

Kvantni aspekti crnih rupa

Hammoud, Jamal

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:885370>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Jamal Hammoud

KVANTNI ASPEKTI CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Jamal Hammoud

Diplomski rad

Kvantni aspekti crnih rupa

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc., Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2020.

Zahvaljujem se mentoru Mari Cvitanu na strpljenju pri suradnji te brojnim i detaljnim ispravcima i savjetima.

Sažetak

Cilj rada je istražiti modernu literaturu vezanu uz kvantne aspekte crnih rupa, paradoks informacije i problem vatrozida. Terminologija potrebna za razumijevanje argumenata se uvodi u prva dva poglavlja rada, a zatim se u trećem i četvrtom poglavlju izlažu formulacija paradoksa informacije crnih rupa, popratnih problema te se obrađuju neka standardna rješenja.

Prvo poglavlje uvodi koncepte iz kvantne statističke fizike te teorije informacije, kao što su matrice gustoće te definicije entropije, isprepletenosti i informacije. U drugom se poglavlju izlažu termodinamika i evaporacija crnih rupa te određeni aspekti kvantne teorije polja na zakrivljenim pozadinama. To pokriva osnovne matematičke i fizikalne alate, uz aspekte opće teorije relativnosti koji su uvedeni u dodatku B, koji su potrebni za razumijevanje ostatka rada.

Sljedeća dva poglavlja pokrivaju dvije formulacije paradoksa informacija crnih rupa: elementarnu i modernu, te objašnjavaju moguće načine da se paradoks riješi. U tim se poglavljima crne rupe razmatraju kao kvantno mehanički sustavi te se argumentiraju svojstva njihove evaporacije i Hawkingovog zračenja. Detaljno se objašnjavaju ideje komplementarnosti crnih rupa, AMPS argumenta te problema kloniranja. Najviše se fokusira na posljedice AMPS argumenta, te se objašnjava kako je popularno mišljenje u znanstvenoj zajednici sredinom prošlog desetljeća završilo na ideji da se na horizontu crne rupe nalazi takozvani *vatrozid*.

U zadnjem se poglavlju opisuju još neki zahtjevniji pristupi, kao što su strunaste crne rupe te ER=EPR, ali u značajno manje detalja.

Ključne riječi: Opća teorija relativnosti, kvantna mehanika, statistička fizika, termodinamika crnih rupa, Hawkingovo zračenje, kvantna teorija polja na zakrivljenim pozadinama, entropija, informacija, Pageovo vrijeme, paradoks informacije, neunitarnost, komplementarnost crnih rupa, problem vatrozida, strunaste crne rupe, ER=EPR.

Quantum aspects of black holes

Abstract

The purpose of this work is to explore the modern literature relating to the quantum aspects of black holes, the information paradox and firewalls. The terminology necessary to understand the rest of the work is introduced in the first two sections. The following two sections then present the information paradox itself, as well as a few related problems and their possible resolutions.

The first section presents aspects of quantum statistical mechanics and information theory, such as density matrices as well as definitions of entropy, entanglement and information.

The second section introduces black hole thermodynamics and evaporation, as well as some aspects of quantum field theory on curved backgrounds.

This covers the mathematical and physical prerequisites, alongside appendix B which goes over the general relativity relevant to the work.

The following two sections present two formulations of the information paradox: the elementary and the modern approach, as well as some of the numerous ways in which one can attempt to resolve the paradox. In those sections, black holes are considered as quantum mechanical systems and features of their evaporation and Hawking radiation are explored. Black hole complementarity, the cloning problem and the AMPS paradox are covered in great detail. The AMPS paradox is thoroughly explored and explained why, during the last decade, the idea of firewalls seems to have prevailed as the most popular solution to the AMPS paradox.

The last section mentions a few of the more advanced approaches, such as fuzzballs and ER=EPR, but in far less detail.

Keywords: General theory of relativity, quantum mechanics, statistical mechanics, black hole thermodynamics, Hawking radiation, quantum field theory on curved spacetimes, entropy, information, information paradox, non unitarity, black hole complementarity, the firewall argument, fuzzballs, ER=EPR.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Statistička fizika, entropija i informacija	2
2.1	Matrica gustoće	2
2.1.1	Zapis matrice gustoće	2
2.1.2	Osnovna svojstva	4
2.1.3	Čista i miješana stanja u zapisu operatora gustoće	4
2.1.4	Isprepletena stanja	5
2.1.5	Parcijalni trag i podsustavi	7
2.2	von Neumannova entropija	9
2.3	Entropija isprepletenosti	11
2.3.1	Entropija isprepletenosti	12
2.3.2	Veza s termodinamičkom entropijom	15
2.3.3	Dodatna svojstva von Neumannove entropije	16
2.3.4	Informacija	18
3	Termodinamika crnih rupa	24
3.1	Zakoni mehanike crnih rupa i veza s termodinamikom	24
3.1.1	Četiri zakona mehanike crnih rupa	24
3.1.2	Generalizirani drugi zakon termodinamike	25
3.2	Hawkingovo zračenje	26
3.2.1	Pregled potpoglavlja	26
3.2.2	Kvantna teorija polja u zakrivljenom prostorvremenu, ukratko	29
3.2.3	Kratak opis izvoda Hawkingovog zračenja	36
3.2.4	Popratni rezultati Hawkingovog izvoda; vakuumi i matrica gustoće	41
3.2.5	Evaporacija crne rupe	44
3.3	Holografaska i kovarijantna ograničenja entropije	45
4	Problem informacije crnih rupa - 1. dio: Osnovna formulacija	47
4.1	Unutrašnjost crne rupe mora biti dobro opisana Hilbertovim prostorom	48
4.2	Prihvatanje gubitka informacije	50
4.3	Stabilizacija crne rupe na Planckovoj skali i stabilni ostaci	51
4.4	Izbacivanje informacije pred kraj života crne rupe	52

4.5	Male korekcije Hawkingovog zračenja	57
4.5.1	Ocjena veličine korekcija Hawkingovog spektra, pomoćni teorem	58
4.5.2	Ocjena veličine korekcija Hawkingovog spektra, primjena na Hawkingov spektar	62
4.5.3	Pageovo vrijeme	65
4.5.4	Zaključak	69
5	Problem informacije crnih rupa - 2. dio, moderna formulacija i vatrozid	70
5.1	Komplementarnost crnih rupa i problem kloniranja	71
5.1.1	Kloniranje u prostorvremenu crnih rupa	72
5.1.2	Postava komplementarnosti crnih rupa	77
5.1.3	Tvrdnja komplementarnosti crnih rupa	80
5.2	Argument za vatrozide i AMPS paradoks	86
5.2.1	Početa postava AMPS argumenta i preliminarni pomoćni re- zultat	87
5.2.2	FIDO i FREFO promatrači; rekonstrukcija maksimalne ispreple- tenosti Hawkingovog zračenja	93
5.2.3	Maksimalna isprepletenost Hawkingovog para na horizontu i pojava vatrozida	95
5.2.4	Monogamija isprepletenosti primijenjena na prethodna dva za- ključka	97
5.2.5	Pojednostavljen AMPS argument; paradoks jake subaditivnosti .	98
5.2.6	Zaključak AMPS argumenta	99
5.2.7	Prihvate li se vatrozidi, što s komplementarnosti?	100
6	Ostala rješenja problema informacije crnih rupa, ukratko	101
6.1	Mikrostanja crne rupe, strunaste crne rupe (eng. <i>fuzzballs</i>)	102
6.2	ER=EPR	104
7	Završni komentari	105
7.1	Eksperimentalna testiranja	105
7.2	Zaključak	106
	Dodaci	108

A	Notacijske konvencije	108
B	Pozadina iz matematike i opće teorije relativnosti	108
B.1	Osnovne definicije iz opće teorije relativnosti	109
B.1.1	Izometrije i Killingovi vektori	109
B.1.2	Asimptotski ravno prostorvrijeme; beskonačnosti prostorvremena	109
B.1.3	Horizont prostorvremena	110
B.2	Vrste crnih rupa i teoremi o jedinstvenosti	111
B.3	FIDO i FREFO promatrači; Rindler prostorvrijeme; površinska gravitacija; maksimalna ekstenzija prostorvremena	114
B.3.1	Površinska gravitacija i FIDO promatrači	114
B.3.2	FREFO promatrači	118
B.3.3	Rindler prostorvrijeme	121
B.3.4	Rindler prostorvrijeme kao limes područja u blizini horizonta .	124
B.3.5	Koordinatni sustavi i maksimalna ekstenzija Schwarzschildovog prostorvremena	126
B.4	Carter-Penrose konformni dijagrami	128
C	Usrednjene sume koeficijenata po Haar mikrokanonskoj mjeri	130
	Literatura	133

1 Uvod

Prva dva poglavlja se sastoje od uvođenja alata koji će biti potrebni za razumjeti formulaciju paradoksa informacija. Uglavnom se uvode standardni pojmovi i rezultati iz statističke fizike i kvantne teorije polja na zakrivljenim pozadinama, formulirani na način koji će biti koristan u paradoksu informacija. Bitno je uvesti kvantnu fiziku u kontekstu opće teorije relativnosti jer paradoks u neku ruku proizlazi iz prividne nesloge između tih teorija.

Ključan zaključak prva dva poglavlja je da se pojam *informacije* može dobro definirati za bilo koji sustav koji je opisan kvantnim stanjem, te da crne rupe u procesu evaporacije (kompletnog nestajanja) emitiraju *Hawkingovo zračenje* kvantnih čestica te da stoga moraju bar u nekoj mjeri biti adekvatno opisane kvantnom mehanikom.

Sadržaj paradoksa se po prvi put formulira u poglavlju 4, gdje se tvrdi da naizgled vrijede dvije nesuglasne tvrdnje:

1. Kvantno mehanički sustav crne rupe mora evoluirati unitarno. Budući da je počeo u čistom stanju, mora i završiti u čistom stanju, ako kvantna mehanika vrijedi.
2. Kad crna rupa evaporira, preostaje samo Hawkingovo zračenje koje ima termalan spektar i stoga ne može nositi informaciju.

Prva tvrdi da konačno stanje evaporacije mora biti čisto stanje (ono koje nosi maksimalnu informaciju) Hawkingovog zračenja, a druga tvrdi da je baš suprotno slučaj - da konačno stanje ne nosi informaciju uopće.

Iz ovog razmatranja je jasno da je rješenje problema netrivialno - ili treba odbaciti kvantnu mehaniku ili treba pronaći grešku u općenitom izvodu Hawkingovog zračenja.

Do kraja poglavlja 4 se istražuju ove opcije, kao i neke alternative, te se priprema za modernu formulaciju paradoksa informacija u poglavlju koje slijedi.

Poglavlje 5 sadrži modernu formulaciju paradoksa te pregled povijesnog toka nekih od predloženih rješenja.

Moderna formulacija eksplicitno iznosi pretpostavke paradoksa informacije te argumentira kako bi odbacivanje jedne od njih moglo riješiti problem informacije, bar u slučaju da ne nastanu nove komplikacije. Zatim se prezentira jedna od prvih popularnih ideja "rješavanja" paradoksa putem *komplementarnosti crnih rupa* [46], ideje da

ako se promatraju samo fizikalno mogući promatrači (dakle ne oni koji putuju brže od svjetlosti) paradoksa zapravo ni nema. Zatim se objašnjava *AMPS argument* [50] koji proturječi komplementarnosti i pokazuje da ona nije konzistentna te sugerira da postoji takozvani *vatrozid*, barijera visoke temperature koja se pojavljuje na horizontu crne rupe i koja uništava svakoga tko pokušava ući unutra.

U konačnici, u poglavlju 6 se zaključuje da unatoč brojnim pokušajima, definitivnog rješenja još uvijek nema te se u znanstvenoj zajednici još uvijek vrlo aktivno pokušavaju pronaći novi pristupi rješavanju paradoksa, uglavnom modernijim pristupima poput teorije strune ili AdS/CFTa, neki od kojih se vrlo kratko i opisuju.

Dodatak B sadrži parcijalnu pozadinu opće teorije relativnosti, koja je također preduvjet za razumijevanje formulacije paradoksa. Spominju se i neke elementarne motivacije za postojanje paradoksa.

2 Statistička fizika, entropija i informacija

U ovom ću poglavlju uvesti relevantne pojmove iz statističke fizike i termodinamike potrebne za razmatranja crnih rupa. Ovo poglavlje koristi rezultate iz apendiksa B.

Pojmovi opisani u ovom poglavlju: *matrica gustoće i svojstva, definicija entropije, von Neumannova entropija i primjeri, entropija isprepletenosti, informacija*

2.1 Matrica gustoće

Ovo će poglavlje uglavnom sadržavati rezultate i interpretacije. Uglavnom se prati: [17], gdje se može pronaći više detalja o izvodima.

2.1.1 Zapis matrice gustoće

Za opise statističkih sustava o kojim ne postoji potpuna informacija, u kvantnoj mehanici se koriste matrice gustoće. Za potrebe ovog rada, samo ćemo ponoviti osnovna svojstva matrica gustoće.

Počnimo s dva sustava A i B, koji su u prošlosti interagirali, a sada su razdvojeni. Oni su zajedno opisani standardnim čistim kvantno mehaničkim stanjem:

$$\Psi(\alpha, \beta) \quad (2.1)$$

gdje su α i β potpuni skupovi komutirajućih opservabli za sustave A i B. Operator gustoće se onda definira kao:

$$\rho = |\Psi(\alpha, \beta)\rangle \langle \Psi(\alpha', \beta')| \quad (2.2)$$

ili zapisano u potpunim ortonormalnim bazama: $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} (|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle) (\langle \alpha_k| \otimes \langle \beta_l|) \\ &= \sum_{mn} \rho_{mn} |\gamma_m\rangle \langle \gamma_n| \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdje su $|\gamma\rangle$ stanja definirana kao skup svih parova $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$, a m i n su združeni indeksi (ij) i (kl) .

U (2.3), komponente ρ_{mn} se nazivaju "matrica gustoće", a operator s lijeve strane jednakosti je "operator gustoće". "Matrica" je ovisna o bazi u kojoj se reprezentira, a operator nije, ali distinkcija između tih pojmova neće biti bitna za potrebe ovog rada pa ih od sad nadalje koristim kao da znače istu stvar.

Matrica gustoće se može zapisati u obliku koji je posebno prigodan za interpretaciju. Kako se radi o hermitskoj matrici/operatoru (po definiciji), on/-a se može i dijagonalizirati, što daje:

$$\rho = \sum P_i |i\rangle \langle i| \quad (2.4)$$

Interpretacija realnih svojstvenih vrijednosti P_i u jednadžbi (2.4) je vjerojatnost da se sustav nađe u stanju i .

Ovako definiran operator očigledno sadrži potpunu informaciju o cijelom sustavu, baš kao i Ψ , i računi se s njim mogu raditi sasvim analogno kao i s valnom funkcijom.

2.1.2 Osnovna svojstva

Osnovna svojstva operatora gustoće zapisanog kao u izrazu (2.4) su sljedeća:

1. Baza vektora $|i\rangle$ je potpuna i ortonormalna.
2. ρ je hermitski operator $\sim P_i \geq 0$
3. $\text{Tr } \rho = 1 \sim \sum_i P_i = 1$
4. Očekivana vrijednost operatora O se za operator gustoće računa pomoću:

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O) = \text{Tr}(|\Psi\rangle \langle \Psi| O) = \langle \Psi | O | \Psi \rangle \quad (2.5)$$

ili u ortonormalnoj bazi

$$\langle O \rangle = \text{Tr} \left(\sum_i P_i |i\rangle \langle i| O \right) = \sum_i P_i \langle i | O | i \rangle \quad (2.6)$$

5. Jednadžba evolucije operatora gustoće u Schrödingerovoj slici glasi:

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (2.7)$$

gdje je H Hamiltonijan sustava.

Ova svojstva definiraju kako se radi kvantna mehanika, kad se dani sustav opisuje operatorom gustoće radije nego valnim funkcijama.

Za sada sve izgleda analogno opisu valnim funkcijama, samo s malo (vizualno) drugačijim pravilima. Prava korist ovakvog pristupa se vidi tek kad postane jasno da operatori gustoće mogu opisivati sustave koje valne funkcije ne mogu – miješana stanja.

2.1.3 Čista i miješana stanja u zapisu operatora gustoće

Operatori gustoće mogu dati adekvatan opis veće klase kvantnih sustava od valne funkcije; konkretno, mogu opisati sustave za koje nije sigurno u kojem su (čistom) kvantnom stanju.

Operator gustoće se može u potpunosti zadati u bazi, kao u (2.4), tako da se zadaju vjerojatnosti P_i za neku bazu valnih funkcija; dakle bez da se počne od stanja Ψ . Tako zadan operator gustoće se generalno *ne može* zapisati u obliku: $\Psi\Psi^*$ i stoga generalno matrice gustoće opisuju veću klasu sustava od valnih funkcija - specifično, osim sustava s određenom valnom funkcijom Ψ , opisuju i sustave za koje nije sigurno

koja im je točno valna funkcija. Takvi se sustavi onda eksplicitno zapisuju izrazima poput (2.4), gdje se $\langle i|$ uzima kao vektor dualan vektoru $|i\rangle$. Iz ovoga je jasno da je opis kvantne mehanike pomoću matrica gustoće dobro prilagođen statističkoj fizici, jer se distribucija vjerojatnost može eksplicitno ugraditi u opis putem svojstvenih vrijednosti P_i .

Kriterij koji razlikuje čista od miješanih stanja je sljedeći:

Definicija 2.1. Kaže se da je sustav zadan matricom gustoće ρ u *čistom* stanju kada se njegova matrica gustoće može rastaviti na oblik:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.8)$$

U suprotnom, kaže se da je sustav u *miješanom* stanju.

Iako je gornji kriterij službena definicija, on se može izreći u operativnijem formatu. Matrica gustoće ρ opisuje čisto stanje ako vrijedi:

$$\rho^2 = \rho \quad (2.9)$$

tj. djelujući tragom: $\text{Tr } \rho^2 = 1$. Ovaj je kriterij ekvivalentan pitanju postoji li izbor baze $|i\rangle$ tako da se koordinatna reprezentacija operatora gustoće (2.4) može svesti na oblik: $P_i = \delta_{ik}$; tj. da se baza može rotirati tako da je jedan od $|i\rangle$ -eva točno čisto stanje $|\Psi\rangle$ koje treba opisati.

2.1.4 Isprepletana stanja

Kvantna stanja mogu biti *isprepletana*, što riječima znači da postoje podsustavi koji interagiraju, tj. između kojih postoje kvantne korelacije. Koncept isprepletenosti je povezan s miješanim stanjima (i u biti je uzrok zašto ona i postoje), kao što će se objasniti u tekstu koji slijedi.

Isprepletenost se može definirati na sljedeći način:

Definicija 2.2. Definicija isprepletenog stanja

Recimo da imamo sustav AB , koji je opisan čistim stanjem $|\Psi\rangle$.

Ako se valna funkcija tog sustava ne može zapisati u obliku:

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B \quad (2.10)$$

kažemo da je stanje $|\Psi\rangle$ isprepleteno stanje, tj. da su podsustavi A i B isprepleteni.

Primjer isprepletenog stanja su recimo stanja singleta ili tripleta dva spina:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) \quad (2.11)$$

Potpuno je jasno da je ovo stanje kompletno dobro opisano čistim stanjem $|\psi\rangle$ i da nema potrebe za matricom gustoće.

Razlog zašto su isprepletenost i miješanost stanja ipak povezani je jer podsustavi A ili B zasebno nemaju adekvatne opise pomoću valnih funkcija, već se mogu opisati samo miješanim stanjima.

Dakle, koncizno rečeno, veza između pojmova isprepletenosti i miješanosti je dana sljedećom tvrdnjom: *Općeniti podsustav sustava opisanog čistim isprepletenim stanjem će biti opisan miješanim stanjem.* Tu vrijedi istaknuti početak tvrdnje: *općeniti podsustavi.* Ako se sustav odabere na poseban način (recimo ako postoji čestica koja nikako ne može interagirati s ostatkom sustava), u nekim je slučajevima moguće da i podsustav bude u čistom stanju, ali to nije uobičajena situacija.

