Neke matematičke konstante i njihovi verižni razlomci

Dravec, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Dravec

NEKE MATEMATIČKE KONSTANTE I NJIHOVI VERIŽNI RAZLOMCI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Prvenstveno bi željela zahvaliti svojoj mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na pristupačnosti, uloženom vremenu i trudu, neopisivoj pomoći te strpljenju tijekom izrade ovog diplomskog rada.
Zahvaljujem se i svim mojim prijateljima koji su bili uz mene, kako tijekom izrade ovog rada, tako i tijekom cijelog studiranja, a posebno Anji, Ani i Klari.
Posebno hvala mom najboljem prijatelju i dečku Duji, na neizmjernoj podršci, razumijevanju, na svim neprospavanim noćima, koji me tješio nakon svakog pada i veselio se svakom mom uspjehu više od mene, koji mi nikad nije dozvolio da padnem i da se predam već me uvijek neumorno gurao naprijed.
Od srca najveće hvala mojim roditeljima, mami Mirjani i tati Miroslavu, koji su mi sve ovo omogućili, koji su me od početka mog školovanja bodrili, podržavali i nikad nisu prestali vjerovati u mene. Iz tog razloga, svaki svoj uspjeh, pa tako i ovaj diplomski rad, posvećujem upravo njima.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Sadržaj

Uvod

Matematičke konstante su istaknuti brojevi koji se pojavljuju češće nego neki drugi. Naime, činjenica jest da svi brojevi nisu "rođeni jednaki" nego su neki "popularniji" u smislu da ih često koristimo i spominjemo u različitim granama matematike i njezinim raznovrsnim primjenama. S nekima od njih upoznajemo se rano, već u osnovnoj školi (npr. broj π), ali ipak o njima ne znamo previše. Ovaj rad bavi se s četiri istaknuta broja u matematici, odnosno četiri važne matematičke konstante:

$$\sqrt{2},\ \varphi,\ e,\ \pi.$$

Ukratko ćemo reći nešto o njihovoj povijesti i karakterizirati svaku od njih. O svakoj od navedenih konstanti mogla bi se posvetiti podebljа knjiga ili čak više njih, no u ovom radu usredotočili smo se na razvoj ovih brojeva u verižne razlomke, jednostavne i poopćene. Osim što tu možemo otkriti zanimljive pravilnosti, verižni razlomci (posebno jednostavni) igraju važnu ulogu u aproksimaciji realnih (iracionalnih) brojeva s racionalnim. Naime, konvergente jednostavnog verižnog razlomka su jako dobre racionalne aproksimacije.

Rad je podijeljen u šest poglavlja. U prvom poglavlju usustavljujemo pojmove i tvrdnje vezane uz verižne razlomke. Najprije opisujemo *jednostavne verižne razlomke* koje dijelimo na konačne i beskonačne. Svakom realnom broju možemo pridružiti njegov jednostavni verižni razlomak, tj. još kažemo da svaki broj možemo razviti u verižni razlomak. Pri tom će verižni razlomak nekog broja biti konačan ako i samo je taj broj racionalan, odnosno beskonačan ako i samo ako je iracionalan. Specijalni iracionalni brojevi, konkretno kvadratne iracionalnosti imaju specifične, periodske verižne razlomke. I obratno, svaki periodski (jednostavni) verižni razlomak jednak je nekoj kvadratnoj iracionalnost. U ovom poglavlju dajemo i kratki pregled *poopćenih* (generaliziranih) *verižnih razlomaka* koji se mogu dovesti u vezu s nekim redovima brojeva. Dakle, ako neki (iracionalan) broj možemo prikazati u obliku odgovarajućeg reda, moći ćemo mu pridružiti generalizirani verižni razlomak. Iako je to vrlo praktično, generalizirani verižni razlomci općenito nisu tako dobre aproksimacije kao jednostavni verižni razlomci. Empirijsku potvrdu dali smo u posljednjem, šestom poglavlju gdje dajemo pregled tablica koje sadrže racionalne aproksimacije matematičkih konstanti koje smo dobili pomoću njihovih jednostavnih i poopćenih veržnih razlomaka (tj. pomoću konvergenti).

Svakoj od konstanti ($\sqrt{2}$, φ, e, π) posvećeno je po jedno poglavlje (od drugog do petog). Broj $\sqrt{2}$ naziva se još *Pitagorina konstanta*. To je kvadratna iracionalnost čiji je razvoj u jednostavni verižni razlomak periodski,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1; 2, 2, \ldots].$$

Broj $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ poznat pod nazivima *zlatni rez*, zlatna sredina, božanski omjer, osim u matematici pojavljuje se i u umjetnosti (posebno likovnoj, te arhitekturi). Nama je zanimljiva njegova veza s popularnim Fibonaccijevim nizom. Budući da je φ također kvadratna iracionalnost njegov je razvoj u jednostavan verižni razlomak periodski,

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1; 1, 1, 1, \ldots].$$

Konstanta φ je iracionalan broj kojeg je najteže aproksimirati racionalnim brojem.

Napierova konstanta, Eulerov broj ili broj e baza je prirodnog logaritma i približno iznosi 2.71828. To je iracionalan broj, štoviše transcedentan (nije nultočka polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima). Iz definicije broja e kao sume reda, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, koristeći Eulerovu formulu, možemo doći do poopćenog verižnog razlomka za e,

$$e = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \ddots}}}}.$$

Dokazujemo i da e ima sljedeći razvoj u jednostavni verižni razlomak

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1 \ldots, 1, 2n, 1, \ldots],$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.

Arhimedova konstanta, Ludolphov broj ili kratko π, zasigurno je najpoznatija matematička konstanta o kojoj postoje spoznaje već gotovo 4 000 godina. Broj π je transcedentan. Zbog svoje važne uloge, bilo je važno odrediti dobru aproksimaciju broja π. Stoga ova konstanta ima i dugu povijest svojih aproksimacija. U radu opisujemo kako dobivamo poopćeni verižni razlomak za π, koristeći Eulerovu formulu i Taylorov razvoj u red inverzne trigonometrijske funkcije tangens,

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}.$$

Za razliku od svih prethodno navedenih konstanti, jednostavni verižni razlomak za π, čini se, ne pokazuje nikakve znakove pravilnosti (a do sada je poznato oko 15 milijardi članova u razvoju),

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots],$$

a zbog toga i danas intrigira mnoge matematičare i rekreativce.

Pri izradi rada koristili smo online matematički softver *Wolfram Alpha* te softver *Mathematica 12*.

Poglavlje 1

Verižni razlomci

U ovom poglavlju dajemo pregled bitnih pojmova i tvrdnji vezanih uz jednostavne verižne razlomke, te uz njihovo poopćenje.

1.1 Jednostavni verižni razlomci

Definicija 1.1.1. *Neka je a_0 cijeli broj, te a_i prirodni brojevi za $i \in \mathbb{N}$. Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1.1}$$

naziva se ***jednostavni konačni verižni razlomak****, a oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{1.2}$$

jednostavni beskonačni verižni razlomak*.*

Za a_i, $i \in \mathbb{N}_0$, kažemo da su ***parcijalni kvocijenti*** *verižnog razlomka. Konačni, odnosno beskonačni verižni razlomak, kraće zapisujemo kao*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

odnosno

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Napomenimo da niz (a_n) općenito može biti realan, kompleksan ili predstavljati niz funkcija s istom domenom. Neke tvrdnje koje ćemo ovdje istaknuti vrijede općenito, odnosno i bez pretpostavke da je (a_n) niz prirodnih brojeva (kao što je istaknuto u Definiciji 1.1.1) zato ćemo tu pretpostavku, gdje je neophodna, i naglasiti.

U sljedećih nekoliko odjeljaka ćemo pod pojmom *verižni razlomak* misliti na *jednostavni verižni razlomak*.

Jasno je da je svaki konačni verižni razlomak jednak nekom racionalnom broju jer je rezultat konačno mnogo racionalnih operacija. Konkretno,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

gdje su P i Q polinomi sa cjelobrojnim koeficijentima u $n+1$ varijabli.

S druge strane, nije apriori jasno čemu je jednak beskonačni verižni razlomak. U tu svrhu potrebno je uvesti neke dodatne notacije, a "jednakost" protumačiti kao konvergenciju određenog niza racionalnih brojeva (slično kao što se događa kod redova brojeva).

1.2 Konvergente verižnog razlomka

Definicija 1.2.1. *Za* $0 \leq k \leq n$ *u slučaju konačnog verižnog razlomka* (1.1)*, te* $k \in \mathbb{N}_0$ *u slučaju beskonačnog verižnog razlomka* (1.2)*, definiramo* ***k-tu konvergentu*** *ili* ***k-ti segment*** *verižnog razlomka kao*

$$s_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], \tag{1.3}$$

te ***k-ti ostatak***

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n]$$

konačnog verižnog razlomka (1.1)*, odnosno*

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$$

beskonačnog verižnog razlomka (1.2).

Očito vrijedi,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k], \ 1 \leq k \leq n,$$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k], \ k \in \mathbb{N}.$$

U sljedećih nekoliko teorema navodimo, bez dokaza, važna "operativna" svojstva konvergenti i ostataka verižnog razlomka.

Teorem 1.2.2. *Vrijedi*

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}},$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$, *te*

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}, \tag{1.4}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Teorem 1.2.3 (Rekurzivne formule za konvergente)**.** *Za* $k \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi*

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \tag{1.5}$$

gdje su $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$.

