Metoda konačnih elemenata za Stokesov sustav

Ciganović, Vedran

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vedran Ciganović

METODA KONAČNIH ELEMENATA ZA STOKESOV SUSTAV

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem prof. dr. sc. Mladenu Juraku za ideju prema kojoj je izrađen ovaj rad te za pomoć pruženu tijekom izrade i pisanja.

Sadržaj

Uvod

Stokesov sustav je specijalan slučaj Navier-Stokesovog sustava koji opisuje gibanje Newtonovog fluida. Mi promatramo samo slučaj nestlačivog, homogenog fluida u kojem je gustoća mase vremenski i prostorno konstanta. Stokesov sustav (kao i Navier-Stokesov sustav) može biti stacionarni i nestacionarni (evolucijski). Stacionarni Stokesov sustav dobijemo iz stacionarnog Navier-Stokesovog sustava zanemarivanjem nelinearnog člana $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ i on glasi:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{u } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \, d = 2, 3 \\ div\, \mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

gdje je $\mu > 0$ viskoznost fluida — konstanta, $\mathbf{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ dana vanjska volumna sila, dok su brzina $\mathbf{u} \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ i tlak $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ nepoznanice.

Metoda konačnih elemenata se formulira u dva koraka. U prvom koraku se formulira varijacijska aproksimacija, a u drugom koraku se definira prostor konačnih elemenata koji se koristi u varijacijskoj aproksimaciji. Varijacijska aproksimacija se dobiva jednostavnom zamjenom beskonačnodimenzionalnih prostora konačnodimenzionalnim. Prije toga treba matematički formulirati problem pomoću mješovite varijacijske formulacije (koja je osnova za metodu konačnih elemenata za Stokesov sustav).

Poglavlje 1

Stokesov sustav

1.1 Matematički model

Jednadžbe koje opisuju gibanje nestlačivog viskoznog fluida su izvedene iz dva zakona očuvanja. To je zakon očuvanja mase i količine gibanja. Zakon očuvanja mase zapisuje se u obliku jednadžbe kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

gdje je $\mathbf{u}$ brzina fluida, a ρ gustoća mase fluida. U slučaju inkompresibilnog fluida s konstantnom gustoćom jednadžba kontinuiteta se svodi na $div\ \mathbf{u} = 0$. Za izvod jednadžbe kontinuiteta vidjeti [4] ili [7]. Formula koja će nam trebati u nastavku je akceleracija u Eulerovoj reprezentaciji

$$\gamma = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \tag{1.2}$$

čiji jednostavni izvod je također u [4] i [7]. Zapis zakona za očuvanje količine gibanja ili impulsa je fundamentalni zakon gibanja ([4], [7])

$$\rho\gamma = f + div\sigma. \tag{1.3}$$

U njemu je f volumna sila, a σ tenzor naprezanja. Tu dolazimo do pojma viskoznosti Newtonovog fluida. Viskoznost Newtonovog fluida je posljedica relativnog gibanja dijelova fluida, a mjera tog gibanja je gradijent brzine. Newtonov fluid je fluid kod kojeg tenzor naprezanja linearno ovisi o simetričnom gradijentu brzine (inače je nenewtonovski). Newtonov fluid je najjednostavniji matematički model viskoznih fluida. Prema tome

$$\sigma = \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - pI, \tag{1.4}$$

gdje je μ dinamički koeficijent viskoznosti, a p tlak. Dakle, ako sumiramo zakon očuvanja mase i zakon očuvanja količine gibanja dobivamo da je gibanje homogenog i nestlačivog newtonovskog fluida određeno Navier-Stokesovim jednadžbama

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \tag{1.5}$$

$$div\, \mathbf{u} = 0. \tag{1.6}$$

Uz navedene jednadžbe potrebno je postaviti rubne i inicijalne uvjete za brzinu. Rubni uvjeti za tlak se ne postavljaju jer je tlak posve zadan (do na aditivnu konstantu) ako je poznata brzina. Jedan mogući rubni uvjet za brzinu je $\mathbf{u} = 0$ na rubu (tzv. no-slip rubni uvjet), a općenito $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ na rubu gdje je $\mathbf{g}$ zadana vektorska funkcija. Inicijalni uvjet može biti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Bezdimenzionalni zapis Navier-Stokesovih jednadžbi uključuje u sebi bezdimenzionalni parametar koji se zove Reynoldsov broj koji mjeri laminarnost odnosno turbulentnost toka. Kod laminarnosti dominiraju viskozne sile i male brzine, a kod tubulentnosti prevladava nelinearan član i velike brzine. Za dani problem, neka je L karakteristična duljina i U karakteristična brzina toka čime je određeno karakteristično vrijeme $T = L/U$. Tada uvodimo bezdimenzionalne veličine

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}/U, \quad t' = t/T. \tag{1.7}$$

Koristeći ovakvu zamjenu varijabli, lako je provjeriti ([8]) da (kad definiramo Reynoldsov broj Re kao $Re = LU/\nu$, gdje je $\nu = \mu/\rho$ kinematička viskoznost) se Navier-Stokesove jednadžbe mogu zapisati bezdimenzionalnim varijablama

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{1.8}$$

$$div\, \mathbf{u} = 0, \tag{1.9}$$

gdje je "*novi*" p = ("*stari*" $p)/(\rho U^2)$, a "*novi*" $\mathbf{f}$ = ("*stari*" $\mathbf{f})L/U^2$. Sada uvodimo dva pojednostavljenja. Prvo pojednostavljenje je da promatramo samo stacionarni slučaj ($\partial \mathbf{u}/\partial t = \mathbf{0}$). Drugim pojednstavljenjem pretpostavljamo da je brzina $\mathbf{u}$ dovoljno mala (i Re dovoljno mali) da možemo zanemariti nelinearni član $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ nasuprot članu $\frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u}$. Tada dobivamo poznati oblik Stokesovog sustava

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{u } \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3 \\ div\, \mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Slijedi formalni izvod u najjednostavnijem slučaju $\mathbf{f} = 0$. Za to nam je potreban toerem o dekompoziciji ([2]).

Teorem 1.1.1. *Neka je D domena s glatkim rubom ∂D. Dovoljno glatka funkcija $\mathbf{w}$ na D se može rastaviti na jedinstven način u oblik*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p, \tag{1.11}$$

gdje je $div\ \mathbf{u} = 0$ i $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ na ∂D.

