Geometrijska svojstva UMD prostora

Depope, Al

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Al Depope

GEOMETRIJSKA SVOJSTVA UMD PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zoran Vondraček

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojim roditeljima. I sestri.

Sadržaj

Uvod

Hilbertovi prostori predstavljaju svojevrsnu generalizaciju euklidskih prostora $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Radi se o potpunim normiranim prostorima u kojima je norma inducirana skalarnim produktom. Ipak, mnogi prostori koji su česti u primjenama poput $(l^p, \|\cdot\|_p)$ za $p \neq 2$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ za $p \neq 2$ ili $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ za $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ nisu Hilbertovi.

Izostavljanjem uvjeta na egizistenciju skalarnog produkta dolazimo do pojma Banachovog prostora. Spomenimo tako da su svi prethodno navedeni prostori Banachovi. Ipak, iako je s jedne strane klasa Banachovih prostora prilično bogata, pokazuje se kako se pojedine tvrdnje od interesa u primjenama koje primjerice općenito vrijede u euklidskim ili Hilbertovim prostorima ne prenose u opće Banachove prostore. Često mogućnost generalizacije takvih tvrdnji ovisi o strukturi i geometriji Banachovih prostora s kojima radimo.

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se klasom Banachovih prostora s UMD (engl. unconditional martingale difference) svojstvom. Ono se prvi puta pojavljuje 1975. godine u radovima Maureyja i Pisiera. Radi se o vjerojatnosnom svojstvu za kojeg se vremenom pokazalo kako predstavlja pravu podlogu za analizu i vjerojatnost u Banachovim prostorima. Tako, primjerice, u UMD prostorima vrijedi generalizacija jakog zakona velikih brojeva uz tzv. Chungov uvjet kao što je opisano u [12] odnosno vrijedi da je Hilbertova transformacija ograničen operator nad L^p prostorom (vidi kraj uvoda za detaljnije pojašnjenje).

Iz Maureyevih se radova već 1974. godine znalo kako posjedovanje UMD svojstva povlači super-refleksivnost pripadnog Banachovog prostora. Ipak, postojanje lijepe geometrijske karakterizacije ovog vjerojatnosnog svojstva ostalo je neriješeno sve do 1981. godine i Burkholderovog članka [4].

U nastavku rada predstavit će se klasa prostora koji posjeduju UMD svojstvo te dokazati Burkholderova geometrijska karakterizacija istih. Također, usput se želi komentirati i nekoliko tehnika za ustvrđivanje nejednakosti nad slučajnim elementima.

Par riječi o strukturi rada. U prvom poglavlju precizno uvodimo pojam integrala funkcija s vrijednostima u Banachovim prostorima te poopćujemo pojam uvjetnog matematičkog očekivanja nad integrabilnim funkcijama s vrijednostima u Banachovim prostorima. Pritom se u izlaganju u većoj mjeri prate monografije [19] i [13], a poneki dijelovi preuzeti su i iz [16]. Potom slijedi pregled rezultata iz funkcionalne analize, prije svega Jamesov teorem, koji se kasnije koriste u dokazivanju svojstva refleksivnosti UMD prostora. Dokaz Jamesovog teorema prezentiran je po uzoru na članak [14], a pripadna grafika kao i dio pojašnjenja preuzet je iz [10]. Dokaz Kahaneovog principa kontrakcije prezentiran je po uzoru na [21], a dokaz Hinčinove nejednakosti po uzoru na [11].

Drugo poglavlje uvodi pojam UMD svojstva te donosi najvažnije primjere prostora s i bez UMD svojstva. Pri tome je većina dokaza u tom odjeljku rađena po uzoru na online predavanja Sveučilišta u Delft-u ([20]). U nastavku se dokazuje kako je svaki UMD prostor nužno super-refleksivan, a dokaz koristi ideju dokaza da svaki UMD prostor ima Radon-Nikodymovo svojstvo koji se može naći u [16] te se djelomično oslanja na dokaz super-refleksivnosti UMD prostora koji je prezentiran u [13].

U posljednjem, trećem poglavlju uvodi se pojam ζ-konveksnosti Banachovog prostora te dokazuje kako je posjedovanje UMD svojstva ekvivalentno s ζ-konveksnošću. Ovdje se većim dijelom prati izlaganje u [15], a po potrebi se nadopunjuje objašnjenjima iz originalnog Burkholderovog članka ([6]) te članka [7].

Za kraj ovog uvoda želimo dati kratak primjer tvrdnje koja vrijedi u euklidskom slučaju, a njena generalizacija u kontekstu Banachovih prostora vrijedi onda i samo onda kada radimo nad Banachovim prostorima s UMD svojstvom:

- Neka je E Banachov prostor. Okrnjena Hilbertova transformacija $H_{\epsilon,R}$ s parametrima $\epsilon > 0$ i $R > 0$ definira se pomoću

  $$H_{\epsilon,R}f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon<|x-y|<R}\frac{f(y)}{x-y}dy$$

  što ima smisla primjerice za sve $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; E)$ (kolekcija svih funkcija s $\mathbb{R}$ u E koje su integrabilne na kompaktima). Hilbertova transformacija H definira se pomoću

  $$Hf(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+, R\to+\infty} H_{\epsilon,R}f(x) \tag{1}$$

  ukoliko ovaj limes postoji za gotovo svako $x \in \mathbb{R}$. Ovdje ϵ i R idu prema graničnim vrijednostima neovisno jedan o drugom te je postavljen dodatan zahtjev da limes mora biti isti neovisno na koji se način ϵ, odnosno R približavaju svojim graničnim vrijednostima.

  Poznato je kako u slučaju $E = \mathbb{R}$ gornji limes postoji gotovo sigurno te kako je Hilbertova transformacija ograničen operator nad $L^p(\mathbb{R})$ ($p \in \langle 1, +\infty\rangle$). Od praktičnog je interesa, primjerice pri rješavanju apstraktnih diferencijalnih jednadžbi nad funkcijama s vrijednostima u Banachovim prostorima, imati garanciju postojanja limesa u (1) gotovo sigurno te ograničenosti Hilbertove transformacije (vidjeti primjerice [9] i [8]).

Pokazuje se da Banachov prostor E ima UMD svojstvo ako i samo ako je Hilbertova transformacija ograničen operator nad $L^p(\mathbb{R}; E)$ (podrazumijevamo da limes iz definicije Hilbertove transformacije postoji gotovo sigurno). Dovoljnost UMD svojstva prvi je dokazao Burkholder 1981., dok je obrat dokazao Bourgain 1983. Dokazi ove tvrdnje mogu se naći u monografijama [13] (poglavlje $5.$) i [16] (poglavlje $6.$). Relativno elementaran dokaz dovoljnosti UMD svojstva dao je Burkholder u članku [5].

Poglavlje 1

Osnovne definicije i pripremni rezultati

1.1 Integriranje u Banachovim prostorima

Neka je Ω skup, te V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ako je dana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{K}$ i $x \in V$, tada s $f \otimes x$ označavamo funkciju $f \otimes x : \Omega \to V$ definiranu s $(f \otimes x)(\omega) := f(\omega)x$. Označimo s $F(\Omega)$ vektorski prostor svih funkcija nad Ω s vrijednostima u $\mathbb{K}$. Nadalje, za operatore $T : Dom(T) \subset F(\Omega) \to F(\Omega)$ i $L : V \to V$ definiramo $(T \otimes L)(f \otimes x) := Tf \otimes Lx$.

U nastavku uvodimo konvenciju da oznaka $(\Omega, \mathscr{F})$ označava neprazan izmjeriv prostor Ω s pripadnom σ-algebrom $\mathscr{F}$ nad njime, dok s $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ standardno označavamo izmjeriv prostor $(\Omega, \mathscr{F})$ s pripadnom σ-konačnom mjerom μ. Isto tako, pod oznakom E uvijek podrazumijevamo Banachov prostor, a pod oznakom X normirani prostor. Također, za kompleksan broj z, s $\mathscr{R}z$ označavat ćemo njegov realni dio, a s $\mathscr{I}z$ njegov imaginarni dio.

Definicija 1.1.1. *Neka su X i Y normirani prostori nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Funkciju $A : X \to Y$ za koju vrijedi*

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in X$$

te

$$A(\alpha x) = \alpha A(x), \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

nazivamo linearnim operatorom s X u Y. Ukoliko je $Y = \mathbb{K}$, tada takav operator nazivamo linearnim funkcionalom. Za linearni operator A kažemo da je ograničen ako postoji konstanta $C \geq 0$ takva da je $\|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X, \forall x \in X$. U tom slučaju definiramo $\|A\| := \inf\{C \geq 0 \mid \|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}$. Skup svih ograničenih linearnih operatora s normiranog prostora X u normirani prostor Y označavamo s $L(X, Y)$, dok se skup ograničenih funkcionala na X zove dualni prostor prostora X i označava s X'.

Definicija 1.1.2. *Za funkciju $f : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to E$ kažemo da je jednostavna ako postoji $N \in \mathbb{N}$ te $(x_n)_{n=1}^N \subset E$ i $(F_n)_{n=1}^N \subset \mathscr{F}$ takvi da je $f := \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_n} \otimes x_n$, pri čemu su $F_n \cap F_m = \emptyset$ za $n \neq m$ te $\mu(F_n) < +\infty$ za sve $n = 1, \ldots, N$. Kolekciju jednostavnih funkcija s $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ u E označavamo s $S(\Omega, \mathscr{F}, \mu; E)$, odnosno s $S(\Omega; E)$ ako su pridružena σ-algebra i mjera poznate iz konteksta.*

Definicija 1.1.3. *Za funkciju $f : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to E$ kažemo da je* ***Bochner-izmjeriva*** *ako postoji niz jednostavnih funkcija $f_n : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to E$ takvih da je $\lim_n f_n = f$ po točkama μ-gotovo sigurno.*

Za ovako uveden pojam Bochner-izmjerivosti na σ-konačnim prostorima, vrijedi:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Bochner-izmjerive te } f_n \overset{n\to+\infty}{\to} f \text{ gotovo sigurno} \implies f \text{ Bochner-izmjeriva}$$

Ova je tvrdnja posljedica tzv. Pettisove karakterizacije Bochner-izmjerivosti ([19], Teorem 3.1.2.), a njen dokaz može se pronaći u [19], Korolar 3.1.3.

Ukoliko je $f : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to E$ Bochner-izmjeriva, to odmah slijedi kako je funkcija $\|f(\cdot)\|_E : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to \mathbb{R}$ realna izmjeriva funkcija. Doista, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednostavnih funkcija nad $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ s vrijednostima u E takvih da je $\lim_n f_n = f$ po točkama μ-gotovo sigurno. Iz neprekidnosti norme znamo kako je $\|f(\cdot)\|_E = \lim_{n\to+\infty} \|f_n(\cdot)\|_E$ μ-gotovo sigurno, pa preostaje samo pokazati kako je $\|f_n(\cdot)\|_E$ izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}$, što slijedi direktno iz Definicije 1.1.2.

Definicija 1.1.4. *Za $1 \leq p < +\infty$ definiramo $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu; E)$ kao prostor svih klasa ekvivalencije (po relaciji biti jednak μ-gotovo sigurno) Bochner-izmjerivih funkcija $f : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to E$ takvih da je $\int_\Omega \|f\|_E^p \, d\mu := \int_\Omega \|f(\omega)\|_E^p \, d\mu(\omega) < +\infty$. Uočimo da prethodni izraz ima smisla budući da znamo kako je $\|f(\cdot)\|_E$ realna izmjeriva funkcija. Kada je iz konteksta jasno o kojem je prostoru mjere riječ koristit ćemo pokratu $L^p(E)$ za $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu; E)$.*

Napomenimo još da je prostor $L^p(\Omega; E)$ snabdjeven normom $\|f\|_{L^p(\Omega;E)} := (\int_\Omega \|f\|_E^p \, d\mu)^{1/p}$ Banachov. Umjesto $\|f\|_{L^p(\Omega;E)}$ često pišemo i samo $\|f\|_p$. Također, u nastavku učestalo umjesto klasa ekvivalencije radimo s njihovim reprezentantima te pritom prešutno koristimo iste oznake za oba objekta.

Propozicija 1.1.5. *Neka je $1 \leq p < +\infty$. Tada je $S(\Omega, \mathscr{F}, \mu; E)$ gust u $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu; E)$.*

Dokaz. Neka je $f \in L^p(\Omega; E)$ te neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $S(E)$ takav da je $f_n \to f$ po točkama gotovo sigurno. Tada vrijedi $\|f_n(\cdot)\|_E \to \|f(\cdot)\|_E$ po točkama gotovo sigurno budući da je norma neprekidna funkcija. Definiramo $g_n(\omega) = f_n(\omega)\mathbb{1}_{(\|f_n\|_E < 2\|f\|_E)}$, pa i dalje vrijedi $g_n \to f$ po točkama gotovo sigurno, ali sada imamo i svojstvo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n - f\|_p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p + \|f\|_p \leq 3\,\|f\|_p\,.$$

Iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji za realne funkcije slijedi kako $\int_\Omega \|g_n - f\|_E^p \,d\mu \to 0$ kad $n \to +\infty$. Očito je $g_n \in S(E) \cap L^p(E)$ budući da je $\|f_n(\cdot)\|_E$ jednostavna $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva funkcija. $\square$

Definicija 1.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere te E Banachov prostor. Za $f = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_n} x_n \in S(\Omega, E)$ definiramo $\int_\Omega f d\mu := \sum_{n=1}^N \mu(F_n)x_n$. Na ovaj način definiran je linearni operator s $S(\Omega, E) \subseteq L^1(\Omega; E)$ u E. Nadalje, za $f = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_n} x_n$ iz njegove domene, po nejednakosti trokuta, vrijedi*

$$\left\|\int_\Omega f d\mu\right\|_E \leq \sum_{n=1}^N \mu(F_n)\,\|x_n\|_E = \|f\|_{L^1(\Omega;E)}\,.$$

Dakle, ovako definiran operator integriranja na $S(\Omega; E)$ jest ograničen i norma mu je manja ili jednaka 1. Koristeći ovu tvrdnju, rezultat Propozicije $1.1.5$ te Teorem $1.3.9.$ iz [2], zaključujemo kako postoji jedinstveno proširenje operatora integriranja nad $S(\Omega; E) \subseteq L^1(\Omega; E)$ do operatora na cijelom $L^1(\Omega; E)$. Napomenimo kako proširenje ima istu normu kao i polazni operator, pa tako za sve $f \in L^1(\Omega; E)$ vrijedi $\left\|\int_\Omega f d\mu\right\|_E \leq \|f\|_{L^1(\Omega;E)}$. U nastavku to proširenje nazivamo operatorom integriranja nad $L^1(S; E)$ u odnosu na mjeru μ.

Ako su $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ izmjerivi prostori, tada definiramo *produktnu σ-algebru*, u oznaci $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$, kao najmanju σ-algebru na $\Omega_1 \times \Omega_2$ koja sadrži sve skupove oblika $F_1 \times F_2$ za $F_1 \in \mathscr{F}_1, F_2 \in \mathscr{F}_2$. Ukoliko su μ_1 i μ_2 σ-konačne mjere na $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ odnosno $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ tada s $\mu_1 \times \mu_2$ označavamo tzv. *produktnu mjeru*, odnosno jedinstvenu σ-konačnu mjeru na $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ koja zadovoljava

$$(\mu_1 \times \mu_2)(F_1 \times F_2) = \mu_1(F_1) \cdot \mu_2(F_2), \qquad \text{za sve } F_1 \in \mathscr{F}_1, F_2 \in \mathscr{F}_2.$$

Propozicija 1.1.7. *(Fubini) Neka su $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ i $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ σ-konačni prostori mjere te neka je $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to E$ integrabilna u odnosu na produktnu mjeru. Tada vrijedi:*

1. *Za gotovo sve $\omega_1 \in \Omega_1$, funkcija $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ je integrabilna.*

2. *Za gotovo sve $\omega_2 \in \Omega_2$, funkcija $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ je integrabilna.*

3. *Funkcije* $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_2$ *i* $\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_1$ *su integrabilne i vrijedi*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d(\mu_1\times\mu_2)(\omega_1,\omega_2) &= \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_1(\omega_1)d\mu_2(\omega_2)\\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)d\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

Dokaz. Pogledati dokaz Propozicije 1.2.7. u [13]. □

Propozicija 1.1.8. *Neka je* $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ *prostor mjere te* $f \in L^1(\Omega;E)$. *Također, neka je* $B \in L(E,F)$ *pri čemu je* F *Banachov prostor. Tada je* $B\circ f \in L^1(\Omega;F)$ *i vrijedi* $\int_\Omega B\circ f d\mu = B\int_\Omega f d\mu$.

Dokaz. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $S(\Omega;E)$ takav da je $f_n \to f$ po točkama gotovo sigurno. Tada je $B\circ f_n \in S(\Omega;E)$. Iz neprekidnosti od B imamo $B\circ f_n \to B\circ f$ po točkama gotovo sigurno, dakle $B\circ f$ je Bochner izmjeriva. Nadalje, iz $\|(B\circ f)(\cdot)\|_F \leq \|B\|\,\|f(\cdot)\|_E$ znamo kako je $B\circ f \in L^1(\Omega;F)$. Iz neprekidnosti od B i $\int_\Omega d\mu$ slijedi kako je dovoljno dokazati tvrdnju za jednostavne funkcije, a ona slijedi iz definicije operatora integriranja. □

Po uzoru na realnu teoriju, u nastavku želimo precizno definirati pojam uvjetnog matematičkog očekivanja s vrijednostima u Banachovim prostorima. Pretpostavljajući rezultat o egizistenciji i jedinstvenosti uvjetnog matematičkog očekivanja u realnom slučaju, sljedeći teorem predstavlja prvi korak prema proširenju tog rezultata. Prisjetimo se da za operator $T : L^{p_1}(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu_1;\mathbb{R}) \to L^{p_2}(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mu_2;\mathbb{R})$ kažemo da je pozitivan ako za sve $f\in L^{p_1}(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu_1;\mathbb{R})$ za koje je $f\geq 0$ μ_1-gotovo sigurno vrijedi da je $Tf \geq 0$ μ_2-gotovo sigurno.

Teorem 1.1.9. *Neka su* $1 \leq p_1,p_2 < +\infty$ *te neka je* E *Banachov prostor. Neka je* $T : L^{p_1}(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu_1;\mathbb{R}) \to L^{p_2}(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mu_2;\mathbb{R})$ *ograničen linearan operator. Ako je* T *pozitivan operator, tada se operator* $T\otimes I_E$ *na jedinstveni način može proširiti do ograničenog operatora* $\widetilde{T\otimes I_E}$ *s* $L^{p_1}(\Omega_1;E)$ *u* $L^{p_2}(\Omega_2;E)$ *za kojeg vrijedi kako je* $\left\|\widetilde{T\otimes I_E}\right\| = \|T\|$.

Dokaz. Neka je $f\in L^{p_1}(\Omega_1;E)$ jednostavna funkcija. Dakle, $f=\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_n}\otimes x_n$ za neke $(F_n)_{n=1}^N \subset \mathscr{F}_1$ i $(x_n)_{n=1}^N\subset E$. Budući da je T pozitivan to vrijedi kako je $|T\mathbb{1}_{F_n}| = T\mathbb{1}_{F_n}$ pa imamo:

$$\left\|(T\otimes I_E)\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_n}\otimes x_n\right\|_{L^{p_2}(\Omega_2;E)} = \left(\int_{\Omega_2}\left\|\sum_{n=1}^N (T\mathbb{1}_{F_n}\otimes x_n)(\omega)\right\|_E^{p_2} d\mu_2(\omega)\right)^{1/p_2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Omega_2} \left(\sum_{n=1}^{N} |T \mathbb{1}_{F_n}(\omega)| \cdot \|x_n\|_E \right)^{p_2} d\mu_2(\omega) \right)^{1/p_2} \\
&= \left(\int_{\Omega_2} \left(T \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n}(\omega) \cdot \|x_n\|_E \right)^{p_2} d\mu_2(\omega) \right)^{1/p_2} \\
&= \left\| T \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \|x_n\|_E \right\|_{L^{p_2}(\Omega_2)} \\
&\leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \|x_n\|_E \right\|_{L^{p_1}(\Omega_1)} \\
&= \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \otimes x_n \right\|_{L^{p_1}(\Omega_1;E)} .
\end{aligned}
$$

Budući da su jednostavne funkcije guste u $L^p(\Omega_1; E)$ za sve $1 \leq p < +\infty$ to zaključujemo kako operator $T \otimes I_E$ ima jedinstveno proširenje do ograničenog operatora $\widetilde{T \otimes I_E}$ s $L^{p_1}(\Omega_1; E)$ u $L^{p_2}(\Omega_2; E)$ te vrijedi $\|\widetilde{T \otimes I_E}\| \leq \|T\|$. Obratna nejednakost za operatorske norme slijedi promatranjem funkcija oblika $g \otimes x$. Neka je $g \in L^{p_1}(\Omega_1)$ te $x \in E$ takav da je $\|x\| = 1$. Tada je, očito,

$$
\|(T \otimes I_E)(g \otimes x)\|_{L^{p_2}(\Omega_2;E)} = \left(\int_{\Omega_2} |(Tg)(\omega)|^{p_2} \cdot \|x\|_E^{p_2} \, d\mu_2(\omega) \right)^{1/p_2} = \|Tg\|_{L^{p_2}(\Omega_2)} ,
$$

pa iz analogne činjenice da je $\|g \otimes x\|_{L^{p_1}(\Omega_1;E)} = \|g\|_{L^{p_1}(\Omega_1)}$ i definicije od $\|T\|$ slijedi tvrdnja o jednakosti normi. $\square$

Napomenimo kako je za potrebe ovog rada dovoljna verzija prethodne propozicije u slučaju $p_1 = p_2 = 1$ za koju nije potrebna pozitivnost operatora T. Naime, u tom bi slučaju, prethodni dokaz, nakon ustvrđivanja prve nejednakosti išao ovako:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \sum_{n=1}^{N} |T \mathbb{1}_{F_n}(\omega)| \cdot \|x_n\|_E \, d\mu_2(\omega) &= \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_E \cdot \int_{\Omega_2} |T \mathbb{1}_{F_n}(\omega)| d\mu_2(\omega) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_E \cdot \|T \mathbb{1}_{F_n}\|_{L^1(\Omega_2)} \\
&\overset{\text{T ogr.}}{\leq} \|T\| \cdot \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_E \cdot \|\mathbb{1}_{F_n}\|_{L^1(\Omega_1)}
\end{aligned}
$$

$$= \cdots = \|T\| \left\| \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \otimes x_n \right\|_{L^{p_1}(\Omega_1;E)} .$$

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je $X : \Omega \to E$ slučajna varijabla (s vrijednostima u E) ako X je Bochner-izmjeriva funkcija. Također, definiramo zakon razdiobe od X kao Borelovu vjerojatnosnu mjeru na E danu s $\mu_X(B) := \mathbb{P}\{X \in B\}$, za sve $B \in \mathscr{B}(E)$. Ukoliko je $f \in L^1(\Omega; E)$ tada, po uzoru na realni slučaj, definiramo i matematičko očekivanje od X s $\mathbb{E}X := \int_\Omega X d\mathbb{P}$. I ostali se vjerojatnosni pojmovi definiraju na način analogan onom u slučaju kada je $E = \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.10. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathscr{G}$ σ-podalgebra od $\mathscr{F}$ te E Banachov prostor. Tada je uvjetno matematičko očekivanje u odnosu na $\mathscr{G}$ nad $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}; E)$, u oznaci $\mathbb{E}^E[\cdot|\mathscr{G}]$, jedinstveno proširenje operatora $\mathbb{E}[\cdot|\mathscr{G}] \otimes I_E$ (s $\mathbb{E}[\cdot|\mathscr{G}]$ smo označili operator uvjetnog matematičkog očekivanja u odnosu na $\mathscr{G}$ nad $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$) garantirano prethodnom propozicijom za $p_1 = p_2 = 1$. Često umjesto $\mathbb{E}^E[\cdot|\mathscr{G}]$ pišemo samo $\mathbb{E}[\cdot|\mathscr{G}]$ kada je iz konteksta jasno o kojem Banachovom prostoru E se radi.*

Neka je $J : E \to F$ neprekidni linearni operator između Banachovih prostora E i F te $f \in L^1(\Omega; E)$. Tada vrijedi $J \circ (\mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]) = \mathbb{E}^F[J \circ f|\mathscr{G}]$. Doista, tvrdnja očito vrijedi za jednostavne funkcije, a zatim iz gustoće jednostavnih funkcija u $L^1(E)$ slijedi i za proizvoljne funkcije iz $L^1(E)$.

