1 + k_2)^2} \cdot |\overline{A_1 A_2}|^2.$$

Za korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo kojih n točaka i neku konstantu k.
Neka je sada

$$k_1 \cdot |\overline{PA_1}|^2 + ... + k_n \cdot |\overline{PA_n}|^2 + k_{n+1} \cdot |\overline{PA_{n+1}}|^2 = k$$

Sada možemo $k_1 \cdot |\overline{PA_1}|^2 + k_2 \cdot |\overline{PA_2}|^2$ zamijeniti jednakim brojem

$$(k_1 + k_2) \cdot |\overline{PD}|^2 + \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_1 + k_2)} \cdot |\overline{A_1 A_2}|^2,$$

pri čemu je točka D izabrana kao u slučaju $n = 2$.
Sada je

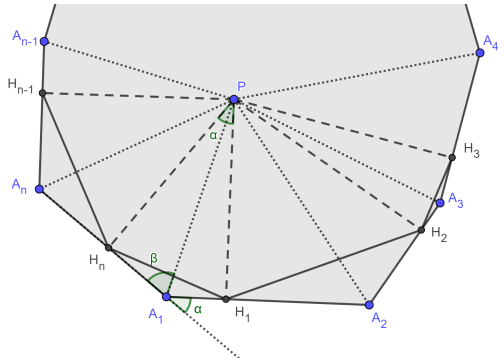
$$(k_1 + k_2) \cdot |\overline{PD}|^2 + k_3 |\overline{PA_3}|^2 + ... + k_{n+1} |\overline{PA_{n+1}}|^2 = k - \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_1 + k_2)} \cdot |\overline{A_1 A_2}|^2.$$

Imamo n točaka $D, A_3, ..., A_{n+1}$ i koeficijente $k_1 + k_2, k_3, ..., k_{n+1}$ te konstantu

$$k - \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_1 + k_2)} \cdot |\overline{A_1 A_2}|^2$$

pa primijenimo pretpostavku indukcije.
Time je tvrdnja dokazana.

Teorem 5.9. (Steiner): Neka je $A_1 A_2 ... A_{n-1} A_n$ poligon, a $H_1 H_2 ... H_{n-1} H_n$ nožišni poligon točke P s obzirom na taj poligon. Nadalje, neka je K geometrijsko mjesto točaka P takvih da površina pripadnih nožišnih poligona $H_1 H_2 ... H_{n-1} H_n$ ima konstantnu vrijednost k. Tada je K kružnica, a sve tako dobivene kružnice za različite vrijednost konstante k su koncentrične.



Slika 24.

Dokaz:
Tvrdnju ćemo pokazati pomoću razlike u površinama.
Neka je $D = S(H_nA_1H_1CP) - 2 \cdot S(H_nH_1P)$

Tada je

$$\begin{aligned} S(H_nA_1H_1P) &= S(H_nH_1A_1) + S(H_nH_1P) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|H_nA_1| \cdot |A_1H_1 sin(\alpha) + |PH_n||PH_1|sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Kako je

$$2S(H_nH_1P) = |PH_n| \cdot |PH_1| \cdot sin(\alpha)$$

sada je

$$D = \frac{1}{2} \cdot sin(\alpha) \cdot (|H_nA_1| - |PH_n||PH_1|).$$

Koristeći kut β, sada imamo

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \cdot sin(\alpha) \cdot |PA_1|^2 \cdot (cos(\beta) \cdot cos(A_1 - \beta) - sin(\beta) \cdot sin(A_1 - \beta)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot sin(\alpha) \cdot |PA_1|^2 \cdot cos(A_1) \end{aligned}$$

Kako je

$$sin(\beta) = \frac{|PH_n|}{|PA_1|}$$

i

$$cos(A_1 - \beta) = \frac{|PH_1|}{|PA_1|}$$

slijedi da je

$$D = \frac{1}{4} \cdot sin(2A_1)|PA_1|^2$$

Kako suma površina svih četverokuta $H_{i-1}A_iH_iP$ daje površinu cijelog poligona $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, a suma svih trokuta $H_{i-1}H_iP$ površinu cijelog nožišnog poligona $H_1H_2...H_{n-1}H_n$, tada je razlika tih površina dana s

$$S(A_1A_2...A_{n-1}A_n) - S(H_1H_2...H_{n-1}H_n) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 sin(2A_i)$$

Kako je površina nožišnog poligona konstanta, težinska suma kvadrata također je konstantna.
Po Propoziciji 5.8, geometrijsko mjesto točaka P je kružnica.
Time je teorem dokazan.

Za kraj, navedimo neke od analogona teorema i propozicija koji vrijede za četverokute, a odnose se na mnogokute općenito.

Analogon za Propoziciju 4.2.

Propozicija 5.10.: Neka je $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ mnogokut i točka P unutar mnogokuta. Ako su nožišta okomica iz točke P na segmente $|A_1A_2|, |A_2A_3|$, $..., |A_nA_1|$ redom $H_1, H_2, ..., H_n$, onda je

$$r_1 + r_2 + ... + r_n \leqslant \frac{M \cdot C}{2\sqrt{2}}$$

gdje su $r_1, r_2, ..., r_n$ redom radijusi upisanih kružnica trokutima $A_1H_1H_n$, $H_1A_1H_2, ..., H_{n-1}A_nH_n$ i

$$M = max\Big\{\frac{1}{\sqrt{1-cosA_1}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1-cosA_2}+\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{1-cosA_n}+\sqrt{2}}\Big\}$$

i C je opseg mnogokuta $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Jednakost vrijedi ako je mnogokut kvadrat, a P je izabrana kao središte kvadrata.