Dokaz. Prvo dokažimo relaciju ortogonalnosti

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0. \tag{1.12}$$

Koristeći jednakost

$$div\ (p\mathbf{u}) = (div\ \mathbf{u})p + \mathbf{u} \cdot \nabla p, \tag{1.13}$$

uz $div\ \mathbf{u} = 0$ i teorem o divergenciji dobivamo

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \nabla p = \int_D div\ (p\mathbf{u}) = \int_{\partial D} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{1.14}$$

jer je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ na ∂D. Koristimo ortogonalnost da dokažemo jedinstvenost. Pretpostavimo da je $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = \mathbf{u}_2 + \nabla p_2$. Tada

$$0 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \nabla(p_1 - p_2). \tag{1.15}$$

Skalarnim množenjem s $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ i integriranjem dobivamo

$$0 = \int_D \{\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla(p_1 - p_2)\} = \int_D \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2, \tag{1.16}$$

koristeći ortogonalnost. Dakle, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ i $\nabla p_1 = \nabla p_2$. Ako $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p$, tada $div\ \mathbf{w} = div\ \nabla p = \Delta p$ i $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p$. Ovo koristimo kako bismo dokazali egzistenciju. Uistinu, za dani $\mathbf{w}$, neka je p dan rješenjem Neumannovog problema

$$\Delta p = div\ \mathbf{w} \quad \text{u } D, \quad \text{s} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } \partial D. \tag{1.17}$$

Taj problem ima rješenje koje je jedinstveno do na aditivnu konstantu, jer vrijedi $\int_D div\ \mathbf{w} = \int_{\partial D} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$. S takvim p definiramo $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \nabla p$. Tada, očito $\mathbf{u}$ ima željena svojstva $div\ \mathbf{u} = 0$ i $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. □

Sada je prirodno uvesti operator $\mathbb{P}$, operator ortogonalne projekcije, koji preslikava $\mathbf{w}$ na svoj dio $\mathbf{u}$ s divergencijom jednakom nula. Uočimo da tada $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ i $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$.

Da bismo mogli uspoređivati nelinearni i viskozni (disipativni) član, eliminirat ćemo tlak pomoću gornjeg teorema. Tada dobivamo

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbb{P}\left(-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u}\right), \tag{1.18}$$

jer budući da je divergencija $\mathbf{u}$ jednaka nuli, tada je i divergencija $\partial_t \mathbf{u}$ jednaka nuli (ako je $\mathbf{u}$ dovoljno glatka). Pretpostavljajući da je Re malo, možemo zanemariti $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ prema $\Delta\mathbf{u}/Re$, pa imamo

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{1}{Re}\mathbb{P}(\Delta\mathbf{u}). \tag{1.19}$$

Time vidimo da se zadaća može formulirati samo u terminima brzine. Prema definiciji operatora $\mathbb{P}$, postoji tlak p, takav da je

$$\frac{1}{Re}\mathbb{P}(\Delta\mathbf{u}) = \frac{1}{Re}(\Delta\mathbf{u}) - \nabla p, \tag{1.20}$$

pa iz (1.19) dobivamo

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{1}{Re}(\Delta\mathbf{u}) - \nabla p, \tag{1.21}$$

odnosno tlak u Stokesovom sustavu je moguće rekonstruirati iz brzine. Za stacionarni tok u dimenzionalnom obliku Stokesov sustav glasi

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ div\,\mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Očekujemo da linearni Stokesov sustav dobro opisuje tok Newtonovog fluida ako je Re malo. To je Stokesov tok koji se ostvaruje, na primjer, u slučaju velike viskoznosti ili male brzine kada inercijske sile, reprezentirane nelinearnim članom $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ ne dolaze do izražaja.

1.2 Prostori funkcija

Uvedimo prostore funkcija koje ćemo koristiti u matematičkoj analizi sustava (1.10) ($d = 2$ ili $d = 3$). To su prostori kvadratno integrabilnih funkcija $L^2(\Omega)$ i $(L^2(\Omega))^d$:

$$(L^2(\Omega))^d = \{\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 < \infty\}. \tag{1.23}$$

Zatim prostor Soboljeva $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid (\nabla u)_i \in L^2(\Omega) \text{ za } i = 1, \dots, d \text{ u slabom smislu}\}. \tag{1.24}$$

i kartezijev produkt prostora $H^1(\Omega)$: $(H^1(\Omega))^d = H^1(\Omega) \times \cdots \times H^1(\Omega)$ (d-puta). Važni su nam i prostori funkcija iz Soboljevljevih prostora koji se poništavaju na rubu $\partial\Omega$ u smislu tragova $H_0^1(\Omega)$ i $(H_0^1(\Omega))^d$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{1.25}$$

gdje je notacija $u|_{\partial\Omega}$ opravdana teoremom o tragu [3], te $L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega q = 0\right\}$.

1.3 Slabo rješenje

Razmotrimo sada Stokesovu zadaću s nehomogenim rubnim uvjetom oblika

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{u } \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2,3 \\ div\,\mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.26}$$

Nehomogeni rubni uvjeti se teorijski mogu tretirati kao homogeni ([6]). Naime, ako zadaća ima rješenje u prostoru $(H^1(\Omega))^d$ onda postoji funkcija $\mathbf{G} \in (H^1(\Omega))^d$ koja zadovoljava:

$$div\,\mathbf{G} = 0, \quad \mathbf{G}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}. \tag{1.27}$$

Samo rješenje je jedna takva funkcija. Uz tu pretpostavku, rješenje $\mathbf{u}$ možemo zapisati u obliku $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{G}$, gdje funkcija $\mathbf{w}$ zadovoljava:

$$-\mu\Delta\mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{f} + \mu\Delta\mathbf{G} \quad \text{u } \Omega \tag{1.28}$$

$$div\,\mathbf{w} = 0 \quad \text{u } \Omega \tag{1.29}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{1.30}$$

Time smo polazni problem sveli na zadaću s homogenim rubnim uvjetom i promijenjenom desnom stranom. Zato od sada u teorijskim razmatranjima uzimamo $\mathbf{g} = 0$. Pretpostavljamo da je $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$. Množenjem (1.26) (prva jednadžba) s $\mathbf{v} \in V$ gdje je $V := (H_0^1(\Omega))^d$ i integriranjem, te korištenjem Greenovih formula dobivamo

$$\mu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (p, div\,\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v} \in V, \tag{1.31}$$

gdje smo s $(,)$ označili skalarni produkt u $(L^2(\Omega))^d$. Definiramo prostor

$$V_{div} = \{\mathbf{v} \in V \mid div\,\mathbf{v} = 0 \text{ na } \Omega\}, \tag{1.32}$$

koji je potprostor od V i normu na njemu $\|\mathbf{v}\| := \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}$ koja je ekvivalentna $H^1(\Omega)$ normi zbog Poincaréove nejednakosti ([3]) ($|\mathbf{v}|_{H^1} \sim \|\mathbf{v}\|_{H^1}$) i pri čemu druga jednadžba iz (1.26) ulazi u prostor i stoga nestaje iz varijacijske jednadžbe. Slijedi da je bilinearna forma

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \mu(\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}), \quad \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V, \tag{1.33}$$

koercitivna na $V_{div} \times V_{div}$. Budući da je preslikavanje $\mathbf{v} \to (\mathbf{f}, \mathbf{v})$ linearno i neprekinuto na V_{div}, zaključujemo pomoću Lax-Milgramove leme da problem

$$\text{naći } \mathbf{u} \in V_{div} : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{div} \tag{1.34}$$

ima jedinstveno rješenje. Sada ostaje pitanje tlaka. Tu nam pomaže De Rhamov teorem [8].