U sljedećoj propoziciji dajemo karakterizaciju ovako definiranog uvjetnog matematičkog očekivanja:

Propozicija 1.1.11. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathscr{G}$ σ-podalgebra od $\mathscr{F}$. Neka su $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}; E)$ i $g \in L^1(\Omega, \mathscr{G}; E)$ (ovdje $L^1(\Omega, \mathscr{G}; E)$ shvaćamo kao potprostor od $L^1(\Omega, \mathscr{F}; E)$). Tada je g uvjetno matematičko očekivanje od f u odnosu na $\mathscr{G}$ ako i samo ako vrijedi*

$$\int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} = \int_\Omega g \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P}, \quad \text{za sve } F \in \mathscr{G}.$$

Dokaz. Drugi je uvjet *ako i samo ako* tvrdnje iz teksta propozicije ekvivalentan s uvjetom $\xi(\int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} - \int_\Omega g \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P}) = 0$ za sve $\xi \in E'$ i za sve $F \in \mathscr{G}$. Teži smjer u dokazu ove činjenice slijedi iz Hahn-Banachovog teorema Pritom se koristi tvrdnja da ako je $x_0 \in E, x_0 \neq 0$, tada postoji $f \in E'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x_0) = \|x_0\|$ (za dokaz se može pogledati Korolar 4.2.1. u [2]). Iz Propozicije 1.1.8 slijedi kako je ovo, pak, ekvivalentno s

$$\int_\Omega \xi(g) \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} = \int_\Omega \xi(f) \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} \text{ za sve } \xi \in E' \text{ i sve } F \in \mathscr{G}.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Fiksirajmo $F \in \mathscr{G}$. Za proizvoljni $\xi \in E'$ vrijedi

$$\xi\left(\mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]\right) = \mathbb{E}\left[\xi(f)|\mathscr{G}\right] \text{ gotovo sigurno,}$$

pa iz toga zaključujemo kako je gorespomenuti nužan i dovoljan uvjet ispunjen budući da po definiciji uvjetnog matematičkog očekivanja u skalarnom slučaju imamo

$$\int_\Omega \mathbb{E}[\xi(f)|\mathscr{G}] \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} = \int_\Omega \xi(f) \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P}, \text{ za sve } \xi \in E'.$$

Kako bi argumentirali egzistenciju gornjih uvjetnih očekivanja vrijedi uočiti kako je $\xi \circ f \in L^1(\Omega, \mathscr{F})$ čim je $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}; E)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Dovoljno je pokazati da je, za fiksni f, uvjetom

$$\int_\Omega \xi(g) \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} = \int_\Omega \xi(f) \cdot \mathbb{1}_F d\mathbb{P} \text{ za svaki } \xi \in E' \text{ i za sve } F \in \mathscr{F},$$

g određen gotovo sigurno. Tada će iz prethodno dokazanog smjera slijediti tvrdnja. Pretpostavimo da i g i $\tilde{g}$ zadovoljavaju spomenuti uvjet u odnosu na f. Budući da su tada, za proizvoljni $\xi \in E'$, $\xi(g)$ i $\xi(\tilde{g})$ oboje verzije uvjetnih matematičkih očekivanja od $\xi(f)$ u odnosu na $\mathscr{G}$ to, po Hahn-Banachovom teoremu, mora biti $\tilde{g} = g$ gotovo sigurno. $\square$

Gornji je dokaz lijep primjer kako se g.s. jednakosti dviju funkcija s vrijednostima u Banachovom prostoru može pristupiti promatrajući jednakosti linearnih funkcionala koji djeluju na te funkcije.

Definicija 1.1.12. *Neka je V vektorski prostor. Za funkciju $f : V \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in V, \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Također, za funkciju $f : V \to \mathbb{R}$ kažemo da je konkavna ako je $-f$ konveksna funkcija.

Definicija 1.1.13. *Neka su E_1, E_2 te E Banachovi prostori. Za preslikavanje $\beta : E_1 \times E_2 \to E$ kažemo da je ograničeno bilinearno preslikavanje ako vrijedi*

$$B(\cdot, y) \textit{ je linearni operator s } E_1 \textit{ u } E,$$
$$B(x, \cdot) \textit{ je linearni operator s } E_2 \textit{ u } E$$

te postoji $C > 0$ takav da za sve $x \in E_1, y \in E_2$ vrijedi

$$\|\beta(x,y)\|_E \leq C \cdot \|x\|_{E_1} \cdot \|y\|_{E_2}.$$

Nadalje, označimo s

$$\|\beta\| := \inf\{C > 0 \mid \|\beta(x,y)\|_E \leq C \cdot \|x\|_{E_1} \cdot \|y\|_{E_2}, \textit{ za sve } x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Glavni primjeri ograničenih bilinearnih preslikavanja koje imamo na umu su ($\tilde{E}$ je Banachov prostor):

$$E_1 = \mathbb{K},\ E_2 = \tilde{E},\ E = \tilde{E}, \quad \beta(c, x) = cx \quad \text{te}$$
$$E_1 = \tilde{E},\ E_2 = \tilde{E}',\ E = \mathbb{K}, \quad \beta(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

U nastavku popisujemo neka svojstva ovako definiranog uvjetnog matematičkog očekivanja koja koristimo u nastavku:

Propozicija 1.1.14. *(Svojstva uvjetnog matematičkog očekivanja) Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathscr{G}$ σ-podalgebra od $\mathscr{F}$ te $\mathbb{E}^E[\cdot|\mathscr{G}]$ uvjetno matematičko očekivanje u odnosu na $\mathscr{G}$ nad $L^1(\Omega; E)$. Tada vrijedi:*

(a) (uvjetna Jensenova nejednakost) Neka je $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}; E)$. Tada za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $\phi : E \to \mathbb{R}$ takvu da je $\phi \circ f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vrijedi

$$\phi \circ \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[\phi \circ f|\mathscr{G}] \text{ gotovo sigurno.}$$

Posebno, za $p \in [1, +\infty\rangle$, vrijedi

$$\left\| \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}] \right\|_E^p \leq \mathbb{E}[\|f\|_E^p |\mathscr{G}] \text{ gotovo sigurno.}$$

(b) Ako su $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ σ-algebre, tada je

$$\mathbb{E}^E[\mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]|\mathscr{H}] = \mathbb{E}^E[f|\mathscr{H}] \text{ gotovo sigurno.}$$

(c) (uvjetni Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija u $L^1(\Omega; E)$ takav da je $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ gotovo sigurno i $\|f_n\|_E \leq g$ gotovo sigurno pri čemu je $g \in L^1(\Omega)$. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^E[f_n|\mathscr{G}] = \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}] \text{ gotovo sigurno.}$$

(d) Neka su E_1 i E_2 Banachovi prostori te $\beta : E_1 \times E_2 \to E$ ograničeno bilinearno preslikavanje. Također, neka je $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}; E_2)$ te $g \in L^1(\Omega, \mathscr{G}; E_1)$. Tada je

$$\mathbb{E}^E[\beta(g, f)|\mathscr{G}] = \beta(g, \mathbb{E}^{E_2}[f|\mathscr{G}]) \text{ gotovo sigurno.}$$

Dokaz. (a) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je E separabilan, naime, budući da je f Bochner-izmjeriva to postoji niz jednostavnih funkcija f_n takvih da je $f = \lim_n f_n$ po točkama gotovo sigurno. Neka je E_1 jednak zatvaraču svih vrijednosti koje neka od funkcija f_n može poprimiti. Očito je E_1 separabilan te f poprima vrijednosti u njemu gotovo sigurno.

Iz Leme 1.2.8 znamo kako postoji niz afinih funkcija $\phi_i : E \to \mathbb{R}$ oblika $\phi_i = \mathscr{R}\langle \cdot, y_i^* \rangle + a_i$, pri čemu su $y_i^* \in E'$ te $a_i \in \mathbb{R}$, takav da vrijedi

$$\phi(x) = \sup_i \phi_i(x), \quad \forall x \in E.$$

Slijedi kako je

$$\begin{aligned}
\phi \circ \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}](\cdot) &= \sup_i (\phi_i \circ \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}])(\cdot) = \sup_i (\mathscr{R}\langle \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}](\cdot), y_i^* \rangle + a_i) \\
&= \sup_i \mathbb{E}[\mathscr{R}\langle f(\cdot), y_i^* \rangle + a_i|\mathscr{G}]) \\
&= \sup_i \mathbb{E}[(\phi_i \circ f)(\cdot)|\mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[(\sup_i \phi_i \circ f)(\cdot)|\mathscr{G}] \\
&= \mathbb{E}[(\phi \circ f)(\cdot)|\mathscr{G}] \text{ gotovo sigurno.}
\end{aligned}$$

(b) Označimo s $g := \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]$. Za proizvoljni $H \in \mathscr{H}$ imamo

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_H \cdot \mathbb{E}^E[g|\mathscr{H}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_H \cdot g] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_H \cdot \mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_H \cdot f].$$

Koristeći Propoziciju 1.1.11 zaključujemo kako je $\mathbb{E}^E[\mathbb{E}^E[f|\mathscr{G}]|\mathscr{H}] = \mathbb{E}^E[f|\mathscr{H}]$ gotovo sigurno.

(c) Neka je $g_n := \|f_n - f\|_E$. Tada je $g_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ gotovo sigurno i vrijedi $0 \leq g_n \leq 2g$. Iz uvjetnog teorema o dominiranoj konvergenciji u skalarnom slučaju zaključujemo kako je $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\|f_n - f\|_E|\mathscr{G}] = 0$ gotovo sigurno. Iz (a) dijela sada slijedi kako je $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{G}]$ gotovo sigurno.

(d) Iz Definicije 1.1.13 odmah slijedi kako je $\beta(f, g) \in L^1(\Omega; E)$. Provjerimo jednakost najprije u slučaju kada je g jednostavna funkcija, to jest, $g = \sum_{k=1}^N x_k \mathbb{1}_{F_k}$ pri čemu su $x_k \in E_1, F_k \in \mathscr{G}$ za $k = 1, \ldots, N$, u parovima međusobno disjunktni. Neka je $F \in \mathscr{F}$ proizvoljan. Iz Propozicije 1.1.8 zaključujemo kako vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_F \beta\left(g, \mathbb{E}^{E_2}[f|\mathscr{G}]\right) d\mathbb{P} &= \sum_{k=1}^N \beta\left(x_k, \int_{F\cap F_k} \mathbb{E}^{E_2}[f|\mathscr{G}] d\mathbb{P}\right) \\
&= \sum_{k=1}^N \beta\left(x_k, \int_{F\cap F_k} f d\mathbb{P}\right) = \int_F \beta(g, f) d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

U slučaju kada je g proizvoljna funkcija iz $L^1(\Omega, \mathscr{G}; E_1)$ nađimo niz jednostavnih funkcija $g_n \in L^1(\Omega; \mathscr{G}; E_1)$ takvih da je $g_n \to g$ po točkama gotovo sigurno i $\|g_n\|_{E_1} \leq 2\|g\|_{E_1}$. Zbog neprekidnosti od β imamo $\beta(g_n, h) \to \beta(g, h)$ po točkama gotovo sigurno za $h \in \{f, \mathbb{E}[f|\mathscr{G}]\}$ te vrijedi

$$\|\beta(g_n, f)\|_E \leq \|\beta\| \cdot \|g_n\|_{E_1} \cdot \|f\|_{E_2} \leq \|\beta\| \cdot 2\|g\|_{E_1} \cdot \|f\|_{E_2}.$$

Sada iz uvjetnog teorema o dominiranoj konvergenciji imamo

$$\mathbb{E}^E[\beta(g, f)|\mathscr{G}] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^E[\beta(g_n, f)|\mathscr{G}] = \lim_{n\to+\infty} \beta(g_n, \mathbb{E}^{E_2}[f|\mathscr{G}]) = \beta(g, \mathbb{E}^{E_2}[f|\mathscr{G}])$$

gotovo sigurno. □

Definicija 1.1.15. *Familiju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ σ-podalgebri od $\mathscr{F}$ zovemo filtracijom u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ako $\mathscr{F}_m \subseteq \mathscr{F}_n$ kad god je $m \leq n$ pri čemu su $m, n \in \mathbb{N}_0$. Familija Bochner-izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u odnosu na $\mathscr{F}$ naziva se adaptiranom na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako je f_n $\mathscr{F}_n$-izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Konačno, familiju Bochner-izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ zovemo martingalom u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako vrijedi:*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je adaptirana u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*
2. *f_n je integrabilna za sve $n \in \mathbb{N}_0$*
3. *$\mathbb{E}[f_{n+1}|\mathscr{F}_n] = f_n$ gotovo sigurno za sve $n \in \mathbb{N}_0$*

Nadalje, ako, za fiksni $1 \leq p < +\infty$, vrijedi kako je $f_n \in L^p(\Omega; E)$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$, tada kažemo da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ L^p-martingal. Često umjesto $\|f_n\|_{L^p(\Omega;E)}$ pišemo samo $\|f_n\|_p$, a uvodimo i oznaku $\|f\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|f_n\|_p$. Ukoliko postoji $\lim_{n\to+\infty} f_n$ gotovo sigurno, tada ga označavamo s f_∞.

Definicija 1.1.16. *Za martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kažemo da je jednostavan ako je f_n jednostavna funkcija za sve $n \in \mathbb{N}_0$ te ako postoji $N \in \mathbb{N}_0$ takav da je $f_n = f_N$ za sve $n \geq N$.*

Definicija 1.1.17. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u Banachovom prostoru E. Niz $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazivamo martingalnim nizom razlika martingala $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ukoliko je $f_n = \sum_{m\leq n} df_m$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Drugim riječima,*

$$df_n = \begin{cases} f_n - f_{n-1}, & \text{za } n \geq 1 \\ f_0, & \text{za } n = 0 \end{cases}.$$

Definicija 1.1.18. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u Banachovom prostoru E. Za slučajni proces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u Banachovom prostoru E kažemo da je ± 1 martingalna transformacija martingala $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako postoji niz $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \{-1,1\}$ takav da je*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k df_k,$$

odnosno, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ je ili $df_n = dg_n$ ili $df_n = -dg_n$.

Definicija 1.1.19. *Neka je E Banachov prostor. Za martingal $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u $E \times E$ pri čemu je $Z_n = (X_n, Y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ kažemo da ima zigzag svojstvo ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$X_{n+1} - X_n = 0 \quad \textit{ili} \quad Y_{n+1} - Y_n = 0.$$

Ukoliko je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal, a g njegova ± 1 martingalna transformacija, tada $Z = (X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiran s $X_n := f_n + g_n$ i $Y_n := f_n - g_n$ posjeduje *zigzag* svojstvo. Vrijedi i obrat, ako $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima *zigzag* svojstvo te je $X_0 + Y_0 = \pm(X_0 - Y_0)$, tada za proces $(f_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiran s $f_n := (X_n + Y_n)/2$ i $g_n := (X_n - Y_n)/2$ vrijedi da je g ± 1 martingalna transformacija od f.

Uvedimo sada i važan slučaj tzv. dijadskih martingala koji će nam kasnije biti od koristi jer će se brojni rezultati prvo dokazati za dijadske martingale, a potom, koristeći tako dokazane tvrdnje, i rezultati za proizvoljne martingale.

Definicija 1.1.20. *Neka je $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u Banachovom prostoru E i martingalnim nizom razlika $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Kažemo da je f dijadski martingal ukoliko je $f_0 \equiv x_0 \in E$ te za sve $n \geq 1$ i za svaki neprazan skup oblika*

$$\{f_0 = x_0, df_1 = x_1, \ldots, df_{n-1} = x_{n-1}\},$$

restrikcija od df_n na taj skup ili je identički jednaka 0 ili poprima vrijednosti u skupu $\{-x_n, x_n\}$ za neko $x_n \in E \backslash \{0\}$.

Niz parcijalnih suma Haarovih funkcija na $[0,1\rangle$ čini dijadski martingal na $[0,1\rangle$ u odnosu na svoju prirodnu filtraciju. Podsjetimo, Haarove funkcije na $[0,1\rangle$ definiraju se s

$$\begin{aligned}
h_0 &= \mathbb{1}_{[0,1\rangle}, & h_1 &= \mathbb{1}_{[0,1/2\rangle} - \mathbb{1}_{[1/2,1\rangle}, \\
h_2 &= \mathbb{1}_{[0,1/4\rangle} - \mathbb{1}_{[1/4,1/2\rangle}, & h_3 &= \mathbb{1}_{[1/2,3/4\rangle} - \mathbb{1}_{[3/4,1\rangle}, \\
h_4 &= \mathbb{1}_{[0,1/8\rangle} - \mathbb{1}_{[1/8,1/4\rangle} & h_5 &= \mathbb{1}_{[1/4,3/8\rangle} - \mathbb{1}_{[3/8,1/2\rangle}, \ldots
\end{aligned}$$

Definicija 1.1.21. *Neka je $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ filtracija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$. Slučajni proces $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ naziva se predvidivim obzirom na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako je H_0 $\mathscr{F}_0$-izmjeriva, te H_n $\mathscr{F}_{n-1}$- izmjeriva slučajna varijabla za sve $n \geq 1$.*

Propozicija 1.1.22. *Neka je $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ realan predvidiv slučajni proces takav da je H_n ograničena slučajna varijabla za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je $f = (f_n \mid n \in \mathbb{N}_0)$ martingal s vrijednostima u E u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tada je slučajni proces $H \cdot f$ definiran s $(H \cdot f)_n := H_0 f_0 + \sum_{m=1}^n H_m(f_m - f_{m-1})$ za $n \in \mathbb{N}_0$, ponovno martingal.*

Dokaz. Uočimo najprije kako je

$$\mathbb{E}\,\|(H \cdot f)_n\|_E \leq |H_0|\,\|f_0\|_E + \sum_{m=1}^{n} |H_m|\,\|f_m - f_{m-1}\|_E$$

te da je desna strana integrabilna. Očito je da je $(H \cdot f)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiran. Stoga, za $n \in \mathbb{N}_0$, iz Propozicije 1.1.14 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(H \cdot f)_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[(H \cdot f)_n + H_{n+1}(f_{n+1} - f_n)|\mathscr{F}_n] \\
&= (H \cdot f)_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(f_{n+1} - f_n)|\mathscr{F}_n] \\
&= (H \cdot f)_n + H_{n+1}\mathbb{E}[f_{n+1} - f_n|\mathscr{F}_n] = (H \cdot f)_n.
\end{aligned}$$

□

Definicija 1.1.23. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor s filtracijom $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Preslikavanje $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ako vrijedi*

$$\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Za martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ na vjerojatnonom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ i vrijeme zaustavljanja T, s f_T označavamo slučajnu varijablu $\omega \mapsto f_{T(\omega)}$.

Propozicija 1.1.24. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u E u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada je za svako vrijeme zaustavljanja T i proces $(f_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal u odnosu na istu filtraciju.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije na isti način na koji slijedi i u realnom slučaju, vidjeti Propoziciju 1.68. u [22]. □

Prisjetimo se Doobove nejednakosti za submartingale u realnom slučaju:

Teorem 1.1.25. *Neka je $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ submartingal i $\overline{f_n} := \max_{0\le m\le n} f_m^+$. Tada za sve $1 < p < +\infty$ vrijedi:*

$$\mathbb{E}[\overline{f_n}^p] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(f_n^+)^p].$$

Specijalno, ako je $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal i $g_n^* := \max_{0\le m\le n} |g_m|$, tada za sve $1 < p < +\infty$ vrijedi

$$\mathbb{E}[|g_n^*|^p] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|g_n|^p].$$

Dokaz. Vidjeti [22], Teorem 1.87. □

Neka je sada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ L^1 martingal s vrijednostima u E. Tada je niz slučajnih varijabli $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiran s $Z_n(\omega) = \|f_n(\omega)\|_E$ submartingal. Doista, vrijedi da je $\|\mathbb{E}[f_n|\mathscr{G}]\|_E \le \mathbb{E}[\|f_n\|_E\,|\mathscr{G}]$ gotovo sigurno za sve σ-algebre $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Odavde za $\mathscr{G} := \mathscr{F}_k$ $(k \le n)$ dobivamo $\|f_k\|_E \le \mathbb{E}[\|f_n\|_E\,|\mathscr{F}_k]$ gotovo sigurno, što pokazuje da je $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ submartingal. Stoga iz teorema 1.1.25 dobivamo slijedeći korolar:

Korolar 1.1.26. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u E. Tada za sve $1 < p < +\infty$ vrijedi:*

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|f_n\|\right\|_p \le \frac{p}{p-1}\cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|f_n\|_{L^p(E)}.$$

1.2 Neki rezultati iz funkcionalne analize

Neka su $1 < p, q < +\infty$ takvi da zadovoljavaju $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Za proizvoljnu funkciju $g \in L^q(\Omega; E')$ označimo s ϕ_g ograničeni linearni funkcional na $L^p(\Omega; E)$ definiran s $\langle f, \phi_g\rangle := \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega)\rangle d\mathbb{P}(\omega)$. Doista,

$$\begin{aligned}|\langle f, \phi_g\rangle| &\le \int_\Omega |\langle f(\omega), g(\omega)\rangle| d\mathbb{P}(\omega) \le \int_\Omega \|g(\omega)\|_{E'} \cdot \|f(\omega)\|_E \, d\mathbb{P}(\omega)\\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_{L^p(\Omega;E)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega;E')}.\end{aligned}$$

Propozicija 1.2.1. *Neka su $1 < p, q < +\infty$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neka je Y zatvoreni potprostor od E'. Tada je preslikavanje $g \mapsto \phi_g$ linearna izometrija s $L^q(\Omega; Y)$ na zatvoreni potprostor od $(L^p(\Omega; E))'$.*

Dokaz. Fiksirajmo $g \in L^q(\Omega; Y)$. Znamo da je $\|\phi_g\| \leq \|g\|_{L^q(\Omega;E')} = \|g\|_{L^q(\Omega;Y)}$. Da bismo provjerili da je $\|\phi_g\| \geq \|g\|_{L^q(\Omega;Y)}$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\|g\|_{L^q(\Omega;Y)} = 1$. Tada preostaje dokazati da je $\|\phi_g\| \geq 1$. Ukoliko je $\lim_{n\to+\infty} g_n = g$ u $L^q(\Omega; Y)$ tada za proizvoljni $\epsilon > 0$ imamo

$$\|\phi_g\| \geq \|\phi_{g_n}\| - \|\phi_{g-g_n}\| \geq \|\phi_{g_n}\| - \|g - g_n\|_{L^q(\Omega;Y)} \geq \|\phi_{g_n}\| - \epsilon$$

za dovoljno velike n. Budući da je $\epsilon > 0$ bio proizvoljno odabran, odavde slijedi da je dovoljno dokazati $\|\phi_g\| \geq 1$ za jednostavne funkcije g za koje vrijedi $\|g\|_{L^q(\Omega;Y)} = 1$. Neka je stoga $g = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \otimes x_n^*$, pri čemu su F_n međusobno disjunktni neprazni skupovi. Izbacimo iz ovog rastava one članove kod kojih je $x_n^* = 0$.