Intuitivni razlog zašto je to tako je jer je dio "informacije" o stanju $|\Psi\rangle$ pospremljen u korelacijama između podsustava A i B . Drugačije rečeno, promatramo li A individualno, mi zapravo promatramo neizolirani sustav, za koji ishodi eksperimenata ovise o tome što se događa u B . U tom smislu mi očito nemamo potpuno valjan opis stanja A , ako istovremeno ne pratimo i stanje B . Stoga ne možemo biti apsolutno sigurni u opis A te trebamo posegnuti za statističkim opisom, tj. matricom gustoće. Konkretna primjena ovog razmatranja na statističku fiziku bi bila da se za sustav B uzme "okolina" našeg sustava, s kojom sustav A , koji nam je od interesa, ima iznimno složenu isprepletenost. Tada ga nikako ne možemo opisati čistim stanjem, jer je informacija o čistoći isprepletena s nepratljivo kompleksnom okolinom, i prisiljeni smo koristiti matricu gustoće, tj. statistički opis.

Nalaže se pitanje: Kako se eksplicitno dobije opis nekog podsustava A , ako imamo ukupno čisto stanje $|\Psi\rangle$. To se radi uzimanjem *parcijalnog traga* operatora gustoće $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ po potprostoru B i biti će opisano u sljedećem potpoglavlju.

2.1.5 Parcijalni trag i podsustavi

Preostaje pitanje kada se u fizici javlja potreba za miješanim stanjima. Kao što je ranije spomenuto, jedan primjer je statistička fizika, u kojoj je cilj opisati sustave s izrazito velikim brojem stupnjeva slobode koji nekontrolirano interagiraju sa svojom okolinom i stoga su s njom isprepleteni. Kako se valne funkcije za takve sustave ne mogu točno izračunati, oni su a priori opisani matricom gustoće.

Ovo je praktična motivacija za matricu gustoće, ali nije neophodna jer potreba za miješanim stanjima proizlazi iz nas kao opažaća koji ne možemo izmjeriti točnu valnu funkciju ili savršeno izolirati sustav. Kada bismo mogli, potreba za miješanim stanjem ne bi postojala.

S druge strane, primjer koji zaobilazi ovakav prigovor i ukazuje na neizbježnu potrebu za miješanim stanjima se može pronaći u općoj teoriji relativnosti, u prostorvremenima s horizontima događaja. Ako imamo složeni kvantni sustav koji proizvoljno podjelimo na dva dijela, te zatim jedan dio ubacimo u crnu rupu, a drugi dio ostavimo van crne rupe, onda je istina da postoje bar neki promatrači u prostorvremenu - konkretno oni koji su unutar crne rupe - koji nikad neće imati pristup dijelu sustava izvan crne rupe. Takvi promatrači nemaju izbora nego opisivati stanje dijela sustava koji vide matricom gustoće.

Na primjeru ovog drugog slučaja ćemo sada uvesti *parcijalni trag* operatora gustoće koji se, kao što je najavljeno, koristi za dobivanje opisa podsustava isprepletenih sustava.

Recimo da imamo neki sustav AB, opisan valnom funkcijom $|\Psi\rangle$. Nadalje, recimo da nam je, kao promatračima, samo podsustav A dostupan (jer je sustav B recimo upao u crnu rupu ili nešto slično). Mi onda ne mjerimo valnu funkciju $|\Psi\rangle$ kao što je dana gore, već samo njen dio koji je dostupan iz mjerenja na podsustavu A.

Tvrdnju da nam je dostupan samo dio valne funkcije možemo učiniti matematički preciznijom tako da kažemo da nemamo pristup mjerenjima na potpunom skupu operatora $\{O_i\}$ za koje vrijedi:

$$\sum_i O_i = \mathbb{1}_{AB} \quad (2.12)$$

već možemo mjeriti samo neki podskup $\alpha \subset O_i$. Analogno, postoji drugi podskup operatora $\beta \subset O_i$ dostupan samo promatračima u podsustavu B, koji zajedno s α čini

potpun skup operatora. Treba napomenuti da α i β čine potpune skupove operatora na potprostorima A i B ukupnog Hilbertovog prostora \mathcal{H}_{AB} .

Potpun opis stanja $|\Psi\rangle$ je dan računanjem očekivanih vrijednosti na potpunoj bazi operatora $O = (\alpha, \beta)$ (u smislu skupa svih uređenih parova), a kako mi kao promatrači u podsustavu A nemamo pristup potpunoj bazi, očekujemo da će i stanje kojim opisujemo sustav generalno biti nepotpuno.

Dobar opis takve situacije se može izraziti rječnikom operatora gustoće. Način na koji se dobije opis samo sustava A jest da se uzme *parcijalni trag* po opservablama podsustava B:

$$\rho_A(\alpha, \alpha') = \text{Tr}_B \rho = \sum_{\beta} |\Psi(\alpha, \beta)\rangle \langle \Psi(\alpha', \beta)| \quad (2.13)$$

Takvim se postupkom sustav B "odračuna" iz opisa i ostaje nam samo dio operatora gustoće koji ovisi o opservablama sustava A. Ovaj izraz je poanta ovog potpoglavlja - uzimanje traga po podskupu svih stupnjeva slobode mi njih "odračunavamo" iz ukupnog stanja sistema.

Ovakvo uzimanje parcijalnog traga nosi sa sobom neke posljedice, primarno, ne može se garantirati da će *reducirana matrica gustoće* ρ_A opisivati čisto stanje sustava; već će u najgorem slučaju biti potpuno statistička mješavina. Situacija u kojoj će reducirana matrica ipak opisivati čisto stanje je kada sustavi A i B na početku nisu bili isprepleteni, i stanje Ψ se može dekomponirati:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \Psi_A(\alpha) \otimes \Psi_B(\beta) \quad (2.14)$$

U tom slučaju, matrica gustoće glasi:

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi(\alpha, \beta)\rangle \langle \Psi^*(\alpha', \beta')| = [|\Psi_A(\alpha)\rangle \otimes |\Psi_B(\beta)\rangle \langle \Psi_A^*(\alpha')| \otimes \langle \Psi_B(\beta')|] \\ &= |\Psi_A(\alpha)\rangle \langle \Psi_A(\alpha')| \otimes |\Psi_B(\beta)\rangle \langle \Psi_B(\beta')| \end{aligned} \quad (2.15)$$

a uzimanje parcijalnog traga daje:

$$\rho_A(\alpha, \alpha') = \text{Tr}_B \rho = \sum_{\beta} |\Psi_A(\alpha)\rangle \langle \Psi_A(\alpha')| \otimes |\Psi_B(\beta)\rangle \langle \Psi_B(\beta)| \quad (2.16)$$

iz čega, nakon korištenja potpunosti skupa komutirajućih opservabli β daje:

$$\rho_A(\alpha, \alpha') = |\Psi_A(\alpha)\rangle \langle \Psi_A(\alpha')| \otimes \mathbb{1}_B \quad (2.17)$$

tj. točno definiciju matrice gustoće čistog stanja $\Psi_A(\alpha)$.

2.2 von Neumannova entropija

Sad kad imamo potpun opis kvantne mehanike miješanih stanja, bilo bi korisno imati veličinu koja kvantificira tu miješanost. Ispostavlja se da je takva veličina vrlo slična entropiji i koristit će se u opisu paradoksa informacija crnih rupa, pa ju stoga vrijedi sada uvesti.

Entropija je veličina koja obično mjeri razinu neznanja o sustavu o kojem je riječ. Ako je sustav sastavljen od stupnjeva slobode koji su nam nepoznati, tj. koje opisujemo statistički, kažemo da oni *fluktuiraju*. Entropija se onda "slikovito" može definirati kao volumen (tj. monotona funkcija volumena) konfiguracijskog prostora unutar kojeg se te fluktuacije događaju.

Ta definicija entropije se može izreći na konkretniji način, koji će nam biti koristan u diskusiji o crnim rupama:

Definicija 2.3. Entropija sustava definiranog makroskopskim varijablama

Za sustav u određenom makroskopskom stanju definiranom makroskopskim varijablama (M_1, M_2, \dots, M_N) entropija se može shvatiti kao logaritam broja mikrostanja koja reproduciraju zadano makroskopsko stanje.

Matematički, entropija ima više definicija, ovisno o detaljima u koje ovdje nećemo ulaziti, ali verzija koja je relevantna za kvantnu mehaniku je takozvana von Neumannova entropija:

$$S = -\text{Tr}\{\rho \ln \rho\} \sim -\int dx \rho(x) \ln \rho(x) \quad (2.18)$$

gdje je ρ neka prikladna distribucija vjerojatnosti koja opisuje u kojem je stanju sustav, a trag predstavlja neki općeniti postupak sumiranja po stanjima sustava, prikladan situaciji. U kvantno mehaničkom slučaju, ρ je matrica gustoće, a trag je doslovno trag po svojstvenim vrijednostima.

Smisao definiranja entropije pomoću matrica gustoće slijedi iz direktne analogije matematike matrica gustoće sa slikovitom definicijom iz statističke fizike (Definicija

2.3):

- Statistička fizika kaže: "Neodređenost *mikrostanja* koje opisuju dano *makrostanje* određuje entropiju sustava."
- S druge strane, u kontekstu kvantne mehanike se može izreći sljedeća tvrdnja: "Neodređenost *valne funkcije* koja opisuje neki *kvantni sustav izražen pomoću matrice gustoće* određuje kvantnu entropiju tog sustava."

Ova sličnost sugerira da su matrice gustoće pogodne za opisivanje entropije kvantnih sustava, tj. vodi nas na definiciju kvantne entropije po analogiji s klasičnom entropijom.

Standardan primjer koji se slaže s definicijom (2.18) slijedi:

Primjer 2.4. Ako se uzme sustav kojem je konfiguracijski prostor: \mathbb{R}^N , a raspodjela vjerojatnosti je dana tako da ima konstantnu vrijednost $\rho = 1/\text{Vol}(\Gamma)$ na nekom potprostoru Γ dimenzije d . Entropija onda glasi:

$$S = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \ln \left(\frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \right) = \ln \text{Vol}(\Gamma) \sim d \ln(\text{dim}\mathbb{R}) \quad (2.19)$$

gdje je integral dao faktor $\text{Vol}(\Gamma)$, koji se pokrati s faktorom ispred logaritma.

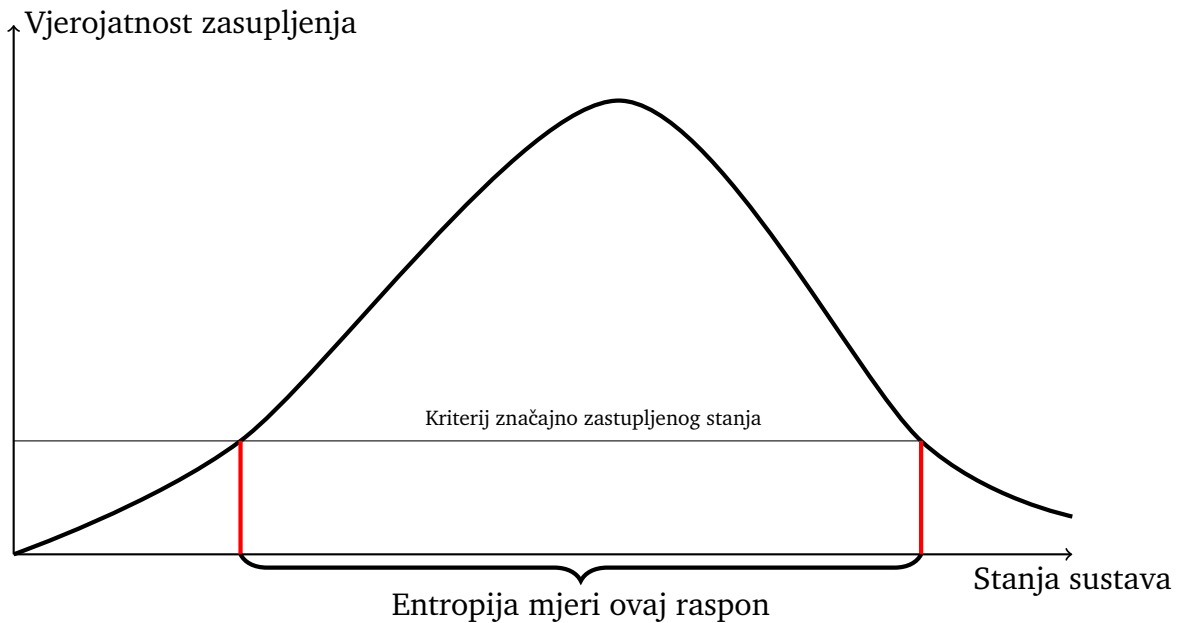
Veličina koja se dobije odgovara "slikovitoj definiciji" od ranije – entropija je (monotona) funkcija volumena konfiguracijskog prostora.

Ovakvo razmatranje vrijedi i u kvantnoj mehanici, u kojoj se konfiguracijski prostor zamjenjuje s Hilbertovim prostorom, a sve ostalo ostaje isto.

Interpretacija gornjen rezultata za općenitu distribuciju vjerojatnosti je sljedeća: Izraz (2.18) daje ugrubo broj stanja koja su značajno zastupljena u toj distribuciji. (Slika 2.1). Ako uzmemo u obzir sve moguće (normalizirane) distribucije vjerojatnosti na kompaktnom nosaču Γ , konstantna distribucija je maksimalno entropična. To ima smisla, jer sve "lokaliziranije" distribucije izgledaju sličnije delta funkciji, tj. čistom stanju.

Konačno, vrijedi uvesti i mjernu jedinicu entropije (i posljedično *informacije*) – *bit*, koji se definira na diskretnom sustavu s dva stanja:

Primjer 2.5. Uzmimo sustav s dva stanja, npr. izolirani elektron sa spinom gore ili dolje. Ako ne znamo u kojem je stanju spin, u odsutnosti bilo kakvih magnetskih



Slika 2.1: Ilustracija "značajno zastupljenih stanja" u danoj distribuciji vjerojatnosti polja, možemo objema mogućnostima pridružiti jednake vjerojatnosti. Von Neumanova entropija onda daje:

$$S = - \sum_{x=\uparrow,\downarrow} \rho(x) \ln \rho(x) = - \left(\rho(\uparrow) \ln \rho(\uparrow) + \rho(\downarrow) \ln \rho(\downarrow) \right) = \ln 2 = 1 \text{ bit} \quad (2.20)$$

Analogno, za sustav od N spinova sa svih 2^N stanja jednako vjerojatnih, ukupna entropija sustava je:

$$S = - \sum_x \rho(x) \ln \rho(x) = - \sum_x \frac{1}{2^N} \ln \frac{1}{2^N} = N \ln 2 = N \text{ bitova} \quad (2.21)$$

gdje x predstavlja moguća (mikro)stanja sustava, tj. sve moguće konfiguracije N -spinskog lanca, kojih ima 2^N .

2.3 Entropija isprepletenosti

Entropija se obično definira za sustave o kojima nemamo potpunu informaciju, i koristimo statistički opis, ali kao što smo ranije naveli, opisi matricama gustoće se prirodno javljaju i kad opisujemo podsustave isprepletenih čistih stanja. Stoga, u svrhu interpretacije argumenata u kasnijim poglavljima sad uvodimo i **naziv entropija isprepletenosti**, koja mjeri koliko je dani (pod)sustav isprepleten s ostatkom svemira.

Ključno je imati na umu da termin *entropija isprepletenosti* nije ništa novo; entropija isprepletenosti je isto što i von Neumannova entropija u svakom matematičkom smislu te se tako i definira (izraz (2.18)). Razlika je isključivo u situaciji u kojoj se naziv koristi. *Entropija isprepletenosti* eksplicitno spominje isprepletenost i stoga na nju stavlja fokus - treba se pitati "s čime je isprepleten naš sustav", radije nego da se u duhu standardne statističke fizike ρ shvati kao distribucija vjerojatnosti i da se na isprepletenost s okolinom "zaboravi" jer ju nećemo ni pokušati opisati.

U nastavku ćemo navesti neka fizikalna i matematička svojstva koja slijede iz razmišljanja o entropiji isprepletenosti te definirati popratne termine kao: termodinamička entropija, krupnozrnata entropija, sitnozrnata entropija i informacija.

2.3.1 Entropija isprepletenosti

Ako postoje dva sustava A i B, i isprepleteni su u stanje $\Psi(\alpha, \beta)$ s matricom gustoće ρ , onda se *entropija isprepletenosti* može definirati na reduciranoj matrici gustoće:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho \quad (2.22)$$

koja generalno predstavlja miješano stanje.

Definicija 2.6. Entropija isprepletenosti je dana von Neumannovom formulom (2.18):

$$S_{\text{von Neumann}}(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (2.23)$$

i mjera je toga koliko ρ_A odstupa od čistog stanja. Ovdje se trag treba shvatiti kao suma svojstvenih vrijednosti.

Ako je ρ čisto stanje, entropija isprepletenosti iščezava:

$$\begin{aligned} S_{\text{vN}}(\rho) &= -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_i \langle i | \rho \ln \rho | i \rangle = \langle \psi | (|\psi\rangle \langle \psi|) \ln (|\psi\rangle \langle \psi|) | \psi \rangle \\ &= -1 \cdot \ln 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdje su $|i\rangle$ svojstveni vektori operatora ρ , te se iskoristilo svojstvo da su ρ i $\ln \rho$ simultano dijagonalizabilni. U predzadnjem koraku smo bazu $|i\rangle$ odabrali tako da jedan od vektora odgovara točno stanju $|\psi\rangle$, dok su ostali vektori ortogonalni.

Tvrđi se da entropija isprepletenosti S_{vN} mjeri koliko su dva podsustava isprepletena i stoga bi svakako trebalo vrijediti da daje istu vrijednost za oba podsustava.

Tvrđnja 2.7. Kad se neki izolirani sustav u čistom stanju, opisan s $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, podijeli na sustave A i B, neovisno za koji računamo entropiju isprepletenosti, u oba slučaja bismo trebali dobiti isti iznos:

$$S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B) \quad (2.25)$$

Ovo se eksplicitno može pokazati [2].

Dokaz 2.7.1. Recimo da je ϕ svojstveni vektor operatora ρ s (realnom) svojstvenom vrijednosti λ

$$\rho_A \phi \sim \sum_{\alpha'} \rho_A(\alpha, \alpha') \phi(\alpha') = \sum_{\alpha'} \left(\sum_{\beta} \Psi(\alpha, \beta) \Psi^*(\alpha', \beta) \right) \phi(\alpha') \sim \lambda \phi \quad (2.26)$$

gdje su se \sim koristili u prelazu iz operatorskog izraza u raspis po bazi. Tvrđnja je da ako se uzme: $\chi(\beta') = \sum_{\alpha'} \Psi(\alpha', \beta') \phi^*(\alpha')$, χ će biti svojstveni vektor ρ_B s istom svojstvenom vrijednosti:

$$\begin{aligned} \rho_B \chi &\sim \sum_{\beta'} \rho_B(\beta, \beta') \chi(\beta') = \sum_{\beta'} \left(\sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \Psi^*(\alpha, \beta') \right) \left(\sum_{\alpha'} \Psi(\alpha', \beta') \phi^*(\alpha') \right) \\ &= \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \left(\sum_{\alpha' \beta'} \Psi^*(\alpha, \beta') \Psi(\alpha', \beta') \phi^*(\alpha') \right) \\ &= \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \left(\sum_{\alpha' \beta'} \Psi(\alpha, \beta') \Psi^*(\alpha', \beta') \phi(\alpha') \right)^* \\ &= \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \left(\sum_{\alpha'} \rho_A(\alpha, \alpha') \phi(\alpha') \right)^* \\ &= \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) (\lambda \phi(\alpha))^* \\ &= \lambda \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \phi^*(\alpha) = \lambda \chi(\beta) \sim \lambda \chi \end{aligned} \quad (2.27)$$

gdje se koristilo svojstvo da su ρ_A i ρ_B hermitske matrice, i time da su im svojstvene vrijednosti realne.

ρ_A i ρ_B imaju iste svojstvene vrijednosti jer postoji bijekcija $\phi \rightarrow \chi$ koja im povezuje svojstvene vektore.

Kako je $S_{vN}(\rho_{...})$ funkcija samo svojstvenih vrijednosti operatora $\rho_{...}$, odmah slijedi da

imaju i iste entropije isprepletenosti.