Teorem 1.3.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ograničena Lipschitzova domena i $L \in V'$ funkcional koji se poništava na V_{div}. Tada postoji funkcija $p \in L^2(\Omega)$ takva da je*

$$L(\mathbf{v}) = (p, div\ \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{1.35}$$

Funkcija p je jedinstveno određena do na aditivnu konstantu.

Sada je dovoljno uočiti da funkcional

$$L(\mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \tag{1.36}$$

zadovoljava uvjete leme i stoga postoji funkcija $p \in L^2(\Omega)$ takva da je

$$\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, div\ \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \tag{1.37}$$

Unatoč matematičkoj eleganciji ovakvo izvođenja egzistencije i jedinstvenosti, nije pogodno za formulaciju metode konačnih elemenata u praksi jer je teško napraviti konačnodimenzionalan potprostor od prostora V_{div}. Probajmo zato s drugačijim pristupom. Definirajmo prostor $Q := L^2_0(\Omega)$ kako bismo imali jedinstvenost tlaka i bilinearne forme:

$$a\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad b\colon V \times Q \to \mathbb{R}, \tag{1.38}$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \tag{1.39}$$

$$b(\mathbf{u}, q) = -(q, div\ \mathbf{u}). \tag{1.40}$$

Tada imamo mješovitu zadaću koja je dobra zbog toga što sadrži jednostavne za implementaciju prostore V i Q:

$$\begin{cases} \text{Naći } \mathbf{u} \in V,\ p \in Q : \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{1.41}$$

Teorem 1.3.2. *Zadaća* (1.41) *ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Egzistencija i jedinstvenost brzine. Prema (1.41) (druga jednadžba) dobivamo da vrijedi $div\ \mathbf{u} = 0$ s.s. na Ω jer ta jednadžba vrijedi za sve funkcije $q \in L^2(\Omega)$. Stoga je $\mathbf{u} \in V_{div}$. Uzimajući $\mathbf{v} \in V_{div}$ u (1.41) (prva jednadžba) izlazi da $\mathbf{u}$ zadovoljava jednadžbu koja izlazi iz jednadžbe (1.31), tj. jednadžbu (1.34) za koju prema Lax-Milgramovoj lemi postoji jedinstveno rješenje $\mathbf{u} \in V_{div}$. Egzistencija i jedinstvenost tlaka. Prema De Rhamovom teoremu postoji funkcija $p \in L^2(\Omega)$ takva da vrijedi (1.41) (prva jednadžba). Kada bi postojala dva tlaka p_1 i p_2 njihova bi razlika zadovoljavala

$$\int_\Omega div\ \mathbf{v}(p_1 - p_2)dx = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{1.42}$$

Odavde slijedi da je $p_1 - p_2 \in H^1(\Omega)$ te da je $\nabla(p_1 - p_2) = 0$. Time dobivamo da je $p_1 - p_2$ konstanta, a kako je $p_1, p_2 \in Q$ slijedi $p_1 - p_2 = 0$. □

Zaključimo ovu sekciju s nekoliko jednostavnih ocjena. Koristeći Poincaréovu nejednakost možemo pokazati da postoje konstante $\alpha > 0$, M_1 i M_2 takve da je

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \le a(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{1.43}$$

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \quad |a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \le M_1 \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V, \tag{1.44}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, q \in Q, \quad |b(\mathbf{v}, q)| \le M_2 \|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q. \tag{1.45}$$

Pokažimo još da za svako $q \in Q$ postoji $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$ i $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ na $\partial\Omega$, tako da je

$$(q, div\ \mathbf{v}) \ge \beta^* \|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q, \tag{1.46}$$

gdje je β^* konstanta neovisna o q i $\mathbf{v}$. Dokaz ide konstrukcijom. Za dano $q \in Q$ riješimo problem

$$\begin{cases} \Delta p = q & \text{u } \Omega \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.47}$$

i definiramo $\mathbf{v} = \nabla p$. Ovakvim izborom (1.46) je zadovoljen jer $\|\mathbf{v}\|_V \le C\|q\|_Q$.

Poglavlje 2

Numerika za Stokesov sustav

2.1 Varijacijska aproksimacija

Uvodimo konačnodimenzionalne prostore $V_h \subset V$ i $Q_h \subset Q$ koji ovise o h (opisan u sljedećem potpoglavlju). Tada aproksimiramo (1.41) s diskretnim problemom

$$\begin{cases} \text{Naći } \mathbf{u}_h \in V_h,\ p_h \in Q_h : \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.1}$$

Mješovita formulacija je dobro proučena u literaturi ([3], [8]) i pogodna je za konačne elemente za razliku od formulacije (1.34) koja u sebi ima diferencijalnu jednadžbu ugrađenu u prostor. Ipak, ni ovdje ne možemo prostore V_h i Q_h odabrati nezavisno jedan o drugome. Pretpostavimo da prostori V_h i Q_h zadovoljavaju sljedeći uvjet: postoji $\beta > 0$ tako da

$$\forall q_h \in Q_h \quad \exists \mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq 0 : (q_h, div\ \mathbf{v}_h) \geq \beta \|\mathbf{v}_h\|_V \|q_h\|_Q. \tag{2.2}$$

Ovaj uvjet se zove uvjet kompatibilnosti ili Ladiženskaja-Babuška-Brezzijev (LBB) uvjet. Uočimo da on implicira da je $dim Q_h \leq dim(div V_h)$. Naime, kad to ne bi bio slučaj, postojao bi $q_h \in Q_h$ ortogonalan prostoru $\{div\ \mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in V_h\}$, što je kontradikcija s (2.2).