Odaberimo proizvoljni $\epsilon > 0$. Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementi norme 1 u E takvi da je $\langle x_n, x_n^* \rangle \geq (1-\epsilon)\|x_n^*\|$. Definirajmo $f := \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{F_n} \otimes \|x_n^*\|^{q-1} x_n$. Tada je

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega;E)} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(F_n)\,\|x_n^*\|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(F_n)\,\|x_n^*\|^{q} = \|g\|^q_{L^q(\Omega;Y)} = 1$$

te vrijedi

$$\langle f, \phi_g \rangle = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(F_n)\,\|x_n^*\|^{q-1} \langle x_n, x_n^* \rangle \geq (1-\epsilon) \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(F_n)\,\|x_n^*\|^{q} = 1 - \epsilon.$$

Budući da je $\epsilon > 0$ odabran proizvoljno to zaključujemo kako je $\|\phi_g\| \geq 1$. □

Neka je E Banachov prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Fiksirajmo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset E$. Tada kažemo da red $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno u E ukoliko red $\sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)}$ konvergira (obično) u E za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. Za niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset E$ kažemo da je baza za E ako za svaki $x \in E$ postoji jedinstveni niz skalara $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takav da je $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$. Za bazu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Banachovog prostora E kažemo da je *bezuvjetna* ako za svaki $x \in E$, rastav $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ konvergira bezuvjetno. Konačno, za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u E kažemo da je **bezuvjetan bazni niz** ako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezuvjetna baza za $\overline{\operatorname{span}(x_j \mid j \in \mathbb{N}_0)}$. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.2.2. *Neka je E Banachov prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset E$ pri čemu je $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, ekvivalentno je:*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je bezuvjetan bazni niz u E.

(b) Postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ te sve $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ i sve skalare $(a_j)_{j=0}^n$ vrijedi:

$$\left\| \sum_{j\in A} a_j x_j \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{j=0}^{n} a_j x_j \right\|.$$

(c) *Postoji konstanta $C' > 0$ takva da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i za sve $(\epsilon_j)_{j=0}^n \subseteq \{-1, 1\}$ te proizvoljne skalare $(a_j)_{j=0}^n$ vrijedi:*

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \epsilon_j a_j x_j \right\| \leq C' \cdot \left\| \sum_{j=0}^{n} a_j x_j \right\|.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [18], Propozicija $3.4.4$. □

Definicija 1.2.3. *Neka je V vektorski prostor. Za skup $C \subseteq V$ kažemo da je konveksan ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad tx_1 + (1-t)x_2 \in C.$$

Teorem 1.2.4. *(Hahn-Banach)*

- *(Teorem proširenja) Neka je E Banachov prostor i $F \subseteq E$ njegov zatvoreni potprostor. Tada za svaki $y^* \in F'$ postoji funkcional x^* koji proširuje y^* i zadovoljava $\|x^*\|_{E'} = \|y^*\|_{F'}$.*
- *(Teorem separacije) Neka su C i D neprazni disjunktni konveksni podskupovi normiranog prostora X (nad poljem $\mathbb{K}$) uz standardnu topologiju induciranu normom. Tada vrijedi sljedeće:*
  1. *Ako je C otvoren skup, tada postoji neprekidno linearno preslikavanje $x^* : X \to \mathbb{K}$ i realni broj $t \in \mathbb{R}$ takav da*

     $$\mathscr{R}\langle x, x^* \rangle < t \leq \mathscr{R}\langle y, x^* \rangle, \quad \forall x \in C, y \in D.$$

  2. *Ako je C kompaktan i D zatvoren, tada postoji neprekidno linearno preslikavanje $x^* : X \to \mathbb{K}$ i realni brojevi $s, t \in \mathbb{R}$ takvi da je*

     $$\mathscr{R}\langle x, x^* \rangle \leq s < t \leq \mathscr{R}\langle y, x^* \rangle, \quad \forall x \in C, y \in D.$$

Dokaz. Dokaz Hahn-Banachovog teorema separacije može se pronaći u [17] (Teorem $3.4.$), dok se za dokaz Hahn-Banachovog teorema o proširenju može konzultirati Teorem $4.1.5$ iz [2]. □

Definicija 1.2.5. *Neka je X normiran prostor. Zatvarač $\bar{S}$ proizvoljnog skupa $S \subseteq X$ definira se kao najmanji zatvoreni skup u X koji sadrži A.*

Definicija 1.2.6. *Kažemo da je normirani prostor X separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\bar{S} = X$.*

Lema 1.2.7. *Neka je C zatvoren i konveksan skup u separabilnom normiranom prostoru X. Tada postoji niz afinih funkcija oblika $\phi_i = \mathscr{R}\langle \cdot, x_i^* \rangle - t_i$ gdje su $x_i^* \in X'$ i $t_i \in \mathbb{R}$, takvi da za sve $x \in X$ vrijedi $x \in C \iff \forall \phi_i(x) \geq 0$.*

Dokaz. Budući da je X separabilan to možemo pronaći niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $X \backslash C$ koji je gust u tom skupu. Definirajmo $\delta_i = \inf_{x \in C} \|x_i - x\|$ te uočimo da je $\delta_i > 0$. Otvorene kugle $B(x_i, \delta_i)$ su konveksne i disjunktne s C. Iz Hahn-Banachovog teorema o separaciji zaključujemo kako postoje funkcionali $x_i^* \in X'$ te realni brojevi t_i takvi da je $\mathscr{R}\langle x, x_i^* \rangle \geq t_i > \mathscr{R}\langle y, x_i^* \rangle$ za sve $x \in C$ i $y \in B(x_i, \delta_i)$. Dakle, $\phi_i(x) = \mathscr{R}\langle x, x_i^* \rangle - t_i \geq 0$ za sve $x \in C$ i sve $i \in \mathbb{N}$. S druge strane, ako je $y \in X \backslash C$, tada mora biti $\phi_i(y) < 0$ bar za jedan $i \in \mathbb{N}$. Doista, označimo s $\delta = \text{dist}(y, C) > 0$ te odaberimo x_i iz danog niza tako da zadovoljava $\|x_i - y\| < \frac{1}{2}\delta$. Tada je $\delta_i = \text{dist}(x_i, C) > \frac{1}{2}\delta$ te je stoga $y \in B(x_i, \delta_i)$. Iz ovoga imamo $\phi_i(x_i) < 0$. □

Lema 1.2.8. *Neka je X separabilni normirani prostor te $\phi : X \to \mathbb{R}$ konveksna, neprekidna funkcija na X. Tada postoji niz afinih funkcija $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ oblika $\phi_i = \mathscr{R}\langle \cdot, y_i^* \rangle + a_i$, pri čemu su $y_i^* \in X'$ te $a_i \in \mathbb{R}$, takav da vrijedi*

$$\phi(x) = \sup_i \phi_i(x), \quad \forall x \in X.$$

Dokaz. Iz konveksnosti od ϕ odmah imamo kako je $C = \{(x, s) \mid \phi(x) \leq \mathscr{R}s\} \subseteq X \times \mathbb{K}$ konveksan. Zaista, za $(x_1, s_1), (x_2, s_2) \in C$ i $t \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi kako je

$$\phi(tx_1 + (1-t)x_2) \overset{\phi \text{ konv.}}{\leq} t\phi(x_1) + (1-t)\phi(x_2) \leq t\mathscr{R}s_1 + (1-t)\mathscr{R}s_2 = \mathscr{R}(ts_1 + (1-t)s_2).$$

Iz neprekidnosti od ϕ slijedi kako je C i zatvoren. Po Lemi 1.2.7 slijedi da postoje $x_i^* \in X'$, $s_i^* \in \mathbb{K}$ te $t_i \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $x \in X$ vrijedi

$$(x, s) \in C \iff \mathscr{R}\langle x, x_i^* \rangle + \mathscr{R}(s \cdot s_i^*) \geq t_i, \ \forall i = 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

Uočimo da za fiksirani $x \in X$ vrijedi da je $(x, s) \in C$ kad god je $\mathscr{R}s$ dovoljno velik. Stoga, iz (1.1) dobivamo kako mora biti $\mathscr{I}s_i^* = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Doista, ukoliko je $\mathscr{I}s_i^* \neq 0$ za neko $i \in \mathbb{N}$, to imamo $s_i^* = a + bi$ za neke $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Fiksirajmo sada $x \in X$. Konstruirat ćemo $(s_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ takav da je $\mathscr{R}s_i^{(n)} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ te takav da $(x, s_i^{(n)}) \notin C$ za dovoljno velike n. Uzmimo $s_i^{(n)} := n + \text{sgn}(b) \cdot n^2 i, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathscr{R}(an - \text{sgn}(b)bn^2) \overset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Analogno se pokaže kako je $s_i^* \geq 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Zaista, ukoliko je $s_i^* < 0$ za neko $i \in \mathbb{N}$, tada možemo definirati niz $(s_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s $s_i^{(n)} := n$ te će pritom vrijediti kako je $\mathscr{R}s_i^{(n)} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, ali $(x, s_i^{(n)}) \notin C$ za dovoljno velike n.

Iz uvjeta (1.1) slijedi kako je jedini način da je $s_i^* = 0$ za neko $i \in \mathbb{N}$ upravo taj da vrijedi $\mathscr{R}\langle x, x_i^* \rangle \geq t_i$ za sve $x \in X$. Drugim riječima, uvjet

$$(x, s) \in C \iff \mathscr{R}\langle x, x_i^* \rangle + \mathscr{R}(s \cdot s_i^*) \geq t_i \tag{1.2}$$

biva ekvivalentan s $(x, s) \in X \times \mathbb{K}$. Stoga, taj uvjet možemo izbaciti. Dakle, kao što smo vidjeli u prethodnom razmatranju, mora vrijediti da je $\mathscr{R}s_i^* > 0$ i $\mathscr{I}s_i^* = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots,$.

Podijelimo li obje strane od (1.1) sa $s_i^* > 0$ zaključujemo kako je desni uvjet u (1.1) ekvivalentan s

$$\mathscr{R}s \geq -\mathscr{R}\langle x, x_i^*/s_i^* \rangle + t_i/s_i^* =: \mathscr{R}\langle x, y_i^* \rangle + a_i =: \phi_i(x), \forall i = 1, 2, \ldots$$

. Ovo je, pak, ekvivalentno s

$$\mathscr{R}s \geq \sup_i \phi_i(x). \tag{1.3}$$

Prisjetimo se da je po Lemi 1.2.7 uvjet (1.3) ispunjen ako i samo ako vrijedi da je $(x, s) \in C$. Iz definicije skupa C slijedi kako je $(x, s) \in C$ ako i samo ako je $\mathscr{R}s \geq \phi(x)$. Odavde zaključujemo da je $\phi(x) = \sup_i \phi(x)$. $\square$

Neka je X normirani prostor. Definiramo preslikavanje $J : X \to X''$ tako da za proizvoljni $x \in X$ vrijedi $J(x)(x^*) := x^*(x)$ za sve $x^* \in X'$. Ovako je definirano preslikavanje izometrično što slijedi iz Hahn-Banachovog teorema o proširenju. Za detalje se može konzultirati [2], stranica 69. U tom je duhu moguće poistovjećivati X s $J(X) \subseteq X''$ što u nastavku i činimo.

Neka je $X \neq \emptyset$ i $\xi \subseteq \mathscr{P}(X)$. Ukoliko s $\tau(\xi)$ označimo najmanju topologiju na X koja sadrži familiju ξ, tada vrijedi sljedeće: $\tau(\xi)$ se sastoji od skupa X te svih unija konačnih presjeka elemenata familije ξ. Također, neka je $(f_j)_{j \in J}$ familija preslikavanja $f_j : X \to Y_j$ pri čemu su $Y_j, j \in J$, topološki prostori. Slaba topologija na X inducirana familijom $(f_j)_{j \in J}$ je najmanja topologija na X u odnosu na koju su sva preslikavanja $f_j, j \in J$, neprekidna. Slaba topologija, u oznaci $\sigma(X, X')$, na normiranom prostoru X je slaba topologija inducirana svim ograničenim funkcionalima $f \in X'$. Uvažavajući prvu tvrdnju, može se pokazati kako bazu slabe topologije čine upravo skupovi oblika

$$B_{x_0, f_1, \ldots, f_n, \epsilon} = \{x \in X \mid |f_i(x - x_0)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

gdje su $x_0 \in X, f_1, \ldots, f_n \in X', n \in \mathbb{N}$ te $\epsilon > 0$. Analogno tomu, slaba* topologija na X', u oznaci $\sigma(X', J(X))$, je slaba topologija na X' generirana svim funkcionalima $J(x), x \in X$. Pokazuje se da bazu slabe* topologije čine skupovi oblika

$$B_{f_0, x_1, \ldots, x_n, \epsilon} = \{f \in X' \mid |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

gdje su $x_1, \ldots, x_n \in X, f_0 \in X', n \in \mathbb{N}$ te $\epsilon > 0$.

Vrijedi $f_n \to f$ u slabo* topologiji ako i samo ako je $J(x)(f_n) \to J(x)(f), \forall x \in X$, to jest, ako i samo ako vrijedi $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$.

Za vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}\}$ zajedno s topologijom τ na X kažemo da je **topološki vektorski prostor (TVP)** ako su operacije

- $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$ i
- $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

neprekidne s obzirom na topologiju τ. TVP imaju razna svojstva od koji ističemo sljedeća dva (koja se koriste i u nastavku ovog rada): U TVP X nad $\mathbb{K}$ vrijedi da je zbroj kompaktnog i zatvorenog skupa zatvoren skup ([1], Lema 5.3.). Također, konveksna ljuska konačne unije konveksnih kompaktnih skupova je ponovno kompaktna ([1], Lema 5.29.). E' zajedno sa slabo* topologijom jest topološki vektorski prostor ([3], Primjer 3.9).

Jamesov teorem

Teorem 1.2.9. *(Goldstein) Neka je E Banachov prostor. Tada je slika zatvorene jedinične kugle $B \subset E$ po preslikavanju J slabo* gusta u zatvorenoj jediničnoj kugli $B'' \subset E''$.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3], poglavlje 3. □

Teorem 1.2.10. *(Banach - Alaoglu) Neka je X normirani vektorski prostor. Tada je jedinična kugla $B_{X'} := \{x^* \in X' \mid \|x^*\| \leq 1\}$ u dualnom prostoru X' slabo* kompaktan skup.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3], poglavlje 3. □

Lema 1.2.11. *Neka je S topološki prostor te neka je $(K_n)_{n=0}^{+\infty}$ niz padajućih, kompaktnih, zatvorenih, nepraznih podskupova od S. Tada je $\cap_{n=0}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest, neka je $\cap_{n=0}^{+\infty} K_n = \emptyset$. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo $U_n := K_0 \backslash K_n$. Imamo da je $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} U_n = K_0 \backslash \left(\cap_{n=0}^{+\infty} K_n\right) = K_0$. Budući da su K_n zatvoreni u odnosu na topologiju na S, to su zatvoreni i u odnosu na relativnu topologiju na K_0. Stoga su U_n otvoreni u gore opisanoj relativnoj topologiji. Jer je $K_0 \subset S$ kompaktan, a $(U_n)_{n=0}^{+\infty}$ njegov otvoreni pokrivač, to postoji njegov konačan potpokrivač $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_m}\}$. Neka je $M := \max_{1 \leq i \leq m} n_i$. Tada je $\cup U_{n_i} = U_M$. Posljedično je $K_0 = \cup U_{n_i} = U_M$. Ipak, ovo povlači kako je $K_M = K_0 \backslash U_M = \emptyset$ što je kontradikcija. □

Lema 1.2.12. *(F.Riesz) Neka je X normiran prostor i M pravi zatvoreni potprostor od X. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $\|x\| = 1$ i $\|x - y\| > 1 - \epsilon, \forall y \in M$.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [2], Lema 1.2.12. □

Lema 1.2.13. *(Donja slabo* polu-neprekidnost norme) Neka je E Banachov prostor. Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz koji slabo* konvergira prema f, tada vrijedi $\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$.*

Dokaz. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u E' koji konvergira prema f u slabo* smislu, odnosno $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, za sve $x \in E$. Slijedi kako je $|\langle f_n, x\rangle| \leq \|f_n\| \cdot \|x\|$ pa uzimanjem $\liminf_{n\to+\infty}$ dobivamo $|\langle f, x\rangle| \leq \|x\| \cdot \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$. Budući da prethodna tvrdnja vrijedi za proizvoljni $x \in E$ to zaključujemo kako je $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$. □

Lema 1.2.14. *Neka je X normirani prostor i $K \subset X$ njegov konveksni podskup. Tada je K zatvoren ako i samo ako je slabo zatvoren.*

Dokaz. Neka je $K \subset X$ zatvoreni konveksni skup te neka je $x_0 \in X\backslash K$. Tada postoji $\delta > 0$ takva da je $B(x_0, \delta) \cap K = \emptyset$. Iz Hahn-Banachovog teorema separacije zaključujemo kako postoji $x^* \in X'$ i $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\mathscr{R}\langle x, x^*\rangle > t$ za sve $x \in B(x_0, \delta)$ te takav da je $\mathscr{R}\langle x, x^*\rangle \leq t$ za sve $x \in K$. Stoga je $U := \{x \in X \mid \mathscr{R}\langle x, x^*\rangle > t\}$ slabo otvoren skup disjunktan s K koji sadrži x_0. Slijedi kako je $X\backslash K$ slabo otvoren odnosno K slabo zatvoren skup. Obrat je jasan.

□

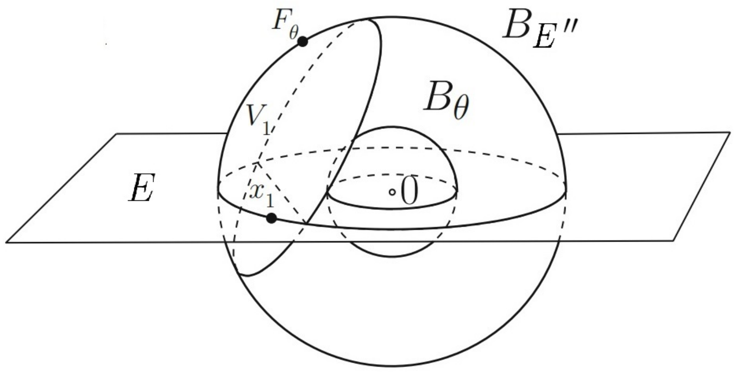
Teorem 1.2.15. *(James) Banachov prostor E je refleksivan ako i samo ako postoji $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da vrijedi sljedeće:*

> *Ako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u jediničnoj sferi od E takav da je $\|w\| > \theta$, $\forall w \in$ conv$\{x_1, x_2, \ldots\}$, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}, u \in$ conv$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ i $v \in$ conv$\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ takvi da vrijedi $\|u - v\| \leq \theta$.*

Dokaz. Dokažimo najprije nužnost. Neka je E refleksivan Banachov prostor te označimo s S_E jediničnu sferu u E. Fiksirajmo bilo koji $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ i promotrimo proizvoljni niz $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset S_E$ te, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, definirajmo $K_n := \overline{\text{conv}}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Uočimo da je $(K_n)_{n=0}^{+\infty}$ padajući niz nepraznih slabo kompaktnih skupova. Doista, po Banach-Alaoglu-ovom teoremu, zatvorena jednična kugla $B_{E'}$ u E' je slabo* kompaktan skup, a u refleksivnim prostorima odavde odmah slijedi da je B_E slabo kompaktan skup. Budući da su, po Lemi 1.2.14, zatvoreni konveksni skupovi ujedno i slabo zatvoreni, to znamo da su svi K_n slabo zatvoreni. Sada iz činjenice da je svaki od K_n-ova zatvoren podskup slabo kompaktnog skupa, slijedi da je i sam slabo kompaktan. Po Lemi 1.2.11 zaključujemo kako postoji $x \in \cap_{n=0}^{+\infty} K_n$. Budući da je $x \in K_0$ to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $u \in \text{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$

takav da je $\|x-u\| < \theta/2$. Jer je $x \in K_{n_0}$, to postoji $v \in \text{conv}\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ takav da je $\|x-v\| < \theta/2$. Dakle, $\|v-u\| < \theta$.

Dovoljnost. Označimo s $B_\theta := \{F \in E'' \mid \|F\| \leq \theta\}$. Tada je B_θ slabo* zatvoren skup. Zaista, uzmemo li za polazni prostor E', tada iz Banach-Alaoglu-ovog teorema znamo da je $B_{E''}$ slabo* kompaktan skup. Preslikavanje $T : E'' \to E''$ definirano s $Tx = \frac{1}{\theta}x$ je homeomorfizam u odnosu na slabo* topologiju pa je stoga B_θ slabo* kompaktan. Budući da je slabo* topologija Hausdorffova to je i slabo* zatvoren.