Teorem 1.2.4. *Za* $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$q_k p_{k-1} + p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{1.6}$$

Kao posljedicu prethodne tvrdnje imamo da su p_k i q_k relativno prosti za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, dijeljenjem relacije iz prethodnog teorema s $q_{k-1}q_k$ dobivamo

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k-1}q_k}. \tag{1.7}$$

Definicija 1.2.5. *Neka je dan beskonačni verižni razlomak* (1.2) *s pripadnim nizom konvergenti*

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \dots. \tag{1.8}$$

Ako niz konvergenti (1.8) *konvergira, tj. ako postoji* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha, \tag{1.9}$$

onda kažemo da i beskonačni verižni razlomak (1.2) ***konvergira****, odnosno da poprima vrijednost* α *i pišemo*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Štoviše, reći ćemo da je u tom slučaju beskonačni verižni razlomak (1.2) ***jednak*** *broju* α.

U suprotnom, ako je niz konvergenti (1.8) *divergentan, onda kažemo da je i verižni razlomak* (1.2) ***divergentan****.*

Pokazuje se da je u slučaju kada je (a_n) niz prirodnih brojeva, beskonačni verižni razlomak (1.2) uvijek konvergentan a to je posljedica sljedeće tvrdnje.

Teorem 1.2.6. *Neka je $a_0 \in \mathbb{Z}$, (a_n) niz prirodnih brojeva, te (p_n/q_n) niz konvergenti dan s* (1.3). *Tada je niz konvergenti s parnim indeksom, $\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right)$, rastući, a s neparnim indeksom, $\left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right)$, padajući. Nadalje,*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}},$$

za sve $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Teorem 1.2.7. *Neka je $a_0 \in \mathbb{Z}$, (a_n) niz prirodnih brojeva. Tada beskonačni verižni razlomak $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ konvergira.*

Skica dokaza. Prema Teoremu 1.2.6 niz $\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right)$ je rastući i ograničen odozgo, pa je stoga i konvergentan. Nadalje, niz $\left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right)$ je padajući i ograničen odozdo. Dakle, i on je konvergentan. Nadalje, pokazuje se da oba podniza niza konvergenti konvergiraju istom limesu. Stoga je niz $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ konvergentan, odnosno postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi (1.9). □

Napomena 1.2.8. *Već smo spominjali da je smisleno verižni razlomak* (1.2) *promatrati i za neki proizvoljan niz brojeva (a_n). U slučaju kad je (a_n) niz pozitivnih brojeva vrijedi jednostavni kriterij konvergencije. Naime, beskonačni verižni razlomak* (1.2) *konvergira ako i samo ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.*

Teorem 1.2.9. *Neka je $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Tada za sve $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Prethodni teorem vrijedi i za konačni verižni razlomak pri čemu je

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n],$$

tj. vrijedi za $0 \leq k \leq n$.

1.3 Reprezentacija broja pomoću jednostavnog verižnog razlomka

Teorem 1.3.1. *Za svaki realan broj α postoji* jedinstveni *verižni razlomak koji je jednak α. Ako je α racionalan broj, onda je verižni razlomak konačan. Ako je α iracionalan broj, onda je verižni razlomak beskonačan.*

Napomenimo da u slučaju konačnog verižnog razlomka za jedinstvenost moramo zahtijevati da je posljednji parcijalni kvocijent $a_n > 1$. Naime, vrijedi $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_n + 1]$.

Dokaz. Označimo s a_0 najveći cijeli broj koji nije veći od α, tj.

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor.$$

Ako α nije cijeli broj, onda postoji $r_1 > 1$ takav da je

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}. \tag{1.10}$$

Zaista, $\alpha - a_0$ je razlomljeni dio od α pa vrijedi da je

$$0 < \frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1.$$

Uočimo da relaciju (1.10) možemo zapisati kao

$$\alpha = [a_0; r_1].$$

U drugom koraku definiramo prirodan broj

$$a_1 = \lfloor r_1 \rfloor.$$

Ako r_1 nije cijeli broj, onda analogno kao u prethodnom, tj. prvom koraku, postoji $r_2 > 1$ takav da je

$$r_1 = a_1 + \frac{1}{r_2}. \tag{1.11}$$

Iz (1.10) i (1.11) dobivamo

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_2}},$$

odnosno

$$\alpha = [a_0; a_1, r_2].$$

Postupak možemo ponavljati sve dok r_i, $i \geq 2$ nije prirodan broj. To znači da ako $r_2, \dots, r_{n-1}$ nisu prirodni brojevi, onda opisanim postupkom dobivamo da je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n]. \tag{1.12}$$

U sljedećem, tj. $n+1$-om koraku stavimo

$$a_n = \lfloor r_n \rfloor.$$

Ako je r_n prirodan broj, onda je $r_n - a_n = 0$ i postupak staje te iz (1.12) dobivamo da je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \tag{1.13}$$

iz čega možemo zaključiti da je α racionalan broj. (Uočimo da je ovim postupkom dobiveno $a_n > 1$ jer je u svakom koraku $r_i > 0$.)

Ako r_n nije prirodan broj, onda je $0 < r_n - a_n < 1$ te je $r_{n+1} > 1$ dobro definiran relacijom

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}. \tag{1.14}$$

Sada iz (1.12) i (1.14) slijedi

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}].$$

Ovim smo opisali *razvoj broja α u verižni razlomak.*

Sada ćemo pokazati da ako je α racionalan broj, onda opisani postupak razvoja u verižni razlomak mora stati nakon konačno mnogo koraka što će značiti da je pripadni verižni razlomak od α konačan. Dakle, iz pretpostavke da je α racionalan broj je jasno da će svi r_i, $i \geq 1$, biti racionalni. Pretpostavimo da smo u i-tom koraku dobili $r_i = \frac{a}{b}$, tada je

$$r_i - a_i = \frac{a}{b} - a_i = \frac{a - ba_i}{b} = \frac{c}{b},$$

gdje je $c < b$, jer je $r_i - a_i < 1$. Nadalje, u $i+1$-om koraku, uz pretpostavku $r_i - a_i > 0$, dobivamo

$$r_{i+1} = \frac{1}{r_i - a_i} = \frac{b}{c}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je nazivnik ostatka kojeg smo dobili u nekom koraku uvijek manji od nazivnika ostatka dobivenog u prethodnom koraku. Stoga nazivnici ostataka čine padajući niz u skupu prirodnih brojeva što znači da postoji korak u kojem ostatak ima nazivnik 1. Ako pretpostavimo da je r_n ostatak s nazivnikom 1, tj. r_n je prirodan broj, onda postupak razvoja u verižni razlomak staje te vrijedi (1.13) (pri čemu je $a_n = r_n$).

Sada pretpostavimo da je α iracionalan broj. Želimo pokazati da je pripadni verižni razlomak beskonačan. Zaista, svi r_n će biti iracionalni i naš postupak će se ponavljati unedogled. Još treba ustanoviti da ćemo opisanim postupkom zaista dobiti verižni razlomak koji je jednak broju α. Stavimo da je

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

pri čemu je $\frac{p_n}{q_n}$ do kraja skraćen razlomak i $q_n > 0$. Tada prema (1.4) i (1.12) imamo

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}, \tag{1.15}$$

za $n \geq 2$. S druge strane, zbog (1.5) je

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}. \tag{1.16}$$

Iz (1.15) i (1.16) dobivamo

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} - \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{(p_{n-1}r_n + p_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2}) - (p_{n-1}a_n + p_{n-2})(q_{n-1}r_n + q_{n-2})}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} \\
&= \frac{(r_n - a_n)(p_{n-1}q_{n-2}) + (a_n - r_n)(p_{n-2}q_{n-1})}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} \\
&= \frac{(r_n - a_n)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}.
\end{aligned}$$

Posljednji izraz ocijenimo odozgo po apsolutnoj vrijednosti. Definirali smo a_n kao $a_n = \lfloor r_n \rfloor$, dakle $0 < r_n - a_n < 1$. Nadalje, iz (1.7) slijedi $|p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}| = 1$. Također, prema (1.5) je $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Budući da je $r_n > a_n$ i $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ imamo $r_n q_{n-1} + q_{n-2} > a_n q_{n-1} + q_{n-2} = q_n$. Kao posljedicu svega navedenog dobivamo nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}. \tag{1.17}$$

Prema tome, budući da je (q_n) rastući niz, $\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow \alpha$ kad $n \longrightarrow \infty$. Dakle, beskonačni verižni razlomak $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ima vrijednost α.

Do sada smo pokazali da se racionalan broj može reprezentirati nekim konačnim verižnim razlomkom, a iracionalan - beskonačnim verižnim razlomkom. Preostalo nam je još dokazati jedinstvenost takve reprezentacije. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a'_0; a'_1, a'_2, \ldots],$$

gdje verižni razlomci mogu biti ili konačni ili beskonačni. Jednakost odgovarajućih parcijalnih kvocijenata pokažimo koristeći princip matematičke indukcije. Prije svega, jasno je da je $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ i $a'_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, dakle slijedi da je $a_0 = a'_0$, čime smo pokazali bazu indukcije. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_i = a'_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

To možemo zapisati i kao

$$p_i = p'_i,\ q_i = q'_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Koristeći (1.4) i pretpostavku indukcije dobivamo

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p'_n r'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n r'_{n+1} + q'_{n-1}} = \frac{p_n r'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r'_{n+1} + q_{n-1}},$$

iz čega lako iščitavamo da je $r_{n+1} = r'_{n+1}$. Kako je $a_{n+1} = \lfloor r_{n+1} \rfloor$ i $a'_{n+1} = \lfloor r'_{n+1} \rfloor$, slijedi $a_{n+1} = a'_{n+1}$. Dakle, ta dva verižna razlomka se u potpunosti podudaraju čime smo dokazali jedinstvenost. □

Na temelju Teorema 1.3.1 kažemo da smo broj α *razvili u jednostavni verižni razlomak*. Štoviše, u samom teoremu opisan je i postupak razvoja realnog broja u verižni razlomak.