Teorem 2.1.1. *Neka prostori $V_h \subset V$ i $Q_h \subset Q$ zadovoljavaju LBB uvjet* (2.2)*. Tada zadaća* (2.1) *ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava sljedeće apriorne ocjene:*

$$\|\mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|p_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha})\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Budući da promatramo konačnodimenzionalni problem, zadaća se svodi na rješavanje linearnog sustava s kvadratnom matricom pa je dovoljno dokazati jedinstvenost. Neka su

$(\mathbf{u}_h^1, p_h^1)$ i $(\mathbf{u}_h^2, p_h^2)$ dva rješenja. Razlika $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2$ i $p_h = p_h^1 - p_h^2$ zadovoljava

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \tag{2.4}$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \tag{2.5}$$

Stavljajući u prvu jednakost $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ te uzimajući u obzir drugu jednakost dobivamo $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 0$, odakle zbog koercitivnosti forme $a(,)$ slijedi $\mathbf{u}_h = 0$. Time prva jednakost daje

$$b(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_\Omega div\ \mathbf{v}_h p_h dx = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \tag{2.6}$$

što prema LBB uvjetu povlači $p_h = 0$. Prva ocjena u (2.3) slijedi uvrštavanjem $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ u (2.1) i primjenom koercitivnosti bilinearne forme $a(,)$. Iz LBB uvjeta dobivamo

$$||p_h||_Q \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h)}{||\mathbf{v}_h||_V} = \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{||\mathbf{v}_h||_V}. \tag{2.7}$$

Koristeći ograničenost bilinearne forme $a(,)$ te $||\mathbf{v}_h||_{L^2(\Omega)} \leq ||\mathbf{v}_h||_V$ dobivamo

$$||p_h||_Q \leq \frac{1}{\beta}(||\mathbf{f}||_Q + M_1||\mathbf{u}_h||_V) \leq \frac{1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha})||\mathbf{f}||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

□

Algebarski sustav

Označimo s N_h i M_h dimenzije V_h i Q_h, redom, i s $\{\boldsymbol{\phi}_j \mid j = 1, \ldots, N_h\}$ i $\{\psi_j \mid j = 1, \ldots, M_h\}$ baze za V_h i Q_h, redom. Zapis rješenja zadaće (2.1) u ovim bazama ima oblik:

$$\mathbf{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \boldsymbol{\phi}_j(x), \quad p_h(x) = \sum_{j=1}^{M_h} p_j \psi_j(x). \tag{2.9}$$

Uvedimo oznake za vektore rješenja

$$\mathbf{u} = (u_j) \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \mathbf{p} = (p_j) \in \mathbb{R}^{M_h}. \tag{2.10}$$

Algebarski sustav sustava (2.1) ima oblik:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

gdje je matrica $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$, matrica $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M_h \times N_h}$ te vektor $\mathbf{f} = (f_i) \in \mathbb{R}^{N_h}$. Posebno $a_{i,j} = a(\boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{\phi}_i)$, $b_{i,j} = b(\boldsymbol{\phi}_j, \psi_i)$, a $f_i = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\phi}_i)$, gdje smo koristili $(\mathbf{v}_h)_i = \boldsymbol{\phi}_i$ i

$(q_h)_i = \psi_i$. Matrica A je simetrična i pozitivno definitna i stoga regularna. Ako raspišemo značenje LBB uvjeta dobivamo: Postoji konstanta $\beta > 0$, takva da za svako $q \in Q_h$ postoji element $\mathbf{v} \in V_h$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, takva da vrijedi

$$(q, div\ \mathbf{v}) = -b(\mathbf{v}, q) = -B\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \geq \beta \|q\|_Q \|\mathbf{v}\|_V. \tag{2.12}$$

Time smo zaključili da ako odaberemo $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, onda postoji vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ takav da je $B\mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \neq 0$. Drugim riječima $B^T\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ za svako $\mathbf{q} \neq 0$ odnosno operator B^T je injektivan, $\mathrm{Ker}(B^T) = \{0\}$. Iz $A\mathbf{u} = \mathbf{f} - B^T\mathbf{p}$ i $B\mathbf{u} = 0$ slijedi

$$\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{f} - B^T\mathbf{p}), \quad B\mathbf{u} = BA^{-1}(\mathbf{f} - B^T\mathbf{p}) = 0, \tag{2.13}$$

što daje sustav za tlak:

$$BA^{-1}B^T\mathbf{p} = BA^{-1}\mathbf{f}. \tag{2.14}$$

Matrica sustava $BA^{-1}B^T \in \mathbb{R}^{M_h \times M_h}$ je simetrična i pozitivno definitna:

$$BA^{-1}B^T\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = A^{-1}B^T\mathbf{q} \cdot B^T\mathbf{q} \geq \alpha \|B^T\mathbf{q}\|^2 > 0, \tag{2.15}$$

za svako $\mathbf{q} \neq 0$, što povlači pozitivnu definitnost matrice $BA^{-1}B^T$. Time sustav za tlak (2.14) ima jedinstveno rješenje, a onda je i brzina jedinstveno određena jednadžbom: $\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{f} - B^T\mathbf{p})$. Što se tiče rješavanja tog sustava, najjednostavnije je koristiti Gaussove eliminacije koje daju rješenje u konačnom broju koraka i kod kojih se matrica rastavlja na produkt LU, gdje je L donjetrokutasta, a U gornjetrokutasta matrica, a zatim iz $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ i $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobivamo rješenje $\mathbf{x}$.

LBB uvjet i nestabilnost

LBB uvjet (2.2) povlači da je prostor V_h diskretnih brzina dovoljno velik u odnosu na prostor diskretnih tlakova Q_h. Druga implikacija LBB uvjeta je da sprječava oscilacije u tlaku prilikom izračunavanja. Naime, ako je p_h^* funkcija sa svojstvom $(div\ \mathbf{u}_h, p_h^*) = 0$ za svako $\mathbf{u}_h \in V_h$ i ako je p_h izračunati tlak sustava, onda je i $p_h + p_h^*$ također rješenje sustava za tlak. To se u praksi manifestira kao nestabilnost izračuna za tlak. Izračun brzine je stabilan jer ocjene (2.3) (prva nejednakost) i (2.17)(u nastavku) ne ovise o parametru β.

Uvedimo prostor

$$Z_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h \mid (q_h, div\ \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}. \tag{2.16}$$

$Z_h \subset V_h$ je prostor funkcija iz V_h koje imaju diskretnu divergenciju jednaku nuli.

Teorem 2.1.2. *Neka je zadovoljen LBB uvjet i neka je* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$. *Neka je* $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ *rješenje zadaće* (1.41), *a* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ *rješenje zadaće* (2.1). *Tada vrijedi*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq (1 + \frac{M_1}{\alpha}) \inf_{\mathbf{w}_h \in Z_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V + \frac{M_2}{\alpha} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q, \tag{2.17}$$

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{M_1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha}) \inf_{\mathbf{w}_h \in Z_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V + (1 + \frac{M_2}{\beta} + \frac{M_1 M_2}{\alpha\beta}) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \quad (2.18)$$

Dokaz. Oduzimanjem prvih jednakosti u (2.1) i (1.41) dobivamo

$$a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h - p) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (2.19)$$

Odaberimo proizvoljno $\mathbf{w}_h \in Z_h$ i $q_h \in Q_h$. Imamo:

$$a(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h) = a(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (2.20)$$

Uzimajući $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h \in Z_h$ dobivamo,

$$a(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - q_h) = a(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p - q_h). \quad (2.21)$$