Ovaj dokaz ovisi o tome da je početni sustav ρ u čistom stanju, jer bi inače mogao postojati dodatan sustav C , tako da ABC čini čisto stanje, te bi podsustavi A i B mogli s njime imati različite isprepletenosti.

Vidimo stoga da vrijedi logično svojstvo - ako su dva sustava A i B međusobno (i samo međusobno) isprepleteni, onda im je entropija isprepletenosti jednaka.

Ponekad ćemo spominjati "maksimalno miješano stanje" ili "maksimalno miješanu matricu gustoće". To stanje opisuje sustav koji je maksimalno isprepleten s vanjskim sustavom koji je izvan naše kontrole. Definiira se na sljedeći način:

$$\rho_{\text{MMS}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} |i\rangle \langle i| = \frac{1}{N} \mathbb{1} \quad (2.28)$$

dakle radi se o jediničnom operatoru, do na normalizacijski faktor.

Definicija je motivirana maksimalno isprepletenim stanjem; u najjednostavnije slučaju dva identična dvorazinska sustava na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$:

$$|\psi_{\text{Maksimalno Isprepleteno}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \pm |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad (2.29)$$

s (čistom- $S_{\text{vN}}(\rho_{\text{MI}}) = 0$) matricom gustoće:

$$\rho_{\text{MI}} = |\psi_{\text{MI}}\rangle \langle \psi_{\text{MI}}| = \frac{1}{2} \left(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \right. \\ \left. \pm |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \pm |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \right) \quad (2.30)$$

Ova matrica gustoće opisuje dva sustava koji su maksimalno isprepleteni. Uzmemo li sada parcijalni trag:

$$\text{Tr}_2 \rho_{\text{MI}} = \sum_{i=\uparrow\downarrow} \text{Tr}\{(\mathbb{1} \otimes |i\rangle \langle i|)\rho_{\text{MI}}\} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) = \rho_{\text{MMS}} \quad (2.31)$$

preostaje opis samo jednog dvorazinskog sustava koji je "maksimalno miješan", u smislu da svaki stupanj slobode ovisi o jednom stupnju slobode koji smo izbacili iz opisa, i stoga su svi stupnjevi slobode (u ovom slučaju samo jedan) statistički određeni s jednakom vjerojatnosti. Ovaj se rezultat lako generalizira na složenije sustave.

2.3.2 Veza s termodinamičkom entropijom

Kako govorimo o **entropiji** isprepletenosti, nalaže se pitanje – je li to ista entropija iz termodinamike / statističke fizike, i ako nije općenito, postoji li bar neka poveznica? Očigledno je da entropija isprepletenosti nije aditivna po podsustavima – počeli smo od čistog stanja s 0 entropije, a nakon subdivizije imamo dva sustava s istom entropijom S_{vN} , koja generički ne iščezava, osim ako su oba podsustava također u čistom stanju. Ovo je očito u kontradikciji s takozvanom *termodinamičkom entropijom* iz statističke fizike koja je aditivna po podsustavima i stoga zaključujemo da se radi o dvije različite fizikalne veličine.

Poznato je iz statističke fizike da ako se promatra jako mali podsustav nekog složenog sustava opisanog s ρ , reducirana matrica gustoće za taj sustav će poprimiti *kanonski oblik* [1]:

$$\rho_{Termalno} = \frac{e^{-\beta H_{\text{podsustav}}}}{Z} \quad (2.32)$$

Termodinamička entropija se onda definira ovako:

$$S_{TD} = \sum_i S_{Termalno}(i) = \sum_i \rho_{Termalno}(i) \ln \rho_{Termalno}(i) \quad (2.33)$$

gdje su i indeksi pojedinih malih podsustava koji su svi u termalnoj ravnoteži s ostatkom sustava, a $\rho_{Termalno}(i)$ je reducirana matrica gustoće za taj mali podsustav. Ovako definirana entropija je po definiciji aditivna po podsustavima.

Termodinamička entropija nekog sustava se onda može shvatiti kao limes entropije isprepletenosti gdje sustav shvaćamo "lokalno", u smislu da zanemarujemo sve korelacije između različitih podsustava. Poanta je ovdje da korelacije među podsustavima generalno imaju efekt pročišćavanja ukupnog stanja, nešto što termodinamička entropija ignorira.

Ta se tvrdnja može vidjeti na sljedeći način: Uzmimo sustav A koji je isprepleten sa sustavom B . A će imati konačnu entropiju isprepletenosti :

$$S_{vN}(A) \quad (2.34)$$

Direktna sumacija bi onda vodila na izraz za termodinamičku entropiju:

$$S_{TD}(AB) \approx S_{vN}(A) + S_{vN}(B) = 2S_{vN}(A) \quad (2.35)$$

ali uzimanje ukupnog stanja bi vodilo na:

$$S_{vN}(AB) = 0 \quad (2.36)$$

dakle zaključujemo da su baš korelacije između A i B odgovorne za razliku između termodinamičke entropije i entropija isprepletenosti. Ovo je indikacija da je termodinamička entropija gornja međa entropiji isprepletenosti te da razlika između njih govori o korelacijama između sustava A i B , tj. mjeri koliko je informacije o ukupnom čistom stanju AB pospremljeno u korelacijama. Ako razlike između entropija nema, onda su oba podsustava u čistom stanju, i razmatrajući ih individualno se o ukupnom sustavu može saznati ista informacija kao i kad ih se gleda zajedno. Ako je pak razlika između entropija velika, znači da je ključno razmatrati baš korelacije među sustavima jer one sadrže značajan udio "informacije" o ukupnom čistom stanju.

Dodatna interpretacija razlike između termodinamičke i von Neumann entropije će biti dana u potpoglavlju o informaciji.

Konačno, treba komentirati da se termodinamička entropija definira drugačije, ovisno kako definiramo "mali podsustav" u gornjoj definiciji. Ako se za podsustav uzme "fiksna energije i broj čestica", ρ će poprimiti oblik mikrokanonske distribucije na prostoru stanja koja zadovoljavaju te uvjete. Analogno se mogu osloboditi jedno ili oba ta ograničenja, što onda vodi na kanonsku i velekanonsku distribuciju.

2.3.3 Dodatna svojstva von Neumannove entropije

Svojstvo koje će nam kasnije trebati je takozvana *jaka subaditivnost*, koja vrijedi za proizvoljni sustav opisan matricom gustoće ρ . Podijeli li se sustav na tri podsustava 1, 2 i 3, rezultat glasi:

$$S_{vN}(\rho) + S_{vN}(\rho_2) \leq S_{vN}(\rho_{12}) + S_{vN}(\rho_{23}) \quad (2.37)$$

gdje $\rho_{13} = \text{Tr}_2 \rho$ predstavlja reduciranu matricu gustoće podsustava 1 + 3, i analogno. Dokaz se može pronaći u literaturi [31].

Alternativni rezultat koji se također naziva jaka subaditivnost von Neumannove entropije se može pronaći u [58] i glasi:

$$S_{\text{vN}}(\rho_1) + S_{\text{vN}}(\rho_3) \leq S_{\text{vN}}(\rho_{12}) + S_{\text{vN}}(\rho_{23}) \quad (2.38)$$

Iz ovog rezultata odmah slijedi i *slaba subaditivnost*. U slučaju da za podsustav 2 odaberemo prazan sustav, te da se sustavi 2 i 3 (radi estetskih razloga) u gornjem rezultatu zamjene, slijedi:

$$S_{\text{vN}}(\rho) \leq S_{\text{vN}}(\rho_1) + S_{\text{vN}}(\rho_2) \quad (2.39)$$

koji kaže da je von Neumannova entropija podsustava uvijek veća od entropije ukupnog sustava.

Postoji još jedno svojstvo isprepletenih sustava koje će biti bitno, a to je monogamija isprepletenosti – tvrdnja da dano kvantno stanje može biti maksimalno isprepleteno samo s jednim drugim čistim stanjem.

Konkretnije, ako imamo ukupni sustav ABC s Hilbertovim prostorom $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, te je podsustav AB u čistom stanju $|\psi\rangle_{AB}$, tvrdnja je da reducirana matrica gustoće $\text{Tr}_B \rho_{ABC}$ ne može opisivati sustav u istom čistom stanju $|\psi\rangle_{AC} = |\psi\rangle_{AB}$.

Ovo slijedi direktno iz jake subaditivnosti entropije isprepletenosti. Recimo da uzmemo ABC u čistom stanju $|\psi\rangle$, te tvrdimo da vrijedi:

$$\text{Tr}_B \rho_{ABC} = \text{Tr}_C \rho_{ABC} = |\psi_{\text{max}}\rangle \langle \psi_{\text{max}}| \quad (2.40)$$

gdje je stanje $|\psi_{\text{max}}\rangle$ dano produktom maksimalno isprepletenih stanja:

$$|\psi_{\text{max}}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B) \quad (2.41)$$

i identično tako, za sustav AC .

Onda iz jake subaditivnosti slijedi:

$$S(ABC) + S(A) \leq S(AB) + S(AC) \quad (2.42)$$

gdje znamo da su sustavi AB i AC po pretpostavci opisani istim maksimalno isprepletenim čistim stanjem, i stoga da su im von Neumann entropije iste i jednake nuli. Koristeći da je i ABC u čistom stanju, imamo:

$$S(A) \leq 2S(AB) = 0 \quad (2.43)$$

Kako je von Neumannova entropija strogo pozitivna veličina, ovo generalno nije moguće, osim ako je $S(A) = 0$. Po jednakosti entropija isprepletenosti onda slijedi i $S(B) = S(C) = 0$ i stoga zaključujemo da je cijeli sustav u čistom produktnom stanju $\rho_{ABC} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C$.

Zaključujemo da jedan sustav ne može biti istovremeno maksimalno isprepleten s dva različita sustava, i stoga da je isprepletenost monogamska.

2.3.4 Informacija

Informacija u podsustavu A se definira kao razlika između termodinamičke entropije i entropije isprepletenosti:

$$I = S_{\text{TD}}(A) - S_{\text{vN}}(A) \quad (2.44)$$

Ideja je ovdje da termodinamička entropija predstavlja maksimalno neuređen podsustav za koji ne poznajemo nikakve korelacije, a entropija isprepletenosti nam govori o količina korelacija koje smo izgubili kad smo napravili parcijalni trag po ostatku sustava. Ako je S_{vN} manja od termodinamičke entropije, znači da su neke korelacije ipak preživjele unutar podsustava, i stoga sustav sadržava bar nešto informacije. Sustav u čistom stanju sadrži maksimalnu količinu informacije tj. savršeno je točno određen.

Ovako definirana informacije je očuvana u svim poznatim zakonima fizike i, kao što Susskind tvrdi [2], *zakon očuvanja informacije je najfundamentalniji zakon prirode*.

Ta tvrdnja se u klasičnoj i kvantnoj fizici manifestira na sljedeći način:

Klasično, očuvanje informacije se može izreći pomoću Liouvilleovog teorema: "volumen faznog prostora koji opisuje neki sustav ostaje isti nakon vremenske evolucije". Kvantno mehanički, očuvanje informacije je osigurano unitarnom evolucijom čistih stanja, te određenim teoremima o nemogućnosti skrivanja informacija (eng.

no-hiding theorem) [19] koji, slikovito govoreći, garantiraju da je valna funkcija očuvana [20]. Nadalje, posljedica sačuvanja informacije je da sustavi ne bi smjeli moći evoluirati iz čistih u miješana stanja, jer bi se time gubila informacija.

Ove tvrdnje garantiraju da su članovi u definiciji informacije (izraz 2.44) oboje očuvani. To slijedi jer su oba klasično opisana ansamblima na koje se može primijeniti Liouvilleov teorem ili u kvantnom slučaju matricama gustoće (u termodinamičkom slučaju maksimalno miješanom matricom gustoće, a u von Neumannovom slučaju kojom god da se dobije uzimanjem reducirane matrice gustoće za podsustav koji promatramo).

Ipak, postoji jedan problem; čini se da je ovakva definicija očuvanja informacije u kontradikciji sa drugim zakonom termodinamike. Drugi zakon termodinamike tvrdi da termodinamička entropija raste u vremenu i nejasno je kako to pomiriti s tvrdnjama o očuvanju kako su izložene ovdje. Kombiniranjem ovih tvrdnji, zaključujemo da se količina informacije povećava u vremenu, što naravno nije smisleno. Razlog zašto nailazimo na ovaj problem je što za definiciju termodinamičke entropije iz izraza (2.33) taj zakon ne vrijedi, i treba se napraviti dodatan korak da se dođe do *prave* standardne termodinamičke entropije. U svrhu toga, sada ćemo uvesti *sitnozrnatu* entropiju i *krupnozrnatu* entropiju.

Nazivi ovih entropija dolaze iz toga što se *krupnozrnata* entropija zapravo dobiva uprosječenjem *sitnozrnate* entropije po podsustavima i zatim zbrajanjem:

$$S_{\text{krupnozrnata}} = \int dk \bar{\rho}_k \ln \bar{\rho}_k \quad (2.45)$$

gdje je k neka oznaka podsustava.

Ova procedura uprosječenja je zapravo ono što se radi u statističkoj fizici, gdje je poznavanje stanja sustava ograničeno jer bi mjerenje egzaktnog stanja uključivalo određivanje točne valne funkcije za $\sim 10^{20}$ čestica. Umjesto toga su poznata samo neka ograničenja (recimo broj čestica ili energija) i posljedično se uzimaju prosjeci sustava po ansamblu, rezultat čega je *krupnozrnata* entropija.

Da bismo ovo vizualizirali, možemo se poslužiti simboličnom slikom ansambla: reći ćemo da je naše nepoznavanje točnog stanja sustava ekvivalentno uzimanju ϵ -kugle u faznom prostoru. Ovo svodi (*krupnozrnatu*) entropiju na volumen faznog prostora koji te ϵ -kugle obuhvaćaju. Ovaj je pristup u nekom naivnom smislu točan, recimo za idealni plin, iako možda nije savršena analogija u složenijim situacijama.

Kako bismo ilustrirali primjenu ovih termina, možemo sada pogledati jednostavan primjer:

Primjer 2.8. Recimo da nam je dan vrlo složen sustav (recimo plin 10^{20} fotona) u točno određenom čistom stanju koje nam nije poznato i zadatak nam je pratiti evoluciju. On je predstavljen jednom točkom u Hilbertovom prostoru i stoga ima sitnozrnatu, tj. von Neumannovu entropiju jednaku 0.

Mi tom sustavu ne možemo praktično odrediti mikrostanje i stoga se držimo samo nekolicine makroskopskih parametara koji fiksiraju ϵ -kuglu u Hilbertovom prostoru, gdje je varijabla ϵ određena mjerenjima koja jesmo uspjeli napraviti i nije obavezno mala. Mi unutar te ϵ -kugle njemu pridjeljujemo neku raspodjelu vjerojatnosti; u ovom slučaju mikrokanonsku – sva su stanja jednako vjerojatna, radi jednostavnosti. Ta raspodjela implicira da iz naše perspektive taj sustav ima konačnu krupnozrnatu, tj. termodinamičku entropiju proporcionalnu $\sim \epsilon^3$.

Kako taj sustav evoluira, on će evoluirati unitarno po zakonima kvantne mehanike i konačno stanje će ponovno biti čisto, s 0 sitnozrnate entropije. Sitnozrnata entropija je očuvana.

Iz perspektive statističkog opisa ϵ -kuglom, mi promatramo evoluciju skupa čistih stanja unutar kugle, i tvrdimo da je entropija sustava dana volumenom Hilbertovog prostora u koju ta kugla evoluira. Svojstvo iznimno složenih sustava je "kaotično ponašanje", tj. da će bliske točke (konkretno, one unutar naše ϵ -kugle) u faznom, tj. Hilbertovom prostoru generički evoluirati u volumen fraktalnog oblika, dimenzije ovisne o veličini parametra ϵ [18]. Kako nas nakon evolucije zanima ponovno ispitati stanje tog sustava, mi ponovno moramo napraviti mjerenje na njemu, što svaku točku Hilbertovog prostora obuhvaća novom ϵ -kuglom. Za fraktalan objekt to daje vrlo velik volumen, sigurno značajno veći od početne ϵ kugle. U ovom slučaju, krupnozrnata entropija je porasla u vremenu, u skladu s drugim zakonom termodinamike.

Kompletno analogno ovome, možemo promatrati i sustav koji od početka nije u čistom stanju, već je isprepleten s nekim vanjskim sustavom (recimo okolinom) nad kojom nemamo kontrolu. Smisao ovog primjera koji slijedi je da se vidi kako postoje dvije vrlo različite raspodjele vjerojatnosti koje ulaze u definicije entropija, te da se razjasni od kud one potječu.

Primjer 2.9. Sada zamišljamo da promatramo sustav A koji je u najboljem slučaju

moguće opisati miješanim stanjem ρ_A . To je fundamentalna posljedica činjenice što je A isprepleten s okolinom E i ne postoji bolji mjerni uređaj koji bi nam mogao otkriti o kojem se točno stanju radi, bez da proširimo opis i na okolinu E . U tom je smislu ρ_A maksimalna informacija koju možemo dobiti o A vršenjem mjerenja na A . Miješano stanje ρ_A možemo vizualizirati kao neki volumen Ω u Hilbertovom prostoru sustava AE koji obuhvaća sva moguća čista stanja koja bi uzimanjem parcijalnog traga po E dala reduciranu matricu gustoće ρ_A :

$$\left\{ \Omega := \{|\Psi\rangle\} \subset \mathcal{H}_{AE} \mid \text{Tr}_E |\Psi\rangle = \rho_A \right\} \quad (2.46)$$

Matricu gustoće u ovom slučaju shvaćamo kao raspodjelu vjerojatnosti stanja sustava koja je kompletno neizbježna posljedica kvantne mehanike, tj. nije uzrokovana neadekvatnim mjernim uređajima ili tehnikama, već samim izborom sustava na kojem se vrši mjerenje.

Sitnozrnata entropija A je onda dana ugrubo logaritmom volumena Hilbertovog prostora Ω iz izraza (2.46), u skladu s primjerom 2.4. Prikaz sitnozrnate entropije je dan na slici 2.2 u plavoj boji.

Kako matrice gustoće evoluiraju unitarno, volumen $\text{Vol}\{\Omega\}$ koji je obuhvaćen na početku ostaje isti i nakon evolucije, iako mu se oblik može proizvoljno promijeniti (kao što i hoće, za složene sustave). Egzaktan volumen stanja koja su značajno zastupljena u raspodjeli, i stoga sitnozrnata (von Neumannova) entropija, su stoga egzaktno očuvani kao posljedica evolucije.

U analogiji s prošlim primjer, krupnozrnatu entropiju dobijemo vršenjem mjerenja na sustavu A , uz uvjet da nemamo vremena / alata za izvući svu informaciju o sustavu i dobiti točno ρ_A , već se moramo zadovoljiti samo nekim ograničenjima na sustav i pristupom ansambla. Još jednom ansamble modeliramo uzimanjem ϵ -kugli oko egzaktnog stanja sustava. Ključna je razlika ovdje što je sada egzaktno stanje sustava već raspodjela vjerojatnosti ρ_A na volumenu $\text{Vol}\{\Omega\}$, radije nego točka u Hilbertovom prostoru, pa stoga uzimamo ϵ -kuglu oko svake točke u raspodjeli.

U Hilbertovom prostoru se ovo manifestira kao uzimanje kugle oko svake točke koja predstavlja miješano stanje i rezultat je nešto veća kugla (slika 2.2, crveno) koja obuhvaća raspodjelu miješanog stanja (slika 2.2, plavo).

Na slici 2.2 manja kugla (plava) predstavlja sitnozrnatu entropiju koja nastaje zbog

statističkog opisa miješanog stanja i kompletno je neizbježna (osim ako proširimo sustav), a veća kugla (crvena) predstavlja krupnozrnatu entropiju koja je posljedica opisa ansamblima i posljedica je neadekvatnih mjernih uređaja i tehnika.

Evolucija se ponovno događa analogno prošlom primjeru i bliske točke fraktalno evoluiraju ([18]). Vršenje novog mjerenja obuhvaća ansambl kojim opisujemo sustav (plavo+ ϵ) novim volumenom ϵ -kugli, koji predstavlja krupnozrnatu entropiju. Krupnozrnata entropija stoga raste kako sustav evoluiru, u skladu s drugim zakonom termodinamike.