Racionalni broj $\alpha = \frac{u}{v}$, $v > 0$, može se razviti u verižni razlomak pomoću *Euklidovog algoritma*. Podsjetimo, Euklidov algoritam zasnovan je na *Teoremu o dijeljenju s ostatkom* koji kaže da za $a \in \mathbb{N}$ i $b \in \mathbb{Z}$ postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, $0 \le r < a$. Zaista,

$$\begin{aligned} u &= v \cdot a_0 + r_1,\ 0 < r_1 < v, \\ v &= r_1 \cdot a_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot a_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2, \\ &\ \vdots \\ r_{n-1} &= r_n \cdot a_n. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\frac{u}{v} = a_0 + \frac{1}{\frac{v}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}} = \ldots = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Na kraju istaknimo, broj $\alpha \in \mathbb{R}$ ima razvoj u konačni verižni razlomak ako i samo ako je α racionalan broj, odnosno α ima razvoj u beskonačni verižni razlomak ako i samo ako je α iracionalan broj.

1.4 Periodski verižni razlomci

Postoje realni brojevi čiji je razvoj u beskonačni verižni razlomak zadovoljava određenu pravilnost kao što je slučaj kad se određeni broj članova, odnosno kvocijenata periodički ponavlja.

Definicija 1.4.1. *Za beskonačni verižni razlomak $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ kažemo da je* ***periodski*** *ako postoje cijeli brojevi $k \geq 0$ i $m \geq 1$ tako da je $a_{m+n} = a_n$ za sve $n \geq k$. Tada verižni razlomak pišemo kao*

$$[a_0; a_1, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}}],$$

gdje "crta" iznad $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$ znači da se taj blok brojeva ponavlja u beskonačnost. Broj m naziva se ***duljina perioda****. Ako je $k = 0$, tada je verižni razlomak* ***čisto periodski****.*

Definicija 1.4.2. *Za iracionalan broj α kažemo da je* ***kvadratna iracionalnost*** *ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.*

Kvadratnu iracionalnost α možemo zapisati u obliku:

$$\alpha = \frac{s_0 + \sqrt{d}}{t_0} \tag{1.18}$$

gdje su s_0, d, t_0 cijeli brojevi, $t_0 \neq 0$, d nije potpun kvadrat i $t_0 \mid (d - {s_0}^2)$. Uočimo da je uvijek moguće postići posljednji uvjet. Naime, ako $t_0 \nmid (d - {s_0}^2)$, onda proširivanjem čitavog razlomka s t_0 dobivamo da $t_0^2 \mid (dt_0^2 - s_0{t_0}^2)$.

Teorem 1.4.3. *Razvoj u jednostavni beskonačni verižni razlomak iracionalnog broja α je periodski ako i samo ako je α kvadratna iracionalnost.*

Jedan smjer (dovoljnost) dokaza prethodnog teorema zasnovan je na sljedećem algoritmu za razvoj u verižni razlomak kvadratne iracionalnosti (1.18), pri čemu je $s_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$ nije potpun kvadrat i $t_0 \mid (d - {s_0}^2)$. Za $i \geq 0$ računamo

$$\begin{aligned} a_i &= \lfloor \alpha_i \rfloor, \\ \alpha_i &= \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i}, \\ s_{i+1} &= a_i \cdot t_i - s_i, \\ t_{i+1} &= \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Može se pokazati da postoje $j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $j < k$ i $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$ pa će se ponoviti vrijednosti $a_k = a_j$, $a_{k+1} = a_{j+1}$, ..., $a_{2k-j-1} = a_{k-1}$. Stoga kad se pojave takve dvije vrijednosti indeksa (j i k), algoritam staje i dobivamo

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-1}}].$$

Specijalan slučaj kvadratne iracionalnosti je $\sqrt{d}$, a njegov razvoj u verižni razlomak ima još neka dodatna svojstva.

Teorem 1.4.4. *Ako prirodni broj d nije potpun kvadrat, tada razvoj u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima sljedeći oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-2}, a_{r-1}, 2a_0}],$$

gdje je $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$ a kvocijenti $a_1, \dots, a_{r-1}$ su centralno simetrični, tj. $a_1 = a_{r-1}$, $a_2 = a_{r-2}, \dots$.

Pri razvoju broja $\sqrt{d}$ u verižni razlomak inicijalne vrijednosti za algoritam (1.19) su $s_0 = 0$ i $t_0 = 1$. Algoritam staje kad se ponove vrijednosti s_1 i t_1 (tj. $(s_1, t_1) = (s_{r+1}, t_{r+1})$).

1.5 Poopćeni verižni razlomci

Poopćeni (ili *generalizirani*) *verižni razlomak* je izraz oblika

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}, \tag{1.20}$$

pri čemu se b_0 naziva *cjelobrojni dio*, a_n *n-ti parcijalni brojnik* te b_n *n-ti parcijalni nazivnik*, $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavit ćemo da su a_n i b_n realni brojevi (iako mogu biti kompleksni brojevi ili funkcije s istom domenom). Kraće ćemo poopćeni verižni razlomak označavati s

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots$$

ili

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} + \cdots . \tag{1.21}$$

Spomenimo još i oznaku koju je uveo Gauss,

$$b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i}. \tag{1.22}$$

Slovo "K" dolazi od njemačke riječi za verižni razlomak - *Kettenbruch*. Ova je oznaka praktična ako nizovi (a_n) i (b_n) zadovoljavaju određene pravilnosti.

Ako je jedan od parcijalnih brojnika a_{n+1} jednak nuli, onda je beskonačni verižni razlomak (1.22) zapravo konačni verižni razlomak

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \cdots + \frac{a_n \mid}{\mid b_n},$$

tj. racionalna funkcija prvih n a_i-eva i prvih $n+1$ b_i-eva pa se obično pretpostavlja da je $a_i \neq 0$.

Konvergente poopćenog verižnog razlomka definiramo analogno kao konvergente jednostavnog verižnog razlomka (Definicija 1.2.1):

$$x_0 = b_0,\ x_1 = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1},\ x_2 = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} = \frac{b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0}{b_2 b_1 + a_2}, \ldots.$$

Brojnik i nazivnik n-te konvergente poopćenog verižnog razlomka x_n označavamo s A_n i B_n, respektivno, tj. $x_n = \frac{A_n}{B_n}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
&A_0 = b_0,\ B_0 = 1,\\
&A_1 = b_1 b_0 + a_1,\ B_1 = b_1,\\
&A_2 = b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0,\ B_2 = b_2 b_1 + a_2, \ldots.
\end{aligned}$$

Računamo ih pomoću rekurzivnih formula:

$$\begin{aligned}
A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2},\\
B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2},
\end{aligned} \tag{1.23}$$

za $n \geq 1$ pri čemu su početne vrijednosti dane s $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$. U slučaju $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$, dobit ćemo upravo rekurzivne formule za brojnike i nazivnike jednostavnog verižnog razlomka (1.5).

Vrijedi i poopćenje relacije (1.6):

$$A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n,\ n \geq 0. \tag{1.24}$$

Relacija (1.24) se naziva *formula determinante* jer lijeva strana upravo predstavlja determinantu matrice

$$M_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{bmatrix}.$$

Primjenom relacija (1.23) imamo

$$\det M_n = \begin{vmatrix} A_{n-1} & b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_{n-1} & b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{vmatrix} = a_n \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{vmatrix} = -a_n \det M_{n-1},$$

pri čemu smo koristili osnovna svojstva determinante koja opisuju ponašanje determinante s obzirom na elementarne transformacije matrice. Dalje se dokaz formule (1.24) lagano provodi matematičkom indukcijom.

U sljedećih nekoliko definicija i teorema navodimo, bez dokaza, najvažnija svojstva poopćenih verižnih razlomaka.

Definicija 1.5.1. *Za verižni razlomak kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $B_n \neq 0$ *za sve* $n \geq n_0$ *(tj. ima samo konačno mnogo parcijalnih nazivnika koji su jednaki* 0*) i postoji limes niza konvergenti* $(A_n/B_n)_{n\geq n_0}$*, odnosno ako postoji* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \alpha.$$

U suprotnom kažemo da verižni razlomak ***divergira****.*

Vrijednost konvergentnog verižnog razlomka je definirana limesom niza njegovih uzastopnih konvergenti (tj. jednaka je α*), dok divergentnom verižnom razlomku ne pridružujemo njegovu vrijednost.*

Napomena 1.5.2. *Brojnici i nazivnici,* a_n *i* b_n*, u verižnom razlomku* (1.20) *mogu biti i funkcije u jednoj (ili više varijabli) nad istom domenom* $\mathcal{D}$*. U tom slučaju kažemo da verižni razlomak* (1.20) uniformno konvergira *na* $\mathcal{D}$ *ako konvergira za svaku vrijednosti iz* $\mathcal{D}$ *te ako pripadni niz konvergenti konvergira uniformno na* $\mathcal{D}$*.*

Sljedeći teorem uspostavlja vezu između određenog verižnog razlomka i specifičnog reda.

Teorem 1.5.3. *Neka su svi nazivnici* B_n *beskonačnog poopćenog verižnog razlomka*

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}, \tag{1.25}$$

različiti od nule i neka

$$\rho_n = -\frac{a_{n+1}B_{n-1}}{B_{n+1}},\ n \geq 1. \tag{1.26}$$

Tada je verižni razlomak (1.25) *ekvivalentan verižnom razlomku*

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{\rho_1}{1+\rho_1-\cfrac{\rho_2}{1+\rho_2-\cfrac{\rho_3}{1+\rho_3-\ddots}}}}, \tag{1.27}$$

u smislu da su n-ta konvergenta od (1.25) *i* (1.27) *jednake za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Štoviše, za proizvoljan niz (ρ_n), *n-ti parcijalni brojnik verižnog razlomka* (1.27) *je jednak n-toj parcijalnoj sumi reda*

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_1\rho_2\cdots\rho_k, \tag{1.28}$$

a n-ti parcijalni nazivnik je jednak 1.