Zbog $p_h - q_h \in Q_h$ drugi član na lijevoj strani propada pa možemo iskoristiti koercitivnost i neprekidnost bilinearnih formi kako bismo dobili:

$$\alpha\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_V^2 \leq M_1\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_V + M_2\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_V\|p - q_h\|_Q, \quad (2.22)$$

odnosno

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha}(M_1\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V + M_2\|p - q_h\|_Q). \quad (2.23)$$

Po nejednakosti trokuta imamo

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq (1 + \frac{M_1}{\alpha})\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V + \frac{M_2}{\alpha}\|p - q_h\|_Q, \quad (2.24)$$

što daje (2.17). Primjenimo li LBB uvjet na funkciju $p_h - q_h$, $q_h \in Q_h$, dobivamo

$$\|p_h - q_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V} = \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V}, \quad (2.25)$$

gdje smo iskoristili (2.20). Na osnovu ograničenosti bilinearnih formi dobivamo:

$$\|p_h - q_h\|_Q \leq \frac{M_1}{\beta}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \frac{M_2}{\beta}\|p - q_h\|_Q. \quad (2.26)$$

Nejednakost trokuta daje

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{M_1}{\beta}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + (1 + \frac{M_2}{\beta})\|p - q_h\|_Q. \quad (2.27)$$

Pomoću ocjene (2.24) dobivamo

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{M_1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha})\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V + (1 + \frac{M_2}{\beta} + \frac{M_1 M_2}{\alpha\beta})\|p - q_h\|_Q, \quad (2.28)$$

što daje ocjenu (2.18). □

Teorem 2.1.3. *Neka prostori V_h i Q_h zadovoljavaju LBB uvjet* (2.2) *i neka su operatori $B_h\colon V_h \to (Q_h)'$ i $B'_h\colon Q_h \to (V_h)'$ definirani s*

$$(B_h\mathbf{v}, q) = b(\mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad \forall q \in Q_h \tag{2.29}$$

i

$$(B'_h q, \mathbf{v}) = (B_h\mathbf{v}, q) = b(\mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in V_h, \quad \forall q \in Q_h. \tag{2.30}$$

Tada vrijedi da je restrikcija operatora $B_h|_{Z_h^\perp}\colon Z_h^\perp \to (Q_h)'$ bijektivna.

Dokaz. Prema LBB uvjetu operator B'_h je injektivan ($\beta \,||v||_{Q_h} \leq ||B'_h v||_{V'_h}$) sa zatvorenom slikom ([5]) (zatvorenost slike slijedi iz toga što se radi o operatoru na konačnodimenzionalnim prostorima). Iz injektivnosti operatora B'_h na osnovu teorema o zatvorenoj slici, $\mathrm{Im}(B_h) = \mathrm{Ker}(B'_h)^0$, gdje je s nulom označen anihilator skupa ($X^0 := \{g \in X' \mid (g, v) = 0 \ \forall v \in X\}$), zaključujemo da je operator B_h surjektivan, odnosno da je $\mathrm{Im}(B_h) = (Q_h)'$. On općenito nije injektivan jer mu je jezgra jednaka Z_h. Prostor V_h možemo rastaviti na ortogonalnu sumu prostora Z_h i njegovog ortogonalnog komplementa $Z_h^\perp$. Restrikcija operatora B_h,

$$B_h|_{Z_h^\perp}\colon Z_h^\perp \to (Q_h)', \tag{2.31}$$

je stoga bijektivna. □

Teorem 2.1.4. *Neka prostori V_h i Q_h zadovoljavaju LBB uvjet* (2.2)*. Tada za svako $f \in L^2(\Omega)$ postoji jedinstveni $\mathbf{z}_h \in Z_h^\perp$ za koji vrijedi*

$$\int_\Omega (div\ \mathbf{z}_h + f) q = 0, \quad \forall q \in Q_h. \tag{2.32}$$

Dokaz. Preslikavanje F definirano s $(F, q) = -\int_\Omega fq$ je element prostora Q'_h. Sada prema teoremu 2.1.3 postoji jedinstven $\mathbf{z}_h \in Z_h^\perp$ za koji je $B_h\mathbf{z}_h = F$ što je posljedica bijektivnosti operatora $B_h|_{Z_h^\perp}$. □

Teorem 2.1.5. *Neka vrijede uvjeti teorema 2.1.2. Tada:*

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in Z_h} ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||_V \leq \left(1 + \frac{M_2}{\beta}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} ||\mathbf{u} - \mathbf{v}_h||_V. \tag{2.33}$$

Dokaz. Za svaki $\mathbf{v}_h \in V_h$ postoji jedinstveni $\mathbf{z}_h \in Z_h^\perp$ takav da (vidi teorem 2.1.4 — $f = -div\ (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \in L^2(\Omega)$)

$$b(\mathbf{z}_h, q_h) = b(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \tag{2.34}$$

i

$$\beta ||\mathbf{z}_h||_V ||q_h||_Q \leq |b(\mathbf{z}_h, q_h)| = |b(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, q_h)| \leq M_2 ||\mathbf{u} - \mathbf{v}_h||_V ||q_h||_Q. \tag{2.35}$$

Dakle:

$$\|\mathbf{z}_h\|_V \leq \frac{M_2}{\beta}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V. \tag{2.36}$$

Ako stavimo $\mathbf{w}_h := \mathbf{z}_h + \mathbf{v}_h$, dobivamo

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \|\mathbf{z}_h\|_V \leq \left(1 + \frac{M_2}{\beta}\right)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V. \tag{2.37}$$

□

Kao posljedicu teorema 2.1.2 i 2.1.5 dobivamo sljedeće nejednakosti

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq (1 + \frac{M_1}{\alpha})(1 + \frac{M_2}{\beta}) \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \frac{M_2}{\alpha} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q, \tag{2.38}$$

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{M_1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha})(1 + \frac{M_2}{\beta}) \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + (1 + \frac{M_2}{\beta} + \frac{M_1 M_2}{\alpha\beta}) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \tag{2.39}$$

2.2 Konačni elementi

Od ovog potpoglavlja nadalje, radi jednostavnosti, je dimenzija prostora $d = 2$. $\mathcal{T}_h$ označava triangulaciju od $\overline{\Omega}$ u 2-simplekse (trokute) ili 2-kocke (četverokute) koji se zovu elementi i čiji promjer je najviše h. Tu pretpostavljamo konačnu dekompoziciju

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \tag{2.40}$$

gdje je svaki K zatvoren poliedarski skup i $Int(K) \neq \emptyset$, te za svaka dva različita $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ vrijedi $Int(K_1) \cap Int(K_2) = \emptyset$. Definirajmo za trokute:

$$Y_h^k := \{\phi_h \in L^2(\Omega) \mid \phi_h|_K \in \mathbb{P}_k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 0, \tag{2.41}$$

gdje je $\mathbb{P}_k$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog k, te za četverokute:

$$Y_h^k := \{\phi_h \in L^2(\Omega) \mid \phi_h|_K \circ T_K \in \mathbb{Q}_k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 0, \tag{2.42}$$

gdje je $\mathbb{Q}_k$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog k u svakoj varijabli posebno, a T_K afino preslikavanje između referentnog elementa (jedinični jednakokračni pravokutni trokut ili jedinični kvadrat) i elementa iz triangulacije $\mathcal{T}_h$. Stavimo još

$$X_h^k = Y_h^k \cap C^0(\overline{\Omega}), \quad k \geq 1. \tag{2.43}$$

Sada za prostor brzine V_h možemo uzeti $(X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^2$, za neki $k \geq 1$, dok za prostor tlaka Q_h imamo dvije mogućnosti. Možemo uzeti $Y_h^m \cap L_0^2(\Omega)$, za neki $m \geq 0$, ili $X_h^m \cap L_0^2(\Omega)$, za neki $m \geq 1$. Prva mogućnost predstavlja diskontinuirani tlak, a druga kontinuirani. Za diskontuirani slučaj pogledati [3].