Ključno je zapamtiti iz ovih primjera da postoje dvije raspodjele vjerojatnosti:

- Jedna neizbježna koja potječe iz kvantne mehanike i posljedica je prirode kvantnog stanja s kojima radimo – sitnozrnata von Neumannova entropija
- Druga nametnuta nemogućnosti preciznog mjerenja, tj. korištenjem ansambla, koju je u principu moguće izbjeći (npr. napretkom u tehnologiji, smišljanjem novih mjernih tehnika i sl.) – krupnozrnata termodinamička entropija.

Kvantna mehanika nam daje sitnozrnatu von Neumannovu entropiju koja evoluiru unitarno i ulazi u definiciju informacije, dok nam mjerenje daje uvijek rastuću krupnozrnatu termodinamičku entropiju koja se pojavljuje u drugom zakonu termodinamike.

U vidu ovoga, informacija se onda mora definirati na sljedeći način:

$$I = S_{\text{Therm sitnozrnata}} - S_{\text{vN sitnozrnata}} \quad (2.47)$$

gdje je

$$S_{\text{Therm sitnozrnata}} = - \text{Tr}\{\rho_{\text{MMS}} \ln \rho_{\text{MMS}}\} \quad (2.48)$$

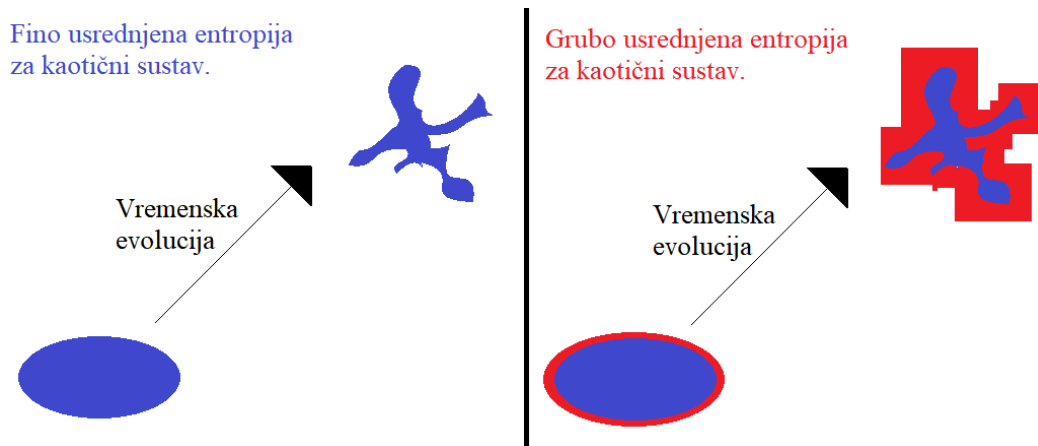
entropija dobivena opisivanjem sustava maksimalno miješanom matricom gustoće $\rho_{\text{MMS}} = \frac{1}{\text{Vol}\Omega} \mathbb{1}$ (hipotetskim miješanim stanjem, u kojem bi sustav bio da je maksimalno isprepleten s nekim sustavom iz okoline), a

$$S_{\text{vN sitnozrnata}} = - \text{Tr}\{\rho \ln \rho\} \quad (2.49)$$

je von Neumannova entropija stvarnog stanja ρ u kojem je sustav pripremljen, koje

je ili čisto ili miješano stanje.

Bitno je primijetiti da se u definiciji obje entropije pojavljuju samo matrice gustoće, a *sitnozrnatost* tih entropija osigurava da nema nekog pozadinskog prosječenja koje bi uzrokovalo odstupanje od tog opisa (u smislu da ništa ne uvodi dodatnu raspodjelu vjerojatnosti). Stoga možemo sa sigurnošću tvrditi da je ovako definirana informacija obavezno sačuvana u teorijama u kojima matrice gustoće unitarno evoluiraju (npr. u kvantnoj mehanici).



Slika 2.2: Ilustracija razlike između sitno- i krupnozrnate entropije. Sitnozrnata entropija (plavo) zauzima isti volumen u faznom prostoru prije i nakon vremenske evolucije. Krupnozrnata entropija (crveno) nakon vremenske evolucije zadobije značajan porast u volumenu faznog prostora.

Distinkcija između sitnozrnate i krupnozrnate entropije je bitna za problem informacije crnih rupa. Kad crna rupa evaporira, izgleda kao da se informacija gubi. Ključno je da je ta tvrdnja točna za *sitnozrnatu* informaciju, kao što je tu definirana i stoga se *ne može* riješiti pozivanjem na drugi zakon termodinamike, koji tvrdi da se isto dešava i u generičkom sustavu. Narušenje očuvanja sitnozrnate informacije je ekvivalentno narušenju unitarne evolucija kvantne mehanike i puno je ozbiljniji problem od samo primjene drugog zakona termodinamike.

Za kraj još vrijedi napomenuti da kad se u ostatku rada govori o "informaciji" i popratnim entropijama, uvijek se misli na sitnozrnate varijante, iako se to može ne ističe uvijek eksplicitno.

3 Termodinamika crnih rupa

U ovom ću poglavlju izložiti 4 zakona termodinamike crnih rupa, uključujući Hawkingovu temperaturu i neke osnovne rezultate koji slijede.

Pojmovi u ovom poglavlju: četiri zakona mehanike crnih rupa, entropija crnih rupa, hologrfska ograničenja entropije, Hawkingovo zračenje, evaporacija crnih rupa, Unruh efekt

3.1 Zakoni mehanike crnih rupa i veza s termodinamikom

3.1.1 Četiri zakona mehanike crnih rupa

Bekenstein je u svom radu [14] predložio da crne rupe imaju "entropiju" te da je ona proporcionalna njihovoj površini. Iste godine, Hawking [21] je pokazao da se površina crnih rupa ne smanjuje. Neposredno nakon toga [22] objavljena su i "četiri zakona mehanike crnih rupa" koji glase:

- 0. zakon: Površinska gravitacija crne rupe κ je konstantna na horizontu stacionarne crne rupe
- 1. zakon: $\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q$
gdje je κ površinska gravitacija, A je površina crne rupe, Ω je "kutna količina gibanja" i Φ je elektromagnetski potencijal crne rupe.
- 2. zakon: Površina crne rupe se u fizikalnim procesima može samo povećavati:
 $\delta A \geq 0$
- 3. zakon: Crna rupa se ne može svesti na $\kappa = 0$ u konačno mnogo fizikalno dopustivih koraka

Sličnost ovih zakona sa zakonima termodinamike je očigledna. Korespondencija fizikalnih veličina glasi:

$$M = E \quad A \sim S \quad \kappa \sim T \quad (3.1)$$

Razlog zašto su entropija i površina te temperatura i površinska gravitacija samo proporcionalne je jer je nejasno kako točno odvojiti faktor $1/8\pi$ u izrazu $\frac{\kappa}{8\pi} \delta A$. Točan se izraz može odrediti samo ako imamo ili egzaktni izraz za entropiju ili egzaktni izraz

za temperaturu. Odgovor na ovo pitanje daje točan izračun Hawkingove temperature, koji će biti tema potpoglavlja 3.2.

U ostatku ovog poglavlja nam preostaje predstaviti neke "rupe" u zakonima mehanike crnih rupa te objasniti kako su se one povijesno riješile. Po putu ćemo objasniti problem naizgledne nesloge drugog zakona termodinamike i drugog zakona mehanike crnih rupa, uvesti Hawkingovog zračenje te upotrijebiti interpretaciju crnih rupa kao termodinamičkih sustava.

3.1.2 Generalizirani drugi zakon termodinamike

U prisustvu crnih rupa, postoji problem s drugim zakonom termodinamike. Konkretno, uzmemo li sustav konačne entropije, možemo ga ubaciti u neku crnu rupu i time ga, kazualno gledajući, izbrisati iz ostatka svemira, što smanjuje entropiju. Ovo bismo mogli raditi u kojoj god mjeri želimo, i stoga proizvoljno jako narušiti drugi zakon termodinamike. Takvo razmišljanje stoga potiče na redefiniciju drugog zakona, tako da uključuje i sugestivno nazvanu *entropiju crnih rupa* $\sim A$.

U vidu ovakvog razmišljanja, Bekenstein je u svom radu [15] predložio poopćeni drugi zakon termodinamike koji glasi: Entropija je monotonno povećavajuća funkcija u vremenu, *ali samo ako se definira kao suma uobičajene termodinamičke entropije i entropije (površine) svih prisutnih crnih rupa*.

Očito je da generalizirani drugi zakon funkcionira dok god se površina crne rupe poveća za iznos veći od entropije ubačenog sustava, ili drugim riječima, ovisi o omjeru entropije i mase sustava koji se ubacuje u crnu rupu. Ako se može napraviti vrlo lagan sustav koji ima vrlo visoku entropiju, on bi trebao moći prekršiti drugi zakon termodinamike ubacivanjem u crnu rupu. Ta granica se može kvantificirati [15], i glasi:

$$\frac{S}{E} \leq \frac{2\pi k_B R}{\hbar c} \quad (3.2)$$

gdje je R radijus sustava koji se ubacuje u crnu rupu. Ovaj rezultat se zove **Bekensteinova granica** (eng. *Bekenstein bound*).

Ovo ograničenje je zadovoljeno za većinu sustava napravljenih od konvencionalne materije, ali u principu je moguće smisliti sustave (tj. definirati novu vrstu čestica) koji imaju proizvoljno visoku entropiju s proizvoljno niskom masom [16].

Ovakva generalizacija drugog zakona termodinamike naravno zahtjeva da se entropija crnih rupa shvati sasvim ozbiljno, jednako ozbiljno kao i uobičajena entropija termodinamičkih sustava. Ovo onda naravno povlači i pitanje može li se na nju primijeniti i neka druga svojstva standardne termodinamičke entropije. Sagledano iz perspektive statističke fizike, ovo razmatranje povlači da je crna rupa zapravo statistički fluktuirajući sustav s brojnim mikrostanjima skrivenim iza horizonta. Ta interpretacija ima i smisla, budući da konačno stanje općenite (Kerr-Newmann, recimo) crne rupe ne sadrži nikakvu informaciju o beskonačnom broju početnih konfiguracija materije iz koje je mogla nastati (tvrđnja B.6). Adekvatan opis mikrostanja bi naravno zahtjevao kvantno gravitacijske efekte za opis unutrašnjost crne rupe, jer opća teorija relativnost ne predviđa nikakvu dodatnu strukturu unutar singulariteta ili na horizontu. Opis modernog pristupa ovom problemu se može pronaći u zadnjem poglavlju (potpoglavlje 6.1) o *strunastim crnim rupama*, te u odgovarajućim referencama.

3.2 *Hawkingovo zračenje*

3.2.1 Pregled potpoglavlja

Unatoč sličnostima, korespondencija između zakona termodinamike i zakona mehanike crnih rupa se dugo vremena nije shvaćala sasvim ozbiljno, a čak je i sam Hawking u svojim radovima [22] prije otkrića zračenja crnih rupa tvrdio da je veza između κ i T posljedica čisto formalne sličnosti i da se ne treba shvaćati previše doslovno. Razlog tome je što se crne rupe nisu mogle shvatiti kao punopravni termodinamički sustavi koji mogu biti u ravnoteži s drugim (npr. konvencionalnim) termodinamičkim sustavima – u osnovni, zbog toga što se mislilo da ne zrače.

U radu [23] Hawking je ipak pokazao suprotno – da pod određenim pretpostavkama (jaka geometrija, geometrijska optika; detaljnije objašnjene u potpoglavlju 3.2.3), iz perspektive udaljenih promatrača, crne rupe (koje su nastale kolapsom) zrače spektrom crnog tijela (do na aproksimacije u Hawkingovom izvodu), s temperaturom:

$$T_{\text{Hawking}} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.3)$$

gdje je κ površinska gravitacija crne rupe. Bitno je napomenuti da je ovo temperatura kakvu vidi FIDO (potpoglavlje B.3) promatrač u asimptotskoj beskonačnosti;

FIDO promatrači bliže crnoj rupi će vidjeti veću temperaturu, kao posljedica crvenog pomaka relativno na asimptotske promatrače. Temperatura proizvoljnog FIDO promatrača na udaljenost r od crne rupe (u asimptotski sfernim koordinatama) glasi:

$$T_{\text{FIDO}} = \frac{T_{\text{Hawking}}}{\sqrt{f(r)}} \quad (3.4)$$

Ovakav se rezultat dobije iz razmatranja kako stanje bez čestica evoluira iz prošle svjetlosne beskonačnosti u buduću svjetlosnu beskonačnost, u prostorvremenu u kojem postoji crna rupa. Ključno je ustanoviti da buduća svjetlosna beskonačnost nije potpuna Cauchyjeva ploha, i da stoga ne može sadržavati potpunu informaciju o stanju polja, jer je dio prošao kroz horizont. Kako je opaženo stanje u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti isprepletano s onim koje je upalo u unutrašnjosti crne rupe, ono što se detektira je termalni (maksimalno miješani) spektar, dan izrazom:

$$\langle \text{in} | N_{\text{out}}(\omega) | \text{in} \rangle = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} \mp 1} \quad (3.5)$$

gdje predznak \pm ovisi o tome radi li se o bozonima ili fermionima, M je masa crne rupe, a ω je frekvencija na kojoj je detektirano zračenje.

Ovaj rezultat, nakon usporedbe s Bose-Einstein ili Fermi-Dirac distribucijom $\frac{1}{e^{\beta\omega} \mp 1}$, nalaže da temperatura zračenja iznosi: $\beta = \frac{1}{T} = 8\pi M$, tj. točno Hawkingov rezultat. Nadalje, može se pokazati [26] da (do na aproksimacije i pretpostavke u Hawkingovom računu) ne postoje ni korelacije između različitih modova Hawkingovog zračenja:

$$\langle \text{in} | N_{\omega}^{\text{out}} N_{\omega'}^{\text{out}} | \text{in} \rangle = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} \mp 1} \frac{1}{e^{8\pi M\omega'} \mp 1} \quad (3.6)$$

Takve korelacije bi predstavljale odstupanje od termalnog spektra i smanjile bi von Neumannovu entropiju Hawkingovih čestica, što bi po definiciji (2.44) ukazivalo na prijenos informacije.

Kako Hawkingov račun nema te korelacije, slijedi da je Hawkingovo zračenje opisano termalnom matricom gustoće:

$$\rho_{\text{Termalno}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad (3.7)$$

te ono (bar do na aproksimacije korištene u Hawkingovom izvodu) ne prenosi infor-

maciju.

Intuitivna slika Hawkingovog zračenja je da se kvantne fluktuacije u blizini horizonta manifestiraju kao tvorba virtualnih parova. Unutar horizonta crne rupe se smiju pojaviti čestice negativne mase (što je posljedica okretanja svjetlosnih stožaca pri prelasku horizonta crne rupe), a izvan horizonta se moraju pojaviti čestice pozitivne mase. Takve dvije čestice su razdvojene horizontom crne rupe, i u principu postoje geodezici koji im se ne sijeku. Pozitivno energetska par odlazi u asimptotsku beskonačnost, gdje je detektiran kao Hawkingovo zračenje, a negativno energetska par upada u crnu rupu i smanjuje joj masu.

Jedan od posljedičnih rezultata Hawkingovog efekta je da ako je crna rupa u vakuumu gdje ništa ne upada u nju, ona će se smanjivati, i nakon dovoljno vremena moguće je da će kompletno nestati. Efekt se može heuristički izvesti Stefan-Boltzmannovim zakonom:

$$P = \frac{dM}{dt} = -\sigma AT^4 \propto -(2M)^2 \left(\frac{1}{8\pi M}\right)^3 \propto -\frac{1}{M^2} \quad (3.8)$$

što daje izraz tipa:

$$M(t) = M_0 \left(1 - \left(\frac{t}{t_{\text{isparavanja}}}\right)^3\right)^{1/3} \quad (3.9)$$

Konačno vrijeme evaporacije dano je s $t_{\text{isp}} = \frac{t_P}{3\beta} \left(\frac{M_0}{m_P}\right)^3$, gdje su $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$ i $m_P = \hbar c/G$ Planckovo vrijeme, i Planckova masa. Ovo vrijeme je izrazito veliko, i za crne rupe mase Sunca, vrijeme evaporacije je reda veličine 10^{60} godina; značajno duže od očekivanog vremena života svemira od $< 10^{20}$ godina.

U vidu evaporacije, brzo se uviđa sukob s drugim zakonom mehanike crnih rupa, koji tvrdi da se površina crne rupe strogo povećava ili ostaje ista. Spas je ponovno u Bekensteinovom poopćenom zakonu termodinamike, koji nalaže da površina crne rupe + entropija ostatka svemira uvijek raste. Krupnozrnata termodinamička entropija emitiranog Hawkingovog zračenja dovoljno kompenzira za smanjenje površine crne rupe i ponovno nemamo problema.

Kako sad imamo eksplicitan izraz za Hawkingovu temperaturu, iz korespondencije prvog zakona mehanike crnih rupa s zakonima termodinamike se može dobiti i eksplicitna formula za entropiju crne rupe, tj. možemo točno podijeliti onaj faktor

$\frac{1}{8\pi}$:

$$S_{\text{Crne Rupe}} = \frac{1}{4}A \sim \frac{1}{4} \frac{A}{l_P^2} \quad (3.10)$$

gdje je A površina crne rupe (izražena u jedinicama Planckove duljine na kvadrat), a l_P je Planckova duljina.

Ova se jednadžba zove *Bekenstein-Hawkingova entropija* crne rupe.

U vidu principa ekvivalencije, bitan je i efekt Unruh temperature, koji nalaže da promatrač koji akcelerira konstantnom akceleracijom a u ravnom Minkowski prostoru, i stoga prati Rindler putanju, vidi vakuumsko stanje s konačnom temperaturom danom izrazom:

$$T_{\text{Unruh}} = \frac{a}{2\pi} \quad (3.11)$$

Ovo je u slaganju s rezultatom Hawkingove temperature za izrazito velike crne rupe za koje je područje oko horizonta dobro aproksimirano Minkowskijevim prostorom. U tom se slučaju može primijeniti ranije spomenut (Dodatak B, jednadžba B.3.4) limes Schwarzschild→Rindler, i može se zaključiti da obje temperature pokazuju ponašanje $1/\sqrt{f(r)}$ u blizini horizonta.

Ugrubo, Unruh efekt se treba shvatiti kao efekt ekvivalentan Hawkingovom zračenju, koji se javlja kao posljedica principa ekvivalencije za akcelerirane Minkowskijeve promatrače. Iako Unruhov efekt nećemo eksplicitno koristiti, ponekad ćemo u Rindler prostorvremenu spomenuti Hawkingovo zračenje. U tim se situacijama misli na Unruhov efekt.

3.2.2 Kvantna teorija polja u zakrivljenom prostorvremenu, ukratko

Ovo potpoglavlje slijedi [24, 26].

U kvantnoj teoriji polja, polje je predstavljeno nizom vezanih harmoničkih oscilatora, na različitim položajima u prostorvremenu, ili alternativno, s različitim valnim vektorima tj. frekvencijama.

Akcija masivnog skalarnog polja je dana s:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x [\eta^{\mu\nu} \phi(x)_{,\mu} \phi(x)_{,\nu} + m^2 \phi(x)^2] \quad (3.12)$$

ili u impulsnom prostoru; nakon Fourierovog transformata:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dt d^3k [-\phi_{\mathbf{k},0}\phi_{-\mathbf{k},0} + (k^2 + m^2)\phi_{\mathbf{k}}\phi_{-\mathbf{k}}] \quad (3.13)$$

za koje je jednadžba gibanja razvezana od ostalih oscilatora:

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_{\mathbf{k}}(t) + (k^2 + m^2)\phi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (3.14)$$

Za kvantizaciju polja je obično pogodniji formalizam Hamiltonijana; impuls se definiran s $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}$, a Hamiltonijan glasi:

$$\int d^3x \mathcal{H} \equiv \int d^3x (\pi \cdot \phi_{,0} - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d^3x (\phi_{,0}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2) \quad (3.15)$$

ili do na predznak:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x (\phi_{,0}(x)^2 + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi(x)^2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (\pi(x)^2 + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi(x)^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

U impulsnom prostoru, nakon Fourierovih transformacija ϕ i π imamo:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (\pi_{\mathbf{k}}(t)\pi_{-\mathbf{k}}(t) + \omega_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}}(t)\phi_{-\mathbf{k}}(t)) \quad (3.17)$$

gdje je $\omega_{\mathbf{k}} = k^2 + m^2$.