Skica dokaza. Prema formuli determinante (1.24) vrijedi da je

$$\begin{aligned}\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}-\frac{A_k}{B_k} &= (-1)^k\frac{a_2\cdots a_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = (-1)^k\frac{1}{B_0B_1}\frac{a_2B_0}{B_2}\cdots\frac{a_{k-1}B_{k-3}}{B_{k-1}}\frac{a_kB_{k-2}}{B_k}\frac{a_{k+1}B_{k-1}}{B_{k+1}}\\ &= (-1)^{2k}\cdot 1\cdot\rho_1\cdots\rho_k = \rho_1\cdots\rho_k.\end{aligned}$$

Sumiranjem prethodne jednakosti po k od 1 do n dobivamo

$$1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}-\frac{A_k}{B_k}\right) = 1+\rho_1+\rho_1\rho_2+\cdots+\rho_1\rho_2\cdots\rho_k.$$

Očito je lijeva strana prethodne jednakosti jednaka A_{n+1}/B_{n+1}. Stoga je n-ta konvergenta od (1.25) jednaka n-toj parcijalnoj sumi reda (1.28). Budući da se može pokazati da je n-ta parcijalna suma reda (1.28) jednaka n-toj konvergenti od (1.27), slijedi tvrdnja. (O tome će biti govora u odsječku 4.1, Eulerova formula.) □

Često je prikladno poopćeni verižni razlomak (1.20) prikazati u malo drugačijem, tj. *proširenom* obliku. U tu svrhu korisnima se pokazuju tzv. *ekvivalentne transformacije*. Neka je (c_n) niz realnih (ili kompleksnih) brojeva različitih od 0. Prošireni poopćeni verižni razlomak dobit ćemo tako da proširujemo razlomak sukcesivno s elementima niza (c_n):

$$b_0+\cfrac{c_1a_1}{c_1b_1+\cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2+\cfrac{c_2c_3a_3}{c_3b_3+\ddots}}}. \tag{1.29}$$

Uvjerimo se da se konvergente proširenog verižnog razlomka ne mijenjaju. Vrijedi:

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} = b_0 + \frac{c_1 a_1 \mid}{\mid c_1 b_1},$$

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 \left(b_1 + \frac{c_2 a_2}{c_2 b_2} \right)} = b_0 + \frac{c_1 a_1 \mid}{\mid c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2 \mid}{\mid c_2 b_2},$$

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 \left(b_1 + \frac{c_2 a_2}{c_2 \left(b_2 + \frac{c_3 a_3}{c_3 b_3} \right)} \right)} \\ &= b_0 + \frac{c_1 a_1 \mid}{\mid c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2 \mid}{\mid c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3 \mid}{\mid c_3 b_3}. \end{aligned}$$

Dalje se primjenom principa matematičke indukcije i formule (1.24) pokazuje da verižni razlomak (1.29) ima iste konvergente kao i (1.20) pa su stoga oni jednaki. Dakle, vrijedi

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} + \cdots = b_0 + \frac{c_1 a_1 \mid}{\mid c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2 \mid}{\mid c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3 \mid}{\mid c_3 b_3} + \cdots, \tag{1.30}$$

za bilo koji niz (c_n) za koji je $c_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

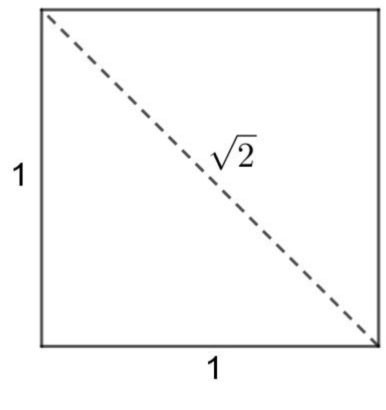
Poglavlje 2

Pitagorina konstanta ($\sqrt{2}$)

Pitagorina konstanta naziv je za iracionalni broj $\sqrt{2} \approx 1.41421\ldots$, tj. duljinu dijagonale jediničnog kvadrata.

Sami počeci Pitagorine konstante sežu u predeuklidsko doba, doba pitagorejaca. Pitagorejcima nazivamo sljedbenike filozofsko-vjerske pitagorejske škole koju je osnovao Pitagora sa Samosa. Pitagorejci su vjerovali da se sve može shvatiti pomoću prirodnih brojeva i njihovih omjera, tj. razlomaka. Posljedično tome, pitagorejci su vjerovali da je svaka duljina cjelobrojna ili racionalna, tj. da su sve duljine sumjerljive jediničnoj duljini. Drugim riječima, vjerovali su da su dvije istovrsne veličine sumjerljive ako im omjer možemo opisati kao omjer prirodnih brojeva.

Također, iako se to protivi upravo spomenutoj filozofiji pitagorejske škole, pitagorejci su otkrili postojanje iracionalnih brojeva. Pokazali su da dijagonala jediničnog kvadrata, čija je duljina $\sqrt{2}$, nije sumjerljiva stranici tog jediničnog kvadrata, tj. da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.



Slika 2.1: Pitagorina konstanta

Postoji više dokaza iracionalnosti $\sqrt{2}$, mi ćemo ovdje navesti jedan od njih.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\sqrt{2}$ racionalan broj, dakle, možemo ga prikazati u obliku

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

pri čemu su a i b relativno prosti prirodni brojevi, tj. $\operatorname{nzd}(a, b) = 1$. Tada je

$$2b^2 = a^2.$$

Kako 2 dijeli lijevu stranu jednakosti, tada dijeli i desnu stranu, tj. $2 \mid a^2$. Budući da je 2 prost broj koji dijeli kvadrat prirodnog broja, tada dijeli i sam taj broj. Dakle, $2 \mid a$ pa a možemo zapisati kao $a = 2k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$2b^2 = 4k^2,$$

odnosno

$$b^2 = 2k^2.$$

Analogno kao prije zaključujemo da $2 \mid b$. Time smo dobili da je 2 djelitelj broja a i broja b, tj. a i b nisu relativno prosti brojevi čime smo dobili kontradikciju.

Pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj dovodi do kontradikcije pa zaključujemo da mora vrijediti suprotno, tj. da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan broj čime je dokaz gotov. $\square$

Pitagorina konstanta je iracionalan broj, štoviše kvadratna iracionalnost, pa na temelju teorema 1.3.1 i 1.4.4 postoji jedinstveni periodski verižni razlomak koji je jednak $\sqrt{2}$. Za razvoj u verižni razlomak koristimo algoritam (1.19) s inicijalnim vrijednostima

$$s_0 = 0, \; t_0 = 1, \; a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1.$$

U prvom koraku računamo:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0 \cdot t_0 - s_0 = 1 \cdot 1 - 0 = 1, \\ t_1 &= \frac{d - s_1^2}{t_0} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1, \\ a_1 &= \left\lfloor \frac{s_1 + \sqrt{d}}{t_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{2}}{1} \right\rfloor = 2. \end{aligned}$$

Već u drugom koraku dobivamo

$$\begin{aligned} s_2 &= a_1 \cdot t_1 - s_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\ t_2 &= \frac{d - s_2^2}{t_1} = \frac{2 - 1^2}{1} = 1, \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$ pa algoritam staje i dobivamo

$$\sqrt{2} = [a_0; \overline{a_1}] = [1; \overline{2}].$$

Dakle, Pitagorinu konstantu, tj. $\sqrt{2}$, možemo zapisati u obliku beskonačnog verižnog razlomka kao

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Prvih nekoliko konvergenti je $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$, pri čemu već treća konvergenta, $\frac{17}{12}$, aproksimira $\sqrt{2}$ na dvije decimale.

Newtonova metoda za približno računanje nultočke glatke funkcije pomoću aproksimacije tangentom, za početnu aproksimaciju $x_0 = 1$ daje upravno konvergente od $\sqrt{2}$. Općenito, ako f ima jedinstvenu nultočku na nekon intervalu I, derivabilna je na I, te $f'(x) \neq 0$, $x \in I$, onda za neku početnu aproksimaciju $x_0 \in I$ rekurzivni niz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

teži prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$. U našem je slučaju $f(x) = x^2 - 2$ i niz aproksimacija je

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \ n = 0, 1, \ldots,$$

za neki početni x_0. Uz $x_0 = 1$, prvih nekoliko aproksimacija koje daje prethodni niz je

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \ldots$$

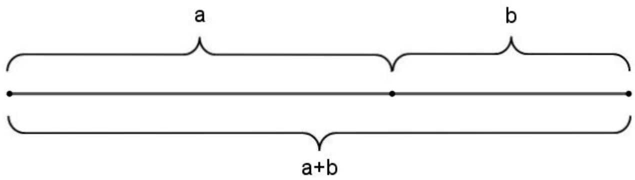
i to su upravo konvergente broja $\sqrt{2}$ ($\frac{3}{2} = \frac{p_1}{q_1}, \frac{17}{12} = \frac{p_3}{q_3}, , \frac{577}{408} = \frac{p_7}{q_7}, \frac{665857}{470832} = \frac{p_{15}}{q_{15}}, ..., x_n = \frac{p_{2^n-1}}{q_{2^n-1}}$).

Poglavlje 3

Zlatni rez (φ)

3.1 Definicija i razvoj u verižni razlomak

Zlatni rez je naziv za matematičku konstantu $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ova matematička konstanta vezana je uz geometrijski problem dijeljenja dužine u specifičnom omjeru, tzv. omjeru zlatnog reza. To je jedan od povijesno najpoznatijih problema geometrijske algebre, a pretpostavlja se da seže još iz predeuklidskog vremena. Sam naziv potječe iz 19. stoljeća.