Kontinuirani konačni elementi za tlak

Promatramo prostore

$$Q_h = X_h^m \cap L_0^2(\Omega), \quad m \geq 1, \quad V_h = (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^2, \quad k \geq 1. \tag{2.44}$$

Za provjeru LBB uvjeta možemo primjeniti sljedeći teorem ([3]).

Teorem 2.2.1. *Pretpostavimo da postoji konstanta $\beta^* > 0$ takva da je zadovoljeno*

$$\forall q \in Q \quad \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0 : (q, div\mathbf{v}) \geq \beta^* \|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q. \tag{2.45}$$

Nadalje, neka postoji operator $\tau_h \colon V \to V_h$ takav da
(i) $b(\mathbf{v} - \tau_h(\mathbf{v}), q_h) = 0$ za svaki $\mathbf{v} \in V, q_h \in Q_h$,
(ii) $\|\tau_h(\mathbf{v})\|_V \leq C_* \|\mathbf{v}\|_V$ za svaki $\mathbf{v} \in V$,
gdje $C_* > 0$ ne ovisi o h. Tada je LBB uvjet (2.2) zadovoljen s $\beta = \beta^*/C_*$.

Dokaz. Iz (2.45), za svaki $q_h \in Q_h$ postoji $\mathbf{v}^* \in V$, $\mathbf{v}^* \neq 0$ takav da

$$b(\mathbf{v}^*, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{v}^*\|_V \|q_h\|_Q. \tag{2.46}$$

Budući da možemo pretpostaviti $q_h \neq 0$, (2.46) daje $b(\mathbf{v}^*, q_h) \neq 0$ i (i) kao posljedicu daje $\tau_h(\mathbf{v}^*) \neq 0$. S druge strane, iz (i), (ii) i (2.46) nalazimo

$$b(\tau_h(\mathbf{v}^*), q_h) = b(\mathbf{v}^*, q_h) \geq \frac{\beta^*}{C_*} \|\tau_h(\mathbf{v}^*)\|_V \|q_h\|_Q. \tag{2.47}$$

□

Teorem vrijedi i u suprotnom smjeru (za dokaz vidjeti [8]). Sada se može dokazati da slučaj $k = m = 1$ nije stabilan. Nasuprot tome, slučaj $m = 1$, $k = 2$ je stabilan i ima optimalnu konvergenciju. Ovo vrijedi i za trokute i za četverokute. Takvi se elementi nazivaju Taylor-Hoodovi i njih ćemo primijeniti u nastavku. Upotrijebimo još interpolacijske ocjene da se dobije red konvergencije za Taylor-Hoodove elemente.

Postoji konstanta C_1 neovisna o finoći triangulacije h takva da za svako $\boldsymbol{\phi} \in (H^1(\Omega))^2$ za koje je $div\ \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega)$ vrijedi [3]

$$\|\boldsymbol{\phi} - \Pi_h^2(\boldsymbol{\phi})\|_{H(div;\Omega)} \leq C_1 h(|\boldsymbol{\phi}|_{(H^1(\Omega))^2} + |div\ \boldsymbol{\phi}|_{H^1(\Omega)}), \tag{2.48}$$

gdje je $H(div;\Omega) := \{\boldsymbol{\phi} \in (L^2(\Omega))^2 \mid div\ \boldsymbol{\phi} \in L^2(\Omega)\}$. Također za tlak postoji konstanta C_2 neovisna o h tako da [3]

$$\|\phi - \Pi_h^1(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2 |\phi|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in C^0(\overline{\Omega}). \tag{2.49}$$

Koristeći teorem 2.1.2 s teoremom 2.1.5 možemo izvesti ocjenu greške aproksimacije.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C_1 h(1 + \frac{M_1}{\alpha})(1 + \frac{M_2}{\beta})(\|\mathbf{u}\|_V + |div\ \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}) + C_2 h^2 \frac{M_2}{\alpha}|p|_{H^2(\Omega)} \tag{2.50}$$

$$\|p - p_h\|_Q \leq C_1 h\frac{M_1}{\beta}(1 + \frac{M_1}{\alpha})(1 + \frac{M_2}{\beta})(\|\mathbf{u}\|_V + |div\ \mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}) + C_2 h^2(1 + \frac{M_2}{\beta} + \frac{M_1 M_2}{\alpha\beta})|p|_{H^2(\Omega)} \tag{2.51}$$

Poglavlje 3

Dune::PDELab

Dune (engl. Distributed and Unified Numerics Environment) je besplatni alat za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mrežnim metodama u C++-u. Osnovni moduli Dune-a su dune-common, dune-geometry, dune-grid, dune-istl i dune-localfunctions. Ideja Dune-a je napraviti elegantno sučelje koje omogućava efikasno korištenje starijih i novijih biblioteka. Dakle, Dune omogućava efikasnost u znanstvenom računanju i podržava brzo izvođenje računskih aplikacija. Dune::PDELab modul pak, je diskretizacijski modul Dune-a za široku klasu diskretizacijskih metoda. On nam omogućava programiranje numeričkih metoda za parcijalne diferencijalne jednadžbe na višem stupnju apstrakcije. Omogućuje brzu implementaciju diskretizacije i rješavača za sustave parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Glavne značajke Dune::PDELab modula su fleksibilni diskretni funkcijski prostori i operatori. PDELab traži od korisnika da programira asembliranje diskretnog sustava samo na lokalnoj razini (na jednom elementu) a sam se brine o uvrštavanju lokalnih doprinosa globalnom rezidualu i jakobijanu. Korisnik se ne treba brinuti kako izgleda matrica krutosti računajući konačne elemente; to radi modul. Ipak, korisnik, u ovisnosti o problemu, se mora pobrinuti za računanje volumnog integrala, integrala po rubu i rubne uvjete. Koristeći PDELab, neki od problema iz primjene koji se mogu riješiti su (vidjeti [1]):