Slika 1.1: Prvi korak u dokazu dovoljnosti

Pretpostavimo da E nije refleksivan prostor, odnosno, $J(E) \neq E''$. U tom je slučaju $J(E)$ pravi zatvoreni potprostor od E''. Stoga, iz Rieszove leme, za $\epsilon = 1-\theta$, slijedi kako postoji $F_\theta \in S_{E''}$ takav da je $\|F_\theta - y\|_{E''} > \theta$ za svaki $y \in J(E)$, odnosno, $\|F_\theta - J(x)\|_{E''} > \theta$ za svaki $x \in E$. Drugim riječima, $F_\theta \notin B_\theta + \{J(x)\}$ niti za jedan $x \in E$. Zaključujemo, dakle, kako pod pretpostavkom da E nije refleksivan postoji $F_\theta \in S_{E''} \setminus \cup_{x\in E}(B_\theta + \{J(x)\})$. Uvažavajući činjenicu da $F_\theta \in E'' \setminus B_\theta$ (ovo je slabo* otvoreni skup) znamo da postoji konveksna slabo* okolina V_1 od F_θ u E'' takva da je $V_1 \cap B_\theta = \emptyset$ (naime, standardna baza slabo* okolina opisana pri početku poglavlja sastoji se od konveksnih skupova). Iz Goldsteinovog teorema i slabe* donje polu-neprekidnosti norme zaključujemo kako je F_θ u slabo* zatvaraču slike od S_E po kanonskom preslikavanju iz E u E''.

Odaberimo stoga sada $x_1 \in S_E$ takav da je $J(x_1) \in V_1 \cap J(S_E)$. Uočimo kako je skup $\{J(x_1)\} + B_\theta$ slabo* zatvoren kao suma slabo* kompaktnog i slabo* zatvorenog skupa. Budući da $F_\theta \notin \{J(x_1)\} + B_\theta$ to postoji konveksna slabo* okolina $V_2 \subset V_1$ od F_θ koja je disjunktna s $\{J(x_1)\} + B_\theta$. Odaberimo $x_2 \in S_E$ takav da je $J(x_2) \in V_2 \cap J(S_E)$. Uočimo kako je skup $\text{conv}\{J(x_1), J(x_2)\} + B_\theta$ slabo* zatvoren kao suma slabo* kompaktnog i slabo* zatvorenog skupa. Uočimo kako $F_\theta \notin (\text{conv}\{J(x_1), J(x_2)\} + B_\theta)$. Doista, kada bi $F_\theta \in \{\alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2)\} + B_\theta$ za neke $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ za koje je $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tada bi vrijedilo kako je $F_\theta \in \{J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} + B_\theta$, što je očito nemoguće. Budući da $F_\theta \notin (\text{conv}\{J(x_1), J(x_2)\} + B_\theta)$, to postoji konveksna slabo* okolina $V_3 \subset V_2$ od F_θ takva da je $V_3 \cap (\text{conv}\{J(x_1), J(x_2)\} + B_\theta) = \emptyset$. Odaberimo $x_3 \in S_E$ takav da je $J(x_3) \in V_3 \cap J(S_E)$ te induktivno nastavimo ovaj postupak. Na kraju dobivamo padajući niz konveksnih skupova $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te niz vektora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa sljedećim svojstvima:

- $\text{conv}\{(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\} \subset V_1$ iz čega slijedi da je

  $$\inf\{\|J(w)\|_{E''} \mid J(w) \in \text{conv}\{(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\}\} \geq \theta.$$

  Koristeći činjenicu da je J izometrija zaključujemo kako je

  $$\inf\{\|w\|_E \mid w \in \text{conv}\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}\} \geq \theta.$$

- Za sve $n \in \mathbb{N}$, $\text{conv}\{J(x_{n+1}), J(x_{n+2}), \dots\} \subset V_{n+1}$ te vrijedi

  $$V_{n+1} \cap (\text{conv}\{J(x_1), \dots, J(x_n)\} + B_\theta) = \emptyset.$$

  Dakle, za proizvoljne $u \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ i $v \in \text{conv}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ vrijedi $\|u - v\| > \theta$.

Time dolazimo do kontradikcije s uvjetom iz iskaza teorema.

□

1.3 Dvije korisne nejednakosti

Lema 1.3.1. *(Littlewoodova nejednakost) Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere. Fiksirajmo $0 < p_0 < p_1 < \infty$ te $0 < \theta < 1$. Definirajmo p relacijom $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Ako je $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, tada je $f \in L^p$ i vrijedi $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}$.*

Dokaz. Neka je $1 - \gamma = (1-\theta)p/p_0$, odnosno $\gamma = \theta p/p_1$. Primjenom Hölderove nejednakosti s eksponentima $1/(1-\gamma)$ i $1/\gamma$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |f|^{(1-\theta)p} |f|^{\theta p} d\mu\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^{(1-\theta)p/(1-\gamma)}\right)^{(1-\gamma)/p} \left(\int_\Omega |f|^{\theta p/\gamma}\right)^{\gamma/p} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^{p_0} d\mu\right)^{(1-\theta)/p_0} \left(\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu\right)^{\theta/p_1} = \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.
\end{aligned}$$

□

Teorem 1.3.2. *(Hinčinova nejednakost) Neka je* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnostni prostor te fiksirajmo* $0 < p < +\infty$*. Tada postoje pozitivne konstante* A_p *i* B_p *takve da za sve realne brojeve* $a_1, \dots, a_N$ *te međusobno nezavisne Bernullijeve slučajne varijable* $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$ *vrijedi:*

$$A_p \left\| \sum_{k=1}^N \epsilon_k a_k \right\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^2 \right)^{1/2} \leq B_p \left\| \sum_{k=1}^N \epsilon_k a_k \right\|_p .$$

Ako je $0 < p \leq 2$*, možemo uzeti* $A_p = 1$ *te* $B_p = 3^{1/p-1/2}$*. Ako je* $2 \leq p < \infty$ *možemo uzeti* $A_p \sim (e/p)^{1/2}$ *kako* $p \to \infty$ *te* $B_p = 1$*. Ako je* t *realan, tada je* $\mathbb{E}(e^{t\sum_{n=1}^N a_n \epsilon_n}) \leq e^{t^2(\sum_{k=1}^N a_n^2)/2}$*.*

Dokaz. Uvedimo oznaku $s_N := \sum_{n=1}^N \epsilon_n a_n$ te $\sigma := (\sum_{k=1}^N a_k^2)^{1/2}$. Neka je $0 < p < q < +\infty$. Tada za inkluziju $I : L^q \to L^p$ vrijedi da je $\|I\| \leq 1$. Doista, neka je $f \in L^q$ (tada je i u L^p jer je $q > p$). Uvedimo oznake $r = \frac{q}{p} > 1$ te $s = \frac{r}{r-1}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p d\mathbb{P} = \int_\Omega |f|^p \cdot \mathbb{1}_\Omega d\mathbb{P} &\leq \||f|^p\|_r \cdot \|\mathbb{1}_\Omega\|_s \\ = \left[\int_\Omega |f|^{pr} \right]^{1/r} \cdot \mathbb{P}(\Omega)^{1/s} &= \|f\|_q^{q/r} = \|f\|_q^p . \end{aligned}$$

Budući da u slučaju $p = 2$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\left\| \sum_{k=1}^N \epsilon_k a_k \right\| \right]^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2,$$

to, uvažavajući prethodni komentar, možemo uzeti $A_p = 1$ za $0 < p < 2$ te $B_p = 1$ za $2 < p < +\infty$.

Neka je $2 < p < +\infty$. Ako je $2k - 2 < p < 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\|s_N\|_{2k-2} \leq \|s_N\|_p \leq \|s_N\|_{2k}$. Dakle, dovoljno je ustanoviti egzistenciju i asimptotsko ponašanje od A_{2k}, pri čemu je $2k$ paran cijeli broj. U tom slučaju, zbog međusobne nezavisnosti od $(\epsilon_k)_{k=1}^N$ imamo

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n a_n \right\|_{2k}^{2k} = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^N \epsilon_n a_n \right)^{2k} \right] &= \sum_{j_1+\dots+j_N=2k} \frac{(2k)!}{j_1! \dots j_N!} a_1^{j_1} \dots a_N^{j_N} \mathbb{E}(\epsilon_1^{j_1} \dots \epsilon_N^{j_N}) = \\ &= \sum_{j_1+\dots+j_N=2k} \frac{(2k)!}{j_1! \dots j_N!} a_1^{j_1} \dots a_N^{j_N} \mathbb{E}(\epsilon_1^{j_1}) \dots \mathbb{E}(\epsilon_N^{j_N}). \end{aligned}$$

Sada koristimo činjenicu da je $\mathbb{E}(\epsilon_n^{j_n}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}) = 1$ ako je j_n paran te $\mathbb{E}(\epsilon_n^{j_n}) = 0$ ako je j_n neparan te dobivamo

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n \right\|_{2k}^{2k} = \sum_{k_1+\cdots+k_N=k} \frac{(2k)!}{(2k_1)!\dots(2k_N)!} a_1^{2k_1} \dots a_N^{2k_N}.$$

Iz elementarne nejednakosti $(2n)! \geq 2^n n!$ koja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ dobivamo da je $(2k_1)!\dots(2k_n)! \geq 2^k k_1!\dots k_N!$ pa je stoga

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n \right\|_{2k}^{2k} \leq \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{k_1+\dots k_N=k} \frac{k!}{k_1!\dots k_N!} a_1^{2k_1} \dots a_N^{2k_N} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \left\| s_N \right\|_2^{2k}.$$

Dakle, možemo uzeti $A_{2k} = ((2k)!/(2^k k!))^{-1/2k}$. Uočimo kako je $A_{2k} \geq 1/\sqrt{2k}$ te da iz Stirlingove formule slijedi kako je $A_{2k} \sim (e/2k)^{1/2}$ kad $k \to \infty$. Tada, budući je $\mathbb{E}(s_N^n) = 0$ kad je n neparan, imamo

$$\mathbb{E}(e^{ts_N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathbb{E}(s_N^n)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k} \mathbb{E}(s_N^{2k})}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)! \left\| s_N \right\|_2^{2k}}{k! 2^k} = e^{t^2\sigma^2/2}.$$

Neka je $0 < p < 2$. Pokazali smo gore da je moguće uzeti $A_4 = 3^{-1/4}$. Neka je $\theta = (4-2p)/(4-p)$, odnosno $1/2 = (1-\theta)/p + \theta/4$. Sada iz Littlewoodove nejednakosti imamo

$$\left\| s_N \right\|_2 \leq \left\| s_N \right\|_p^{(1-\theta)} \left\| s_N \right\|_4^{\theta} \leq 3^{\theta/4} \left\| s_N \right\|_2^{\theta} \left\| s_N \right\|_p^{(1-\theta)},$$

odakle zaključujemo kako je $\left\| s_N \right\|_2 \leq 3^{\frac{\theta}{1-\theta}\frac{1}{4}} \left\| s_N \right\|_p = 3^{1/p-1/4} \left\| s_N \right\|_p$. Stoga možemo uzeti $B_p = 3^{1/p-1/2}$. □

Propozicija 1.3.3. *(Kahane-ov princip kontrakcije) Neka su $x_1, \dots, x_N$ fiksirani vektori u normiranom prostoru X te neka je $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Pretpostavimo li da su $(\epsilon_i)_{i=1}^N$ međusobno nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u $\{-1, 1\}$ i s vjerojatnošću uspjeha $1/2$, tada vrijedi*

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} a_i \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} \leq \left\| a \right\|_\infty \left\| \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitost možemo pretpostaviti da je $\left\| a \right\|_\infty = 1$. Doista, ako to nije slučaj te ukoliko je $a \neq 0$ tada samo zamijenimo a s $\frac{a}{\|a\|}$; ukoliko je $a = 0$ nejednakost je trivijalno zadovoljena. Definiramo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s $f(a) := \left\| \sum_{i=1}^N a_i \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)}$. Iz nejednakosti trokuta zaključujemo kako je f konveksna funkcija na $\mathbb{R}^N$. Za proizvoljne $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \left\| \sum_{i=1}^N a_i \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} - \left\| \sum_{i=1}^N b_i \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} \right| &\leq \left\| \sum_{i=1}^N (a_i - b_i) \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N \|x_i\| \right) \|a - b\|_\infty , \end{aligned}$$

odnosno, f je neprekidna. Budući da neprekidne funkcije na kompaktima poprimaju ekstreme, to f poprima maksimum na $[-1, 1]^N$. Pokazat ćemo da se taj maksimum mora postizati u jednoj od točaka oblika $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$. Doista, neka je x proizvoljna točka maksimuma funkcije f na $[-1, 1]^N$, te neka je $n = 2^N$. Tada je $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ pri čemu su e_i točke oblika $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, međusobno različite za različite indekse i te $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ (ovo se lako pokaže matematičkom indukcijom). Iz činjenice da je x točka maksimuma od f na $[-1, 1]^N$ imamo $f(e_i) \leq f(x), \forall i = 1, \ldots, n$. S druge strane, uvažavajući konveksnost od f, odmah slijedi $f(x) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$. Zaključujemo kako je $f(x) = f(e_i)$ za sve $i = 1, \ldots, n$ za koje je pripadni $\lambda_i \neq 0$. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_N)$ jedan od vrhova $N-$dimenzionalne kocke u kojem f poprima svoj maksimum na $[-1, 1]^N$. Zahvaljujući činjenici da slučajne varijable $(\epsilon_i a_i)$ i (ϵ_i) imaju iste distribucije zbog simetrije od ϵ_i zaključujemo kako je

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} = \left\| \sum_{i=1}^N \epsilon_i x_i \right\|_{L^p(\Omega;E)} .$$

Doista, $\Omega = \cup_{i_1,\ldots,i_N} \Omega_{(i_1,\ldots,i_N)}$ uz $\Omega_{(i_1,\ldots,i_N)} := \{\epsilon_1 = i_1, \ldots, \epsilon_N = i_N\}$ pri čemu su $i_1, \ldots, i_N \in \{\pm 1\}$. Tvrdnja slijedi iz

$$\int_{\Omega_{(i_1,\ldots,i_N)}} \left\| \sum_{i=1}^N a_i \epsilon_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega_{(a_1 i_1,\ldots,a_N i_N)}} \left\| \sum_{i=1}^N \epsilon_i(\omega) x_i \right\|^p d\mathbb{P}(\omega), \forall i_1, \ldots, i_N$$

i činjenice da je preslikavanje $(i_1, \ldots, i_N) \mapsto (a_1 i_1, \ldots, a_N i_N)$ bijektivno na skupu svih nizova duljine N čiji elementi imaju vrijednosti ± 1. $\square$

Poglavlje 2

UMD prostori

2.1 Definicija i primjeri

Definicija 2.1.1. *Neka je $p \in \langle 1, +\infty\rangle$ fiksiran. Za Banachov prostor E kažemo da ima UMD$_p$ (engl. unconditional martingale difference) svojstvo ako postoji konstanta β (koja općenito ovisi o E i p) takva da vrijedi: Ako je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $(f_n)_{n=0}^N$ konačni martingal u $L^p(\Omega; E)$ u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^N$ i s martingalnim nizom razlika $(df_n)_{n=0}^N$, tada za sve skalare $(\epsilon_n)_{n=0}^N$ takve da je $\epsilon_n = \pm 1$ za $n = 0, \dots, N$, vrijedi:*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n df_n \right\|_{L^p(\Omega,E)} \leq \beta \cdot \left\| \sum_{n=0}^{N} df_n \right\|_{L^p(\Omega,E)}. \tag{2.1}$$

Najmanju konstantu β koja zadovoljava gore opisan uvjet označavamo s $\beta_{E,p}$.

Napomena 2.1.2. 1. *Iz Teorema 1.2.2 imamo i opravdanje naziva gore uvedenog svojstva. Naime, neka je $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u Banachovom prostoru E koji ima UMD$_p$ svojstvo takav da za njegov niz martingalnih razlika vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}_0, df_n \neq 0$. Tada je $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezuvjetan bazni niz u $L^p(\Omega; E)$. Zaista, za proizvoljni $N \in \mathbb{N}_0$, skalare $(a_n)_{n=0}^N$ te $(\epsilon_n)_{n=0}^N \subset \{-1, 1\}$ vrijedi*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n a_n df_n \right\|_{L^p(\Omega;E)} \leq \beta_{E,p} \cdot \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n df_n \right\|_{L^p(\Omega;E)}$$

budući da je $(a_n df_n)_{n=0}^N$ također martingalni niz razlika u odnosu na istu filtraciju. Dakle, za niz skalara $(\alpha_n)_{n=0}^{+\infty}$, ako $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n df_n$ konvergira u $L^p(\Omega; E)$, tada vrijedi kako $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n df_n$ konvergira bezuvjetno.

2. *U Poglavlju 3 bit će posredno pokazano da ukoliko Banachov prostor E ima UMD$_p$ svojstvo onda ima i UMD$_q$ svojstvo za svaki $q \in \langle 1, +\infty \rangle$. U svjetlu ove Napomene reći ćemo da Banachov prostor E posjeduje UMD svojstvo ukoliko zadovoljava Definiciju 2.1.1 za neko $p \in \langle 1, +\infty \rangle$.*

3. *Zahtjev iz Definicije (2.1.1) ekvivalentan je sljedećem zahtjevu:*

   Neka je $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal s vrijednostima u E u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ pri čemu je $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ njegov martingalni niz razlika. Neka je $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ realni niz takav da je $\epsilon_i = \pm 1$, za svaki $i \in \mathbb{N}_0$ te definiramo g kao ± 1 martingalnu transformaciju od f s obzirom na niz $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada vrijedi

$$\|g\|_p \leq \beta_{E,p} \cdot \|f\|_p \,.$$

   Iz uvjeta navedenog u Definiciji 2.1.1 imamo $\|g_n\|_p \leq \beta_{E,p} \|f\|_p \,, \forall n \in \mathbb{N}$ iz čega je očito $\|g\|_p \leq \beta_{E,p} \|f\|_p$. Obrat sada slijedi iz činjenice da je $(d_0, \ldots, d_n, 0, 0, \ldots)$ također martingalni niz razlika uvažavajući pritom činjenice da su $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\|g_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rastući nizovi. Doista, ako je $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal lako slijedi kako je $(\|h_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ submartingal. Stoga je $(\|h_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rastući niz.

U nastavku donosimo neke osnovne primjere prostora s UMD svojstvom i načine na koje se, iz postojećih, mogu konstruirati novi prostori s UMD svojstvom:

Napomena 2.1.3. 1. *Hilbertov prostor H ima UMD$_2$ svojstvo te vrijedi $\beta_{H,2} = 1$. Doista, neka je $(df_n)_{n=0}^N$ niz martingalnih razlika te $\epsilon_n = \pm 1$ za $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Fiksirajmo $0 \leq m < n \leq N$. Iz Propozicije 1.1.14, tvrdnja (d), imamo kako vrijedi*

$$\mathbb{E}[\langle df_m, df_n \rangle] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\langle df_m, df_n \rangle | \mathscr{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[\langle df_m, \mathbb{E}[df_n | \mathscr{F}_{n-1}] \rangle] = 0,$$

   odnosno, svaki je L^2 martingalni niz razlika s vrijednostima u Hilberovom prostoru ortogonalan u $L^2(\Omega; H)$. Sada odmah slijedi kako je

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n df_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \mathbb{E} \langle df_m, df_n \rangle \epsilon_n \epsilon_m = \mathbb{E} \left\| \sum_{n=0}^{N} df_n \right\|^2$$

   iz čega zaključujemo kako H ima UMD$_2$ svojstvo te da za konstantu iz Definicije 2.1.1 možemo uzeti $\beta_{H,2} = 1$.

2. *Neka je E prostor s UMD$_p$ svojstvom te F proizvoljni Banachov prostor. Ukoliko pretpostavimo da postoji ograničeni izomorfizam $J : E \to F$ čiji je inverz također ograničen operator, tada F također posjeduje UMD$_p$ svojstvo i vrijedi*

$$\beta_{F,p} \leq \|J\| \cdot \left\|J^{-1}\right\| \cdot \beta_{E,p}.$$

Doista, neka je $\widetilde{df_n}$ *martingalni niz razlika s vrijednostima u* F*. Definiramo* $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *s* $df_n = J^{-1}(\widetilde{df_n})$*. Tada je*

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^{N}\epsilon_n\widetilde{df_n}\right\|_{L^p(\Omega;F)}^p &= \int_\Omega \left\|J\left(\sum_{n=0}^{N}\epsilon_n df_n(\omega)\right)\right\|_F^p d\mathbb{P}(\omega)\\
&\leq \|J\|^p\cdot\int_\Omega\left\|\sum_{n=0}^{N}\epsilon_n df_n(\omega)\right\|_E^p d\mathbb{P}(\omega)\\
&\overset{E \text{ je UMD}_p}{\leq} \|J\|^p\cdot\beta_{E,p}^p\cdot\int_\Omega\left\|\sum_{n=0}^{N}df_n(\omega)\right\|_E^p d\mathbb{P}(\omega)\\
&\leq \|J\|^p\cdot\left\|J^{-1}\right\|^p\cdot\beta_{E,p}^p\cdot\left\|\sum_{n=0}^{N}\widetilde{df_n}(\omega)\right\|_{L^p(\Omega;F)}^p.
\end{aligned}$$

Preostaje još uočiti kako je $\mathbb{E}[J^{-1}(\widetilde{df_n})|\mathscr{F}_{n-1}] = J^{-1}(\mathbb{E}[\widetilde{df_n}|\mathscr{F}_{n-1}]) = 0$ *što* $(df_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *čini martingalnim nizom razlika s vrijednostima u* E *u odnosu na istu filtraciju kao i* $(\widetilde{df_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$*.*

3. *Ako* E *ima UMD svojstvo, onda i svaki njegov zatvoreni potprostor* F *ima UMD svojstvo budući da je svaki zatvoreni potprostor potpunog prostora i sam potpun. Također, vrijedi* $\beta_{F,p} \leq \beta_{E,p}$ *za sve* $p \in \langle 1, +\infty\rangle$*.*

4. *Neka je* $(A, \mathscr{A}, \nu)$ *prostor* σ*-konačne mjere te neka je* $1 < p < +\infty$*. Ako* E *ima UMD*$_p$ *svojstvo, tada i* $L^p(A;E)$ *ima UMD*$_p$ *svojstvo te vrijedi:* $\beta_{L^p(A;E),p} = \beta_{E,p}$*. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [20], Teorem* 12.4*.*

5. *Neka je* $I \subseteq \mathbb{N}$ *neprazan skup te* $(E_i)_{i\in I}$ *UMD*$_p$ *prostori za neko* $p \in \langle 1, +\infty\rangle$*. Pretpostavimo da je* $\sup_{i\in I}\beta_{E_i,p} < +\infty$*. Neka je*

$$\bigotimes_{i\in I}^{p} E_i := \left\{ x = (x_i)_{i\in I} \;\middle|\; x_i \in E_i, \|x\| := \left(\sum_{i\in I}\|x_i\|_{E_i}^p\right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Tada $\bigotimes_{i\in I}^p E_i$ *također posjeduje UMD svojstvo. Doista, neka je* $(f_n)_{n=0}^N$ *konačni martingal u* $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}; \bigotimes_{i\in I}^p E_i)$ *u odnosu na filtraciju* $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^N$ *i s martingalnim nizom razlika* $(df_n)_{n=0}^N$ *te* $(\epsilon_n)_{n=0}^N \subset \{\pm 1\}$*. Računamo*

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}\epsilon_n df_n\right\|_{L^p(\Omega;\bigotimes_{i\in I}^p E_i)}^p = \int_\Omega\left\|\sum_{n=0}^{N}\epsilon_n df_n(\omega)\right\|_{\bigotimes_{i\in I}^p E_i}^p d\mathbb{P}(\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \sum_{i\in I} \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n df_n(\omega)_i \right\|_{E_i}^p d\mathbb{P}(\omega) \\
&\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{i\in I} \int_\Omega \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n df_n(\omega)_i \right\|_{E_i}^p d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \left(\sup_{i\in I} \beta_{E_i,p} \right)^p \cdot \int_\Omega \sum_{i\in I} \left\| \sum_{n=0}^N df_n(\omega)_i \right\|_{E_i}^p d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \left(\sup_{i\in I} \beta_{E_i,p} \right)^p \cdot \left\| \sum_{n=0}^N df_n \right\|_{L^p(\Omega;\bigotimes_{i\in I}^p E_i)}^p .
\end{aligned}
$$

S druge strane, od martingala s vrijednostima u E_i, za neko $i \in I$, lako konstruiramo martingal s vrijednostima u $\bigotimes_{i\in I}^p E_i$ tako što stavimo da je vrijednost martingala nad komponentama različitim od i-te identički jednaka nuli. Iz ovih razmatranja lako slijedi kako je $\beta_{\bigotimes_{i\in I}^p E_i,p} = \sup_{i\in I} \beta_{E_i,p}$.