Slika 3.1: Omjer zlatnog reza

Kažemo da je neka dužina podijeljena u *omjeru zlatnog reza* ako se duljina čitave dužine prema duljini većeg dijela odnosi kao duljina većeg dijela prema duljini manjeg dijela. Ako je dužina duljine $a+b$, pri čemu je a duljina većeg dijela, a b duljina manjeg dijela, onda omjer zlatnog reza zapisujemo kao

$$(a+b) : a = a : b.$$

Očito je

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

pa, uz $x = a/b$, zaključujemo da je traženi omjer rješenje tzv. *zlatne jednadžbe*

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rješenja prethodne jednadžbe su

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \;\text{ i }\; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.118,$$

pri čemu, očito, samo pozitivno rješenje x_1 ima geometrijski smisao. Njega označavamo s

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

i nazivamo *zlatni rez* ili *božanski omjer*.

Zlatni rez je očito iracionalan broj, također i kvadratna iracionalnost, pa na temelju teorema 1.3.1 i 1.4.4 postoji jedinstveni periodski verižni razlomak koji je jednak φ. Za razvoj u verižni razlomak koristimo algoritam (1.19) s inicijalnim vrijednostima

$$s_0 = 1,\; t_0 = 2,\; d = 5.$$

Najprije izračunamo

$$a_0 = \lfloor \varphi \rfloor = 1.$$

U prvom koraku računamo:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0 \cdot t_0 - s_0 = 1 \cdot 2 - 1 = 1, \\ t_1 &= \frac{d - s_1^2}{t_0} = \frac{5 - 1^2}{2} = 2, \\ a_1 &= \left\lfloor \frac{s_1 + \sqrt{d}}{t_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = 1. \end{aligned}$$

U drugom koraku dobivamo

$$\begin{aligned} s_2 &= a_1 \cdot t_1 - s_1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1, \\ t_2 &= \frac{d - s_2^2}{t_1} = \frac{5 - 1^2}{2} = 2, \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$ pa algoritam staje i dobivamo

$$\varphi = [a_0; \overline{a_1}] = [1; \overline{1}].$$

Dakle, zlatni rez, tj. φ, možemo zapisati u obliku beskonačnog verižnog razlomka kao

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

3.2 Veza s Fibonaccijevim brojevima

Niz (F_n) zadan početnim vrijednostima $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ te rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n \geq 2$ naziva se *Fibonaccijev niz*. Opći član niza F_n još zovemo n-ti *Fibonaccijev broj*. Rješavanjem gornje rekurzije dobiva se eksplicitna formula za F_n, tzv. *Binetova formula*, koja uključuje zlatni rez:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \ n \geq 0.$$

Prethodna formula nije jedina veza zlatnog reza i Fibonaccijevih brojeva. Naime, za konvergente broja φ vrijede sljedeće rekurzije

$$p_0 = 1, \ p_1 = 2, \ p_n = p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_0 = 1, \ q_1 = 1, \ q_n = q_{n-1} + q_{n-2},$$

za $n \geq 2$ što znači da je

$$p_n = F_{n+2}, \ q_n = F_{n+1}, \ n \geq 0.$$

Nadalje,

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Dakle, niz (F_{n+1}/F_n) je konvergentan, njegov limes je upravo zlatni rez, a omjer dva susjedna Fibonaccijeva broja predstavlja dobru racionalnu aproksimaciju od φ, odnosno prema (1.17) vrijedi

$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \varphi \right| < \frac{1}{F_n^2}.$$

No, iako su konvergente nekog iracionalnog broja njegove jako dobre aproksimacije, konstanta φ je iracionalan broj kojeg je *najteže* aproksimirati racionalnim brojem. Naime, što su parcijalni kvocijenti manji, to konvergente sporije konvergiraju, a u slučaju zlatnog reza svi parcijalni kvocijenti su najmanji mogući, tj. jedinice, što ga čini brojem kojeg je najteže aproksimirati racionalnim. To je povezano sa sljedećim tvrdnjama.

Teorem 3.2.1 (Hurwitz)**.** (*i*) *Za svaki iracionalan broj α postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \tag{3.1}$$

(*ii*) *Tvrdnja* (*i*) *ne vrijedi ukoliko se $\sqrt{5}$ zamijeni s bilo kojom konstantom $A > \sqrt{5}$.*

Dakle, Hurwitzov teorem kaže da je konstanta $\sqrt{5}$ najbolja moguća u (3.1). Konkretno, ako u (3.1) zamijenimo $\sqrt{5}$ s bilo kojom drugom konstantom $A > \sqrt{5}$ te za iracionalan broj odaberemo $\alpha = \varphi$ (zlatni rez), onda se može pokazati da postoji samo konačno mnogo racionalnih brojeva p/q, $\mathrm{nzd}(p, q) = 1$, za koje vrijedi nejednakost (3.1).

Propozicija 3.2.2. *Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} q_n^2 \left|\varphi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

gdje je p_n/q_n n-ta konvergenta broja φ.

Dokaz. Općenito za $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$, $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \ldots]$ i $\beta_i = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ može se pokazati formula

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}, \; n \geq 0.$$

Specijalno za $\alpha = \varphi$ imamo da je $\alpha_{n+1} = [1; 1, 1, \ldots] = \varphi$ te $1/\beta_{n+1} = q_n/q_{n-1} = F_{n+1}/F_n$ i stoga je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_{n+1}} = \varphi.$$

Konačno,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n + \beta_n = \varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$$

pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Poglavlje 4

Napierova konstanta (e)

Broj $e \approx 2.71828$ je važna matematička konstanta koju se može karakterizirati na više načina. Jedan od njih je kao limes niza $n \mapsto (1 + 1/n)^n$, tj.

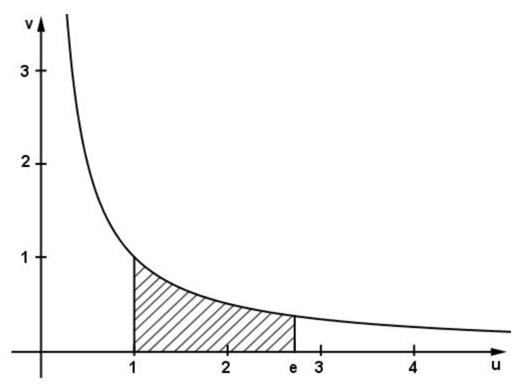
$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Zasluge za određivanje tog limesa pripisuju se Jacobu Bernoulliju (1683.g.). Taj limes možemo zapisati i kao

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Broj e može se interpretirati i geometrijski kao jedinstveno pozitivno rješenje x jednadžbe

$$\int_1^x \frac{1}{u} du = 1.$$



Slika 4.1: Površina ispod grafa funkcije $\frac{1}{u}$ na intervalu $[1, e]$ je jednaka 1

Drugim riječima, e je jedinstveni pozitivni broj veći od 1 za koji ravnina ograničena krivuljama $v = \frac{1}{u}$, $v = 0$, $u = 1$ i $u = e$ ima jediničnu površinu.

Nadalje, broj e se može karakterizirati i kao suma reda

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots .$$

Kao što postoji više karakterizacija broja e tako postoji i više naziva za tu konstantu. Najčešće ju se naziva *Napierova konstanta*, *Eulerov broj* (*Eulerova konstanta*) ili *baza prirodnog logaritma*. Napierova konstanta je naziv u čast Johna Napiera - izumitelja logaritma. Naime, logaritmi su vrlo koristan alat koji operacije množenja, dijeljenja i potenciranja svode na zbrajanje, oduzimanje i množenje što je značajno pojednostavljenje računa te su zbog toga vrlo brzo bili prihvaćeni od čitave znanstvene zajednice tog vremena. Sa ciljem pojednostavljenja algebarskih operacija, Napier je 1614. godine, izdao prvu tablicu prirodnih logaritama i time došao jako blizu otkrića konstante e. Do kraja 17. stoljeća za konstantu se rabila oznaka b, a Euler je za nju počeo koristiti oznaku e (1731. g.) što ubrzo postaje i standard. Zbog toga se broj e ponekad naziva i Eulerov broj.

Broj e je iracionalan, što je pokazao Euler. Štoviše, Hermite je pokazao da je e transcedentan broj, odnosno da ne može biti nultočka polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima.

4.1 Eulerova formula. Poopćeni verižni razlomak za e

Euler se bavio istraživanjem redova, a to ga je dovelo i do verižnih razlomaka. Naime, za Eulera kažu da je bio sjajan eksperimentalni matematičar koji se igrao s formulama sve dok ne bi dobio nešto zanimljivo. Tako je uočio da se izraz $a_0 + a_0a_1 + a_0a_1a_2 + a_0a_1a_2a_3$ može *presložiti* u poopćeni verižni razlomak

$$\cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1 + a_1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3}}}}.$$

Umjesto dokaza izložit ćemo samo prvih nekoliko koraka koji daju uvid u ideju tog preslagivanja:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_0a_1 + a_0a_1a_2 + a_0a_1a_2a_3 = a_0(a_1(a_2(a_3+1)+1)+1) \\
&= \cfrac{a_0}{\cfrac{1}{a_1(a_2(a_3+1)+1)+1}} = \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1(a_2(a_3+1)+1)}{a_1(a_2(a_3+1)+1)+1}} = \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{\cfrac{a_1(a_2(a_3+1)+1)+1}{a_2(a_3+1)+1}}} \\
&= \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2(a_3+1)}{a_2(a_3+1)+1}}} = \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{\cfrac{a_2(a_3+1)+1}{a_3+1}}}} = \cdots .
\end{aligned}
$$

Primjenom principa matematičke indukcije dobila bi se formula

$$
a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1a_2\cdots a_n = \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{\ddots}{\ddots\cfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}-\cfrac{a_n}{1+a_n}}}}}}. \tag{4.1}
$$

Sljedeći korak jest *pustiti* da n teži u beskonačno. Pretpostavimo da je $a_0 = 1$ i (a_n) niz brojeva (sasvim općenito može biti iz $\mathbb{C}$). Tada vrijedi tzv. *Eulerova formula*

$$
1+\sum_{i=1}^{\infty} a_1a_2\cdots a_i = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{1+a_3-\ddots}}}}. \tag{4.2}
$$

Prema (4.1) zaključujemo da je n-ta parcijalna suma reda s lijeve strane u (4.2) jednaka n-toj konvergenti beskonačnog verižnog razlomka s desne strane u (4.2). Nadalje, ako je dani red konvergentan, onda je konvergentan i verižni razlomak. O tome govori i tvrdnja Teorema 1.5.3.