Kanonska kvantizacija se onda provodi tako da se varijable promoviraju u operatore koji zadovoljavaju kanonske komutacijske relacije:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t')]|_{t=t'} &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t')]|_{t=t'} &= 0 \\ [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t')]|_{t=t'} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

ili u impulsnom prostoru: $[\phi_{\mathbf{k}}(t), \pi_{\mathbf{k}'}(t)] = i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$.

Obično se uvode i operatori podizanja i spuštanja:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\mp}(t) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\hat{\phi}_{\pm\mathbf{k}} \pm \frac{i\hat{\pi}_{\pm\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right) \quad (3.19)$$

koji zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[a_{\mathbf{k}}^{-}(t), a_{\mathbf{k}'}^{+}(t)] = \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (3.20)$$

$$[a_{\mathbf{k}}^{\pm}(t), a_{\mathbf{k}}^{\pm}(t)] = 0 \quad (3.21)$$

Vremenska evoucija ovih operatora u Heisenbergovoj slici glasi:

$$a_{\mathbf{k}}^{\pm}(t) = a_{\mathbf{k}}^{\pm}(0)e^{\pm i\omega_{\mathbf{k}}t} \quad (3.22)$$

Koristeći operatore podizanja i spuštanja, Hamiltonijan poprima jednostavan oblik:

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{-}(t) + \frac{1}{2}\delta^3(0)] \quad (3.23)$$

Hilbertov prostor višečestičnih stanja se onda gradi standardnom procedurom:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \left[\prod_s \frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}_s}^{+})^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} \right] |0\rangle \quad (3.24)$$

a vakuumsko stanje je određeno uvjetom:

$$a_{\mathbf{k}}^{-} |0\rangle = 0 \quad (3.25)$$

Invertiranjem definicije (3.19) te korištenjem izraza (3.22), za $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t)$ se dobije:

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{-} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}) \quad (3.26)$$

ili nakon Fourier transformiranja u \mathbf{x} -prostor:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{-} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \quad (3.27)$$

Ovo je standardna ekspanzija operatora polja u modove.

Općeniti modovi

Za općenite jednačbe gibanja (analogne (3.14)), umjesto eksponencijalnih funkcija u definiciji polja moraju se pojaviti općenite funkcije – (v_k); modovi – koje ih rješavaju:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{\mathbf{k}}^*(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}^- e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + v_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \quad (3.28)$$

Po Hamiltonovim jednačbama gibanja, uzimanjem vremenske derivacije ovako zadanog polja daje izraz za π . Zahtijevanjem da zadovoljavaju (3.18), proizlazi uvjet:

$$\dot{v}_{\mathbf{k}}(t) v_{\mathbf{k}}^*(t) - \dot{v}_{\mathbf{k}}^*(t) v_{\mathbf{k}}(t) = 2i \quad (3.29)$$

koji se može shvatiti kao normalizacijski uvjet na modove.

Bogoljubovljeve transformacije

Od sad nadalje, notacija za operatore podizanja i spuštanja će se pojednostavniti, u interesu čitljivosti; indeksi i, j, k, \dots će predstavljati modove različitih frekvencija, a ovisnosti o varijablama se neće pisati osim kad je eksplicitno potrebno.

Modovi v nisu potpuno jedinstveno određeni samo činjenicom da zadovoljavaju jednačbu gibanja (3.14) i normalizacijski uvjet (3.29).

Dobar zapis nekog polja glasi:

$$\phi = \sum_k (a_k v_k + a_k^\dagger v_k^*) \quad (3.30)$$

gdje \sum_k predstavlja prikladnu sumacijsku proceduru; u ovom slučaju integraciju. Uzme li se sad linearna transformacija:

$$u_i = \sum_k (\alpha_{ik} v_k + \beta_{ik} v_k^*) \quad (3.31)$$

za koju slijedi da mora zadovoljiti normalizacijski uvjet (3.29):

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \quad (3.32)$$

Ovako definirani modovi i dalje zadovoljavaju i jednačbu gibanja (3.14) (po svojstvu linearnosti) i uvjet normalizacije (3.29), isto kao i modovi v .

Polje se u bazi modova u može zapisati, ako se definiraju novi operatori podizanja

i spuštanja:

$$b_k = \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij}^* a_j^\dagger) \quad (3.33)$$

Polje u novoj bazi modova u glasi:

$$\phi = \sum_k (b_k u_k + b_k^\dagger u_k^*) \quad (3.34)$$

Transformacija modova dana u izrazu (3.31) se zove Bogoljubovljeva transformacija i odgovara promjeni baze vektorskog prostora.

Općenita Bogoljubovljeva transformacija miješa modove različitih frekvencija, kao što se vidi iz matričnog oblika α_{ik} i β_{ik} , ali često se u praktičnim situacijama koriste dijagonalni oblici.

Kvantizacija u zakrivljenom prostoru

Kvantizacija u zakrivljenom prostoru se provodi u kompletnoj analogiji sa slučajem ravnog prostorvremena, uz primjenu procedure minimalnog vezanja [7] [9]:

- Zamjene se svi η_{ab} s $g_{ab}(x)$.
- Obične parcijalne derivacije se zamjene kovarijantnim derivacijama.
- U integralima se umjesto d^4x koristi kovarijantni volument $d^4x\sqrt{-g}$, gdje je g determinanta metrike.

Nakon ranije navedenih zamjena minimalnog vezanja, za potrebe kvantizacije onda još treba odrediti jednadžbe gibanja te definirati modove i operatore podizanja i spuštanja, ali ispasti će da postoje dodatne suptilnosti koje daju vrlo netrivialne efekte (specifično, koje generiraju samo Hawkingovo zračenje).

U jednadžbama gibanja, efekt ne-Minkowskijeve geometrije se obično manifestira u efektivnom potencijalu koji polje osjeća:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dr_*^2} \right) \phi(x) + m_{\text{eff}}^2(x) \phi(x) = 0 \quad (3.35)$$

Specifično u slučaju Schwarzschildove pozadine, za bezmaseno polje dobije se:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dr_*^2} \right) \phi + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) \phi = 0 \quad (3.36)$$

gdje je r_* takozvana *kornjačina koordinata*, za koju vremensko-radijalni dio metrike

poprima konformno ravan oblik: $(1 - \frac{2M}{r})(-dt^2 + dr_*^2)$.

Kako imamo jednadžbu gibanja, čija su rješenja modovi, sada bismo htjeli provesti kvantizaciju polja ϕ uvođenjem skupa operatora podizavanja i spuštavanja, koji će nam omogućiti raspis polja po modovima. Tu nailazimo na problem - jedno od osnovnih svojstava kvantizacije na zakrivljenim pozadinama je da Cauchyjev problem nije uvijek dobro zadan, i da ponekad treba paziti da se zapravo radi s potpunom Cauchyjevom plohom. Za detaljniji pregled Cauchyjevog problema u općoj teoriji relativnosti vidi [8], poglavlje 3.

Definicija 3.1. Cauchyjeva ploha

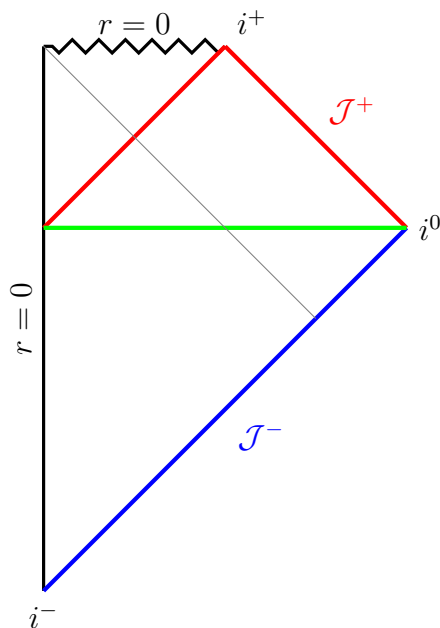
Cauchyjeva ploha je hiperploha u prostorvremenu kroz koju svaka kazualna (vremenska ili svjetlosna) krivulja, koju je nemoguće produžiti, prolazi jednom i samo jednom.

U ovoj definiciji uvjetom da je danu krivulju nemoguće produžiti se izbjegavaju slučajevi kao u Schwarzschildovom prostorvremenu gdje postoji koordinatni singularitet na kojem se čini da geodezici moraju stati.

Intuicija oko Cauchyjevih ploha jest da one efektivno služe kao "trenutak u vremenu" i posljedično vrijedi da je za Cauchyjev problem dovoljno na njima zadati početne vrijednosti polja (iznose, derivacije, etc.) kako bi problem bio dobro zadan.

Cauchyjeve plohe se lako mogu zadati na Carter-Penrose dijagramu, jer je konforman i stoga se odmah može očitati kauzalan odnos između točaka. Odabir se onda svodi na izbor plohe tako da skup svih svjetlosnih i vremenskih krivulja koje prolaze kroz tu plohu pokrivaju ostatak prostorvremena, tj. kroz koju svaki geodezik prolazi jednom. Dobri primjeri takvih ploha su recimo linija $u = -v$, koja predstavlja liniju istovremenih prostornih događaja u $t = 0$; zatim prošla svjetlosna beskonačnost i konačno buduća svjetlosna beskonačnost + budući horizont crne rupe.

Drugi ključni aspekt kvantizacije na zakrivljenoj pozadini je da se, ovisno o izboru Cauchyjeve plohe, ne može jednoznačno definirati što je stanje s česticom, a što stanje bez čestica. Uzrok tome je ugrubo što ne postoji jednoznačna definicija vremenske varijable pa se različiti promatrači mogu drastično razilaziti u svojim definicijama vremena i frekvencije. Posljedično je nemoguće jedinstveno definirati modove i stoga operatore podizanja i spuštavanja kojima se grade stanja s česticama u Hilbertovim prostorima različitih promatrača.



Slika 3.1: Penrose dijagram crne rupe koja nastaje kolapsom materije (sivo). Pri-
kazuje tri nezavisne Cauchyjeve plohe, označene crveno, zeleno i plavo. Da je ovo
vječna crna rupa, imala bi prošli horizont iz kojeg bi u principu bilo što moglo izaći,
i ovakav bi dijagram bio nepotpun, kao i njegove Cauchyjeve plohe.

Ipak, u stacionarnim prostorvremenima, vremensko Killingovo polje daje univer-
zalnu definiciju vremenske varijable i situacija je spašena. Kao prototipičan primjer,
možemo uzeti gore definirani potencijal za Schwarzschildovo prostorvrijeme (izraz
(3.36)). Može se vidjeti da je takva definicija t kao vremenske varijable dobra jer po-
tencijal u $r = \infty$ teži u 0, kao $V \sim \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$, a varijabla r_* tamo također teži u varijablu
 r sfernog Minkowskijevog prostora, kao $r_* = r + \mathcal{O}(\ln r)$. Stoga se valna jednažba
u Schwarzschildovom prostorvremenu (3.36), za Cauchyjeve plohe koje se nalaze u
 $r = \infty$, svodi na običnu Klein-Gordon jednažbu gibanja u Minkowskijevom pros-
toru, kako bi se i očekivalo.

Napomena 3.2. Potencijal također iščezava u blizini $r = 2M$ i stoga ako se nala-
zimo dovoljno blizu horizonta, i ako je crna rupa dovoljno velika da se ne osjete
velike plimne sile, jednažbe gibanja se ponovno reduciraju na Klein-Gordonovu jed-
nažbu, sada u limesu $r = 2M$. Ključna razlika u odnosu na slučaj asimptotske
beskonačnosti je da se sad varijabla r_* ne reducira na varijablu r , i stoga su rješenja
nešto drugačija (razlika se svodi na zamjenu $r \rightarrow r^*$).

Dodatne potankosti nastaju u prostorvremenima, poput onog koje mi proma-

tramo, u kojima se događa kolaps jer ona nisu sasvim stacionarna. Spas za te slučajeve je u tome što ako je materija koja upada u crnu rupu donekle lokalizirana, svjetlosne beskonačnosti se još uvijek mogu shvatiti kao asimptotske Minkowskijevoj, i Schwarzschildovoj, jer opisuju prostor jako daleko od crne rupe, jako davno, prije nego je išta počelo upadati u crnu rupu; ili jako kasno, nakon što je već sve upalo. U tom smislu se onda ponovno dobiva dobar opis crne rupe pomoću Klein-Gordonovih jednadžbi gibanja koje je trivijalno riješiti; samo sada u Minkowskijevom odnosno Schwarzschildovom prostorvremenu.

3.2.3 Kratak opis izvoda Hawkingovog zračenja

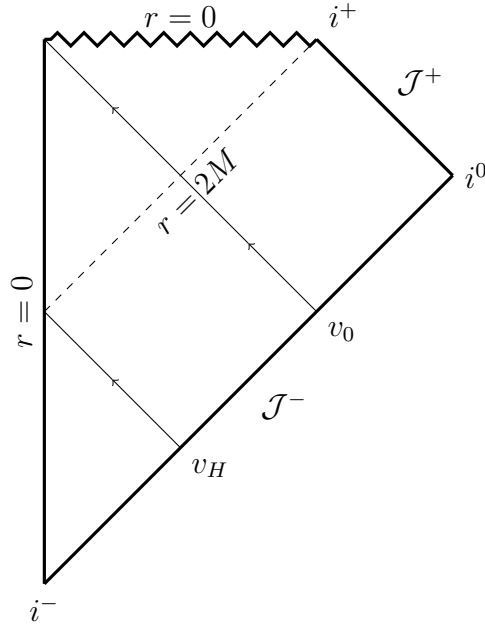
Ovo potpoglavlje prati [26].

Osnova Hawkingovog efekta je promatrati kolapsirajuću crnu rupu i posljedično izlazno zračenje u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti. Izvod se radi s kvantiziranim poljima na fiksnoj zakrivljenoj pozadini.

Svi izračuni se rade u **aproksimaciji jake geometrije** gdje ne postoji reakcija metrike na energiju kvantnih polja koja se propagiraju u prostorvremenu. Ovo je valjano, dok god vrijedi da je karakteristična energijska skala geometrije, u ovom slučaju određena masom crne rupe M , značajno veća od energijske skale perturbacije, u ovom slučaju gustoće energije Hawkingovog zračenja. Konkretni faktor koji kontrolira zakrivljenost proizlazi iz kvantne teorije polja je dan s: $\frac{m_P}{M} \ll 1$, što je svakako zadovoljeno za sve realistične astrofizikalne crne rupe.

U izvodu se promatra prostorvrijeme koje evoluira u vremenu. Počinje kao prazno Minkowskijevo prostorvrijeme u kojem postoji radijalno upadajuć snop materije mase M koji putuje iz prošle svjetlosne beskonačnosti prema ishodištu. Ta materija u nekom trenutku upada u ishodište i tvori Schwarzschildovu crnu rupu (radi jednostavnosti) mase M te je prostorvrijeme od tog trenutka pa do buduće vremenske beskonačnosti Schwarzschildovo prostorvrijeme. Radi se u Kruskal-Szekeres koordinatama, i trenutak u kojem se materija pojavi zovemo $v = v_0$. Radi jednostavnosti promatramo puls materije koji je savršeno lokalizirano u trenutku v_0 . Ovo nije preterano pojednostavnjenje, kao što se može vidjeti iz argumenata iz [26].

Nadalje, trenutak v_H definira trenutak kad nastane horizont crne rupe. Svjetlosne zrake koje upadaju u ishodište $r = 0$ nakon v_H ne mogu više izbjeći singularitet i pobjeći u buduću svjetlosnu beskonačnost.



Slika 3.2: Slika prostora vremena za koje radimo Hawkingov izvod. v_0 predstavlja upadajuću materiju, a v_H predstavlja zadnju vrijednost varijable v za koju će upadajuće svjetlosne linije uspjeti izbjeći singularitet.

Izvod se događa na dvije Cauchyjeve plohe (Slika 3.2.2); jedna pokriva prošlu svjetlosnu beskonačnost I^- (plavo) Minkowskijevog prostora vremena, a druga pokriva buduću svjetlosnu beskonačnost I^+ i buduću horizont H^+ (crveno) Schwarzschildovog prostora vremena. Jednadžbe gibanja (3.36) se na tim Cauchyjevim plohamo reducira na Klein-Gordon jednadžbe, jer potencijal na njima iščezava, kao što je ranije argumentirano.

Specifično, na I^- imamo Minkowskijevu metriku, i stoga konvencionalnu Klein-Gordon jednadžbu:

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2)\phi = 0 \quad (3.37)$$

ili u Rindler koordinatama (vidi poglavlje B.3.3 za detalje) $t \pm r = (\tilde{u}, \tilde{v})$,

$$\partial_{\tilde{u}}\partial_{\tilde{v}}\phi = 0 \quad (3.38)$$

koje su analogne Kruskal-Szekeres koordinatama za ravno prostora vrijeme.

Na I^+ Cauchyjevoj plohi, sa Schwarzschildovom metrikom u Kruskal-Szekeres koor-

dinamika jednačina gibanja je također Klein-Gordonovog oblika:

$$\partial_u \partial_v \phi = 0 \quad (3.39)$$

U oba slučaja, rješenje jednačine glasi: $\phi = A(u \text{ ili } \tilde{u}) + B(v \text{ ili } \tilde{v})$ gdje su A i B proizvoljne funkcije. Analogno se dobiva i rješenje na horizontu, ali ono nam neće eksplicitno trebati.

Nakon provođenja kvantizacije polja, dobivamo oblik (3.28), gdje su funkcije modova određene gornjim jednačinama.

Na I^- plohi, Hilbertov prostor se definira operatorima podizanja i spuštavanja $a^{in}, a^{in\dagger}$ pridruženim modovima u^{in} (koje naravno treba razlikovati od Kruskal-Szekeres varijable po indeksu i kontekstu u kojem se pojavljuju). Zapis polja onda glasi:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_i (a_i^{in} u_i^{in} + a_i^{in\dagger} u_i^{in*}) \\ &= \sum_i a_i^{in} u_i^{in} + \text{hermitski konjugirani članovi (h.k.)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Vakuumsko stanje na I^- je određeno kao stanje anihilirano operatorom a^{in} : $a^{in}|in\rangle = 0$, a pobuđena stanja se grade standardno.

S druge strane, na plohama I^+ i H^+ situacija je nešto složenija. Hilbertov prostor nije potpun ako se uzme samo jedan skup operatora podizanja i spuštavanja $a^{out}, a^{out\dagger}$ s nosačem na I^+ . Treba se još dodatno uzeti skup operatora $a^{hor}, a^{hor\dagger}$ s nosačem na H^+ , koji komutiraju s onima na I^+ . Razlog za to je, intuitivno govoreći, što polje na I^- ima neku gustoću energije, dio koje može upasti kroz horizont. Stoga taj dio polja može nositi čestice, koje ne mogu biti opisane asimptotskim modovima u I^+ zbog fundamentalno drugačije definicije vremenske koordinate u unutrašnjosti crne rupe. Potpun skup modova je onda u^{out} na I^+ te u^{hor} na H^+ , a zapis potpunog polja glasi:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_i (a_i^{out} u_i^{out} + a_i^{out\dagger} u_i^{out*} + a_i^{hor} u_i^{hor} + a_i^{hor\dagger} u_i^{hor*}) \\ &= \sum_i (a_i^{out} u_i^{out} + a_i^{hor} u_i^{hor} + \text{h.k.}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ovdje postoje dva vakuumska stanja, $|out\rangle$ anihilirano a^{out} operatorima (Boluware vakuum) i $|hor\rangle$ anihilirano a^{hor} operatorima (Kruskal vakuum). Ova stanja odgovaraju stanjima bez čestica kako ih vide promatrači na I^+ i H^+ ; i oni se generalno

ne slažu. Slično, oni se generalno ne slažu ni s promatračem na prošloj Cauchyjevoj plohi I^- , definiranim s a^{in} koji vidi vakum $|in\rangle$, i baš ta nesloga je izvor Hawkingovog efekta.

u^{in} je kompletna baza rješenja (jer je zadana na kompletnoj Cauchyjevoj plohi), baš kao i u^{out} , u^{hor} ; i stoga mora postojati transformacija koja transformira jednu kompletnu bazu u drugu. Ta se transformacija može zapisati pomoću ranije spomenutih (izraz (3.31)) Bogoljubovljevih transformacija:

$$\begin{aligned} u_i^{out} &= \sum_k (\alpha_{ik} u_k^{in} + \beta_{ik} u_k^{in*}) \\ u_i^{hor} &= \sum_k (\gamma_{ik} u_k^{in} + \eta_{ik} u_k^{out*}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Veze između koeficijenata se onda dobiju propagiranjem rješenja kroz zakrivljeno prostorvrijeme i povezivanjem na plohi $v = v_0$ gdje se dešava puls materije i time prijelaz iz Minkowskijevog u Schwarzschildovo prostorvrijeme. Za slučaj Hawkingovog zračenja niti jedan od koeficijenata neće iščezavati (detalji u [26]).