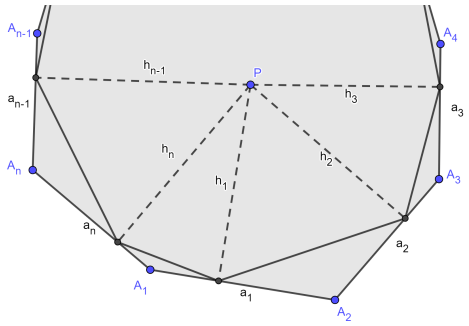
Dokaz:
Dokaz se svodi na dokaz Propozicije 4.2. gdje se na kraju dokaza zbroji n jednadžbi i dobije se tražena tvrdnja.

Propozicija 5.11.: Neka je P točka unutar mnogokuta $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ gdje je $|A_1A_2| = a_1, |A_2A_3| = a_2, ..., |A_nA_1| = a_n$. Ako su duljine okomica

iz točke P na stranice mnogokuta $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ redom $h_1, h_2, ..., h_n$ onda vrijedi:

$$\frac{S}{C^2} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}}$$

pri čemu je S površina, a C opseg mnogokuta $A_1A_2...A_{n-1}A_n$.
Jednakost vrijedi ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ i $h_1 = h_2 = ... = h_n = h$.



Slika 25.

Dokaz:

Kao što lako možemo vidjeti na slici 24.

$$2S = a_1h_1 + a_2h_2 + ... + a_nh_n$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$(a_1h_1 + a_2h_2 + ... + a_nh_n) \cdot \left(\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}\right) \geqslant (\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2})^2$$

Slijedi da je

$$2S \cdot \left(\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}\right) \geqslant (\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2})^2$$

zatim da je

$$2S \geqslant \frac{(\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2})^2}{\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}} = \frac{C^2}{\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}}$$

iz čega slijedi

$$\frac{S}{C^2} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}}$$

Sada pretpostavimo da je $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ i $h_1 = h_2 = ... = h_n = h$
Imamo
$S = n \cdot \frac{ah}{2}, C = na$ pa je:

$$\frac{S}{C^2} = \frac{nah}{2n^2a^2} = \frac{h}{2na} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a}{h} + \frac{a}{h} + ... + \frac{a}{h}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} + ... + \frac{a_n}{h_n}}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

6 Literatura:

1 D. Ferrarello, M. F. Mammana, M. Pennisi, *Pedal Polygons*, Forum Geometricorum, 13 (2013.), 153-164.

2 D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.

3 E. Kalčić, *Miquelov teorem*, https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A314 datastream/PDF/view (Lipanj 2020.)

4 S. Meherrem, G. G. Açiksöz, S. Şen, Z. Sezer, G. Başkes, *Geometric Inequalities in Pedal Quadrilaterals*, Forum Geometricorum, 18 (2018.), 309-320.

7 Sažetak

U ovom radu prikazani su raznovrsni rezultati o nožišnim poligonima, dakle poligonima čiji su vrhovi nožišta okomica spuštenih iz neke točke u ravnini na stranice nekog poligona. U većini slučajeva riječ je o četverokutima, no ima rezultata koji se odnose na n-terokute općenito.

U euklidskoj geometriji trokuta odavno je poznato mnogo teorema o nožišnim trokutima pa je u prvom poglavlju izložen dio takvih rezultata. Istaknimo nejednakost poznatu kao Erdös-Mordellov teorem, budući da se kasnije u radu dokazuje teorem za tetivne četverokute koji se može smatrati nekom vrstom analogona te nejednakosti.

Istaknimo još dokaz svojstva četverokuta, različitog od paralelograma, da postoji točno jedna točka sa svojstvom da su nožišta okomica na stranice četverokuta kolinearne točke. Po analogiji s poznatim svojstvom iz geometrije trokuta, ta se jedinstvena točka naziva Simsonovom točkom, a pravac na kojem leže nožišta okomica naziva se Simsonov pravac četverokuta.

Dokazane su još različite nejednakosti za n-terokute koje su analogoni poznatim rezultatima za četverokute te Steinerov teorem o kružnici koju čine točke čiji pridruženi nožišni poligoni imaju konstantnu površinu.

8 Summary

In this paper we present various results on pedal polygons, polygons whose vertices are the pedal points of the perpendiculars lowered from some point in the plane to the sides of some polygon. In most cases here, quadrilaterals are investigated, but there are results that are referred to polygons in general.

Many theorems about pedal polygons have been known in Euclidean geometry for a long time, and a part of such results is presented in the first chapter. One of them is the inequality known as the Erdös-Mordell's theorem, since later in this paper an inequality for pedal quadrilateral in a cyclic quadrilateral is proven, which could be considered as a kind of analogue of that theorem.

A remarkable property of any quadrilateral different from a parallelogram is proven, namely that there is exactly one point such that the corresponding pedal points on the sides of the quadrilateral are collinear. By analogy with the known property from the geometry of a triangle, this unique point is called Simson's point, and the line in which the pedal points lie is called the Simson line of the quadrilateral.

Various inequalities for pedal polygons are proven, as well as the classical Steiner's theorem on a circle obtained as the locus of points whose associated pedal polygons have the area equal to a given constant

9 Životopis

Rođen sam 11.08.1992. u Požegi. Završio sam OŠ "Mladost" Jakšić, u Jakšiću, zatim sam upisao Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Požegi, te sam 2011. upisao nastavnički smjer na odsjeku Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Tijekom studiranja sam 4 godine radio u Mc Donald'su te sam povremeno radio kao zamjena za profesora matematike u Gimnaziji u Požegi.