6. *Neka su $1 < p, q < \infty$ takvi da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je E ima UMD$_p$ svojstvo ako i samo ako E' ima UMD$_q$ svojstvo te vrijedi $\beta_{E,p} = \beta_{E',q}$. Doista, pretpostavimo da je E prostor sa UMD$_p$ svojstvom te neka je $(d_n^*)_{n=0}^N$ L^q-martingalni niz razlika s vrijednostima u E'. Neka je $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}_N; E)$ proizvoljan takav da je $\|Y\|_p = 1$. Definiramo L^p-martingal $(M_n)_{n=0}^N$ s vrijednostima u E formulom $M_n := \mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_n]$ te označimo s $(d_n)_{n=0}^N$ njegov martingalni niz razlika. Da bismo odozgo ogradili $\left\|\sum_{n=0}^N \epsilon_n d_n^*\right\|_{L^q(\Omega,E')}$, po Propoziciji 1.2.1, dovoljno je ocijeniti izraz $\left|\mathbb{E}\left\langle Y, \sum_{n=0}^N \epsilon_n d_n^*\right\rangle\right|$ neovisno o Y. Koristeći uobičajeni trik uvođenja uvjetnog matematičkog očekivanja, iz Propozicije 1.1.14 (d), lako slijedi da za $0 \leq m < n \leq N$ vrijedi*

$$
\mathbb{E}\langle d_m, d_n^*\rangle = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\langle d_m, d_n^*\rangle|\mathscr{F}_{n-1}]\right] = \mathbb{E}[\langle d_m, \mathbb{E}[d_n^*|\mathscr{F}_{n-1}]\rangle] = 0. \tag{2.2}
$$

Sada imamo i glavnu ocjenu:

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left\langle Y, \sum_{n=0}^N \epsilon_n d_n^*\right\rangle\right| &= \left|\mathbb{E}\left\langle \sum_{m=0}^N d_m, \sum_{n=0}^N \epsilon_n d_n^*\right\rangle\right| \overset{(2.2)}{=} \left|\mathbb{E}\left\langle \sum_{m=0}^N \epsilon_m d_m, \sum_{n=0}^N d_n^*\right\rangle\right| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|\sum_{m=0}^N \epsilon_m d_m\right\|_p \cdot \left\|\sum_{n=0}^N d_n^*\right\|_q \leq \beta_{E,p} \cdot \left\|\sum_{m=0}^N d_m\right\|_p \cdot \left\|\sum_{n=0}^N d_n^*\right\|_q \\
&= \beta_{E,p} \cdot \left\|\sum_{n=0}^N d_n^*\right\|_q .
\end{aligned}
$$

Sada, uzimanjem supremuma po svim Y $p-$norme 1 dobivamo da je

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n d_n^* \right\|_{L^q(\Omega;E')} \leq \beta_{E,p} \cdot \left\| \sum_{n=0}^{N} d_n^* \right\|_{L^q(\Omega;E')}.$$

Time je dokazano da je E' UMD$_q$ prostor te da je $\beta_{E',q} \leq \beta_{E,p}$. Obratno, pretpostavimo li da je E' UMD$_q$ prostor, tada po prethodno dokazanom imamo $\beta_{E'',p} \leq \beta_{E',q}$. Budući da se E može izometrično uložiti u zatvoreni potprostor od E'' to slijedi kako je E UMD$_p$ prostor i $\beta_{E,p} \leq \beta_{E'',p} \leq \beta_{E',q}$.

2.2 Super-refleksivnost UMD prostora

U nastavku ovog odjeljka dokazujemo kako je svaki UMD prostor nužno super-refleksivan. Počnimo stoga s nekoliko definicija:

Definicija 2.2.1. *Za Banachov prostor E kažemo da je konačno reprezentabilan u Banachovom prostoru B ako za svaki $\epsilon > 0$ i svaki konačnodimenzionalan potprostor E_0 od E postoji konačnodimenzionalan potprostor B_0 od B te izomorfizam $T : E_0 \to B_0$ takav da je $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$.*

Definicija 2.2.2. *Neka je E Banachov prostor. Kažemo da je E super-refleksivan ako je svaki Banachov prostor koji je u njemu konačno reprezentabilan ujedno i refleksivan.*

Iz činjenice da je svaki UMD prostor super-refleksivan, pa i refleksivan, odmah će slijediti kako, primjerice, prostori

$$c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} | x_n \to 0\}, \quad l^1, \quad l^\infty, \quad C([0,1]), \quad L^1([0,1]) \text{ te } \quad L^\infty([0,1])$$

ne posjeduju UMD svojstvo.

Dokaz refleksivnosti UMD prostora temelji se na kvantitativnoj ocjeni UMD konstante za prostore l_∞^n $(n \in \mathbb{N})$ te konstrukciji određenih patoloških martingala na nerefleksivnim prostorima korištenjem Jamesove karakterizacije refleksivnosti Banachovih prostora (Teorem 1.2.15).

Počet ćemo s primjerom realnog martingala koji pokazuje da Doobova nejednakost ne vrijedi za $p = 1$, a kojeg ćemo zatim nadograditi kako bismo dobili željenu kvantitativnu ocjenu UMD konstante od l_1^n $(n \in \mathbb{N})$, odnosno posredno UMD konstante prostora l_∞^n $(n \in \mathbb{N})$.

Primjer 2.2.3. *Neka je* $\Delta = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ *te* $\nu = \otimes_{n\in\mathbb{N}}(\delta_1 + \delta_{-1})/2$. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *označimo s* $\epsilon_n : \Delta \to \{-1,1\}$ *projekciju na* n*-tu koordinatu. Na* (Δ, ν) *uvodimo filtraciju* $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definiranu s* $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ *te* $\mathscr{F}_n := \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ *za* $n \geq 1$. *Promotrimo martingal* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *nad* $\Delta = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ *u odnosu na filtraciju* $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definiran s*

$$f_n(\xi) = \begin{cases} 1, \ n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n}(1 + \epsilon_k(\xi)), \ n > 0 \end{cases}.$$

Uočimo odmah kako je $f_k = 2^k \mathbb{1}_{(\epsilon_1 = \dots = \epsilon_k = 1)}$ *te* $df_k = \epsilon_k f_{k-1}$ *za* $k \geq 1$. *Posebno je*

$$\|f_n\|_{L^1(\Delta)} = \mathbb{E} f_n = 1, \quad \forall n \geq 0. \tag{2.3}$$

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ *te definirajmo particiju* $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ *od* Δ *s*

$$\Omega_k := \begin{cases} \{\epsilon_1 = -1\}, \ k = 0 \\ \{\epsilon_1 = \dots = \epsilon_k = 1, \epsilon_{k+1} = -1\}, \ 0 < k < n \\ \{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = 1\}, \ k = n \end{cases}.$$

Slijedi kako je

$$\sup_{0\leq k\leq n} |f_k| = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\Omega_k} 2^k, \ \textit{za svaki } n \geq 1,$$

a iz toga imamo

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq k\leq n} |f_k|\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-1} 2^k + 1 = n/2 + 1. \tag{2.4}$$

Za $n \in \mathbb{N}_0$ *definiramo*

$$S_n := (|f_0|^2 + |df_1|^2 + \dots + |df_n|^2)^{1/2} = (1 + |f_0|^2 + \dots + |f_{n-1}|^2)^{1/2}.$$

Tada imamo

$$S_n = \mathbb{1}_{\Omega_0} 2^{1/2} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\Omega_k} (1 + 1 + 2^2 + \dots + 2^{2k})^{1/2} + \mathbb{1}_{\Omega_n} (1 + 1 + 2^2 + \dots + 2^{2n-2})^{1/2}$$

i, posljedično,

$$\mathbb{E} S_n = 2^{-1/2} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k-1} \left(1 + \frac{2^{2k+2} - 1}{3}\right)^{1/2} + 2^{-n} \left(1 + \frac{2^{2n} - 1}{3}\right)^{1/2},$$

što pokazuje da postoji $\alpha > 0$ *neovisan od* n *takav da je*

$$n/\alpha \leq \mathbb{E} S_n \leq \alpha n.$$

Fiksirajmo $\omega \in \Delta$. Iz Hinčinove nejednakosti primijenjene uz $p = 1$ te $a_k = df_k(\omega), k = 0, \ldots, n$ zaključujemo kako postoji konstanta $A_1 > 0$ takva da vrijedi

$$A_1 \cdot S_n(\omega) \leq \int_\Delta \left| \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k(\xi) df_k(\omega) \right| d\nu(\xi).$$

Iz dokaza Teorema 1.3.2 znamo kako možemo odabrati istu konstantu A_1 za različite $\omega \in \Delta$. Konkretno, možemo uzeti $A_1 := 3^{-1/2}$. Integriranjem po Δ te korištenjem Fubinijevog teorema (integrand je nenegativan) dobivamo

$$A_1 \cdot \mathbb{E}S_n \leq \int_\Delta \int_\Delta \left| \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k(\xi) df_k(\omega) \right| d\nu(\xi) d\nu(\omega) = \int_\Delta \left\| \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k(\xi) df_k \right\|_{L^1(\Delta)} d\nu(\xi).$$

Zaključujemo kako je

$$n \cdot A_1/\alpha \leq \sup_{\xi_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=0}^{n} \xi_k df_k \right\|_{L^1(\Delta)}. \tag{2.5}$$

Kao što je napomenuto, iz (2.3) i (2.4) zaključujemo da Doobova maksimalna nejednakost ne vrijedi u slučaju $p = 1$.

Propozicija 2.2.4. *Za svaki $1 < p < +\infty$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $N \geq 1$ vrijedi:*

$$\beta_{l_1^N, p} \geq \delta \log(N). \tag{2.6}$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati tvrdnju za $N = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Zaista, pretpostavimo da (2.6) vrijedi, uz neki $\delta > 0$, za sve $N = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan te $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Tada je $\beta_{l^1_{2^n}, p} \leq \beta_{l^1_m, p}$ jer l_1^k možemo izometrično uložiti u l_1^l za $l > k$. Vrijedi kako je $\beta_{l_1^m, p} \geq \delta \log(2^n) > \delta(\log(m) - \log(2)) \geq \delta/100 \cdot \log(m)$ kad god je $m \geq 3$. Zaključujemo kako (2.6) vrijedi za sve $N \in \mathbb{N}_0$ uz konstantu $\delta/100$.

Neka su Δ, ν i $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definirani kao u Primjeru 2.2.3. Definirajmo $E := L^1(\Delta, \nu)$ te martingal $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u E u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ pomoću

$$g_n(\omega) := \begin{cases} \mathbb{1}_\Delta(\cdot), \ k = 0 \\ \prod_{k=1}^{n}(1 + \epsilon_k(\omega)\epsilon_k(\cdot)), \ k \geq 1 \end{cases}.$$

Doista, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathbb{E}^E\left[g_{n+1} | \mathscr{F}_n\right] = \mathbb{E}^E\left[\prod_{k=1}^{n+1} (1 + \epsilon_k(\cdot)\epsilon_k) \middle| \mathscr{F}_n \right]$$

$$= \mathbb{E}^E\left[\prod_{k=1}^n (1+\epsilon_k(\cdot)\epsilon_k)\middle|\mathscr{F}_n\right] + \mathbb{E}^E\left[\left(\prod_{k=1}^n (1+\epsilon_k(\cdot)\epsilon_k)\right)\epsilon_{n+1}(\cdot)\epsilon_{n+1}\middle|\mathscr{F}_n\right]$$
$$= g_n \text{ gotovo sigurno,}$$

pri čemu smo u posljednjem retku iskoristili

$$\int_{\{\epsilon_1=i_1,\ldots,\epsilon_n=i_n\}}\left(\prod_{k=1}^n(1+\epsilon_k(\omega)\epsilon_k)\right)\epsilon_{n+1}(\omega)\epsilon_{n+1}d\nu(\omega) = 0 \text{ gotovo sigurno}$$

za sve $i_1, \ldots, i_n \in \{\pm 1\}$. Iz translacijske invarijantnosti od ν (ovo se dokazuje slično kao i u Propoziciji 1.3.3) imamo kako za fiksni $\omega \in \Delta$ vrijedi

$$\|g_n(\omega)\|_{L^1(\Delta,\nu)} = \|f_n\|_{L^1(\Delta,\nu)} \text{ za sve } n \geq 0, \tag{2.7}$$

pri čemu je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal opisan u Primjeru 2.2.3. Slično, za svaki odabir od $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takvih da je $\xi_n = \pm 1$ i proizvoljni $\omega \in \Delta$ imamo

$$\left\|\sum_{k=0}^n \xi_k dg_k(\omega)\right\|_{L^1(\Delta,\nu)} = \left\|\sum_{k=0}^n \xi_k df_k\right\|_{L^1(\Delta,\nu)}. \tag{2.8}$$

Uočimo sada kako, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, $g_0, g_1, \ldots, g_n$ poprimaju vrijednosti u potprostoru od $L^1(\Delta, \nu)$ koji je izometrički izomorfan s $l_1^{2^n}$, sasvim precizno, radi se o potprostoru generiranom indikatorskim funkcijama 2^n disjunktnih atoma od $\mathscr{F}_n = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Doista, definirajmo

$$V_{2^n} := \text{span}\{\mathbb{1}_{\{\epsilon_1=i_1,\ldots,\epsilon_n=i_n\}} \mid i_1, \ldots, i_n \in \{\pm 1\}\}.$$

Očito je $g_k \in V_{2^n}$ za sve $k \leq n$. Neka je $J : l_1^{2^n} \to V_{2^n}$ određen s

$$J(a_1, \ldots, a_{2^n}) = 2^n \cdot \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\{\pm 1\}} a_{i_1,\ldots,i_n}\mathbb{1}_{\{\epsilon_1=i_1,\ldots,\epsilon_n=i_n\}},$$

pri čemu je $a_{i_1,\ldots,i_n} = a_h$ gdje za h vrijedi

$$h = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{i_{k+1}}+1}{2}\right)\cdot 2^k.$$

Za proizvoljan $(a_1,\dots,a_n)\in l_1^{2^n}$ očito je

$$
\begin{aligned}
\|J(a_1,\dots,a_{2^n})\|_{L^1(\Delta,\nu)} &= 2^n\cdot\left\|\sum_{i_1,\dots,i_n\in\{\pm1\}} a_{i_1,\dots,i_n}\mathbb{1}_{\{\epsilon_1=i_1,\dots,\epsilon_n=i_n\}}\right\|_{L^1(\Delta,\nu)}\\
&= 2^n\cdot\int_\Delta\left|\sum_{i_1,\dots,i_n\in\{\pm1\}} a_{i_1,\dots,i_n}\mathbb{1}_{\{\epsilon_1=i_1,\dots,\epsilon_n=i_n\}}(\omega)\right| d\nu(\omega)\\
&= 2^n\cdot\sum_{i_1,\dots,i_n}|a_{i_1,\dots,i_n}|\cdot\frac{1}{2^n}\\
&= \|(a_{i_1,\dots,i_n}\mid i_1,\dots,i_n\in\{\pm1\})\|_{l_1^{2^n}}\\
&= \|(a_1,\dots,a_{2^n})\|_{l_1^{2^n}}
\end{aligned}
$$

čime smo pokazali izometričnost od J. Uočimo kako je $J(l_1^{2^n})$ zatvoren potprostor od $L^1(\Delta,\nu)$ pa i sam posjeduje UMD svojstvo po Napomeni 2.1.3, tvrdnja 3.. Također, budući da su J i J^{-1} izometrije, to iz Napomene 2.1.3, tvrdnja 2., slijedi kako je $\beta_{l_1^{2^n},p}=\beta_{J(l_1^{2^n}),p}$. Stoga je, za fiksirane $(\xi_k)_{k=1}^n\subset\{\pm1\}$, istina

$$
\left\|\sum_{k=0}^n \xi_k dg_k\right\|_{L^p(\Delta;L^1(\Delta,\nu))}\le\beta_{l_1^{2^n},p}\cdot\left\|\sum_{k=0}^n dg_k\right\|_{L^p(\Delta;L^1(\Delta,\nu))}.
$$

Iz ovoga, uvažavajući (2.7), (2.8) te (2.3) slijedi kako za sve $(\xi_k)_{k=0}^n\subset\{\pm1\}$ vrijedi da je

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^n \xi_k df_k\right\|_{L^1(\Delta,\nu)} &= \left(\int_\Delta\left\|\sum_{k=0}^n \xi_k df_k\right\|_{L^1(\Delta,\nu)}^p d\nu(\omega)\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_\Delta\left\|\sum_{k=0}^n \xi_k dg_k(\omega)\right\|_{L^1(\Delta,\nu)}^p d\nu(\omega)\right)^{1/p}\\
&= \left\|\sum_{k=0}^n \xi_k dg_k\right\|_{L^p(\Delta;L^1(\Delta,\nu))}\\
&\le \beta_{l_1^{2^n},p}\cdot\left\|\sum_{k=0}^n dg_k\right\|_{L^p(\Delta;L^1(\Delta,\nu))}\\
&= \beta_{l_1^{2^n},p}\cdot\|f_n\|_{L^1(\Delta,\nu)}\\
&\le \beta_{l_1^{2^n},p}.
\end{aligned}
$$

Sada iz (2.5) zaključujemo kako je

$$n \cdot \frac{A_1}{\alpha} \leq \sup_{\xi_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=0}^{n} \xi_k df_n \right\|_{L^1(\Delta,\nu)} \leq \beta_{l_1^{2^n},p}, \text{ za sve } n \geq 1.$$

□

Propozicija 2.2.5. *Neka je E nerefleksivni Banachov prostor. Tada postoji $0 < \theta < 1/2$ takva da vrijedi sljedeća tvrdnja: Za svaki prirodan broj N postoji martingal $(f_n)_{n=0}^N$ s vrijednostima u E takav da po točkama gotovo sigurno vrijedi*

$$\|f_n\| \leq 1,\ 0 \leq n \leq N \quad i \quad \|df_n\| \geq \theta,\ 1 \leq n \leq N.$$

Dokaz. Budući da E nije refleksivan prostor to iz Teorema 1.2.15 znamo kako postoji $0 < \theta < 1/2$ i niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u zatvorenoj jediničnoj kugli u E takav da je $d(A_n, B_n) \geq 2\theta$ za sve $n \geq 1$, pri čemu je

$$A_n = \text{conv}(\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}) \quad \text{te} \quad B_n = \text{conv}(\{x_i \mid i \geq n+1\}).$$

Definiramo $f_N : [0,1\rangle \to E$ s $f_N := \sum_{n=1}^{2^N} \mathbb{1}_{[(n-1)2^{-N}, n2^{-N}\rangle} x_n$. Za prirodan broj n, označimo s $\mathscr{D}_n$ filtraciju generiranu intervalima

$$I_j^n = [(j-1)2^{-n}, j2^{-n}\rangle, \quad 1 \leq j \leq 2^n.$$

Očito je f_N Bochner-izmjeriva u odnosu na $\mathscr{D}_N$. Sada definiramo martingal $(f_n)_{n=0}^N$ na $([0,1\rangle, \lambda)$ formulom $f_n = \mathbb{E}[f_N|\mathscr{D}_n]$. Budući da su jednočlani skupovi izmjerivi u E to zaključujemo kako za fiksan j funkcija f_n može poprimiti samo jednu vrijednost na I_j^n, označimo tu vrijednost s y_j^n. Iz

$$\begin{aligned}
\lambda(I_j^n) \cdot y_j^n = \int_{[0,1\rangle} f_n(\omega) \mathbb{1}_{I_j^n} d\omega &= \int_{[0,1\rangle} f_N(\omega) \mathbb{1}_{I_j^n} d\omega \\
&= \sum_{k=1}^{2^N} \int_{[0,1\rangle} \mathbb{1}_{I_j^n} \cdot \mathbb{1}_{I_k^N} x_j d\omega = \sum_{k=(j-1)2^{N-n}+1}^{j2^{N-n}} x_k
\end{aligned}$$

zaključujemo kako f_n na I_j^n gotovo sigurno poprima vrijednost

$$y_j^n := 2^{n-N} \sum_{k=(j-1)2^{N-n}+1}^{j2^{N-n}} x_k \in \text{conv}(\{x_k \mid (j-1)2^{N-n}+1 \leq k \leq j2^{N-n}\}).$$

Slijedi kako je $\|y_j^n\| \leq 1$ i $\|y_i^n - y_j^n\| \geq 2\theta$ kad god je $i \neq j$ i $1 \leq i, j \leq 2^n$. Iz $I_j^{n-1} = I_{2j-1}^n \cup I_{2j}^n$ znamo da je $y_j^{n-1} = \frac{1}{2}(y_{2j-1}^n + y_{2j}^n)$. Odavde zaključujemo kako za $\omega \in I_{2j-1}^n$ imamo

$$\|df_n(\omega)\| = \left\| y_{2j-1}^n - \frac{1}{2}(y_{2j-1}^n + y_{2j}^n) \right\| = \frac{1}{2} \left\| y_{2j-1}^n - y_{2j}^n \right\| \geq \theta.$$