Ove se transformacije mogu invertirati da se dobiju veze između operatora podizanja i spuštanja u I^- i I^+ , a konačni izraz je oblika:

$$a_i^{out} = \sum_k (\alpha_{ik}^* a_k^{in} - \beta_{ik}^* a_k^{in\dagger}) \quad (3.43)$$

Operator broja čestica na budućoj svjetlosnoj beskonačnosti je dan izrazom:

$$\begin{aligned} N_i^{out} &= a_i^{out\dagger} a_i^{out} = \sum_{k,l} (\alpha_{ik} a_k^{in\dagger} - \beta_{ik} a_k^{in}) (\alpha_{il}^* a_l^{in} - \beta_{il}^* a_l^{in\dagger}) \\ &= \sum_{k,l} \alpha_{ik} \alpha_{il}^* a_k^{in\dagger} a_l^{in} + \beta_{ik} \beta_{il}^* a_k^{in} a_l^{in\dagger} - \alpha_{ik} \beta_{il}^* a_k^{in\dagger} a_l^{in\dagger} - \beta_{ik} \alpha_{il}^* a_k^{in} a_l^{in} \\ &= \sum_k (|\alpha_{ik}|^2 a_k^{in\dagger} a_k^{in} + |\beta_{ik}|^2 a_k^{in} a_k^{in\dagger} - \alpha_{ik} \beta_{ik}^* a_k^{in\dagger} a_k^{in\dagger} - \beta_{ik} \alpha_{ik}^* a_k^{in} a_k^{in}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ovaj operator predstavlja mjerni uređaj u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti, koji ne opaža čestice u vakuumskom stanju pripremljenom lokalno. S druge strane, za vakuusko stanje pripremljeno na I^- , ovaj operator će generirati konačan doprinos,

zbog crveno označenog člana:

$$\langle in | N_i^{out} | in \rangle = \sum_k |\beta_{ik}|^2 \neq 0 \quad (3.45)$$

Ostatak računa Hawkingovog zračenja se sastoji od eksplicitnog računanja β_{ik} , i nije pretjerano poučan, pa detalje izostavljamo [26], a komentirat ćemo samo bitne aspekte.

Jedan od ključnih dijelova računa je **aproksimacija geometrijske optike**, koja nalaže da se potencijal iz jednadžbe (3.36) može zanemariti apsolutno svugdje u prostoru vremenu, a ne samo u blizini horizonta, i u asimptotskoj beskonačnosti. Ova je aproksimacija dobra dok god je energija čestica značajno veća od potencijala, što vrijedi za izrazito visoko energijske čestice, i relativno velike crne rupe za koje je potencijal van horizonta manji.

Hawkingove čestice se u daljnjem računu uzimaju kao one koje "u jako kasnim vremenima stižu do buduće asimptotske beskonačnosti", jer taj limes odgovara česticama koje kad se evoluiraju u nazad (npr. izrazom (3.36)) prolaze tik uz horizont i stoga se da zaključiti da su tamo i nastale. Takvi modovi doživljavaju veliku količinu crvenog pomaka, jer izlaze iz prostora vremena crne rupe putujući uz horizont i stoga za svo detektabilno Hawkingovo zračenje konačnih frekvencija, oni su u dalekoj prošlosti predstavljali modove izrazito visoke frekvencije.

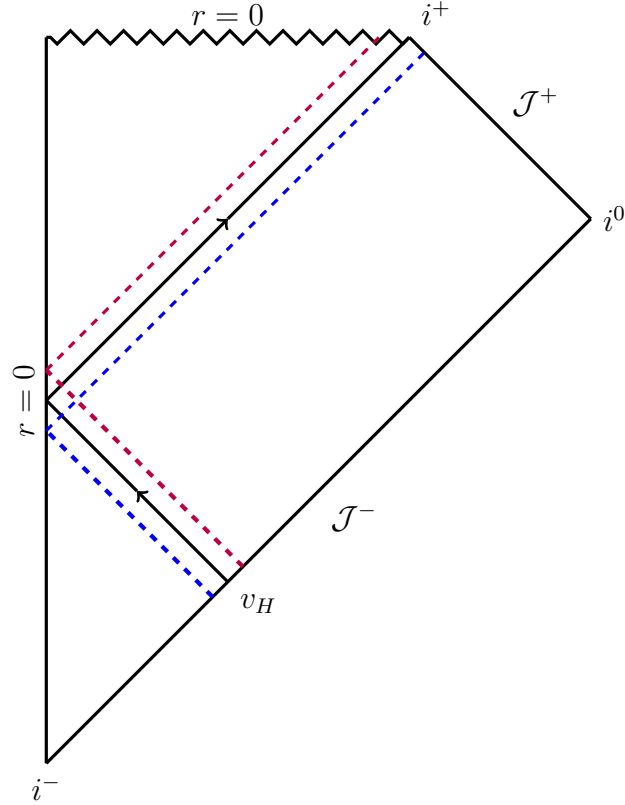
Detaljan račun veze Bogoljubovljevihih koeficijenata preskačemo. Nakon uvođenaj valnih paketa, Wick rotacije, i drugih tehničkih alata, dobije se:

$$|\alpha_{ij}| = e^{4\pi M\omega_i} |\beta_{ij}| \quad (3.46)$$

Iz uvjeta normalizacije (3.32), " $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ ", zatim proizlazi:

$$\langle in | N_i^{out} | in \rangle = \sum_k |\beta_{ik}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega_i} - 1} \quad (3.47)$$

Usporedba s Bose-Einstein statistikom onda daje Hawkingov rezultat.



Slika 3.3: Slika predstavlja čestice koje upadaju u blizini kritičnog trenutka v_H . Ako padnu kroz ishodište nakon tog trenutka (ljubičaste) završe unutar horizonta i u singularitetu, a ako upadnu prije tog trenutka (plave) putuju uz horizont do asimptotske beskonačnosti i izbjegnu singularitet.

3.2.4 Popratni rezultati Hawkingovog izvoda; vakuumi i matrica gustoće

Vrijedi još komentirati vezu između vakuumskih stanja $|in\rangle$ i $|out\rangle$, kao i vakuumskog stanja na horizontu, $|hor\rangle$ [24]. Poanta ovog potpoglavlja je da ilustrira eksplicitnu vezu između stanja bez čestica u svjetlosnoj prošlosti i stanja s česticama u svjetlosnoj budućnosti.

Veza između vakuumskih stanja $|in\rangle$ i $|out\rangle$ se dobije zapisivanjem operatora spuštanja a_k^{in} preko operatora na I^+ , tj. invertiranjem relacije (3.43):

$$a_i^{in} |in\rangle = \sum_j (\alpha_{ji} a_j^{out} + \beta_{ji}^* a_j^{out\dagger}) |in\rangle = 0 \quad (3.48)$$

što nakon množenja s α_{ik}^{-1} daje:

$$(a_k^{out} + \sum_{ij} \beta_{ji}^* \alpha_{ik}^{-1} a_j^{out\dagger}) |in\rangle = 0 \quad (3.49)$$

Sada, definiranjem matrice: $V_{jk} = \sum_i \beta_{ji}^* \alpha_{ik}^{-1}$, dobivamo izraz:

$$a_k^{out} |in\rangle = \sum_j V_{jk} a_j^{out\dagger} |in\rangle \quad (3.50)$$

ili matrično zapisano:

$$\mathbf{a}^{out} |in\rangle = \mathbf{V} \mathbf{a}^{out\dagger} |in\rangle \quad (3.51)$$

Ovdje se može prepoznati jednadžba koja nalikuje definiciji koherentnog stanja za operator spuštanja: $\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, s *operatorski ovisnom svojstvenom vrijednosti*.

Napredovati se može ako se pretpostavi da su vakuumska stanja povezana nekom operatorski ovisnom funkcijom: $|in\rangle = f(\mathbf{a}^{out}, \mathbf{a}^{out\dagger}) |out\rangle$. Uvrštavanje daje:

$$\mathbf{a}^{out} f |out\rangle = ([\mathbf{a}^{out}, f] + f \mathbf{a}^{out}) |out\rangle = \frac{\partial f(\mathbf{a}^{out}, \mathbf{a}^{out\dagger})}{\partial(\mathbf{a}^{out\dagger})} |out\rangle \quad (3.52)$$

gdje se u drugoj jednakosti iskoristilo poznato svojstvo komutatora operatorske funkcije i nekomutirajuće varijable, a $\mathbf{a}^{out} |out\rangle$ propada po definiciji vakuumskog stanja $|out\rangle$. Nadalje, usporedbom s (3.51), dobije se:

$$\frac{\partial f}{\partial(\mathbf{a}^{out\dagger})} |out\rangle = \mathbf{V} \mathbf{a}^{out\dagger} f |out\rangle \quad (3.53)$$

Ova se jednadžba može "integrirati", i daje:

$$f(\mathbf{a}^{out}, \mathbf{a}^{out\dagger}) = \tilde{f}(\mathbf{a}^{out}) \exp\left\{\left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^{out\dagger} \mathbf{V} \mathbf{a}^{out\dagger}\right)\right\} |out\rangle \quad (3.54)$$

Analognim postupkom se za $a^{in\dagger}$ može dobiti jednadžba za $\tilde{f}(\mathbf{a}^{out})$, i ispada konstantan.

Kompletna analiza daje i točan prefaktor, i konačno veza vakuuma glasi:

$$|in\rangle = \langle out|in\rangle \exp\left\{\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} a_i^{out\dagger} a_j^{out\dagger}\right)\right\} |out\rangle \quad (3.55)$$

$|in\rangle$ vakuum je iz perspektive promatrača u dalekoj budućnosti stanje s beskonačnim nizom parova čestica, određenim koeficijentima α i β .

Analogni se postupak može napraviti i u potpunijoj analizi, gdje se u obzir uzmu

i modovi na horizontu a^{hor} . U takvoj analizi, trebaju se izračunati veze između koeficijenata $\alpha, \beta, \gamma, \eta$, te Bogoljubovljeve transformacije (3.42), kao i veza između koeficijenata (3.46). Kombiniranjem svega, dobije se eksplicitan oblik matrice V_{ij} , a rezultat (3.55) se može direktno primijeniti, i imamo:

$$|in\rangle = (\langle out| \otimes \langle hor|) |in\rangle \exp \left\{ \left(\sum_k e^{-4\pi M\omega_k} (a_k^{hor\dagger} \otimes a_k^{out\dagger}) \right) \right\} (|hor\rangle \otimes |out\rangle) \quad (3.56)$$

Raspisivanjem eksponencijalne funkcije i djelovanjem na vakuumsko $|hor\rangle \otimes |out\rangle$ stanje, dobiva se:

$$|in\rangle = (\langle out| \otimes \langle hor|) |in\rangle \prod_k \sum_N e^{-4\pi N M\omega_k} |N_k^{hor}\rangle \otimes |N_k^{out}\rangle \quad (3.57)$$

Zahtijevanjem normalizacije $\langle in|in\rangle = 1$ dobivamo:

$$(\langle out| \otimes \langle hor|) |in\rangle = \prod_k \sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega_k}} \quad (3.58)$$

Smisao ovog izraza je da kvantificira slikovit opis Hawkingovog zračenja kao produkcije parova na horizontu crne rupe. Izraz (3.57) nam govori da stanje I^- vakuuma, iz perspektive promatrača koji promatra tik uz horizont, izgleda kao isprepletano stanje čestica koje upadaju kroz horizont i koje odlaze u buduću svjetlosnu beskonačnost.

Također je bitno napomenuti da se u izvodu (u dobivanju veza između Bogoljubovljevih koeficijenata) koristi limes $v \approx v_H$, što odgovara promatranju "jako kasnih vremena" za izlazno zračenje; ali odgovara promatranju "jako ranih vremena" za čestice koje upadaju u horizont crne rupe. Interpretacija toga je da ovdje postoje korelacije među česticama koje rano upadnu u crnu rupu, i onima koje kasno stignu do buduće svjetlosne beskonačnosti.

Koristeći (3.57) može se dobiti matrica gustoće $|in\rangle \langle in|$ za stanje Hawkingovog zračenja:

$$\rho = \prod_{k,l} \sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega_k}} \sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega_l}} \sum_{N,N'} e^{-4\pi N M\omega_k} e^{-4\pi N' M\omega_l} |N_k^{hor}\rangle \langle N_l^{hor}| \otimes |N_k^{out}\rangle \langle N_l^{out}| \quad (3.59)$$

Ova matrica gustoće je u čistom stanju, i stoga nema entropiju isprepletenosti, ali kao

posljedica toga ima nesretno svojstvo da opisuje stanje s česticama i unutar i izvan horizonta, koja nisu simultano opservabilna.

U fizikalno realističnim situacijama, od interesa nam je računati opservable koje se nalaze van crne rupe, gdje se nalazimo i mi. Ovdje to odgovara budućoj svjetlosnoj beskonačnosti, gdje stiže formirano Hawkingovo zračenje. Stoga onaj dio stanja koji upada u crnu rupu ne možemo pratiti, jer od njega ne dobivamo nikakve signale, i treba ih izbaciti parcijalnim tragom. Trag po $|N_k^{hor}\rangle \langle N_l^{hor}|$ dijelu Hilbertovog prostora daje $\delta_{NN'}\delta_{kl}$ i stoga reducirana matrica gustoće za $|out\rangle$ stanja glasi:

$$\rho_{out} = \text{Tr}_{hor}(|in\rangle \langle in|) = \prod_k (1 - e^{-8\pi M\omega_k}) \sum_N e^{-8\pi NM\omega_k} |N_k^{out}\rangle \langle N_k^{out}| \quad (3.60)$$

što se može interpretirati kao termalna matrica gustoće $\frac{e^{-\beta H}}{Z}$, gdje je ukupni sustav sastavljen od beskonačno mnogo nezavisnih harmoničkih oscilatora različitih frekvencija i stoga se pojavljuje produkt po frekvencijama.

3.2.5 Evaporacija crne rupe

Jedna od posljedica Hawkingovog zračenja, koja će biti ključna za paradoks informacije crnih rupa je svojstvo crne rupe da zrači Hawkingove čestice, i posljedično potpuno nestane - evaporira.

Ovo očito slijedi iz Hawkingovog izvoda jer iz perspektive udaljenost promatrača crna rupa zrači energiju spektrom crnog tijela, temperaturom T_{Hawking} , a ništa tu energiju ne nadomještava. Dakle crna rupa gubi energiju.

Proces evaporacije je dan izrazom [26]:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} |T(\omega, l)|^2 \quad (3.61)$$

gdje je $T(\omega, l)$ transmisijski koeficijent kroz potencijal Schwarzschildovog prostorvremena, često zvan *faktor sivog tijela*, koji smo u ranijoj analizi ignorirali, ali može se jednostavno uključiti [26]. Ovaj izraz je očekivanje energije ω emitiranih Hawkingovih čestica, po Planckovoj distribuciji Hawkingovog spektra.

Uobičajeno ponašanje faktora sivog tijela je da trne eksponencijalno u angularnom momentu l , te da raste približno kao $\omega R_{\text{Schwarzschild}} = 2\omega M$ [26, 34] pa se stoga suma slobodno može ignorirati u dosta dobroj aproksimaciji, i ovaj integral poprima efek-

tivan oblik:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2M^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (3.62)$$

Integrali ovog tipa se standardno računaju u statističkoj fizici pri računima s Plancovim spektrom:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^{\beta x} - 1} = \frac{\pi^4}{15\beta^4} \quad (3.63)$$

što, uz relaciju za Hawkingovu temperaturu $\beta = 8\pi M$ daje:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2M^2}{\pi} \frac{\pi^4}{15\beta^4} = -\frac{1}{30720\pi} \frac{1}{M^2} \approx -\frac{10^{-5}}{M^2} \quad (3.64)$$

Nakon integracije slijedi:

$$t_{\text{evap}} \propto M^3 \quad (3.65)$$

kao što je i najavljeno. Vrijedi ponovno napomenuti da je ova veličina ogromna (reda 10^{60} godina), i da stoga nije operativno korisna za eksperimentalne provjere Hawkingovog zračenja.

3.3 Holografska i kovarijantna ograničenja entropije

Iz razmatranja o crnim rupama može se misaonim eksperimentom osmisliti ograničenje na količinu entropije koju bilo koji dani termodinamički sustav konačne dimenzije može imati.

Zamislimo neku sfernu regiju prostora Γ , s površinom A . Da je Γ Schwarzschildova crna rupa, s površinom A , i stoga s radijusom: $2M = R = \sqrt{A/4\pi}$, onda bi u Γ entropija bila $A/4$. Uzmimo sada neki termodinamički sustav konačne dimenzije, s entropijom S i masom $m \ll M$, koji potpuno stane unutar Γ , koji je ujedno gravitacijski stabilan i ne tvori crni rupu. Zatim, zamislimo da pošaljemo sfernu ljusku materije mase $M - m$ radijalno prema Γ . Kad ta ljuska stigne u Γ , ona će s već postojećim termodinamičkim sustavom stvoriti crnu rupu, koja je sad sasvim određena sa svoja 3 parametra (M, Q, J) (tvrdnja B.6) i ne zna ništa o početnoj konfiguraciji, te ima entropiju $A/4$. Budući da smo na originalni sustav dodali ljusku materije, i

time uveli nove stunjeve slobode te povećali fazni/Hilbertov prostor, konačni sustav obavezno ima entropiju veću od početnog.

Stoga možemo zaključiti sljedeće: *Entropija bilo kojeg sustava koji stane u konačno područje Γ je odozgo ograničena entropijom crne rupe koja obuhvaća područje Γ .*

Ovaj argument zvuči dobro, ali zapravo ima nekih problema; konkretno u područjima svemira gdje se dešava iznimno brza ekspanzija ili kompresija prostorvremena (npr. u vrijeme inflacije nakon velikog praska, ili u blizini nekog "velikog stiska", kao što se dešava u nekim kozmološkim modelima). Generalno, ograničenja entropije na prostornim hiperplohama nisu moguća i treba se definirati generalnije ograničenje na entropiju bazirano na konvergirajućim svjetlosnim ploham. Za detalje vidi [25]. Tako definirano ograničenje na entropiju je "kovarijantno", tj. ne ovisi o promatraču, te se čini kao da je kompletno univerzalno, u smislu da se nije narušeno ni u jednoj fizikalnoj situaciji dopuštenoj u općoj teoriji relativnosti (a i šire), iako nije općenito dokazano da je to slučaj.

Sveukupno, kovarijantno ograničenje entropije se čini kao dobra indikacija da su crne rupe u nekom smislu *objekti maksimalne entropije*, čija je Bekenstein-Hawkingova entropija gornja međa na uobičajenu termodinamičku entropiju sustava koji ju je kolapsom mogao stvoriti. Ovo također ide u prilog poopćenom drugom zakonu termodinamike, koji nalaže da se Bekenstein-Hawkingova entropija treba tretirati kao potpuno ekvivalentna uobičajenoj termodinamičkoj entropiji.

Ovo nam je diskusija bitna jer će nam omogućiti da u sljedećem poglavlju o entropiji unutrašnjosti crne rupe govorimo kao o gornjoj granici na entropiju Hilbertovog prostora koji opisuje kvantno mehanički sustav iz kojeg je crna rupa nastala. Konkretno, poslužit će kao motivacija da se opravda modeliranje unutrašnjosti crne rupe kao kvantno mehaničkog sustava s Hilbertovim prostorom.