- eliptički, parabolički i hiperbolički problemi
- diskontinuirana Galerkinova metoda konačnih elemenata
- mješovita metoda konačnih elemenata
- inkompresibilne Navier-Stokesove jednadžbe
- dvofazni protok
- višefazni protok u poroznoj sredini
- Maxwellove jednadžbe

3.1 Implementacija i analiza koda

Kod za numerički izračun Stokesovog sustava je u 3 datoteke — stokes.cc, driver.hh i bc_extension.hh — koje su dane na kraju rada. Potrebno je bilo izračunati brzinu i tlak. Centralni dio koda je u driver.hh gdje je konstruiran prostorni lokalni operator (unaprijed definiran u Dune::PDELabu) koji primjenjuje Taylor-Hoodove elemente pomoću klase (uvijek je prisutno `using namespace Dune::PDELab`)

```
TaylorHoodNavierStokes<P>
```

Template parametar `P` je klasa parametara potrebnih za formiranje rubne zadaće (u stokes.cc):

```
NavierStokesDefaultParameters<GV, RF, F, B, V, J, navier, tensor>
```

koja ima sljedeće template parametre

- `GV` = Grid View
- `RF` = `double`
- `F` = klasa koja određuje izvorni član
- `B` = klasa koja određuje tip rubnog uvjeta
- `V` = klasa koja određuje Dirichletov rubni uvjet za brzinu
- `J` = klasa koja određuje Neumannov rubni uvjet
- `navier` = `bool` (izbor `false` eliminira konvektivni član $\rho(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}$ i zadaća postaje Stokesova; `true` ga uključuje)
- `tensor` = `bool` (treba li raditi sa simetriziranim gradijentom ili ne (utječe na interpretaciju Neumannovih rubnih uvjeta); kod nas je `false`)

Konstruktor uzima sve tražene funkcije i ima oblik

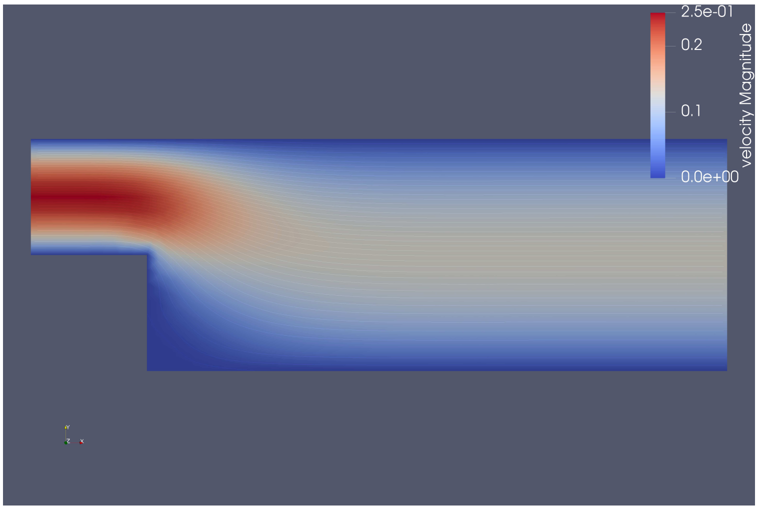
```
NavierStokesDefaultParameters (const RF &mu, const RF &rho, F &f,
B &b, V &v, J &j);
```

gdje konstante ρ i μ učitavamo iz konfiguracijske datoteke kako je pokazano u stokes.cc. U driver.hh datoteci se (osim lokalnog operatora) konstruira vektorski prostor konačnih elemenata kao Kartezijev produkt prostora za brzinu i prostora za tlak. Sam prostor za brzinu je Kartezijev produkt identičnih skalarnih prostora. Mreža koju koristimo je sastavljena od simpleksa i za brzinu koristimo P_2 elemente, a za tlak P_1 elemente (Taylor-Hood).

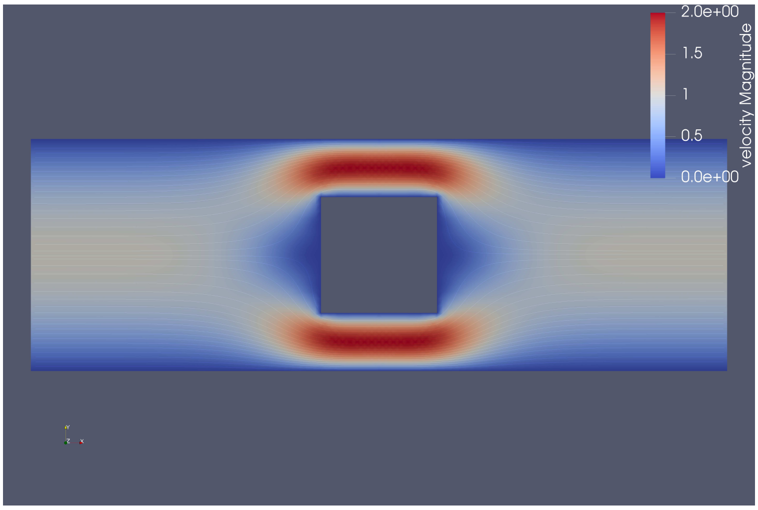
Dalje se u kodu određuju Dirichletove granice i ograničenja. Za rješavanje sustava s indefinitnom, simetričnom matricom koristimo SuperLU solver jer je on najjednostavniji za računanje problema u konačnom broju koraka za matricu koja je rijetka i nema nula na dijagonali u podmatrici različitoj od nulmatrice. Sve funkcije vezane uz rubne uvjete su dane u datoteci bc_extension.hh. Klasa `BCTypeParam` određuje tip granice. Ona ima funkciju `evaluate()` koja kroz varijablu `y` vraća vrijednost iz enumeracije `StokesBoundaryCondition::Type`. Ta enumeracija ima sljedeće vrijednosti: `DoNothing`, `VelocityDirichlet` i `StressNeumann` koje signaliziraju homogeni Neumannov uvjet, Dirichletov uvjet za brzinu i Neumannov uvjet. U klasi `Velocity` se postavljaju rubni uvjeti za brzinu, a u klasi `ZeroFunction` se postavlja vektorska funkcija jednaka nuli. Koristimo je za tlak (`dim_range=1`) i za Neumannov rubni uvjet (`dim_range=dim`) koji nisu prisutni.