Slično, za $\omega \in I_{2j}^n$ vrijedi

$$\|df_n(\omega)\| = \left\| y_{2j}^n - \frac{1}{2}(y_{2j-1}^n + y_{2j}^n) \right\| = \frac{1}{2} \left\| y_{2j}^n - y_{2j-1}^n \right\| \geq \theta.$$

□

Propozicija 2.2.6. *UMD prostori su nužno refleksivni.*

Dokaz. Neka je E nerefleksivan UMD prostor. Tada, prema Propoziciji 2.2.5, možemo naći $\theta \in \langle 0, 1/2 \rangle$ i martingal $(f_n)_{n=0}^N$ nad $[0,1\rangle$ i s vrijednostima u E takav da po točkama gotovo sigurno vrijedi

$$\|f_n\| \leq 1, \forall n \in \{0, 1, \dots, N\} \quad \text{te} \quad \|df_n\| \geq \theta, \forall n \in \{1, \dots, N\}. \tag{2.9}$$

Iz definicije UMD svojstva imamo da za proizvoljan, ali fiksiran niz $(\xi_n)_{n=0}^N \subset \{\pm 1\}$ vrijedi

$$\left\| \sum_{n=0}^N \xi_n df_n \right\|_{L^p([0,1);E)} \leq \beta_{E,p} \cdot \|f_N\|_{L^p([0,1);E)} \leq \beta_{E,p}. \tag{2.10}$$

Neka je $\Delta := \{-1, 1\}^{N+1}$ te $\nu := \otimes_{n=0}^N (\delta_1 + \delta_{-1})/2$. Također, označimo s $\epsilon_n : \Delta \to \{\pm 1\}$ projekciju na n-tu koordinatu. Iz Kahane-ovog principa kontrakcije (Propozicija 1.3.3) dobivamo da za sve $\omega \in \Delta$ i sve $x \in \mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\left\| \sum_{n=0}^N x_n \epsilon_n df_n(\omega) \right\|_{L^p(\Delta;E)}^p \overset{\text{Kahane}}{\leq} \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n df_n(\omega) \right\|_{L^p(\Delta;E)}^p \cdot \|x\|_\infty^p.$$

Integriranjem po $[0,1\rangle$ i korištenjem Fubinijevog teorema (integrand je nenegativan) slijedi

$$\int_\Delta \int_{[0,1\rangle} \left\| \sum_{n=0}^N x_n \epsilon_n(\xi) df_n(\omega) \right\|_E^p d\mathbb{P}(\omega) d\nu(\xi) \leq$$
$$\|x\|_\infty^p \cdot \int_\Delta \int_{[0,1\rangle} \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n(\xi) df_n(\omega) \right\|_E^p d\mathbb{P}(\omega) d\nu(\xi).$$

Konačno,

$$\begin{aligned}\int_\Delta \left\| \sum_{n=0}^N x_n \epsilon_n(\xi) df_n \right\|^p_{L^p([0,1\rangle;E)} d\nu(\xi) &\leq \|x\|^p_\infty \cdot \int_\Delta \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n(\xi) df_n \right\|^p_{L^p([0,1\rangle;E)} d\nu(\xi) \\ &\overset{(2.10)}{\leq} \|x\|^p_\infty \cdot \int_\Delta \beta^p_{E,p} d\nu(\xi) \\ &\leq \|x\|^p_\infty \cdot \beta^p_{E,p}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Također, koristeći Propoziciju 1.1.7 može se pokazati kako je $(g_n)_{n=0}^N$ definiran s $g_n := \sum_{k=0}^n x_k \epsilon_k df_k$ zapravo martingal s vrijednostima u E. Stoga je $(\|g_n(\cdot)\|^p_E)_{n=0}^N$ submartingal, pa posljedično, imamo $\|g_n\|_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)} \leq \|g_m\|_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)}$ kad god je $0 \leq n \leq m \leq N$. Odavde slijedi kako za $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|x_n \epsilon_n df_n\|_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)} &= \left\| \sum_{k=0}^n x_n \epsilon_n df_n - \sum_{k=0}^{n-1} x_n \epsilon_n df_n \right\|_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)} \\ &\leq 2 \cdot \left\| \sum_{k=0}^N x_n \epsilon_n df_n \right\|_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Iz (2.9), (2.11) i (2.12) slijedi

$$\begin{aligned}\theta^p \cdot \|x\|^p_\infty \leq \|x_n \epsilon_n df_n\|^p_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)} &\leq 2^p \left\| \sum_{n=0}^N x_n \epsilon_n df_n \right\|^p_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E)} \\ &\leq 2^p \|x\|^p_\infty \cdot \beta^p_{E,p}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sada definiramo $J : l^N_\infty \to L^p([0,1\rangle \times \Delta; E)$ pomoću pravila $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{n=0}^N \epsilon_n x_n df_n$. Operator J je očito linearan, a njegova injektivnost je posljedica nejednakosti (2.13), stoga je J izomorfizam između l^N_∞ i $J(l^N_\infty)$, a budući da vrijedi $\|J\| \leq \beta_{E,p}$ i $\|J^{-1}\| \leq 2/\theta$ to zaključujemo kako imamo

$$\beta_{l^N_\infty,p} \leq 2 \cdot \frac{\beta_{E,p}}{\theta} \beta_{J(l^N_\infty),p} \leq 2 \cdot \frac{\beta_{E,p}}{\theta} \beta_{L^p([0,1\rangle \times \Delta;E),p} = 2 \cdot \frac{\beta_{E,p}}{\theta} \beta_{E,p}.$$

Ovo nas dovodi do kontradikcije budući da po Napomeni 2.1.3 i Propoziciji 2.2.4 znamo da vrijedi

$$\beta_{l^N_\infty,p} = \beta_{l^N_1,p'} \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$\square$

Budući da se UMD svojstvo, kao što je ranije spomenuto, očito prenosi i na zatvorene podskupove te da su svi konačnodimenzionalni prostori zatvoreni, to automatski slijedi i tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 2.2.7. *Svaki je UMD prostor nužno super-refleksivan.*

Postavlja se pitanje vrijedi li i obrat gornje propozicije, to jest, je li posjedovati UMD svojstvo i biti super-refleksivan jedno te isto? Odgovor je ne! Prvi super-refleksivni prostor koji ne zadovoljava UMD svojstvo konstruirao je Pisier 1975., a Bourgain je nešto kasnije konstruirao čak i super-refleksivnu Banachovu rešetku koja ne posjeduje UMD svojstvo.

Poglavlje 3

ζ-konveksnost i UMD prostori

Nakon uvođenja UMD svojstva kao primarno vjerojatnosnog svojstva ubrzo se postavilo pitanje postojanja geometrijske karakterizacije istog. Dio matematičara u to je doba smatrao kako je ovaj uvjet bitno restriktivniji od super-refleksivnosti te da ne postoji lijepa geometrijska karakterizacija. Ipak, Burkholder je $1981.$ uveo pojam ζ-konveksnog Banachovog prostora te dokazao kako je za Banachove prostore posjedovati UMD svojstvo i biti ζ-konveksan zapravo jedno te isto. Navodno je ime skrojio po uzoru na otprije uvedene geometrijske pojmove poput $K-$konveksnosti, $J-$konveksnosti i $B-$konveksnosti uvažavajući pritom činjenicu da se, do tada, oznaka ζ nije javljala u teoriji Banchovih prostora. Pojam ζ-konveksnosti je "geometrijski" u smislu da sadrži samo zahtjev na 2-dimenzionalne potprostore. U nastavku ovog poglavlja dokazujemo gore spomenutu geometrijsku karakterizaciju UMD svojstva.

Definicija 3.1.1. *Neka je V vektorski prostor. Za funkciju $f : V \to \mathbb{R}$ kažemo da je polovišno konveksna ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in V, \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2).$$

Također, za funkciju $f : V \to \mathbb{R}$ kažemo da je polovišno konkavna ako je $-f$ polovišno konveksna funkcija.

Definicija 3.1.2. *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori. Tada za funkciju $u : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ kažemo da je bikonveksna ako je funkcija $u(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ konveksna za svaki fiksirani $y \in V_2$ te funkcija $u(x, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ konveksna za svaki fiksirani $x \in V_1$.*

Definicija 3.1.3. *Neka je X normirani prostor. Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ kažemo da je lokalno ograničena odozdo (odozgo) ukoliko za svaki $x_0 \in X$ postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da je $f(x) \geq M$ ($f(x) \leq M$) za sve $x \in K(x_0, r)$.*

Lema 3.1.4. *Neka je E Banachov prostor te $f : E \to \mathbb{R}$ odozdo lokalno ograničena funkcija. Tada je f konkavna ako i samo ako je polovišno konkavna.*

Dokaz. Ukoliko je f konkavna, tada je očito i polovišno konkavna. Dokažimo sada obratni smjer. Pretpostavimo suprotno, neka je $f : E \to \mathbb{R}$ polovišno konkavna i odozdo lokalno ograničena funkcija koja nije konkavna. To znači da postoje $x_1, x_2 \in E$ takvi da za neki $t \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$. Definiramo preslikavanje $u : [0,1] \to f([x_1, x_2]) := f(\{x_1 + t(x_2 - x_1) \mid t \in [0,1]\})$ formulom $u(\lambda) = f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))$. u je polovišno konkavna funkcija koja je ograničena odozdo (možemo izbaciti termin "lokalno" budući da je $[0,1]$ kompaktan skup) te za koju vrijedi $u(t) < (1-t)u(0) + tu(1)$. Uočimo kako dodavanjem afine funkcije na u ne utječemo na konkavnost i ograničenost odozdo od u. Stoga možemo pretpostaviti kako je $u(0) = u(1) = 0$. Odmah dobivamo kako je $u(t) < 0$.

Iteriranjem pretpostavke o polovišnoj konkavnosti zaključujemo kako je $u(\lambda) \geq (1-\lambda)u(0) + \lambda u(1) = 0$ za sve točke $\lambda = k2^{-j}$, pri čemu je $j \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^j$. Odaberimo λ upravo opisanog oblika takav da je dovoljno blizu t, u smislu da je $t_1 := t - (\lambda - t) = 2t - \lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Uočimo kako je sada $t = \frac{1}{2}(t_1 + \lambda)$, pa zbog polovišne konkavnosti imamo kako je $u(t) \geq \frac{1}{2}(u(t_1) + u(\lambda)) \geq \frac{1}{2}u(t_1)$. Dakle, $u(t_1) \leq 2u(t)$.

Ponovimo li sada gore opisani postupak s t_1 umjesto t dobivamo $t_2 \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $u(t_2) \leq 2u(t_1) \leq 4u(t)$. Nastavljajući induktivno nalazimo niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \langle 0, 1\rangle$ takav da je $u(t_n) \leq 2^n u(t)$. Budući da $2^n u(t) \to -\infty$ kada $n \to +\infty$ to dolazimo u kontradikciju s činjenicom da je u ograničena odozdo. □

Definicija 3.1.5. *Za Banachov prostor E kažemo da je ζ-konveksan ako postoji bikonveksna funkcija $\zeta : E \times E \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi:*

$$\zeta(x,y) \leq \|x+y\|, \text{ kada je } \|x\| = \|y\| = 1 \text{ te } \zeta(0,0) > 0. \tag{3.1}$$

Dokažimo najprije sljedeću prirodnu relaksaciju pojma ζ-konveksnosti: naime dovoljno je naći funkciju koja zadovoljava rubne uvjete iz (3.1) na jediničnom kvadratu u prostoru $E \times E$ u odnosu na $+\infty$ normu.

Propozicija 3.1.6. *Neka je ζ bikonveksna funkcija definirana na*

$$D = \{(x,y) \in E \times E \mid \|x\| \leq 1 \text{ i } \|y\| \leq 1\}$$

koja zadovoljava uvjete iz (3.1). *Tada postoji bikonveksna funkcija $u : E \times E \to \mathbb{R}$ takva da je:*

$$u(x,y) \leq \|x+y\|, \text{ kada je } \max(\|x\|, \|y\|) \geq 1, \tag{3.2}$$

$$u(x,y) = u(y,x) = u(-x,-y) \text{ za sve } x, y \in E \text{ te} \tag{3.3}$$

$$u(0,0) \geq \zeta(0,0). \tag{3.4}$$

Dokaz. Uočimo najprije kako nejednakost $\zeta(x,y) \leq \|x+y\|$, zbog bikonveksnosti, vrijedi kad god je neki od x, y na rubu, odnosno, kad god je $\max(\|x\|, \|y\|) = 1$. Naime, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|x\| < \|y\| = 1$. Želimo prikazati x kao konveksnu kombinaciju nekog vektora norme 1 i vektora $(-y)$. Stoga odaberimo $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $z = \alpha^{-1}(x+y) - y$ norme 1 (egzistencija takvog α slijedi iz činjenica da je norma neprekidna funkcija te $\|\alpha^{-1}(x+y) - y\| \to \|x\| < 1$ kad $\alpha \to 1^-$, odnosno $\|\alpha^{-1}(x+y) - y\| \to +\infty$ kad $\alpha \to 0^+$). Konačno je $x = \alpha z + (1-\alpha)(-y)$ pa možemo iskoristiti uvjet (3.1) te dobivamo:

$$\zeta(x,y) \leq \alpha\zeta(z,y) + (1-\alpha)\zeta(-y,y) \leq \alpha\|z+y\| = \|x+y\|.$$

Definirajmo sada

$$u(x,y) := \begin{cases} \max(\zeta(x,y), \|x+y\|) & (x,y) \in D \\ \|x+y\| & (x,y) \in D^c \end{cases}.$$

Funkcija u je bikonveksna na $E \times E$. Bez smanjenja općenitosti dovoljno je uvjeriti se u, primjerice, konveksnost funkcije $u(\cdot, y)$.

Ako je $\|y\| \geq 1$, tada $u(x,y) = \|x+y\|$ pa je $u(\cdot,y)$ konveksna na E.

Ako su $\|y\|, \|x\| < 1$ i $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0,1\rangle$ te $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tada razlikujemo tri slučaja:

1. Ukoliko je $\|x_1\|$ i $\|x_2\| < 1$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(x_1,y) + \alpha_2 u(x_2,y) &= \alpha_1 \max(\zeta(x_1,y), \|x_1+y\|) + \alpha_2 \max(\zeta(x_2,y), \|x_2+y\|) \\ &\geq \max(\alpha_1\zeta(x_1,y) + \alpha_2\zeta(x_2,y), \alpha_1\|x_1+y\| + \alpha_2\|x_2+y\|) \\ &\geq \max(\zeta(x,y), \|x+y\|) \\ &= u(x,y). \end{aligned}$$

2. Ukoliko je $\|x_1\| < 1$ i $\|x_2\| > 1$, tada možemo pronaći $z \in E$ takav da je $z = x_1 + t(x_2 - x_1)$ za neko $t \in \langle 0,1\rangle$ te da je $\|z\| = 1$ uz $t > \alpha_2$. Tada je $x_2 = \frac{z - x_1}{t} + x_1$ te je stoga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_2}{t}\right) x_1 + \frac{\alpha_2}{t} z = \left(1 - \frac{\alpha_2}{t}\right) x_1 + \frac{\alpha_2}{t} z.$$

Pretpostavimo da je $\zeta(x,y) > \|x+y\|$, inače je tvrdnja jasna. Iz bikonveksnosti od ζ slijedi kako je

$$\zeta(x,y) \leq \left(1 - \frac{\alpha_2}{t}\right)\zeta(x_1,y) + \frac{\alpha_2}{t}\zeta(z,y) \leq \left(1 - \frac{\alpha_2}{t}\right)\zeta(x_1,y) + \frac{\alpha_2}{t}\|z+y\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(1 - \frac{\alpha_2}{t}\right)\zeta(x_1, y) + \alpha_2 \|x_2 + y\| + \left(\frac{1}{t} - 1\right)\alpha_2 \|x_1 + y\| \\
&\leq \alpha_1 \max(\zeta(x_1, y), \|x_1 + y\|) + \alpha_2 \|x_2 + y\| \\
&= \alpha_1 u(x_1, y) + \alpha_2 u(x_2, y).
\end{aligned}
$$

3. Slučaj $\|x_1\| > 1$ i $\|x_2\| > 1$ pokazuje se analogno prethodnom slučaju. Razlika je u tome da ovdje nalazimo $z_1 = x + t_1(x_1 - x) \in E$ i $z_2 = x + t_2(x_2 - x) \in E$ za neke $t_1 \in \langle \alpha_1, 1\rangle$ te $t_2 \in \langle \alpha_2, 1\rangle$ za koje još dodatno vrijedi da su norme 1.

Ako je $\|y\| < 1 \leq \|x\|$ i $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da zadovoljavaju $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, tada je

$$u(x, y) = \|x + y\| \leq \alpha_1 \|x_1 + y\| + \alpha_2 \|x_2 + y\| \leq \alpha_1 u(x_1, y) + \alpha_2 u(x_2, y).$$

Očito je $u(0,0) \geq \zeta(0,0)$, a iz definicije odmah slijedi i svojstvo (3.2). U slučaju da (3.3) ne vrijedi nakon ove konstrukcije jednostavno zamijenimo $u(x, y)$ s

$$\max(u(x, y), u(y, x), u(-x, -y), u(-y, -x)).$$

Time se svojstvo (3.2) nije narušilo kao ni svojstvo $\zeta(0,0) \leq u(0,0)$. □

U nastavku želimo rezultat koji će nam dati garanciju da će naša nova bikonveksna funkcija u zadovoljavati $u(x, -x) \leq u(0,0)$ za sve $x \in E$. Naravno, taj ćemo zahtjev "platiti" donjom teorijskom ogradom na vrijednost $u(0,0)$.

Propozicija 3.1.7. *Neka je ζ bikonveksna funkcija definirana na skupu $D = \{(x, y) \in E \mid \|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1\}$ takva da je $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$, kad god je $\|x\| = \|y\| = 1$ te $\zeta(0,0) > 0$. Tada postoji bikonveksna funkcija $u : E \times E \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi (3.2) i (3.3) te, je dodatno, $u(x, -x) \leq u(0,0)$ za sve $x \in E$. Također, zadovoljen je uvjet*

$$u(0,0) \geq \frac{\zeta(0,0)}{1 + r} \tag{3.5}$$

gdje je $r \in [0,1]$ bilo koji broj za koji vrijedi

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \zeta(x, -x) \leq \sup_{\|x\| \leq r} \zeta(x, -x). \tag{3.6}$$

Dokaz. Iz Propozicije 3.1.6 slijedi kako možemo naći bikonveksnu funkciju $v : E \times E \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava (3.2), (3.3) i (3.4). Neka je, stoga, u nastavku dokaza v definirana pomoću ζ kao u dokazu spomenute propozicije. Iz (3.6) zaključujemo kako je

$$\sup_{\|b\| \leq 1} v(b, -b) = \sup_{\|b\| \leq r} v(b, -b).$$

Sada definiramo funkciju $u : E \times E \to \mathbb{R}$ s

$$u(x,y) = \sup_{\|b\| \le r} \frac{v\left((1+r)x+b,(1+r)y-b\right)}{1+r}$$

pri čemu je r kao u iskazu propozicije. Budući da je v odozgo ograničena funkcija na svakoj kugli konačnog radijusa (za sve (x,y) takve da je $\|x\| \ge 1$ ili $\|y\| \ge 1$ je $v(x,y) \le \|x\| + \|y\|$, a za ostale (x,y) imamo $v(x,y) \le v(x(1-d),y) + v(x(1+d),y)/2$ za dovoljno velik skalar d) to slijedi kako je i u odozgo ograničena na svim kuglama konačnog radijusa. Također, u je bikonveksna te vrijedi $u(0,0) \ge \frac{v(0,0)}{1+r} \ge \frac{\zeta(0,0)}{1+r}$, dakle, zadovoljeno je svojstvo (3.5).

Provjerimo sada uvjet (3.2). Pretpostavimo da je $\max(\|x\|, \|y\|) \ge 1$ i $\|b\| \le r$ za neke $x, y, b \in E$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|x\| \ge 1$. Tada je

$$\|(1+r)x+b\| \ge (1+r)\|x\| - \|b\| \ge (1+r) - r = 1,$$

pa iz svojstava od v imamo kako je

$$u(x,y) \le \frac{\|(1+r)x+b+(1+r)y-b\|}{1+r} = \|x+y\|.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}(1+r)u(x,-x) &\le \sup_{\|b\| \le r} v((1+r)x+b, -(1+r)x-b) \\ &\le \sup_{b \in E} v(b,-b) = \sup_{\|b\| \le 1} v(b,-b) = \sup_{\|b\| \le r} v(b,-b) = (1+r)u(0,0)\end{aligned}$$

za sve $x \in E$. $\square$

Kako bismo pokazali da činjenica kako je E ζ-konveksan Banachov prostor implicira da E posjeduje UMD svojstvo potrebno je ustanoviti nejednakost oblika $\|g\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p$ pri čemu je $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, a g ± 1 martingalna transformacija martingala f. Općenito, takvu nejednakost nazivamo jakom nejednakošću tipa (p,p). Ona pokazuje na koji je način određeni moment martingalne transformacije kontroliran vrijednošću momenta originalnog martingala. S druge strane, nejednakosti oblika $\|g\|_{p,\infty} \le c_p \|f\|_p$ pri čemu je

$$\|g\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda > 0} \lambda (\mathbb{P}(\sup_n \|g_n\| \ge \lambda))^{1/p},$$

nazivamo slabim nejednakostima tipa (p,p). Motivacija za proučavanje nejednakosti ovakvog tipa dolazi iz definicije kvazi-norme na tzv. slabim L^p prostorima. U slučaju realnih funkcija, slabi $L^p(\Omega,\mu)$ prostor, u oznaci $L^{p,w}(\Omega,\mu)$, definira se s

$$L^{p,w}(\Omega,\mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ izmjeriva} \;\middle|\; m(t;f) \le \frac{C}{t^p} \text{ za neki } C > 0 \text{ i za sve } t > 0 \right\}$$

pri čemu je $m(t; f) = \mu(\{x \in E \mid |f(x)| > t\})$ za $t > 0$ i naziva se distribucijskom funkcijom od f. Kvazi norma na ovom prostoru dana je s $\|f\|_{L^{p,w}} = \sup_{t>0} tm(t; f)^{1/p}$. Zanimljivo je da ona ne zadovoljava nejednakost trokuta, već samo relaciju

$$\|x + y\|_{L^{p,w}} \leq C(\|x\|_{L^{p,w}} + \|y\|_{L^{p,w}}) \text{ za neko } C \geq 1 \text{ te sve } x, y \in E.$$

Burkholder je pri dokazivanju UMD svojstva ustanovio najprije slabu nejednakost tipa $(1, 1)$ koja povezuje naš martingal f i njegovu ± 1 martingalnu transformaciju g, a potom iz tog rezultata izvodi jaku (p, p) nejednakost.