Napomenimo da se formula (4.2) može proširiti tako da umjesto niza brojeva (a_n) gledamo niz funkcija kompleksne varijable $(f_n(z))$. U tom slučaju, ako red funkcija konvergira uniformno, onda će uniformno konvergirati i beskonačni verižni razlomak.

Sada ćemo Eulerovu formulu (4.2) primijeniti na

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots, \tag{4.3}$$

pa uz

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{1},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

dobivamo

$$e = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \frac{1}{1} - \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} - \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} - \ddots}}}}}.$$

Na prethodni verižni razlomak možemo primijeniti tzv. transformaciju ekvivalencije. Prošireni poopćeni verižni razlomak dobit ćemo tako da prethodni razlomak proširimo elementima niza

$$c_n = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ n - 1 & , n \geq 2 \end{cases}$$

pa dobivamo

$$e = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 + 1 - \cfrac{2}{3 + 1 - \cfrac{3}{4 + 1 - \ddots}}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \ddots}}}}},$$

odnosno kraće

$$0 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{-1\,|}{|\,2} + \frac{-1\,|}{|\,3} + \frac{-2\,|}{|\,4} + \frac{-3\,|}{|\,5} + \cdots . \tag{4.4}$$

Općenito, pomoću Eulerove formule (4.2) i Taylorovog reda

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

eksponencijalna funkcija se može reprezentirati pomoću sljedećeg verižnog razlomka

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \cfrac{3x}{4 + x - \ddots}}}},$$

pri čemu jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$ (a općenito i za $x \in \mathbb{C}$).

4.2 Jednostavni verižni razlomak za e

U ovom odjeljku pokazujemo da je razvoj u jednostavni verižni razlomak Napierove konstante dan s

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}.$$

Budući da je prethodni verižni razlomak jednak razlomku

$$[1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots], \tag{4.5}$$

pokazujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = e,$$

pri čemu su p_n/q_n konvergente od (4.5). Odabrali smo oblik (4.5) jer parcijalni kvocijenti čine pravilan niz

$$\begin{aligned} a_{3n} &= 1, \\ a_{3n+1} &= 2n, \\ a_{3n+2} &= 1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. S obzirom na (4.6) i rekurzivne formule za brojnike i nazivnike konvergenti (1.5) vrijede sljedeće rekurzivne formule:

$$p_{3n} = p_{3n-1} + p_{3n-2}, \; q_{3n} = q_{3n-1} + q_{3n-2}, \tag{4.7a}$$
$$p_{3n+1} = 2np_{3n} + p_{3n-1}, \; q_{3n+1} = 2nq_{3i} + q_{3n-1}, \tag{4.7b}$$
$$p_{3n+2} = p_{3n+1} + p_{3n}, \; q_{3n+2} = q_{3n+1} + q_{3n}, \tag{4.7c}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$, gdje su početne vrijednosti dane s $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$. U sljedećoj tablici dano je prvih nekoliko vrijednosti nizova (p_n) i (q_n).

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	1	0	1	1	2	1	1	4	1
p_i	1	1	2	3	8	11	19	87	106
q_i	1	0	1	1	3	4	7	32	39

Definiramo A_n, B_n i C_n kao integrale:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx. \end{aligned}$$

Propozicija 4.2.1. *Za $n \geq 0$ vrijedi:*

$$A_n = eq_{3n} - p_{3n}, \tag{4.8a}$$
$$B_n = p_{3n+1} - eq_{3n+1}, \tag{4.8b}$$
$$C_n = p_{3n+2} - eq_{3n+2}. \tag{4.8c}$$

Dokaz. S obzirom na formule za A_n, B_n i C_n navedene iznad propozicije (4.2.1), moramo provjeriti početne vrijednosti A_0, B_0 i C_0.
Dakle,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 \frac{x^0(x-1)^0}{0!}e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e-1,\\
B_0 &= \int_0^1 \frac{x^1(x-1)^0}{0!}e^x dx = \int_0^1 xe^x dx = [u = x, v' = e^x] = \int_0^1 \left(e^x x - \int e^x dx\right)\\
&= \int_0^1 (e^x x - e^x) = 1,\\
C_0 &= \int_0^1 \frac{x^0(x-1)^1}{0!}e^x dx = \int_0^1 (x-1)e^x dx = [u = x-1, v' = e^x] = \int_0^1 \left(e^x(x-1) - \int e^x dx\right)\\
&= \int_0^1 (e^x x - 2e^x) = 2-e.
\end{aligned}
$$

Preostalo nam je još dokazati sljedeće tri rekurzivne relacije

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}, \tag{4.9a}$$
$$B_n = -2nA_n + C_{n-1}, \tag{4.9b}$$
$$C_n = B_n - A_n. \tag{4.9c}$$

Kako bi dokazali (4.9a), moramo pokazati da vrijedi $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0$. Za početak deriviramo $\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x$ po pravilu derivacije umnoška:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right)' &= \left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}\right)' e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}(e^x)'\\
&= \frac{(x^n)'(x-1)^n + x^n((x-1)^n)'}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&= \frac{nx^{n-1}(x-1)^n + x^n n(x-1)^{n-1}}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&= \frac{nx^{n-1}(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n n(x-1)^{n-1}}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\
&= \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x.
\end{aligned}
$$

Sada integriramo obje strane dobivene jednakosti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right)' &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right)\\ 0 &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\ 0 &= C_{n-1} + B_{n-1} + A_n,\end{aligned}$$

čime je dokaz (4.9a) završen.

Sada na isti način dokažemo (4.9b), tj. moramo pokazati da vrijedi $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0$. Za početak deriviramo $\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x$ po pravilu derivacije umnoška:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right)' = \left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}\right)' e^x + \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}(e^x)'\\ &= \frac{(x^n)'(x-1)^{n+1} + x^n((x-1)^{n+1})'}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\\ &= \frac{nx^{n-1}(x-1)^{n+1} + x^n(n+1)(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n(x-1)}{n!}e^x\\ &= \frac{nx^{n-1}(x-1)^{n+1}}{n!}e^x + \frac{x^n(n+1)(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\ &= \frac{nx^{n-1}(x-1)^{n+1}}{n!}e^x + \frac{nx^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\\ &= \frac{nx^{n-1}(x-1)^n(x-1)}{n!}e^x + \frac{nx^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x\\ &= \frac{nx^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{nx^{n-1}(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{nx^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x\\ &= 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x.\end{aligned}$$

Sada integriramo obje strane dobivene jednakosti:

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right)'\Bigg|_0^1}_{=0} &= \int_0^1 \left(2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x\right)\\ &= \int_0^1 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x\\ &= 2n\int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - C_{n-1} + B_n,\end{aligned}$$

što daje

$$2nA_n - C_{n-1} + B_n = 0.$$

Dokaz (4.9c) je trivijalan, tj.

$$\begin{aligned}
B_n - A_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx - \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx \right) \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n - x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^n(x^{n+1} - x^n)}{n!} e^x dx \\
&= \int_0^1 \frac{(x-1)^n x^n (x-1)}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^{n+1} x^n}{n!} e^x dx = C_n.
\end{aligned}$$

Sada, pomoću principa matematičke indukcije trebamo pokazati da vrijede (4.8a) - (4.8c).

Baza indukcije: Vrijedi

$$A_0 = e - 1 = q_0 e - p_0, \; B_0 = 1 = p_1 - eq_1, \; C_0 = 2 - e = p_2 - eq_2,$$

jer je $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p_1 = 1$, $q_1 = 0$, $p_2 = 2$, $q_2 = 1$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da vrijede formule (4.8a) - (4.8c) za neki $n \in \mathbb{N}_0$.

Korak indukcije: Prema (4.9a) vrijedi

$$A_{n+1} = -B_n - C_n,$$

a primjenom pretpostavke indukcije (4.8b) i (4.8c) dobivamo

$$A_{n+1} = -(p_{3n+1} - eq_{3n+1}) - (p_{3n+2} - eq_{n+2}) = e(q_{3n+1} + q_{3n+2}) - (p_{3n+1} + p_{3n+2}).$$

Kako je $q_{3n+1} + q_{3n+2} = q_{3n+3}$ i $p_{3n+1} + p_{3n+2} = p_{3n+3}$ zbog (4.7a), slijedi

$$A_{n+1} = eq_{3(n+1)} - p_{3(n+1)}.$$

Nadalje, prema (4.9b) je

$$B_{n+1} = -2(n+1)A_{n+1} + C_n,$$

pa iz upravo dokazanog i pretpostavke indukcije (4.8c) imamo

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= -2(n+1)(eq_{3(n+1)} - p_{3(n+1)}) + (p_{3n+2} - eq_{n+2}) \\
&= (2(n+1)p_{3n+3} + p_{3n+2}) - e(2(n+1)q_{3n+3} - q_{3n+2}).
\end{aligned}$$

Primjenom (4.7b) je
$$B_{n+1} = p_{3(n+1)+1} - eq_{3(n+1)+1}.$$
Slično bi pokazali da je
$$C_{n+1} = p_{3(n+1)+2} - eq_{3(n+1)+1}.$$
Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da formule (4.8a) - (4.8c) vrijede za sve $n \in \mathbb{N}_0$. □

Teorem 4.2.2. *Vrijedi*

$$e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots].$$

Dokaz. Očito, kada n teži u beskonačnost A_n, B_n i C_n teže nuli, tj.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 0.$$

Prema Propoziciji 4.2.1 slijedi

$$\lim_{n\to\infty} eq_{3n} - p_{3n} = 0, \lim_{n\to\infty} p_{3n+1} - eq_{3n+1} = 0, \lim_{n\to\infty} p_{3n+2} - eq_{3n+2} = 0,$$

pa je stoga i
$$\lim_{n\to\infty} q_n e - p_n = 0,$$
odnosno
$$e = \lim_{n\to\infty,\, n>1} \frac{p_n}{q_n} = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots],$$
čime je dokaz završen. □

Zanimljivo je uočiti da broj e ima pravilan razvoj u beskonačni verižni razlomak, za razliku od broja π, u što ćemo se uvjeriti u nastavku rada.