4 Problem informacije crnih rupa - 1. dio: Osnovna formulacija

U ovom ćemo poglavlju formulirati problem informacije crnih rupa u elementarnom obliku i navesti tri općenita pristupa njegovog rješavanja. Izložiti ćemo prednosti i mane tih rješenja i objasniti zašto se jedno od rješenja - unitarna evolucija crne rupe u čisto stanje Hawkingovog zračenja - najčešće pretpostavlja kao točno.

[34–36] su moderni pregledni članci koji se bave tematikom koja će biti obrađena u ovom poglavlju.

Pojmovi opisani u ovom poglavlju: *Paradoks informacije crnih rupa, unutrašnjost crne rupe, kvantna mehanika, gubitak informacije, stabilni ostaci, čisto stanje Hawkingovog zračenja, Pageovi rezultati, Pageovo vrijeme*

U uobičajenoj kvantnoj mehanici, svaki sustav opisan čistim stanjem valne funkcije će evoluirati tako da na njega djeluje unitarni operator koji će producirati novo čisto stanje opisano nekom drugom valnom funkcijom. U tom smislu, unitarna evolucija kvantne mehanike čuva informaciju – nikad ne evoluiraju čisto stanje u miješano stanje.

Problem informacije crnih rupa je kontradiktoran toj stavci kvantne mehanike i najjednostavnije se može izreći na sljedeći način: *U prostorvremenu smo u kojem postoji materija mase M koja kolapsira u crnu rupu. Ta materija je u početku u čistom stanju; ostatak svemira je vakuum iz perspektive Minkowskijevog / Schwarzschildovog promatrača. Nakon što se materija u čistom stanju kolapsira, nastaje crna rupa koja će zbog Hawkingovog efekta gubiti masu i nakon dovoljno vremena potpuno će nestati. Sva energija početne materije biti će konvertirana u izlazno Hawkingovo zračenje, koje je po Hawkingovom računu savršeno termalno (do na korištene aproksimacije) i stoga ne može nositi informaciju. Konačno stanje cijelog sustava je Minkowskijevo prostorvrijeme, bez crne rupe, i s puno nekoreliranog Hawkingovog zračenja opisanog matricom gustoće. Čini se da je sva informacija o čistom stanju početnog sustava izgubljena.*

Matematički, kada se kvantna mehanika radi u prostorvremenu s horizontom javlja se neunitarna evolucija iz čistog stanja početne materije u miješano stanje konačnog Hawkingovog zračenja i informacija o početnom sustavu se gubi.

Ovaj misaoni eksperiment i brojna profinjenja se u literaturi obično nazivaju *problem informacije crnih rupa*. Iako je ova formulacija elementarna i laka za razumjeti, malo je nedorečena, tj. nejasno je iz formulacije što je dovoljno pokazati kako bi se problem riješio.

Rješenja ovako izrečenog paradoksa informacije crnih rupa se svode na jednu od tri opcije:

1. Informacija je fundamentalno izgubljena kad crna rupa evaporira.
2. Crna rupa se u nekom formatu stabilizira pred kraj evaporacije i formira se *stabilan ostatak evaporacije*; objekt koji sadrži početnu informaciju.
3. Hawkingovo zračenje odnosi informaciju iz crne rupe nekim mehanizmom male kvantno gravitacijske korekcije ili kao posljedica aproksimacija napravljenih u Hawkingovom izračunu. Evolucija je ipak unitarna.

U znanstvenoj zajednici postoji (većinski) konsenzus da se najsigurnije držati treće opcije i većina popularnih rješenja su upravo mehanizmi kako unitarizirati Hawkingovo zračenje, tj. implementirati smanjenje sitnozrnate entropije (definirane u potpoglavlju 2.3.4) Hawkingovog zračenja na nulu (potpoglavlje (4.1)). U ostatku ovog poglavlja (potpoglavlja (4.3) i (4.4)) ćemo spomenuti neke razloge zašto su prve dvije opcije manje popularne te pokazati neke preliminarne rezultate koji sugeriraju da bi blage modifikacije Hawkingovog spektra mogle dati poželjan rezultat unitarizacije.

Prije nego krenemo na gore navedene slučajeve, treba uvesti pretpostavku koja će se koristiti u argumentima koji slijede - unutrašnjost crne rupe je isprepletena s Hawkingovim zračenjem, i time je dobro opisana nekim kvantno mehaničkim sustavom na Hilbertovom prostoru.

4.1 Unutrašnjost crne rupe mora biti dobro opisana Hilbertovim prostorom

U diskusiji paradoksa informacije trebati ćemo govoriti o ponašanju miješanog stanja Hawkingovog zračenja. Kad se govori o miješanom stanju, pokazat će se potrebno moći nešto reći i o većem sustavu Hawkingovih čestica + ostatka svemira, koji je opisan čistim stanjem. Kako se Hawkingov izvod dešava u potpuno praznom prostoru (nakon kolapsa) u kojem postoje samo crna rupa i Hawkingove čestice,

jedini je izbor da su one isprepletene s crnom rupom, što je u skladu s izrazom (3.57) koji vodi na sličan zaključak.

Razumno je stoga pretpostaviti da je unutrašnjost crne rupe opisana Hilbertovim prostorom, na kojem postoji miješano stanje isprepletено s vanjskim Hawkingovim zračenjem. To je sadržaj pretpostavke najavljene krajem prošlog potpoglavlja.

Ta pretpostavka ima i neke posljedice na interpretaciju entropije crne rupe. Ona kaže da se može govoriti o *stanju na Hilbertovom prostoru u unutrašnjosti crne rupe*. Ovo je u (naizglednom) sukobu s tvrdnjom da je crna rupa savršeno opisana sa samo tri parametra M, Q, J koji točno određuju stanje cijelog sustava.

Ovo se onda može interpretirati kao odnos između makrostanja i mikrostanja termodinamičkog sustava, u kojem je makrostanje opisano s malim brojem makroskopskih parametara M, Q, J koji opisuju "prosječno" stanje brojnih stupnjeva slobode u sustavu, dok je mikrostanje specifično stanje na unutrašnjem Hilbertovom prostoru koje vanjski promatrač ne može razlučiti.

Takva interpretacija crnih rupa je u slaganju s ranijom indikacijom (potpoglavlje 3.3) da su crne rupe u nekom smislu granični slučajevi termodinamičkih sustava, gdje se sad mikrostanje ne može razlučiti; ne samo u principu, zbog eksperimentalnih ograničenja, već i sasvim doslovno, jer je unutrašnjost skrivena iza horizonta za vanjskog promatrača.

Bekenstein-Hawkingova entropija crne rupe u ovom kontekstu poprima standardnu termodinamičku interpretaciju razine degeneracije mikrostanja za dano makrostanje.

Ovo naravno nije univerzalno prihvaćena hipoteza i svakako ima rješenja problema informacija koja mu se direktno protive (npr. stabilni ostaci evaporacije koje ćemo spomenuti u potpoglavlju 4.3), no u većini rješenja koja ćemo razmatrati se uzima kao pretpostavka. Stoga ćemo dalje u radu učiniti isto, osim u primjerima gdje eksplicitno ne navedemo suprotno.

Sada smo spremni krenuti na prvu od tri predložena rješenja paradoksa: prihvaćanje gubitka informacije. U njemu se pretpostavka uvedena u ovom potpoglavlju neće koristiti, no pojaviti će se u potpoglavljima koja slijede kasnije.

4.2 Prihvaćanje gubitka informacije

Hawking je nakon otkrića zračenja crnih rupa i prvih formulacija paradoksa zagovarao fundamentalan gubitak informacije neunitarnom evolucijom matrice gustoće iz čistog stanja u miješano [40]. Prijedlog je bio da se evolucija dešava pomoću *dolar matrice* $\$$, također zvane *matrica super raspršenja* (eng. *superscattering matrix*).

Operator $\$$ zadovoljava svojstvo neunitarne evolucije u smislu:

$$\text{Tr}\{\rho^2\} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tr}\{(\$ \rho)^2\} \neq 1 \quad (4.1)$$

i manifestira se kao popravka na uobičajenu evoluciju matrice gustoće (preuzeto iz [39], stranica 383., izraz (1.4)):

$$\partial_t \rho = i[\rho, H] + \delta H \rho \quad (4.2)$$

gdje je δH dodatni član koji predstavlja popravku na uobičajenu evoluciju i djeluje kao linearna transformacija na operator ρ .

Razvoj potpune teorije modificirane kvantne mehanike s neunitarnom evolucijom je složen posao i prepuštamo ga literaturi [39], pogotovo jer nam u ostatku rada neće trebati.

Ipak, problemi nastaju kad se takva teorija potpuno razradi [41], kao što se i očekuje za bilo koju teoriju koja mijenja neku od osnovnih pretpostavki kvantne mehanike. Između ostalog, tako fundamentalna promjena morala bi imati posljedice i na uobičajenu kvantnu mehaniku koja se može raditi u laboratoriju; posljedice koje se ne opažaju. Na primjer, kad se radi s $\$$ -matricom, mogu se pojaviti izolirani sustavi u kojima nije sačuvana energije [41].

Pod uvjetom da se vjeruje da je prava teorija kvantne gravitacije holografska, dodatna potvrda da neunitarna evolucija vjerojatno nije pravi put je sukob s AdS/CFT dualnosti, koja nalaže da je teorija gravitacije dualna nekoj baždarnoj teoriji. Crna rupa odgovara nekom stanju na Hilbertovom prostoru konformne teorije polja koje svakako unitarno evoluiraju pa stoga i crna rupa mora unitarno evoluirati. Može se argumentirati da bi ovo trebalo vrijediti i na asimptotski ravnim prostorvremenima [35, 69].

4.3 Stabilizacija crne rupe na Planckovoj skali i stabilni ostaci

Jedna opcija kojom se gubitak informacije može pokušati izbjeći je da se uvidi da efektivna teorija polja i specifično Hawkingov račun prestaju biti valjani kada je crna rupa iznimno mala; konkretno kad joj je masa približno Planckove skale (10^{-35} m, tj. 10^{-8} μ kg). Za tako malu crnu rupu, područje oko horizonta bi moralo biti dovoljno blizu singularitetu da bude u režimu kvantne gravitacije i stoga svi klasični računi prestaju biti valjani.

Budući da je nepoznata točna teorija kvantne gravitacije ne znamo točno što se tamo dogodi, ali jedna mogućnost je svakako da se *crna rupa stabilizira i prestane evaporirati*. Takve stabilne crne rupe Planckove dimenzije nazivamo *stabilnim ostacima* (evaporacije) (eng. *stable remnants*).

Pretpostavimo li formaciju stabilnih ostataka, gubitka informacije nema; ona je samo sadržana iza horizonta i stoga je nedostupna vanjskim promatračima, ali još uvijek je tu. Ako netko uskoči u takvu crnu rupu (zanemarujući problem promatrača dimenzije Planckove duljine) moći će joj u principu pristupiti [55, 56].

Jedan elementaran problem je što smo u kolapsu u stabilan ostatak mogli početi od objekta koji je u početku bio proizvoljno velik i stoga imao proizvoljno veliku Bekenstein-Hawkingovu entropiju. Stabilni ostaci stoga moraju imati beskonačan broj kvantnih mikrostanja kako bi mogli podržati tako visoku entropiju, a to ima loše posljedice na njihovo ponašanje u kvantnoj teoriji polja. Specifično, uzrokovalo bi da amplituda tvorbe takvih virtualnih parova divergira u svim uvjetima i stoga bi se reflektirala u eksperimentima koje možemo raditi na nižim energijama [34].

Ovo je podržano i AdS/CFT dualnosti, koja nalaže da holografška entropija mora biti baš brojanje mikrostanja sustava, i stoga tako mali objekt s proizvoljno visokom entropijom ne bi trebao postojati. Naravno, nije poznato *mora* li kvantna teorija gravitacije biti holografška i stoga ovo ne mora ništa značiti.

Unatoč postojećim problemima s ovim pristupom, postoje raznoliki modeli koji vode na jednako raznolike rezultate. Jedna opcija je postojanje novorođenih svemira (eng. *baby universes*) - asimptotski ravnih regija prostovremena proizvoljno velikog volumena do kojih se dolazi prolaskom kroz stabilni ostatak, nalik na crvotočinu [42, 43].

Potpuna obrada stabilnih ostataka je jako opširna tema i stoga potpuniji tretman ostavljamo preglednom radu [42] o stabilnim ostacima.

4.4 Izbacivanje informacije pred kraj života crne rupe

U ovom je rješenju ideja da se pred kraj evaporacije sva informacija može izbaciti kroz nagli izboj zračenja ili kroz "otkrivanje singulariteta" ili nešto slično. To bi se moglo dogoditi kad dimenzija crne rupe postane toliko mala da joj je masa usporediva s Planckovom masom. Tada karakteristična skala geometrije više nije značajno veća od povratne reakcije zračenja na metriku (ovo je *aproksimacija jake geometrije* koja se koristila u izvodu Hawkingovog zračenja, potpoglavlje (3.2.3)) i Hawkingov račun prestaje vrijediti.

U ovom pristupu se ne spominje koji je točno kvantno gravitacijski efekt na djelu, jer se može, uz relativno blage pretpostavke kvantne mehanike (potpoglavlje 4.1) pokazati da izbacivanje informacije pred kraj evaporacije nije moguće. To će biti tema ostatka ovog potpoglavlja.

Naravno, taj se zaključak može zaobići ukoliko se dopuste modifikacije kvantne mehanike (više o tome pred kraj potpoglavlja).

Kako bi se pokazalo zašto ovaj argument ne može raditi (za standardnu kvantnu mehaniku), treba promatrati prvih N čestica Hawkingovog zračenja koje izlaze iz crne rupe, i izračunati njihovu reduciranu matricu gustoće, tj. entropiju isprepletenosti.

Za pojedinu česticu s asimptotskom frekvencijom ω , po izvodu Hawkingovog zračenja vrijedi da je opisana reduciranom matricom gustoće: ρ_1 , za koju entropija isprepletenosti ne iščezava:

$$S_{vN}(N = 1) = \text{Tr}_1(\rho_1 \ln \rho_1) \neq 0 \quad (4.3)$$

Ova tvrdnja slijedi iz izraza (3.57) s fiksnom frekvencijom $\omega_k = \omega$; svaka Hawkingova čestica ima svoj par na drugoj strani horizonta, s kojim je isprepletana. Trag se radi po potprostoru Hilbertovog prostora s fiksnom frekvencijom ω .

Nadalje, kako pretpostavljamo da je Hawkingovo zračenje nekorelirano, svaka sljedeća čestica je nezavisna od prošle i stoga je ukupna matrica gustoće za dvije čestice Hawkingovog zračenja: $\rho_2 = \rho_1 \otimes \rho_1$. Njihova matrica gustoće eksplicitno

onda glasi:

$$\begin{aligned}
S_{\text{vN}}(N = 2) &= \text{Tr}\{(\rho_1 \otimes \rho_1 \ln [\rho_1 \otimes \rho_1])\} \\
&= \text{Tr}\{\{\rho_1 \otimes \rho_1[(\ln \rho_1 \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \ln \rho_1)]\}\} \\
&= \text{Tr}\{([\rho_1 \otimes \rho_1][\mathbb{1} \otimes \ln \rho_1])\} + \text{Tr}\{([\rho_1 \otimes \rho_1][\ln \rho_1 \otimes \mathbb{1}])\} \\
&= \text{Tr}\{(\rho_1)\} \text{Tr}\{(\rho_1 \ln \rho_1)\} + \text{Tr}\{(\rho_1 \ln \rho_1)\} \text{Tr}\{(\rho_1)\} \\
&= 2 \text{Tr}\{(\rho_1 \ln \rho_1)\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje smo koristili svojstvo \ln funkcije:

$$\ln (A \otimes B) = \ln A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes \ln B \tag{4.5}$$

za dijagonalizabilne matrice A i B , te svojstvo traga $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr} A \text{Tr} B$.

Analogno, za prvih N čestica Hawkingovog zračenja slijedi rezultat:

$$S_{\text{vN}}(N) = N \text{Tr}(\rho_1 \ln \rho_1) \tag{4.6}$$

tj. entropija isprepletenosti Hawkingovog zračenja raste linearno s brojem emitiranih čestica.

Moguć način emisije informacije bi bio da kako se crna rupa smanjuje i približava Planckovoj masi Hawkingov izračun postane nepouzdan, i možda se dogodi neki novi efekt gdje umjesto linearnog rasta, entropija isprepletenosti naglo padne na 0. To bi značilo da te zadnje Hawkingove čestice, izbačene u kvantno gravitacijskoj fazi, sadrže korelacije s ostalim, ranije izbačenim česticama Hawkingovog zračenja, i u tim korelacijama je zapisana sva informacija o početnom sustavu. Te bi čestice onda naglo pročistile stanje emitiranog Hawkingovog zračenja, konačan bi sustav ponovno bio opisan čistim stanjem, i unitarna evolucija ne bi bila narušena (samo bi u međustanju gdje postoji crna rupa bilo nemoguće izmjeriti čisto stanje, jer je dio njega kauzalno odvojen od ostatka iza horizonta; ali ništa zato).

Ovo zvuči sasvim moguće, ali postoje razlozi zašto se ova linija razmišljanja odbacuje, a svi se svode na *ograničenje na količinu informacije koju crna rupa dane površine može sadržavati*. Izlazno zračenje ima entropiju jer je isprepleteno s nekim stupnjevim slobode u unutrašnjosti crne rupe, kao što smo argumentirali u potpoglavlju (4.1). Također je poznato da ako su sustavi A i B međusobno isprepleteni, oba sus-

tava imaju istu entropiju isprepletenosti (izvedeno u dokazu (2.7.1)) i stoga *crna rupa* ima entropiju isprepletenosti koja raste linearno s vremenom.

S druge strane, ako pretpostavimo da je interpretacija površine (i stoga entropije) crne rupe, kao volumena Hilbertovog prostora u unutrašnjosti crne rupe, točna (tvrdnja koja se uzima kao točna u vidu holografskog ograničenja na entropiju te AdS/CFTa; potpoglavlje 3.3) onda nailazimo na sukob jer ta krivulja površine kao posljedica evaporacije (izraz 3.62) pada u vremenu.

Sad imamo dvije krivulje; entropiju isprepletenosti vanjskog zračenja, koja raste linearno u vremenu; i veličinu Hilbertovog prostora koji sudjeluje u isprepletenosti i koja pada u vremenu kao površina: $M_0^2(1 - \frac{t}{t_{\text{evap}}})^{2/3}$. Ove dvije krivulje se u nekom trenutku moraju presjeći, i to se svakako dogodi prije nego se uđe u režim nevaljanosti Hawkingovog izvoda.

Da bismo to vidjeli, trebamo eksplicitnu formulu za von Neumannovu entropiju jedne Hawkingove čestice, te zatim znamo da je entropija N Hawkingovih čestica, bar do na aproksimacije korištene u Hawkingovom izvodu, dana s $N S_{vN}(N = 1)$, kao što je izvedeno ranije. Krivulju pada površine naravno već imamo, stoga nju ne moramo ponovno računati.

Pomoću izraza (3.57) možemo izračunati reduciranu matricu gustoće za jedan par čestica s definiranom frekvencijom ω :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \prod_{m; \omega_m \neq \omega} \sum_{M; M \neq 1} \langle M_{\omega_m}^{hor} | \otimes \langle M_{\omega_m}^{out} | \rho | M_{\omega_m}^{hor} \rangle \otimes | M_{\omega_m}^{out} \rangle \\ &= \prod_{k, l, m; \omega_m \neq \omega} \sqrt{1 - e^{-8\pi M \omega_k}} \sqrt{1 - e^{-8\pi M \omega_l}} \sum_{N, N', M; M \neq 1} e^{-4\pi N M \omega_k} e^{-4\pi N' M \omega_l} \\ &\quad \langle M_{\omega_m}^{hor} | N_k^{hor} \rangle \langle N_l^{hor} | M_{\omega_m}^{hor} \rangle \otimes \langle M_{\omega_m}^{out} | N_k^{out} \rangle \langle N_l^{out} | M_{\omega_m}^{out} \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nakon korištenja dobivenih delta funkcija i malo sređivanja dobivamo:

$$\rho_1 = \sqrt{1 - e^{-8\pi M \omega}} e^{-8\pi M \omega} |1_{\omega}^{hor}\rangle \langle 1_{\omega}^{hor}| \otimes |1_{\omega}^{out}\rangle \langle 1_{\omega}^{out}| \quad (4.8)$$

Ova matrica gustoće ima strukturu projektora, i stoga funkcije koje nju sadržavaju u argumentu, poput $\ln \rho_1$, poprimaju posebno jednostavan dijagonalan oblik:

$$f(a P) = \sum_i c_i (a P)^i = \sum_i c_i a^i P^i = \left(\sum_i c_i a^i \right) P = f(a) P \quad (4.9)$$

gdje a predstavlja skalarni faktor $\sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega}}e^{-8\pi M\omega}$, a P predstavlja projektor $|1_\omega^{hor}\rangle\langle 1_\omega^{hor}| \otimes |1_\omega^{out}\rangle\langle 1_\omega^{out}|$.