Lema 3.1.8. *Pretpostavimo da postoji konstanta $C > 0$ takva da za proizvoljni jednostavni martingal $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u Banachovom prostoru E i njegovu ± 1 martingalnu transformaciju $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vrijedi da je*

$$\mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1) \leq C \cdot \|f_n\|_1 \,, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

Tada za f i g vrijedi slaba nejednakost tipa $(1, 1)$, drugim riječima, vrijedi

$$\|g\|_{1,\infty} \leq C \cdot \|f\|_1 \tag{3.8}$$

Dokaz. Za proizvoljni $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$\tau_\epsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \|g_n\|_E \geq 1 - \epsilon\}.$$

Očito imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|g\|_E^* \geq 1) &\leq \mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1 - \epsilon \text{ za neko } n) = \mathbb{P}(\|g_{\tau_\epsilon \wedge n}\|_E \geq 1 - \epsilon \text{ za neko } n) \\ &= \mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}_0}\{\|g_{\tau_\epsilon\wedge n}\|_E \geq 1 - \epsilon\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\|g_{\tau_\epsilon\wedge n}\|_E \geq 1 - \epsilon),\end{aligned}$$

budući da su događaji $\{\|g_{\tau_\epsilon\wedge n}\| \geq 1 - \epsilon\}$ neopadajući. S druge strane, $(g_{\tau_\epsilon\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je ± 1 martingalna transformacija od $(f_{\tau_\epsilon\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ pa imamo

$$\mathbb{P}(\|g_{\tau_\epsilon\wedge n}\|_E \geq 1 - \epsilon) \leq \frac{C}{1-\epsilon}\mathbb{E}\,\|f_n\|_E \leq \frac{C}{1-\epsilon}\,\|f\|_1 \,, \text{ za } \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.9}$$

pa zbog proizvoljnosti od ϵ iz nejednakosti (3.9) slijedi kako je

$$\mathbb{P}(\|g\|_E^* \geq 1) \leq C \cdot \|f\|_1$$

Konačno imamo kako je

$$\|g\|_{1,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}(\|g\|_E^* \geq \lambda) = \sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}(\|g/\lambda\|_E^* \geq 1) \leq \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot C \cdot \frac{\|f\|_1}{\lambda} = C \cdot \|f\|_1 \,.$$

□

Burkholderova metoda

U nastavku opisujemo vrlo korisnu tehniku za dokazivanje određenih martingalnih nejednakosti. Naime, neka je $V : E \times E \to \mathbb{R}$ funkcija te pretpostavimo da za jednostavan *zigzag* martingal $(f, g) := (f_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ želimo dokazati tvrdnju oblika $\mathbb{E}[V(f_n, g_n)] \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Sad ide ključan dio - da bi se to učinilo dovoljno je naći izmjerivu funkciju $U : E \times E \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $U \geq V$ na $E \times E$
2. U je bikonkavna na $E \times E$
3. $\mathbb{E}U(f_0, g_0) \leq 0$

Formalni lanac zaključivanja je sljedeći: Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan. Budući da je (f, g) *zigzag* martingal to bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $g_{n+1} = g_n$ gotovo sigurno. Neka je, stoga,

$$A = \{(f_1, g_1) = (x_1, y_1), \dots, (f_n, g_n) = (x_n, y_n)\} \tag{3.10}$$

pri čemu je $(x_i, y_i)_{i=1}^n \subset E\times E$ te $\mathbb{P}(A) > 0$. Budući da je (f, g) martingal to zaključujemo kako je

$$\int_A (f_{n+1} - x_n)d\mathbb{P} = \int_A (f_{n+1} - f_n)d\mathbb{P} = 0$$

iz čega slijedi da je $x_n = \int_A f_{n+1}d\mathbb{P}/\mathbb{P}(A)$. Prisjetimo se da je funkcija f_{n+1} jednostavna, dakle, postoje $N \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k=1}^N \subset E$ te međusobno disjunktni $F_k \in \mathscr{F}_{n+1}$ takvi da je

$$\cup_{k=1}^N (F_k \cap A) = A \quad \text{te} \quad f_{n+1} = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{F_k}.$$

Iz činjenice da je $U(\cdot, y_n)$ konkavna imamo

$$\begin{aligned} U(x_n, y_n) &= U\left(\int_A f_{n+1}d\mathbb{P}/\mathbb{P}(A), y_n\right) = U\left(\sum_{k=1}^N a_k \cdot \frac{\mathbb{P}(F_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}, y_n\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{P}(F_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot U(a_k, y_n) = \sum_{k=1}^N \int_{F_k\cap A} U(a_k, y_n)d\mathbb{P}/\mathbb{P}(A) \\ &= \int_A U\left(\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{F_k}, y_n\right) d\mathbb{P}/\mathbb{P}(A) = \int_A U(f_{n+1}, y_n)d\mathbb{P}/\mathbb{P}(A). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nejednakost (3.11) ekvivalentna je s

$$\int_A U(f_n, g_n) d\mathbb{P} \geq \int_A U(f_{n+1}, g_{n+1}) d\mathbb{P}.$$

Sumiranjem po svim skupovima koji su oblika kao skup A u formuli (3.10) slijedi i kako je

$$\mathbb{E}[U(f_{n+1}, g_{n+1})] \leq \mathbb{E}[U(f_n, g_n)].$$

Budući da je u gornjem računu $n \in \mathbb{N}_0$ bio proizvoljan to zaključujemo kako za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[U(f_n, g_n)] \leq \cdots \leq \mathbb{E}[U(f_0, g_0)],$$

pa je iz prvog i trećeg uvjeta na funkciju U jasno da imamo

$$\mathbb{E}[V(f_n, g_n)] \leq \mathbb{E}[U(f_0, g_0)] \leq 0$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Lema 3.1.9. *Neka je f martingal u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u Banachovom prostoru E te g njegova ± 1 martingalna transformacija. Tada, da bi se, za neke konstante $C > 0$ i $D > 0$, dokazale nejednakosti oblika*

(a) $\|g\|_p \leq C \cdot \|f\|_p$ *i*

(b) $\mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1) \leq D \cdot \|f_n\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

dovoljno ih je dokazati pretpostavljajući da je f jednostavan martingal, a g njegova ± 1 martingalna transformacija.

Dokaz. (a) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|f\|_p < +\infty$. Tada je, posebno, i $\|df_n\|_p < +\infty$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Također, budući je g ± 1 martingalna transformacija od f, to postoji niz $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \{\pm 1\}$ takav da je, za proizvoljni $n \in \mathbb{N}_0$, $g_n = \sum_{k=0}^n \epsilon_k df_k$.

Nadalje, za fiksni $k \in \mathbb{N}_0$, iz dokaza Propozicije 1.1.5 slijedi da možemo pronaći jednostavne $\mathscr{F}_k$−izmjerive funkcije d_{jk} takve da je $\|d_{jk} - df_k\|_p \leq \frac{1}{2^{j+1}}, \forall j \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, uvedimo oznaku $\mathscr{F}_{j,k} := \sigma(d_{j1}, \ldots, d_{j,k})$ $(j, k \in \mathbb{N}_0)$ te za sve $j \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$D_{jk} := \begin{cases} d_{j0} & , k = 0 \\ d_{jk} - \mathbb{E}[d_{jk} | \mathscr{F}_{j,k-1}] & , k \geq 1 \end{cases}.$$

Tada imamo sljedeću ocjenu:

$$\|D_{jk} - df_k\|_p = \|d_{jk} - df_k - \mathbb{E}[d_{jk} - df_k | \mathscr{F}_{j,k-1}]\|_p$$

$$\leq \|d_{jk} - d_k\|_p + \|\mathbb{E}[d_{jk} - d_k|\mathscr{F}_{j,k-1}]\|_p \leq \frac{1}{2^j}$$

koja slijedi iz Propozicije 1.1.14, tvrdnja (a).

Sada definiramo martingal $F_j = (F_{jn})_{n\in\mathbb{N}_0}$ obzirom na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kao martingal čije su martingalne razlike upravo $D_j = (D_{j1}, D_{j2}, \dots)$. Također, za fiksni $j \in \mathbb{N}_0$, definiramo $G_j = (G_{jn})_{n\in\mathbb{N}_0}$ kao ± 1-martingalnu transformaciju od F_j određenu s $G_{jn} = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k D_{jk}$ pri čemu je niz $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ isti onaj niz iz definicije od g. Odmah slijedi da za k-tu funkciju tog martingala vrijedi:

$$\|F_{jk} - f_k\|_p = \left\| \sum_{i=0}^{k} D_{ji} - \sum_{i=0}^{k} d_i \right\|_p \leq \sum_{i=0}^{k} \|D_{ji} - d_i\|_p \leq \frac{k+1}{2^j},$$

pa $\|F_{jk} - f_k\|_p \to 0$ kada $j \to +\infty$. Također,

$$\|G_{jk} - g_k\|_p = \left\| \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i D_{jk} - \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i d_i \right\|_p \leq \sum_{i=0}^{k} \|\epsilon_i (D_{jk} - d_i)\|_p \leq \frac{k+1}{2^j}$$

pa je stoga $\|G_{jn} - g_n\|_p \to 0$ kad $j \to +\infty$. Pretpostavimo li da nejednakost vrijedi za jednostavne martingale, tada nejednakost za proizvoljni martingalni niz razlika dobivamo uzimanjem limesa po j iz sljedeće nejednakosti:

$$\|g_n\|_p - \|G_{jn} - g_n\|_p \leq \|G_{jn}\|_p \leq C \cdot \|F_{jn}\|_p \leq C \cdot \|F_{jn} - f_n\|_p + C \cdot \|f_n\|_p .$$

(b) Redukcija ide analogno onoj u slučaju (a). Uzmimo $p = 1$ te uvedimo martingale $F_j = (F_{jn})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $G_j = (G_{jn})_{n\in\mathbb{N}_0}$ kao u slučaju (a). Za proizvoljni $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1) &\leq \mathbb{P}(\|G_{jn}\|_E + \|g_n - G_{jn}\|_E \geq 1) \\
&\leq \mathbb{P}(\|G_{jn}\|_E \geq 1 - \epsilon) + \mathbb{P}(\|G_{jn} - g_n\|_E \geq \epsilon) \\
&\leq D \cdot (\|F_{jn} - f_n\|_1 + \|f_n\|_1) \cdot \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{\|G_{jn} - g_n\|_1}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Tvrdnja sada slijedi najprije puštanjem $j \to +\infty$, a zatim i $\epsilon \to 0^+$.

□

Teorem 3.1.10. *Neka je E Banachov prostor te $u : E \times E \to \mathbb{R}$ bikonveksna funkcija za koju vrijedi*

$$\begin{aligned}
&u(0,0) > 0, \\
&u(x,y) \leq \|x+y\| \ \textit{čim je}\ \max(\|x\|, \|y\|) \geq 1,
\end{aligned}$$

$$u(x,-x) \leq u(0,0) \text{ te}$$
$$u(x,y) = u(-x,-y) \text{ za sve } x, y \in E.$$

Neka je f martingal u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u E, a g njegova ± 1 martingalna transformacija. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1) \leq \frac{2}{u(0,0)} \|f_n\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

Dokaz. Iz Leme 3.1.9 slijedi kako je dovoljno dokazati (3.12) u slučaju kada je f jednostavni martingal, a g njegova ± 1 martingalna transformacija. Stoga, po uzoru na prethodno opisanu Burkholderovu metodu, definiramo

$$V(x,y) = u(0,0) \cdot \mathbb{1}_{(\max(\|x\|,\|y\|)\geq 1)} - \|x+y\|_E.$$

Uočimo kako $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiran s $X_n := f_n + g_n, Y_n := f_n - g_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$, ima *zigzag* svojstvo. Želimo pokazati da postoji bikonkavna funkcija U koja dominira V te za koju je $\mathbb{E}U(X_0, Y_0) \leq 0$. Naime, tada tvrdnja teorema slijedi iz nejednakosti

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|g_n\|_E \geq 1) &= \mathbb{P}(\|X_n - Y_n\|_E \geq 2) \leq \mathbb{P}(\max(\|X_n\|_E, \|Y_n\|_E) \geq 1) \\
&= \frac{1}{u(0,0)} \cdot \mathbb{E}V(Z_n) + \frac{1}{u(0,0)} \cdot \mathbb{E}\|X_n + Y_n\|_E \\
&\leq \frac{1}{u(0,0)} \cdot \mathbb{E}U(Z_0) + \frac{2}{u(0,0)} \|f_n\|_1 \leq \frac{2}{u(0,0)} \|f_n\|_1.
\end{aligned}$$

Konstruirajmo sada funkciju U sa svojstvima opisanim u odjeljku o Burkholderovoj metodi:

- U treba biti bikonkavna. Stoga definiramo $U(x,y) = u(0,0) - u(x,y), \forall x, y \in E$.
- U majorizira V. Doista, ovo je očito u slučaju kada je $\max(\|x\|, \|y\|) \geq 1$, dok u slučaju kada je $\max(\|x\|, \|y\|) < 1$ imamo

$$\begin{aligned}
u(0,0) - u(x,y) &\geq u(x,-x) - u(x,y) \\
&\geq \lim_{t\to\infty} \frac{u(x,-x) - u(x,-x+t(x+y)))}{t} \\
&\geq \frac{\|x + t(x+y) - x\|}{t} = \|x+y\|.
\end{aligned}$$

Druga nejednakost u gornjem nizu nejednakosti formalno slijedi iz činjenice

$$u(x,y) \leq \frac{t-1}{t} u(x,-x) + \frac{1}{t} u(x,-x+t(x+y))$$

koja vrijedi za sve $t > 1$. Treća nejednakost slijedi iz činjenice da je sada norma jednog od argumenata funkcije v veća od 1 - to je upravo bio i glavni razlog pri posezanju za uvjetom

$$u(x, -x) \leq 0 \text{ za sve } x \in E.$$

- Razmotrimo još i posljednji uvjet na funkciju U iz Burkholderove metode. Naime, budući je ili $X_0 = 0$ ili $Y_0 = 0$, to je dovoljno vidjeti da je $U(x, 0) \leq 0$ i $U(0, x) \leq 0$. Vrijedi kako je

$$U(x, 0) = \frac{U(x, 0) + U(-x, 0)}{2} \leq U(0, 0) = 0.$$

Nejednakost za $U(0, x)$ pokazuje se potpuno analogno.

□

Teorem 3.1.11. *Neka je E Banachov prostor te $u : E \times E \to \mathbb{R}$ bikonveksna funkcija za koju vrijedi*

$$\begin{aligned}
&u(0,0) > 0, \\
&u(x,y) \leq \|x + y\| \textit{ kad god je } \max(\|x\|, \|y\|) \geq 1, \\
&u(x,-x) \leq u(0,0) \textit{ te} \\
&u(x,y) = u(-x,-y) \textit{ za sve } x, y \in E.
\end{aligned}$$

Neka je $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ martingal u odnosu na filtraciju $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ s vrijednostima u E i martingalnim nizom razlika $(df_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, a g njegova ± 1 martingalna transformacija. Tada za fiksni $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ vrijedi:

$$\|g\|_p \leq \frac{72}{u(0,0)} \frac{(p+1)^2}{p-1} \|f\|_p . \tag{3.13}$$

Dokaz.

Redukcija na jednostavne martingale

Iz Leme 3.1.9 znamo kako je nejednakost (3.13) dovoljno dokazati uz pretpostavku da je f jednostavni martingal, a g njegova ± 1 martingalna transformacija. Uočimo kako je u tom slučaju i g jednostavan martingal te postoji očekivanje svake izmjerive funkcije of f i g.

Ideja daljnjeg dijela dokaza

Komentirajmo kratko ideju daljnjeg dijela dokaza: Preći ćemo na martingale u odnosu na dijadsku filtraciju jer u tom slučaju imamo garanciju da je $\|df_{n+1}\|_E$ izmjeriva u odnosu na $\mathscr{F}_n$ što nam je od direktne koristi u pogledu definiranja vremena zaustavljanja, a potom iz Doobove nejednakosti znamo da je dovoljno dokazati nejednakost za maksimalne funkcije $f^* := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|f_n\|$ te $g^* := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|g_n\|$ umjesto f i g. Sad ide ključna ideja: Ako je doista $\|f^*\|_p \leq C \cdot \|g^*\|_p$ za neku konstantu $C > 0$ (ovo su zapravo očekivane vrijednosti neke rastuće funkcije od f^* odnosno g^*), onda očekujemo i da je

$$\mathbb{P}(g^* > \beta\lambda, f^* \leq \delta\lambda \mid g^* > \lambda)$$

relativno mali broj. Drugim riječima, ako su očekivanja rastuće funkcije od f^* i g^* blizu onda je malo vjerojatno da je f^* "malen" ako znamo da je g^* "velik".

Tvrdnja za jednostavne dijadske martingale

Želimo pokazati da postoje realni brojevi $\alpha > 0, \delta > 0, \beta > 2\delta + 1$, i $\lambda > 0$ takvi da za sve jednostavne dijadske martingale f i njihove ± 1 martingalne transformacije g s koeficijentima $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \{\pm 1\}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(g^* > \beta\lambda, f^* \leq \delta\lambda) \leq \alpha\mathbb{P}(g^* > \lambda).$$

Nadalje, uvedimo sljedeća vremena zaustavljanja:

$$\begin{aligned}
\mu &= \inf\{n \mid \|g_n\|_E > \lambda\},\\
\nu &= \inf\{n \mid \|g_n\|_E > \beta\lambda\},\\
\sigma &= \inf\{n \mid \|f_n\|_E > \delta\lambda \text{ ili } \|df_{n+1}\|_E > 2\delta\lambda\}.
\end{aligned}$$

Doista, μ je vrijeme zaustavljanja budući da je

$$\{\mu \leq n\}^c = \cap_{i=0}^n \{\|g_i\|_E \leq \lambda\} \in \mathscr{F}_n.$$

Analogno za ν. Također,

$$\{\sigma \leq n\}^c = \cap_{i=0}^n \left(\{\|f_i\|_E \leq \delta\lambda\} \cap \{\|df_{i+1}\|_E \leq 2\delta\lambda\}\right) \in \mathscr{F}_n$$

jer je $\|df_{n+1}\|_E$ $\mathscr{F}_n$-izmjeriva. Naime, prema pretpostavci na filtraciju znamo da df_{n+1}, kada ga restringiramo na neprazan događaj

$$A = \{f_0 = b_0, df_1 = b_1, \ldots, df_{n-1} = b_{n-1}, df_n = b_n\}$$

ili biva identički jednak 0 ili postiže vrijednosti iz skupa $\{-b_{n+1}, b_{n+1}\}$ za neko $b_{n+1} \in E\backslash\{0\}$. Stoga je u jedinom netrivijalnom slučaju $df_{n+1}\big|_A = b_{n+1}\mathbb{1}_{A_1} - b_{n+1}\mathbb{1}_{A_2}$ za neke $A_1, A_2 \subseteq A$ takve da je $A_1 \cup A_2 = A$. Zaključujemo kako je $\|df_{n+1}(\omega)\|_E = \|b_{n+1}\|_E$ za svaki $\omega \in A$. Stoga imamo da je $\|d_{n+1}\|_E$ $\mathscr{F}_n$-izmjeriva.

Iz Propozicije 1.1.22 sada slijedi kako su slučajni procesi $F = (F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $G = (G_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definirani s

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\mu<k\leq\nu\wedge\sigma\}} df_k, \text{ odnosno s } G_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \mathbb{1}_{\{\mu<k\leq\nu\wedge\sigma\}} df_k$$

martingali u odnosu na dijadsku filtraciju, pri čemu je niz $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ isti onaj niz koeficijenata kao u martingalnoj transformaciji koja definira g.