Poglavlje 5

Arhimedova konstanta (π)

Posljednja, ali zasigurno najpoznatija, matematička konstanta koju ćemo obraditi u ovom radu je *Arhimedova konstanta* ili *Ludolphov broj* ili, kratko, broj π. Tijekom povijesti matematičari su nebrojeno puta pokazali izniman interes za ovu konstantu. Također, π je zasigurno najčešće korištena konstanta u matematici i prirodnim znanostima. Ima čak i svoj dan. Naime, 14. ožujka, u oznaci 03-14 (prema međunarodnom standardu ISO 8601), obilježava se tzv. Dan broja π ili π-Day.

Postoji mnogo različitih definicija, odnosno karakterizacija broja π. Prvo što nam padne na pamet, kada nam netko spomene broj π, vjerojatno je pojam kružnice ili kruga pa ćemo za početak izreći upravu tu, najpoznatiju definiciju te konstante. Dakle, π je omjer duljine opsega kružnice i njenog promjera, tj.

$$\pi = \frac{O}{2r},$$

pri čemu je O oznaka za duljinu opsega kružnice, a r oznaka za polumjer te kružnice. Opseg kružnice polumjera 1 možemo zapisati i kao duljinu luka ravninske krivulje pomoću određenog integrala, tj.

$$O = 2\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)^2}dx.$$

Također, π možemo definirati kao omjer površine kruga i kvadrata njegovog polumjera, tj.

$$\pi = \frac{P}{r^2},$$

pri čemu je P oznaka za površinu kruga, a r oznaka za polumjer tog kruga. Površinu kruga polumjera 1 možemo zapisati i pomoću određenog integrala, tj.

$$P = \pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{n^2-k^2} = 3.1415926535\ldots.$$

Kroz povijest matematike, razni narodi različito su aproksimirali broj π. Tako u Rhindovom i Moskovskom papirusu iz 19. stoljeća prije Krista vidimo da je π aproksimiran kao $3,16$. Babilonci su broj π najčešće aproksimirali s 3.

Stari Egipćani, još u predeuklidskom dobu, bavili su se problemom kvadrature kruga, odnosno problemom konstrukcije kvadrata, ravnalom i šestarom, koji ima istu površinu kao zadani krug. U rješavanju tog problema, najveći napredak dao je jedan od najznačajnijih primijenjenih matematičara i fizičara, Arhimed iz Sirakuze u 3. stoljeću prije Krista. On je dokazao da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta kojem je jedna kateta jednaka opsegu, a druga polumjeru kruga. Arhimedova konstanta dobila je ime upravo po Arhimedu, koji je upisujući i opisujući pravilni 96-erokut krugu dobio jako dobru ocjenu za broj π, tj.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Arhimed je bio svjestan činjenice da može dobiti bolju aproksimaciju broja π upisivanjem i opisivanjem n-terokuta sa što većim brojem stranica krugu.

Također, razne aproksimacije, ovisno o konstrukcijama, nalazimo u najstarijim poznatim indijskim matematičkim tekstovima Sulvasutrama iz vedskog razdoblja (1500.-800. god. pr. Kr.). Također, dosta točnu aproksimaciju za π daje i indijski matematičar Aryabhata stariji u 4./5. stoljeću koji π aproksimira s 3.14164. Osim Indijaca, Kineze je također fascinirao problem kvadrature kruga, pa je zanimljivo spomenuti kineskog matematičara Liu Huia koji je u 3.stoljeću dao procjenu za π kao 3.141014 i predložio 3.14 kao dobru aproksimaciju. Tu je procjenu dobio metodom sličnom Arhimedovoj.

Broj π je dobio oznaku po grčkom slovu koje odgovara latiničnom slovu p, tj. prvom slovu engleske riječi za opseg kružnice - *periphery* kojeg je 1706. godine uveo William Jones za opseg kružnice promjera 1.

Dokaz da je broj π iracionalan broj dao je 1761. godine švicarski matematičar, fizičar, filozof i astrolog Johann Heinrich Lambert. On je pokazao da su za racionalan broj $x \neq 0$ brojevi e^x i $\operatorname{tg} x$ iracionalni iz čega slijedi da je broj π iracionalan broj jer je $tg\frac{\pi}{4} = 1$, tj. racionalan broj. Također, Lambert je postavio hipotezu da je π i transcedentan broj, tj. da ne može biti nultočka polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima, što je 1882. godine dokazao njemački matematičar Carl Louis Ferdinand von Lindemann. Dokaz transcedentnosti broja π ujedno povlači i nemogućnost konstrukcije kvadrature kruga.

Broj π ima još jedno ime, a to je Ludolphov broj po njemačkom matematičaru Ludolphu van Ceulenu koji je posvetio velik dio svog života izračunavanju broja π i uspio izračunati π na 35 decimala.

Prva zaista zanimljiva formula za izračunavanje decimala broja π je fomula engleskog matematičara Johna Machina:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Važno je spomenuti da je Machin koristeći tu formulu 1706. godine prvi točno izračunao prvih 100 decimala broja π.

Indijski matematičar Madhava je otkrio formulu:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

koju su nezavisno o njemu otkrili James Gregory i Gottfried Leibniz.

Zanimljivo je spomenuti i Eulerovu poznatu formulu za iračunavanje broja π:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Viète je u 16. stoljeću dao prvu poznatu analitičku interpretaciju broja π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots,$$

a Wallis je u 17. stoljeću izveo formulu:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots.$$

5.1 Poopćeni verižni razlomak za π

Kako bi pronašli razvoj broja π u verižni razlomak koristit ćemo Taylorov razvoj u red inverzne trigonometrijske funkcije tangens:

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\
&= x + x\left(\frac{-x^2}{3}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right)\left(\frac{-5x^2}{7}\right) + \dots,
\end{aligned}$$

za $|x| \leq 1$.

Sada, kako bi $\tan^{-1} x$ zapisali u obliku beskonačnog verižnog razlomka primijenit ćemo Eulerovu formulu (4.2) i uz

$$a_0 = x,\ a_1 = \frac{-x^2}{3},\ a_2 = \frac{-3x^2}{5},\ a_3 = \frac{-5x^2}{7}, \dots$$

dobivamo

$$\tan^{-1} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{-x^2}{3}}{1 + \frac{-x^2}{3} - \cfrac{\frac{-3x^2}{5}}{1 + \frac{-3x^2}{5} - \cfrac{\frac{-5x^2}{7}}{1 + \frac{-5x^2}{7} - \ddots}}}}.$$

Na dobiveni beskonačni verižni razlomak možemo primijeniti tzv. transformaciju ekvivalencije. Prošireni poopćeni verižni razlomak dobit ćemo tako da prethodni razlomak proširimo elementima niza

$$c_n = 2n - 1,\ n \geq 1$$

pa dobivamo

$$\tan^{-1} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{(3x)^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{(5x)^2}{7 - 5x^2 + \ddots}}}}. \tag{5.1}$$

Sada $\tan^{-1} x$ u obliku beskonačnog verižnog razlomka možemo iskoristiti za razvoj broja π u verižni razlomak.
Znamo da vrijedi

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4},$$

dakle π možemo izraziti kao

$$\pi = 4\tan^{-1}(1).$$

Iz (5.1) i $x = 1$ slijedi

$$\pi = 4 \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{3 - 1^2 + \cfrac{(3 \cdot 1)^2}{5 - 3 \cdot 1^2 + \cfrac{(5 \cdot 1)^2}{7 - 5 \cdot 1^2 + \ddots}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}.$$

Time smo dobili poopćeni verižni razlomak broja π kojeg je u 17. stoljeću otkrio William Brouncker, a kasnije ga je dokazao Euler.

Ovo je samo jedan od oblika verižnog razlomka broja π koji konvergira jako sporo. Zanimljivo je usporediti ga s nekim ostalim oblicima pa u nastavku navodimo još neke oblike beskonačnog verižnog razlomka broja π.

Broj π u obliku verižnog razlomka prikazao je i indijski astronom i matematičar Nilakantha Somayaji kao

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \ddots}}},$$

ali i dalje je to beskonačni verižni razlomak koji konvergira jako sporo.

S druge strane, oblik

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \ddots}}}}$$

konvergira nešto brže od prethodna dva, ali i dalje jako sporo.

U uvodnom dijelu smo već spomenuli matematičara Johna Machina koji je u 18. stoljeću ponudio veoma zanimljivu formulu za izračunavanje decimala broja π. Pomoću njegove formule π možemo zapisati kao

$$\pi = 16 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Sada iz (5.1) slijedi

$$\pi = \cfrac{16}{u + \cfrac{1^2}{3u + \cfrac{2^2}{5u + \cfrac{3^2}{7u + \ddots}}}} - \cfrac{4}{v + \cfrac{1^2}{3v + \cfrac{2^2}{5v + \cfrac{3^2}{7v + \ddots}}}},$$

pri čemu je $u = 5$, a $v = 239$. Zanimljivo je napomenuti da Machinov oblik broja π konvergira brže od svih do sad nabrojanih.