3.2 Numerički rezultati

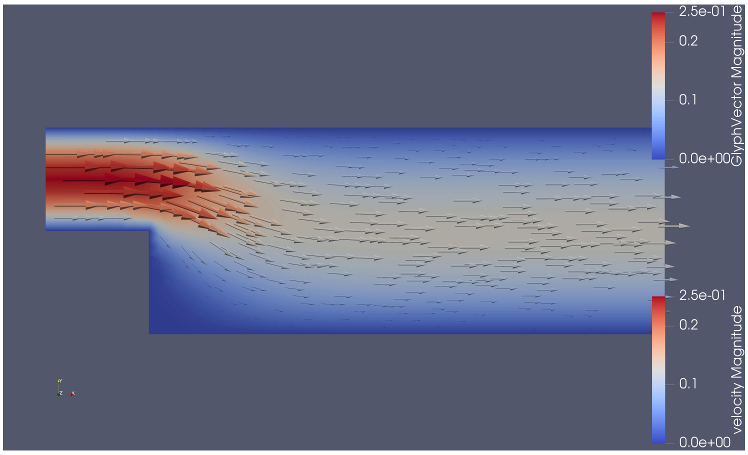
Kod je testiran na standardnim primjerima optjecanja stepenice i optjecanja prepreke. U oba primjera imamo parabolički profil brzine na ulazu (lijevi rub) i homogeni Neumannov rubni uvjet na izlazu (desni rub). Na ostalim rubovima je brzina jednaka nuli. Dobiveni rezultati za brzine su na slikama 3.1 i 3.2, te 3.3 i 3.4, a za tlak na slikama 3.5 i 3.6. Za razne ulazne parametre (μ i *velmax*) rezultati su slični, tj. nema pojave vrtloga iza stepenice i iza prepreke. Tlak je očekivano viši na ulazu nego na izlazu.



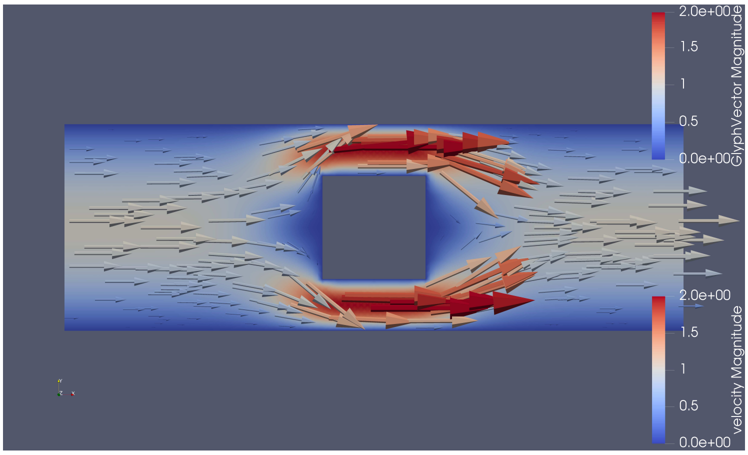
Slika 3.1: Optjecanje stepenice — brzina



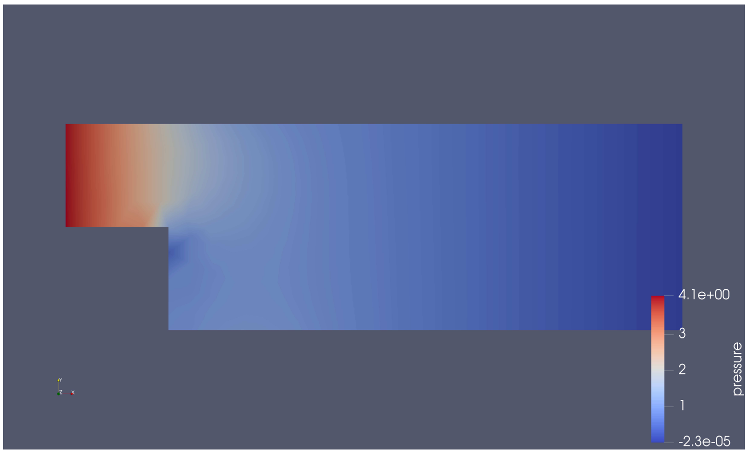
Slika 3.2: Optjecanje prepreke — brzina



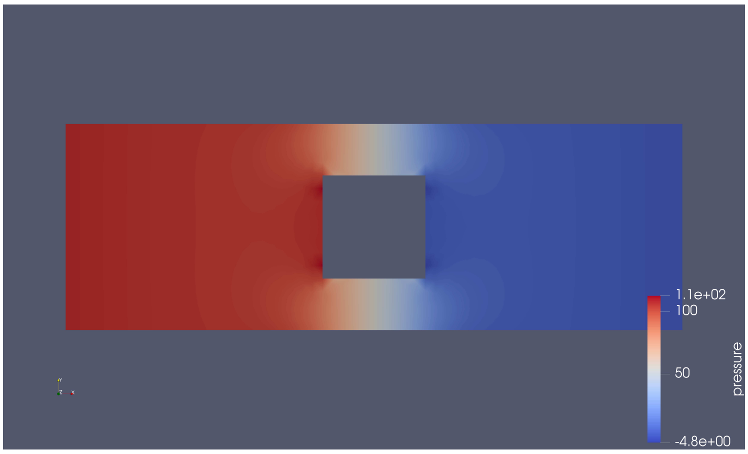
Slika 3.3: Optjecanje stepenice — brzina (primjer 2)



Slika 3.4: Optjecanje prepreke — brzina (primjer 2)



Slika 3.5: Optjecanje stepenice — tlak



Slika 3.6: Optjecanje prepreke — tlak

Poglavlje 4

Zaključak

Stokesov sustav, budući da je izveden iz Navier-Stokesovog za mali Reynoldsov broj, opisuje laminaran tok fluida (nasuprot turbulentnom). Time dolazimo do objašnjenja za slike 3.1 i 3.2 na kojima nema pojave vrtloga.

Bibliografija

[1] www.dune-project.org.

[2] A. J. Chorin, J. E. Marsden: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] A. Quarteroni, A. Valli: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1997.

[4] Aganović, I.: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*. ELEMENT, Zagreb, 2003.

[5] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.

[6] Jurak, M.: *Stokesov sustav*. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nrpdj/Predavanja/ppm2_Stokes.pdf.

[7] R. Temam, A. Miranville: *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[8] V. Girault, P. A. Raviart: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Sažetak

U ovom radu je detaljno opisana metoda konačnih elemenata za Stokesov sustav i analizirana njena konvergencija. Praktični dio je implementiran u Dune::PDELab modulu. Numerički rezultati potvrđuju ispravnost koda.

Summary

In this thesis the finite element method for the Stokes system is described ans it's convergence is analyzed. The practical part is implemented in the Dune::PDELab module. The numerical results confirm correctness of the code.

Životopis

Rođen sam 11.3.1990. u Karlovcu. Gimnaziju u Karlovcu završavam 2008. godine nakon čega upisujem preddiplomski studij na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu koji završavam 2011. Nakon toga upisujem diplomski studij Informacijska i komunikacijska tehnologija na istom fakultetu koji završavam 2013. Od 2013. do 2014. godine zaposlen sam kao asistent na Fakultetu elektrotehnike i računarst. 2016. upisujem diplomski studij Primijenjena matematika na zagrebačkom PMF-u.