U nastavku odmah dobivamo

$$\mathbb{P}(g^* > \beta\lambda, f^* \leq \delta\lambda) \leq \mathbb{P}(\mu \leq \nu < \infty, \sigma = \infty) \leq \mathbb{P}(G^* > \beta - 2\lambda\delta - \lambda).$$

Ova posljednja nejednakost slijedi iz činjenice da za $\omega \in \{\mu \leq \nu < \infty, \sigma = \infty\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|G_n(\omega)\|_E &= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\| \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \mathbb{1}_{(\mu<k\leq\nu)} df_k(\omega) \right\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\| \sum_{k=\mu(\omega)+1}^{\nu(\omega)\wedge n} \epsilon_k df_k(\omega) \right\|_E \\
&\geq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\left\| \sum_{k=0}^{\nu(\omega)\wedge n} \epsilon_k df_k(\omega) \right\|_E - \left\| \sum_{k=0}^{\mu(\omega)\wedge n} \epsilon_k df_k(\omega) \right\|_E \right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\left\| g_{\nu(\omega)\wedge n}(\omega) \right\|_E - \left\| g_{\mu(\omega)\wedge n}(\omega) \right\|_E \right) \\
&> \beta\lambda - \left(\left\| g_{(\mu(\omega)-1)\vee 0}(\omega) \right\|_E + \left\| \epsilon_{\mu(\omega)} df_{\mu(\omega)}(\omega) \right\|_E \right) \\
&\geq \beta\lambda - (\lambda + 2\delta\lambda).
\end{aligned}$$

Napomenimo kako posljednji redak vrijedi i u slučaju kada je $\mu(\omega) = 0$. Tada imamo $\|g_0(\omega)\|_E + \|g_0(\omega)\|_E \leq 2\delta\lambda \leq \lambda + 2\delta\lambda$ pa nejednakost slijedi. Sada koristimo Teorem 3.1.10 i Lemu 3.1.8 pa zaključujemo kako je

$$\mathbb{P}(G^* > \beta - 2\lambda\delta - \lambda) \cdot (\beta - 2\lambda\delta - \lambda) \leq \frac{2}{u(0,0)} \cdot \|F\|_1 .$$

Na skupu $\{\sigma \leq \mu\}$ F_n je identički jednaka nuli za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Posebno je to slučaj i na skupu $\{\mu = \infty\} = \{g^* \leq \lambda\}$. Stoga vrijedi kako je

$$\begin{aligned}
\|F\|_1 &= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|F_n\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{\sigma>\mu\}} \|f_{\nu\wedge\sigma\wedge n}(\omega) - f_{\mu\wedge n}(\omega)\|_E \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{\sigma>\mu\}} \|f_{\nu\wedge\sigma\wedge n}(\omega)\|_E \, d\mathbb{P}(\omega) + \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{\sigma>\mu\}} \|f_{\mu\wedge n}(\omega)\|_E \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq (3\delta\lambda + \delta\lambda) \cdot \mathbb{P}(\sigma > \mu) \leq 4\delta\lambda\mathbb{P}(g^* > \lambda).
\end{aligned}$$

Konačno zaključujemo kako je

$$\mathbb{P}(g^* > \beta\lambda, f^* \leq \delta\lambda) \leq \frac{2}{u(0,0)} \cdot \frac{\|F\|_1}{\beta\lambda - 2\delta\lambda - \lambda} \leq \alpha\mathbb{P}(g^* > \lambda),$$

za

$$\alpha = \frac{8\delta}{u(0,0)(\beta - 2\delta - 1)}.$$

Ovo povlači kako je

$$\mathbb{P}(g^* > \beta\lambda) \leq \mathbb{P}(f^* > \delta\lambda) + \alpha\mathbb{P}(g^* > \lambda),$$

pa, koristeći Lemu 1.86. iz [22], dobivamo

$$\begin{aligned}
\|g^*\|_p^p = \beta^p \|g^*/\beta\|_p^p = \beta^p \int_0^\infty \mathbb{P}(g^* > \beta\lambda) p\lambda^{p-1} d\lambda \\
\leq \alpha\beta^p \int_0^\infty \mathbb{P}(g^* > \lambda) p\lambda^{p-1} d\lambda + \beta^p \int_0^\infty \mathbb{P}(f^* > \delta\lambda) p\lambda^{p-1} d\lambda \\
= \alpha\beta^p \|g^*\|_p^p + \beta^p\delta^{-p} \|f^*\|_p^p .
\end{aligned}$$

Budući da smo bez smanjenja općenitosti pretpostavili da su f i g jednostavni martingali, to znamo da je $\|g^*\|_p$ konačan pa, ukoliko još znamo da je $\alpha\beta^p < 1$, tada možemo zaključiti da je

$$\|g^*\|_p^p \leq \frac{\beta^p}{\delta^p(1 - \alpha\beta^p)} \|f^*\|_p^p .$$

Odavde imamo da je

$$\|g\|_p \leq \|g^*\|_p \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \alpha\beta^p)^{1/p}} \|f^*\|_p \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \alpha\beta^p)^{1/p}} \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz Doobove nejednakosti. Na kraju uočimo još da je tvrdnja dokazana ukoliko nađemo odgovarajuće $\delta > 0$ i $\beta > 1$ takve da je $\beta > 2\delta + 1$ i $\alpha\beta^p < 1$ što je očito moguće - može se uzeti

$$\delta = \frac{u(0,0)p^p}{8(p+1)^{p+1} + 2p^{p+1}} \quad \text{i} \quad \beta = 1 + \frac{1}{p}.$$

Da bi nejednakost $\beta > 2\delta + 1$ bila ispunjena dovoljno je vidjeti kako je $u(0,0) \leq 1$. Zaista, odaberimo proizvoljan $x \in E$ takav da je $\|x\|_E = 1$. Tada vrijedi

$$u(0,0) \leq \frac{1}{2}u(x,0) + \frac{1}{2}u(-x,0) \leq \frac{1}{2}\|x\|_E + \frac{1}{2}\|-x\|_E = 1.$$

Tvrdnja za proizvoljne jednostavne martingale

Neka su sada f i g proizvoljni jednostavni martingali te neka je γ konstanta za koju vrijedi nejednakost (3.13) u slučaju jednostavnih dijadskih martingala. Neka je $V : E \times E \to \mathbb{R}$ definirana s

$$V(x,y) = \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_E^p - \gamma^p \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_E^p$$

te definirajmo $U : E \times E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s

$$U(x,y) = \sup\{\mathbb{E}V(Z_n)\}$$

pri čemu supremum uzimamo po svim $n \in \mathbb{N}_0$ te po kolekciji $Z2(x,y)$ svih *zigzag* jednostavnih martingala $Z = (X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ za koje je $Z_0 = (x,y)$ te za koje i dX_n i dY_n poprimaju najviše dvije vrijednosti različite od 0 za svaki n, svaku s vjerojatnošću $1/2$. Budući da je $U(x,y) \geq \mathbb{E}V(x,y) = V(x,y)$ to U majorizira V. Također, znamo kako je

$$U(x,y) = U(-x,-y) \text{ za sve } x,y \in E$$

budući da ista relacija vrijedi i za V.

Nadalje, ako je $Z = (X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednostavni *zigazg* martingal takav da je $Z_0 = (0,0)$ tada znamo kako je martingal $g = (\frac{X_n - Y_n}{2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ± 1 martingalna transformacija martingala $f = (\frac{X_n+Y_n}{2})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Za tako definirane f i g te za po volji odabran $n \in \mathbb{N}_0$, vrijedi kako df_{n+1}, kada ga restringiramo na neprazan događaj

$$A = \{f_0 = b_0, df_1 = b_1, \dots, df_{n-1} = b_{n-1}, df_n = b_n\}, \quad b_0, b_1, \dots, b_n \in E,$$

ili biva identički jednak 0 ili postiže vrijednosti iz skupa $\{-b_{n+1}, b_{n+1}\}$ za neko $b_{n+1} \in E\backslash\{0\}$. Zaista, neka df_{n+1} poprima vrijednosti $b, c \in E$ s vjerojatnošću $1/2$. Budući da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingal to, u jedinom netrivijalnom slučaju, vrijedi

$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = \int_A df_{n+1} = 0,$$

pa odavde zaključujemo kako je $c = -b$. Dakle, znamo da je g ± 1 martingalna transformacija dijadskog jednostavnog martingala f pa, iz prethodno dokazane tvrdnje u za slučaj jednostavnih dijadskih martingala, zaključujemo kako je $\mathbb{E}V(X_n, Y_n) \leq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Slijedi kako je $U(0,0) \leq 0$.

U nastavku najprije želimo pokazati da je $U(x,y) \in \mathbb{R}$, a zatim i ustvrditi ključno svojstvo od U, a to je da je bikonkavna. Naime, u tom slučaju možemo zaključiti da za proizvoljni jednostavni martingal f (ne nužno dijadski) i njegovu ± 1 martingalnu transformaciju g vrijedi

$$\mathbb{E}\left\|g_n\right\|^p - \gamma^p \mathbb{E}\left\|f_n\right\|^p = \mathbb{E}V(f_n + g_n, f_n - g_n) \overset{V\leq U}{\leq} \mathbb{E}U(f_n + g_n, f_n - g_n)$$

$$\overset{\text{U bikonk.}}{\leq} \mathbb{E}U(f_0 + g_0, f_0 - g_0) \leq U(0,0) \leq 0.$$

U pretposljednjoj nejednakosti koristi se činjenica $U(x,0) \leq U(0,0)$ odnosno $U(0,y) \leq U(0,0)$ koja slijedi iz bikonkavnosti i gore opisanih svojstava od U. Naime,

$$U(x,0) = \frac{U(x,0) + U(-x,0)}{2} \leq U(0,0).$$

Na kraju, komentirajmo kratko bikonkavnost i konačnost od U:

- **Konačnost:** Neka je $Z = (X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in Z2(x,y)$. Konstruirajmo novi martingal $Z' = (X'_n, Y'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ na sljedeći način: neka je $Z'_0 \equiv (x, 0)$. U idućem koraku neka može "skočiti" samo na pozicije (x, y) odnosno $(x, -y)$, na svaku s vjerojatnošću $1/2$. U slučaju da smo skočili na poziciju $(x, -y)$ zaustavljamo martingal u toj poziciji; u suprotnom se nalazimo u poziciji (x, y) te martingal određujemo uvjetom da se njegova uvjetna distribucija uz uvjet $Z'_0 \equiv (x, 0)$ podudara s bezuvjetnom distribucijom martingala Z. Stoga za $n \geq 1$ imamo

  $$0 \geq \mathbb{E}V(X'_n, Y'_n) = \frac{1}{2}V(x, -y) + \frac{1}{2}\mathbb{E}V(X_{n-1}, Y_{n-1}).$$

  Uzimanjem supremuma po Z i n dobivamo kako je $U(x,y) \leq -V(x,-y)$. S druge strane, U je jasno ograničena odozdo s V.

- **Bikonkavnost:** Radi jednostavnosti možemo pretpostaviti da se od početka ovog dokaza nalazimo na vjerojatnosnom prostoru $([0,1\rangle, \mathscr{B}([0,1\rangle), |\cdot|)$ uz filtraciju induciranu Haarovim funkcijama. Neka je $(x,y) \in E \times E$ proizvoljan. Odaberimo martingale (X^1, Y^1) i (X^2, Y^2) redom iz $Z2(x_1, y)$ odnosno $Z2(x_2, y)$. Zbog jednostavnosti od (X^1, Y^1) i (X^2, Y^2) to postoji deterministički trenutak T do kojeg svi ovi martingali poprimaju konstantne vrijednosti. "Zalijepimo" sada ove parove. Sasvim precizno, neka je (X, Y) martingalni par na $([0,1\rangle, \mathscr{B}([0,1\rangle), |\cdot|)$ dan s $(X_0, Y_0) \equiv (x, y)$ te

  $$(X_n, Y_n)(\omega) = \begin{cases} (X^1_{n-1}, Y^1_{n-1})(2\omega), & \omega \in [0, \frac{1}{2}\rangle \\ (X^2_{n-1}, Y^2_{n-1})(\frac{\omega - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}), & \omega \in [\frac{1}{2}, 1\rangle \end{cases}$$

  za $n = 1, 2, \ldots, T$. Za $n > T$ stavimo $dX_n = dY_n \equiv 0$. Može se pokazati kako je $(X, Y) \in Z2(x, y)$ (ako dX_n i dY_n ne poprimaju najviše dvije vrijednosti za neki n, onda samo dopunimo jedan od martingala s konstantnim vrijednostima na početnom dijelu). Sada iz definicije od U imamo

  $$U(x,y) \geq \mathbb{E}V(X_T, Y_T)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} V(X^1_{T-1}, Y^1_{T-1})(2\omega)d\omega + \int_{\frac{1}{2}}^1 V(X^2_{T-1}, Y^2_{T-1}) \left(\frac{\omega - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) d\omega$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}V(X^1_\infty, Y^1_\infty) + \frac{1}{2}\mathbb{E}V(X^2_\infty, Y^2_\infty).$$

Sada uzimanjem supremuma po parovima (X^1, Y^1) i (X^2, Y^2) slijedi kako je $U(x, y) \geq \frac{1}{2}(U(x_1, y) + U(x_2, y))$. Naime, za proizvoljni $(x, y) \in E \times E$ je uzimanje supremuma od $\mathbb{E}V(X_n, Y_n)$ po svim n i svim $(X_n, Y_n) \in Z2(x, y)$ isto kao i uzimanje supremuma od $\mathbb{E}V(X_\infty, Y_\infty)$ po svim $(X_n, Y_n) \in Z2(x, y)$. Time je pokazano kako su $U(\cdot, y)$ i $U(x, \cdot)$ polovišno konkavne za proizvoljne $x, y \in E$, a budući je U lokalno omeđena odozdo (sa primjerice V), to je nužno i bikonkavna prema Lemi 3.1.4.

□

Iskažimo sada i glavni rezultat u ovom poglavlju.

Teorem 3.1.12. *Neka je E Banachov prostor. Tada E posjeduje UMD svojstvo ako i samo ako je E ζ-konveksan.*

Dokaz. Tvrdnja da ζ-konveksnost implicira UMD svojstvo slijedi direktno iz Propozicije 3.1.6, Propozicije 3.1.7 te Teorema 3.1.11.

Preostaje pokazati kako je svaki UMD prostor ujedno i ζ-konveksan. Pretpostavimo da je $1 < p < +\infty$ i $1 \leq \beta < +\infty$ takva da definicijska nejednakost za UMD prostore vrijedi uz konstantu β. Definiramo $V : E \times E \to \mathbb{R}$ s

$$V(x, y) = \left\|\frac{x - y}{2}\right\|_E^p - \beta^p \left\|\frac{x + y}{2}\right\|_E^p.$$

Sada, kao i u dokazu Teorema 3.1.11, zaključujemo kako postoji bikonkavna funkcija U koja majorizira V te za koju vrijedi $U(0, 0) \leq 0$. Za sve $x, y \in E$ definiramo

$$\zeta(x, y) = \frac{2}{p\beta^p}[1 - U(x, y)].$$

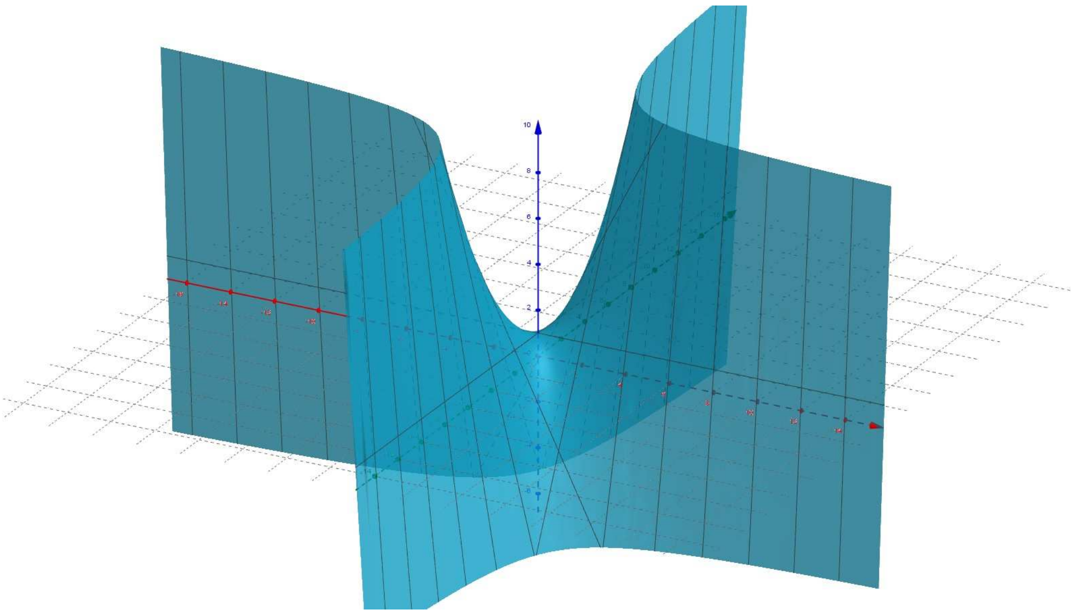
ζ je očito bikonveksna te zadovoljava $\zeta(0, 0) \geq \frac{2}{p\beta^p} > 0$. Preostaje provjeriti i drugi uvjet iz Definicije 3.1. Pretpostavimo stoga da su $x, y \in E$ vektori norme 1. Definiramo $t = \frac{\|x+y\|_E}{2}$. Tada je

$$\left\|\frac{x - y}{2}\right\|_E \geq \|x\|_E - t = 1 - t$$

te vrijedi

$$\zeta(x, y) \leq \frac{2}{p\beta^p}[1 - V(x, y)] \leq \frac{2}{p\beta^p}[1 - (1 - t)^p + \beta^p t^p] \leq 2t = \|x + y\|_E\,.$$

Pritom se u pretposljednjoj nejednakosti koristi $1-(1-t)^p+\beta^p t^p \leq 2pt\beta^p$ što vrijedi za $t \in [0,1]$ i $\beta \geq 1$ (ovo se lako provjeri, primjerice deriviranjem razlike desne i lijeve strane nejednakosti). $\square$



Slika 3.1: Grafički prikaz funkcije $\zeta_{\mathbb{R}}(x,y)=1+xy$

Postavlja se pitanje kako izgledaju funkcije $\zeta : E \times E \to \mathbb{R}$ za pojedine Banachove prostore E?
Uzmimo u momentu da je $E=\mathbb{R}$. Tada $\zeta=\zeta_{\mathbb{R}}$ mora zadovoljavati $\zeta_{\mathbb{R}}(0,0)>0$, ali i $\zeta_{\mathbb{R}}(1,1)\leq 2, \zeta_{\mathbb{R}}(1,-1)\leq 0, \zeta_{\mathbb{R}}(-1,1)\leq 0$ te $\zeta_{\mathbb{R}}(-1,-1)\leq 2$. Jedna je takva funkcija upravo $\zeta_{\mathbb{R}}(x,y)=1+xy$. Na ovom tragu pokazuje se da je proizvoljan Hilbertov prostor H ζ-konveksan (što smo znali i otprije) te da se može uzeti $\zeta_H(x,y)=1+\mathscr{R}(\langle x,y\rangle)$ u slučaju da je H zadan kao, općenito, kompleksan Hilbertov prostor.

Jako je zanimljiva i sljedeća karakterizacija Hilbertovih prostora u terminima funkcije ζ:

Teorem 3.1.13. *Neka je E Banachov prostor. Tada je E Hilbertov prostor ako i samo ako postoji bikonveksna funkcija ζ za koju je $\zeta(x,y)\leq \|x+y\|$ kad god je $\|x\|=\|y\|=1$ te za koju vrijedi $\zeta(0,0)=1$.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [15], stranice $129.-130.$ $\square$

Norma u Hilbertovom prostoru određena je skalarnim produktom. Analogon te činjenice u ζ-konveksnim prostorima je taj da je norma $\|\cdot\|$ određena do na ekvivalenciju s bikonveksnom funkcijom $\zeta : E \times E \to \mathbb{R}$ za koju je $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$ kad god je $\|x\| = \|y\| = 1$ te $\zeta(0, 0) > 0$. Posebno, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3.1.14. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banachov prostor te neka je $\zeta : E \times E \to \mathbb{R}$ bikonveksna funkcija za koju je $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$ kad god je $\|x\| = \|y\| = 1$ te za koju vrijedi $\zeta(0, 0) = 1$. Neka je V najmanji konveksni skup koji sadrži sve $x \in E$ takve da je $\zeta(\alpha x, -\alpha x) > 0$ za sve skalare α za koje je $|\alpha| \leq 1$. Tada je s*

$$|||x||| = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda V\}, \quad \forall x \in E$$

definirana norma na E za koju vrijedi

$$\zeta(0, 0) \cdot |||x||| \leq \|x\| \leq |||x|||, \quad \forall x \in E$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u članku [6], Napomena 3.1. $\square$

Bibliografija

[1] C. D. Aliprantis i K.C. Border, *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[2] D. Bakić, *Normirani prostori, skripta*, 2018. (pristupljeno kolovoz 2020.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1819-v2.pdf`.

[3] T. Bühler i D. A. Salamon, *Functional analysis*, 2017. (pristupljeno kolovoz 2020.), `https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana.pdf`.

[4] D. L. Burkholder, *A Geometrical Characterization of Banach Spaces in Which Martingale Difference Sequences are Unconditional*, The Annals of Probability **9** (1981), br. 6, 997–1011.

[5] ______, *A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions*, Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, sv. 1, 1983, str. 270–286.

[6] ______, *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces*, Probability and Analysis (Varenna, 1985) (1986), 61–108.

[7] ______, *Explorations in martingale theory and its applications*, École d' Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX — 1989., Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1991, str. 1–66.

[8] G. Da Prato i P. Grisvard, *Sommes d'opérateurs linéaires et équation différentielles opérationnelles*, Journal de mathématiques pures et appliquée **54** (1975), br. 3, 305–387.

[9] G. Dore i A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematische Zeitschrift **196** (1987), 189–201.

[10] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos i V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2011.

[11] D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

[12] J. Hoffmann-Jørgensen i G. Pisier, *The Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem in Banach Spaces*, The Annals of Probability **4** (1976), br. 4, 587–599.

[13] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar i L. Weis, *Analysis in Banach Spaces Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer, 2016.

[14] E. Oja, *A Short Proof of a Characterization of Reflexivity of James*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), br. 8, 2507–2508.

[15] A. Osekowski, *Sharp Martingale and Semimartingale Inequalities*, Monografie Matematyczne 72, Birkhäuser Basel, 2012.

[16] G. Pisier, *Martingales in Banach Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2016.

[17] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[18] T. Schlumprecht, *Course Notes for Functional Analysis I, Math 655-601, Fall 2015*, 2017. (pristupljeno kolovoz 2020.), `https://www.math.tamu.edu/~schlump/all.pdf`.

[19] C. Seifert, S. Trostor i M. Waurick, *23rd Internet Seminar "Evolutionary Equations"*, `https://www.mat.tuhh.de/veranstaltungen/isem23/_media/isem23_lecturenotes.pdf`, 2020 (pristupljeno kolovoz 2020.).

[20] J. van Neerven, *UMD-spaces, lecture 12*, 2020. (pristupljeno kolovoz 2020.), `https://ocw.tudelft.nl/wp-content/uploads/Lecture12.pdf`.

[21] R. Vershynin, *High-dimensional probability*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, 2018.

[22] Z. Vondraček, *Slučajni procesi, Poglavlje 1 - Martingali, skripta*, 2020 (pristupljeno kolovoz 2020.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp-p01.pdf`.

Sažetak

U diplomskom radu bavimo se Banachovim prostorima s UMD (engl. unconditional martingale difference) svojstvom. Riječ je o vjerojatnosnom svojstvu s važnim implikacijama u harmonijskog analizi i teoriji Banachovih prostora. U uvodnom je dijelu rada dan kratki pregled teorije integracije u Banachovim prostorima te dokazana Jamesova karakterizacija refleksivnosti Banachovih prostora (Teorem 1.2.15). U središnjem dijelu dokazujemo da UMD svojstvo povlači super-refleksivnost pripadnog Banachovog prostora (Propozicija 2.2.7) te prezentiramo Burkholderovu geometrijsku karakterizaciju Banachovih prostora s UMD svojstvom u terminima ζ-konveksnosti (Teorem 3.1.12).

Summary

This master's thesis studies Banach spaces with the UMD (unconditional martingale difference) property. Although the UMD property is defined probabilistically, it is known that it has important implications in harmonic analysis as well as in Banach space theory. In the introductory part we give an overview of the integration theory in Banach spaces. We also prove James's characterization of reflexivity of Banach spaces. (Theorem 1.2.15). In the main part of the thesis we prove that the UMD property implies super-reflexivity (Proposition 2.2.7) and we present Burkholder's geometric characterization of the UMD property in terms of ζ-convexity (Theorem 3.1.12).

Životopis

Rođen sam 15.10.1996. godine u Rijeci. Osnovnu školu završio sam u Kastvu, a prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Rijeci. U tom razdoblju uspješno sudjelujem na nekoliko državnih natjecanja iz matematike, fizike i logike.

Godine 2015. upisao sam prediplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, a tri godine kasnije i diplomski studij Matematičke statistike pri istom fakultetu. Pri kraju obaju studijskih programa nagrađen sam za akademsku izvrsnost od strane Matematičkog odsjeka te Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Tijekom studiranja sudjelovao sam u izvođenju demonstratura iz Programiranja 1 & 2, Diskretne matematike, Euklidskih prostora te Statistike.

U akademskim godinama 2018./2019. i 2019./2020., zajedno s kolegama s Fakulteta, sudjelovao sam na međunarodnom internet seminaru iz funkcionalne analize na temu Ergodske teorije i Evolucijskih diferencijalnih jednadžbi. U slobodno vrijeme trčim, bicikliram i igram squash.