5.2 Jednostavni verižni razlomak za π

Jednostavni verižni razlomak za π dan je s

$$[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, \ldots].$$

Među prvih 20 kvocijenata ne može se uočiti nikakva pravilnost za razliku od jednostavnih verižnih razlomaka konstanti iz prethodnih poglavlja ($\sqrt{2}$, φ, e). Naravno, prvih dvadesetak parcijalnih kvocijenata nije dovoljno da bi se donio takav zaključak, no intrigantno je da nikakva pravilnost nije uočena niti u nizu od 15 milijardi kvocijenata koliko ih je do sada poznato (prema [14]). No, i te nepravilnosti intrigiraju matematičare. Tako se bilježi na kojoj se poziciji prvi puta pojavio neki prirodan broj. U sljedećoj tablici možemo vidjeti podatke za prvih deset prirodnih brojeva:

a_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	3	8	0	29	39	31	1	43	129	99

Najmanji prirodni brojevi koji se ne pojavljuju među prvih $15 \cdot 10^9$ kvocijenata su $49004, 50471, 53486, 56315, \ldots$. Među kvocijentima mogu se naći i vrlo veliki brojevi, tako kvocijent $a_i = 878\,783\,625$ ima 9 znamenki i nalazi se na poziciji $i = 11\,504\,930$.

Primjećujemo da već treća konvergenta, tj. $s_3 = [3; 7, 15, 1] = \frac{355}{113}$ ima jako dobru aproksimaciju s točnih 6 decimala. Tu iznimno dobru aproksimaciju broja π prvi je otkrio kineski astronom i matematičar Tsu Chu'ng-Chih u 5. stoljeću.

Za računanje parcijalnih kvocijenata verižnog razlomka možemo koristiti aproksimaciju broja π pomoću decimalnog zapisa. Tako ako π aproksimiramo s točnošću na 10 decimala,

$$\pi \approx 3.1415926536$$

dobit ćemo verižni razlomak duljine 12

$$3.1415926536 = [\underline{3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1}, 4, 1, 1, 1],$$

no točnih je samo prvih 8 podcrtanih konvergenti. Postoje algoritmi koji za razvoj u jednostavni verižni razlomak broja π ne koriste decimalni zapis (na primjer [10]).

Poglavlje 6

Tablice

U prethodnim poglavljima opisali smo razvoje u verižne razlomke nekih od najpoznatijih matematičkih konstanti ($\sqrt{2}$, φ, e, π). Ovdje ćemo dati pregled tablica koje sadrže racionalne aproksimacije tih konstanti pomoću konvergenti verižnih razlomaka te njihove apsolutne pogreške.

Broj $\sqrt{2}$

n	$\frac{p_n}{q_n}$	$\lvert\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\rvert$
5	$\frac{41}{29}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$
10	$\frac{3363}{2378}$	$6.25 \cdot 10^{-8}$
100	$\frac{94741125149636933417873079920900017937}{66992092050551637663438906713182313772}$	$7.88 \cdot 10^{-77}$

Tablica 6.1: Aproksimacije $\sqrt{2}$ pomoću konvergenti v.r. $[1; \overline{2}]$

Jednostavne verižne razlomke smo računali pomoću online matematičkog softvera Wolfram Alpha na `https://www.wolframalpha.com/`. Na primjer, stotu konvergentu broja $\sqrt{2}$ dobili smo pomoću naredbe:

`Convergents[N[Sqrt[2], 500], 100][[100]]`,

a pogrešku aproksimacije pomoću

`Abs[N[Sqrt[2],500]- Convergents[N[Sqrt[2], 500], 100][[100]]]`.

Pritom smo morali pripaziti da radimo s dovoljno velikom preciznošću za što se koristi funkcija `N[`*expr*, *n*`]` koja izraz računa s preciznošću od n decimalnih mjesta.

Broj φ

n	$\frac{p_n}{q_n}$	$\lvert\frac{p_n}{q_n} - \varphi\rvert$
5	$\frac{8}{5}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
10	$\frac{89}{55}$	$1.48 \cdot 10^{-4}$
100	$\frac{573147844013817084101}{354224848179261915075}$	$3.56 \cdot 10^{-42}$

Tablica 6.2: Aproksimacije φ pomoću konvergenti v.r. $[1; \overline{1}]$

Broj e

n	$\frac{A_n}{B_n}$	$\lvert\frac{A_n}{B_n} - e\rvert$
5	$\frac{65}{24}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$
10	$\frac{98641}{36288}$	$3 \cdot 10^{-7}$
100	$\frac{17108694450159121769088435265350275556434473207872677790968982484 31\cdots499}{116657769304930190852124048570333375613394960330477026835741204869\cdots000}$	$4.4 \cdot 10^{-16}$

Tablica 6.3: Aproksimacije e pomoću konvergenti v.r. $0 + \frac{1|}{|1} + \frac{-1|}{|2} + \frac{-1|}{|3} + \frac{-2|}{|4} + \frac{-3|}{|5} + \cdots$

Brojnik i nazivnik u 100-toj konvergenciji imaju 155 znamenki.

n	$\frac{p_n}{q_n}$	$\lvert\frac{p_n}{q_n} - e\rvert$
5	$\frac{19}{7}$	$3.996 \cdot 10^{-3}$
10	$\frac{1457}{536}$	$1.75 \cdot 10^{-6}$
100	$\frac{6963524437876961749120273824619538346438023188214475670667}{2561737478789858711161539537921323010415623148113041714756}$	$7.62 \cdot 10^{-116}$

Tablica 6.4: Aproksimacije e pomoću konvergenti v.r. $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$

Broj π

n	$\frac{A_n}{B_n}$	$\lvert\frac{A_n}{B_n} - \pi\rvert$
5	$\frac{1052}{315}$	$2 \cdot 10^{-1}$
10	$\frac{44257352}{14549535}$	$1 \cdot 10^{-1}$
100	$\frac{8252079759413970386664454687621174435983101115012912631997769614579677862845786070667088}{2635106162757236442495826303084698495565581115509040892412867358728390766099042109898375}$	$1 \cdot 10^{-2}$

Tablica 6.5: Aproksimacije π pomoću konvergenti
v.r. $0 + \frac{4|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \cdots$

Iz prethodne tablice mogli bismo pomisliti da je riječ o grešci. No, ovdje je zapravo riječ o vrlo sporoj konvergenciji verižnog razlomka $0 + \frac{4|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \cdots$. Za postizanje točnosti na n decimala potrebno je otprilike $3 \cdot 10^n$ članova verižnog razlomka.

n	$\frac{p_n}{q_n}$	$\lvert\frac{p_n}{q_n} - \pi\rvert$
5	$\frac{103993}{33102}$	$5.78 \cdot 10^{-10}$
10	$\frac{1146408}{364913}$	$1.61 \cdot 10^{-12}$
100	$\frac{4170888101980193551139105407396069754167439670144501}{1327634917026642108692848192776111345311909093498260}$	$2.48 \cdot 10^{-103}$

Tablica 6.6: Aproksimacije π pomoću konvergenti
v.r. $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots]$

Kao što smo i očekivali, računi koji smo proveli idu u prilog činjenici da su konvergente jednostavnog verižnog razlomka najbolje racionalne aproksimacije.

Bibliografija

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010.

[2] F. M. Brückler, *Povijest matematike I*, izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2014.

[3] H. Cohn, *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e*, The American Mathematical Monthly, Vol.113, No.1, January 2006.

[4] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[5] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Cambridge University Press, 2003.

[6] Z. Franušić, T. Pejković, *Elementarna teorija brojeva - Diofantske jednadžbe II*, nastavni materijali, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/etb/materijali/predavanje%208.pdf`

[7] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf`

[8] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, The University of Chicago Press, 3rd edition, 1964.

[9] L. J. Lange, *An Elegant Continued Fraction for π*, The American Mathematical Monthly, Vol.106, No.5, May 1999.

[10] P. Shiu, *Computation of continued fractions without input values*, Math. Comp., Vol. 64, No. 211, 1307–1317, 1995.

[11] H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, Chelsea Publishing Company, Bronx N.Y, 1948.

[12] *Euler's continued fraction formula*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_continued_fraction_formula#The_original_formula`

[13] *Generalized continued fraction*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_continued_fraction

[14] *Pi Continued Fraction*,
https://mathworld.wolfram.com/PiContinuedFraction.html

Sažetak

Činjenica je da se neki brojevi pojavljuju u matematici i njezinim primjenama češće od ostalih brojeva. Ti brojevi su matematičke konstante. U ovom diplomskom radu bavimo se s četiri najpoznatije konstante: Pitagorinom konstantom ($\sqrt{2}$), zlatnim rezom (φ), Napierovom konstantom ili Eulerovim brojem (e) i Arhimedom konstantom ili Ludolphovim brojem (π) i prikazujemo ih u obliku verižnih razlomaka. Verižni razlomci koristan su alat za pronalaženje racionalnih aproksimacija iracionalnih brojeva.

Summary

The fact is that some numbers arise throughout mathematics and its application areas more frequently than the others. These numbers are mathematical constants. In this thesis, we deal with the four most famous constants: Pythagoras' constant ($\sqrt{2}$), the golden ratio (φ), Napier's constant or Euler' s number (e) and Archimedes' constant or Ludolph's number (π), and give its continued fraction expansions. Continued fractions are a useful tool for finding rational approximations to irrational numbers.

Životopis

Rođena sam 27. ožujka 1994. godine u Čakovcu. Osnovnu školu pohađala sam u Šenkovcu u Međimurskoj županiji, a potom sam u Gimnaziji Josipa Slavenskog Čakovec upisala opću gimnaziju. Nakon srednjoškolskog obrazovanja upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika - smjer nastavnički. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam i diplomski sveučilišni studij Matematika - smjer nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.