Koristeći ovo, računamo von Neumannovu entropiju za vanjsku česticu $|1_\omega^{out}\rangle$, što daje:

$$\begin{aligned} S_{\text{vN}}(N=1) &= -\sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega}}e^{-8\pi M\omega} \ln\{\sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega}}e^{-8\pi M\omega}\} \text{Tr} |1_\omega^{out}\rangle\langle 1_\omega^{out}| \\ &= -\sqrt{1 - e^{-8\pi M\omega}}e^{-8\pi M\omega} \left[\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-8\pi M\omega}) - 8\pi M\omega \right] \\ &\sim e^{-8\pi M\omega} \left[\frac{e^{-8\pi M\omega}}{2} + 8\pi M\omega \right] \sim 8\pi M\omega e^{-8\pi M\omega} + \mathcal{O}(e^{-16\pi M\omega}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Entropija crne rupe prati krivulju:

$$S = \pi^2 M^2 \quad (4.11)$$

Da bismo dobili vrijednost M na kojoj crna rupa ima manju entropiju od ukupne entropije Hawkingovog zračenja koje je do tada emitirano, moramo izračunati jednakost:

$$\pi^2 M^2 = N(M) 8\pi M\omega e^{-8\pi M\omega} \quad (4.12)$$

gdje je lijevo ovisnost površine (entropije) crne rupe o masi, a desno entropija isprepletenosti Hawkingovog zračenja koja je emitirana do trenutka kad crna rupa ima masu M . Sada trebamo ocijeniti red veličine ω i N .

Za ω to možemo vrlo grubo napraviti, tako da uzmemo red veličine Hawkingove temperature:

$$\omega \approx \frac{1}{M} \quad (4.13)$$

Analogno, treba ocijeniti broj čestica N koji je emitiran do trenutka kad crna rupa ima masu M .

Prvo ćemo procijeniti broj čestica koju crna rupa mase M još može izračiti do kraja evaporacije. U ovu svrhu, možemo se poslužiti operativnim izrazom za snagu zračenja crne rupe (3.62), gdje u podintegralnoj funkciji spustimo potenciju ω u brojniku za jedan. To odgovara računanju očekivanja broja umjesto energije izračenih čestica, tj. točno ono što želimo.

Integriranjem tog izraza, dobivamo:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{2M^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\beta\omega} - 1} = -\frac{2M^2}{\pi} \frac{2\zeta(3)}{(8\pi M)^3} \approx -\frac{10^{-3}}{M} \quad (4.14)$$

gdje je $\zeta(3)$ Riemannova zeta funkcija $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$ i iznosi otprilike ~ 1.2 .

Sad ovaj izraz možemo kombinirati s izrazom (3.62) iz računa ovisnosti energije o vremenu u potpoglavlju 3.2.5:

$$\frac{dM}{dt} \approx -\frac{10^{-5}}{M^2} \quad (4.15)$$

Uzimanjem omjera ove dvije jednačbe dobivamo:

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{\frac{dM}{dt}} = \frac{dN}{dM} \approx \frac{10^{-3}}{10^{-5}} M = 10^2 M \quad (4.16)$$

što se onda može integrirati:

$$N(M) \sim 10^2 M^2 \quad (4.17)$$

Ovaj rezultat nam daje broj čestica koje će crna rupa početne mase M emitirati do kraja svog života.

Analogno, ako crna rupa počne od M_0 i završi na masi M , broj emitiranih čestica u tom intervalu je dan s:

$$\Delta N \propto (M_0^2 - M^2) \quad (4.18)$$

Sad možemo sve uvrstiti u jednačbu (4.12):

$$\pi^2 M^2 = (M_0^2 - M^2) 8\pi M \frac{1}{M} e^{-8\pi M \frac{1}{M}} \quad (4.19)$$

što nakon invertiranja daje:

$$(\pi^2 + \mathcal{O}(10^{-12})) M^2 = 8\pi M_0^2 e^{-8\pi} \quad (4.20)$$

tj. uvrštavanjem brojeva:

$$M \propto M_0 10^{-8} \quad (4.21)$$

Kako je M_0 ovdje izraženo u Planckovim jedinicama, za realističnu crnu rupu mase reda solarne mase $M_0 \propto 10^{38} m_{\text{Planck}}$ ovo je još uvijek vrlo, vrlo daleko od režima nevaljanosti Hawkingovog izvoda $M \propto \mathcal{O}(m_{\text{Planck}})$.

Dakle, kad se krivulje u izrazu (4.19) presjeku, crna rupa više ne sadrži dovoljno Hilbertovog prostora da bi mogla biti isprepletana u potrebnoj dozi s Hawkingovim zračenjem koje je već izašlo. Kad se uđe u režim nevaljanosti Hawkingovog izvoda, crna rupa ima toliko malen Hilbertov prostor da on nikako ne može sadržavati svu informaciju potrebnu da se reproduciraju potrebne korelacije o početnom stanju.

Ova analiza ukazuje da, pod danim pretpostavkama, procesi u kojima se informacija ne pojavljuje do pred sam kraj evaporacije nisu realistični jer se negdje u procesu smanjivanja crne rupe izgubi mogućnost da ta količina informacije uopće bude sadržana unutar nje.

Bolja linija razmišljanja bi vjerojatno bila da postoji kontinuirani efekt kroz cijeli proces evaporacije, i da ga je Hawkingov izvod iz nekog razloga zanemario u aproksimacijama ili promašio jer se koristila nepotpuna teorija gravitacije. Ovo će biti tema sljedećeg potpoglavlja.

4.5 Male korekcije Hawkingovog zračenja

Ovaj pristup je najbliži klasičnom pristupu objašnjavanja "gubitka informacija" u klasičnoj mehanici: *Neovisno koliko brzo gurnemo neki predmet po stolu, nakon dovoljno vremena, on će stati zbog trenja. Konačno stanje je uvijek isto; nema informacija o početnoj brzini predmeta, informacija je izgubljena.*

Naravno, znamo da ovo nije točno, informacija još uvijek postoji, samo je zapisana u vrlo kompleksnom formatu; u gibanju zagrijanih čestica stola i predmeta te njihovim korelacijama, koje je praktično gledajući nemoguće dekodirati. Analogno tome, vjeruje se da bi informacija o početnom stanju sustava mogla biti zapisana u jako finim, ali brojnim korelacijama u prividno termalnom spektru Hawkingovog zračenja, koje bi nosile svu informaciju o početnoj konfiguraciji.

Osnovna ideja je da aproksimacije napravljene u Hawkingovom izvodu izgube

male korelacije koje su možda prisutne i potencijalno nose informaciju. Alternativno, takve bi korekcije mogle dolaziti od kvantno gravitacijskih korekcija; ako su one dovoljno snažne/brojne da za vrijeme života crne rupe uspiju prenijeti dovoljno informacija o početnom stanju materije da "pročiste" konačno stanje.

4.5.1 Ocjena veličine korekcija Hawkingovog spektra, pomoćni teorem

Račun finih kvantnih korekcija bi uključivao računanje egzaktno kvantno gravitacijske S-matrice, što je danas očito nemoguće. Umjesto toga, procjenjuje se koliko bi velike korekcije trebale biti da mogu prenijeti potrebnu količinu informacija, i onda se provjerava jesu li takve korekcije razumne u kontekstu kvantne gravitacije te moraju li biti prevelike da bi bile konzistentne s efektivnom teorijom polja korištenom u Hawkingovom izvodu.

Tvrđnja 4.1. Uvođenje eksponencijalno malih ($\sim e^{-S_{BH}}$) popravki za očekivane vrijednosti *jednostavnih* opservabli (ugrubo - onih koje uključuju malen broj korelacija) je dovoljno da bi se Hawkingovo zračenje učinilo unitarnim, a da istovremeno ostane konzistentno s efektivnom teorijom polja.

Uvođenje takvih popravki za jednostavne opservable rezultira proizvoljno velikim korekcijama za očekivanja *složenih opservabli*, kao što su entropija isprepletenosti Hawkingovog spektra.

Za dokazati ove tvrdnje trebamo pokazati rezultat o generičkom Hilbertovom prostoru konačne dimenzije:

Teorem 4.2. Uzmimo Hilbertov prostor \mathcal{H} , konačne dimenzije $\dim(\mathcal{H}) = N \propto e^S$, s bazom $\{|i\rangle\}$, gdje je S "entropija Hilbertovog prostora", čiji je eksponent proporcionalan dimenziji. Neka je A proizvoljni hermitski operator na tom Hilbertovom prostoru, koji predstavlja neku fizikalnu opservablu. Ne postoje nikakva daljnja ograničenja na operator.

Nasumično odabrano čisto stanje izvrijednjeno na opservabli A izgleda kao maksimalno miješano stanje, opisano matricom gustoće $\rho_{max} = \frac{1}{N}\mathbb{1}$.

Dokaz 4.2.1. Da bismo dokazali željenu tvrdnju prvo se moramo uvjeriti da je očekivanje te opservable uprosječno po svim čistim stanjima: $\langle \psi | A | \psi \rangle_{\psi}$ jednako računanju očekivanja za maksimalno miješano stanje, dano s: $\langle A \rangle_{max} = \text{Tr}\{\rho_{max} A\}$. Ako ovo

vrijedi, to je već dobra indikacija da proizvoljno čisto stanje "izgleda" kao maksimalno miješano stanje.

To ipak nije definitivni pokazatelj, jer je sasvim moguće da očekivanja operatora A proizvoljno jako osciliraju za različita čista stanja ψ , ali da su oscilacije centrirane baš tako da prosjek po svima daje maksimalno miješano stanje. Stoga treba izračunati varijaciju uprosječenja po čistim stanjima u odnosu na maksimalno miješano stanje: $\overline{[\langle \psi | A | \psi \rangle - \text{Tr}\{\rho_{max} A\}]^2}$, koje će onda ograničiti koliko jake varijacije mogu biti. Ispasti će da je ovisnost $\sim \frac{1}{N}$, dakle što je Hilbertov prostor veći, oscilacije su manje, i proizvoljno čisto stanje je sve sličnije maksimalno miješanom stanju.

Krećemo na dokaz:

1) Baza $|i\rangle$ se može odabrati tako da je operator A dijagonalan u njoj. Proizvoljni vektor ψ onda glasi: $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$, a očekivanje operatora A za takav vektor glasi:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_i \alpha_i \alpha_i^* A_{ii} \quad (4.22)$$

Uprosječenje po svim čistim stanjima u Hilbertovom prostoru se onda radi integriranjem po svim mogućim koeficijentima α_i u raspisu stanja ψ , tako da ta integracija zadovoljava uvjet: $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$. To se može kompaktno zapisati uvođenjem *Haar* (mikrokanonske) mjere:

$$d\mu = a d\alpha_1 d\alpha_1^* \dots d\alpha_N d\alpha_N^* \delta\left(\sum_i |\alpha_i|^2 = 1\right) \quad (4.23)$$

gdje je a normalizacijska konstanta koja osigurava $\int d\mu = 1$. Ova se mjera naziva mikrokanonskom jer sva čista stanja tretira s istom konstantnom vjerojatnosti a .

Račun prosjeka onda glasi:

$$\overline{\langle \psi | A | \psi \rangle} |_{\psi} = \int d\mu \sum_i |\alpha_i|^2 A_{ii} \quad (4.24)$$

Treba primijetiti da je mjera μ simetrična u svim parovima koeficijenata $\alpha_i \alpha_i^*$, i stoga za nju vrijedi: $\int d\mu |\alpha_i|^2 = \int d\mu \frac{1}{N} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_N|^2) = \frac{1}{N} \int d\mu$. Primjenom ovog rezultata na gornji izraz slijedi:

$$\overline{\langle \psi | A | \psi \rangle} |_{\psi} = \frac{1}{N} \int d\mu \sum_i A_{ii} \quad (4.25)$$

Kako su A_{ii} samo svojstvene vrijednosti operatora A , one ne ovise o komponentama nekog vektora u Hilbertovom prostoru, i može se slobodno iskoristiti $\int d\mu = 1$, da se konačno dobije:

$$\overline{\langle \psi | A | \psi \rangle} |_{\psi} = \frac{1}{N} \sum_i A_{ii} = \frac{1}{N} \text{Tr}\{(A)\} = \text{Tr}\{(\rho_{max} A)\} \quad (4.26)$$

Ovime smo uspješno pokazali prvi od dva rezultata.

Sad još preostaje izvrjedniti varijaciju $[\overline{\langle \psi | A | \psi \rangle} - \text{Tr}\{(\rho_{max} A)\}]^2$, analognom procedurom, koristeći mikrokanonsku mjeru.

Raspisujući, dobivamo:

$$\begin{aligned} & \int d\mu \sum_{ij} [|\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 \langle i | A | i \rangle \langle j | A | j \rangle \\ & \quad - 2 \text{Tr}\{(\rho_{max} A)\} |\alpha_i|^2 \langle i | A | i \rangle + \text{Tr}\{(\rho_{max} A)\}^2] \\ & = \int d\mu \sum_{ij} A_{ii} A_{jj} \left(|\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 - \frac{2}{N} |\alpha_i|^2 + \frac{1}{N^2} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tu se javlja jedna malo složenija suma po jediničnoj sferi, za koju se dobije:

$$\sum_{ij} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 = \sum_{ij} \frac{2}{N(N+1)} \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \frac{1}{N(N+1)} \quad (4.28)$$

Detaljniji račun ovog tipa se radi u kasnijem poglavlju, pomoću jednadžbi (5.28,5.29).

Općenita procedura računanja suma poput ove se obrađuje u dodatku C.

$\sum_i |\alpha_i|^2 = \frac{1}{N} \sum_i$ znamo od ranije, i konačno se dobije:

$$\begin{aligned} \overline{[\langle \psi | A | \psi \rangle - \text{Tr}(\rho_{max} A)]^2} & = \int d\mu \sum_{ij} A_{ii} A_{jj} \left(\frac{\delta_{ij}}{N(N+1)} - \frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{N^2} \right) \\ & = \int d\mu \sum_{ij} \left[\frac{1}{N+1} \left(\frac{A_{ii}^2}{N} - \frac{A_{ii} A_{jj}}{N^2} \right) \right] \\ & = \int d\mu \frac{1}{N+1} \left[\text{Tr}\{(\rho_{max} A^2)\} - \text{Tr}\{(\rho_{max} A)\}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdje se koristilo $\int d\mu = 1$, što slijedi iz normalizacije Haar mjere.

Rezultat nam govori da varijacija očekivanja operatora A u proizvoljnom čistom stanju izgleda identično očekivanju za maksimalno miješano stanje, do na varijacije od

tog rezultata koje su reda veličine $\frac{1}{N+1}$; a kako dimenzija Hilbertovog prostora raste, te fluktuacije teže u 0.

Stoga imamo rezultat – za Hilbertove prostore velike, konačne dimenzije, korištenje maksimalno miješane matrice gustoće za računanje očekivanih vrijednosti je ekvivalentno korištenju nasumično odabranog čistog stanja:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}\{\rho_{max} A\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (4.30)$$

Kao što smo ustanovili ranije, entropija kvantnog sustava je proporcionalna $\ln N$, i stoga se može pisati $\frac{1}{N} \propto e^{-S}$. Time je početna tvrdnja pokazana. \square

Primjer 4.3. Vrijedi napomenuti da ovaj teorem vrijedi samo ako stanje ψ odaberemo nasumično, ne prilagođavajući ga za operator A , tj. vrijedi "za prosječno stanje na \mathcal{H} ".

To možemo vidjeti za operator $A = 10 | \psi \rangle \langle \psi |$. Ako se za stanje sada odabere baš $| \psi \rangle$, očekivanje će dati $\mathcal{O}(10)$ i svakako ćemo imati narušenje $\mathcal{O}(e^{-S})$ ograničenja.

S druge strane, ako se odabere proizvoljno stanje $|k = 5\rangle$, iz neke nasumične baze $\{|k\rangle\}$ na \mathcal{H} , koja nema nikakve veze sa zapisom operatora A , onda teorem ponovno vrijedi. U toj se bazi $| \psi \rangle$ da zapisati kao:

$$| \psi \rangle = \sum_k \langle k | \psi \rangle |k\rangle \quad (4.31)$$

Za naš proizvoljni izbor stanja, $|k = 5\rangle$, prijeklop je konkretno dan s $\langle 5 | \psi \rangle$. Ako je baza doista nasumično odabrana, u principu očekujemo da će $| \psi \rangle$ imati neišchezavajuće prijeklope s većinom vektora iz baze te da ni s jednim od njih neće biti u pretjerano dobrom slaganju. Normalizacijski uvjet glasi:

$$\sum_{k=1}^N |\langle k | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (4.32)$$

i ako se pretpostavi da ne postoji $\langle k |$ takav da: $\langle k | \psi \rangle \approx 1$, odmah imamo $\langle k | \psi \rangle \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ za sve $|k\rangle$ u bazi, pa tako i $\langle k | \psi \rangle$. U tom slučaju očekivanje operatora A ponovno poprima trnuće ponašanje, u skladu s teoremom.

4.5.2 Ocjena veličine korekcija Hawkingovog spektra, primjena na Hawkingov spektar

Sada je vrijeme da ovaj teorem primijenimo na stanje Hawkingovog zračenja. Kada crna rupa potpuno evaporira (ovaj teorem se može primijeniti samo nakon potpune evaporacije, kad je stanje zračenja po pretpostavci ponovno čisto) sve što ostane je visoko korelirano Hawkingovo zračenje u čistom stanju.

Kako je potrebno konačno vrijeme da crna rupa potpuno nestane, za očekivati je da će ona emitirati i konačan broj Hawkingovih čestica, što znači da je Hilbertov prostor Hawkingovog zračenja konačne dimenzije. (Eventualno se možemo ograničiti na neku donju energiju ispod koje Hawkingove čestice ni ne možemo detektirati.)

Iz gornjeg teorema onda možemo zaključiti da čak i ako je cijeli sustav u čistom stanju on će nam izgledati kao da je u maksimalno miješanom stanju, dok god ne možemo mjeriti odstupanja od čistog stanja eksponencijalno mala u entropiji početne crne rupe.

Ovaj argument dolazi s fusnotom: Oslanja se na to da je čisto stanje $|\psi\rangle$ koje opisuje stanje konačnog Hawkingovog zračenja "nasumično" stanje na Hilbertovom prostoru, s obzirom na opservablu koju pokušavamo mjeriti.

Primjer 4.4. Da bismo tu izjavu kvantificirali, sad ćemo napraviti generalnu analizu promatrača koji ima pristup ograničenom broju Hawkingovih čestica $M < N$. Cilj nam je vidjeti koliko on informacije o čistom stanju zračenja može dobiti i posljedično, koliko njegova mjerenja na svim M -čestičnim operatorima mogu biti slična operatoru projekcije $|\psi\rangle\langle\psi|$ (koji bi značajno narušio teorem iz prošlog potpoglavlja).

Za početak trebamo napraviti raspis po bazi operatora u Hilbertovm prostor u Hawkingovog zračenja.

Stanje $|\psi\rangle$, tj. operator gustoće $|\psi\rangle\langle\psi|$ sadrži potpunu informaciju pa stoga i informaciju o korelacijama između bilo kojeg broja Hawkingovih čestica. Uvedimo bazu jednočestičnih stanja $|i\rangle$, gdje je i indeks koji ide od 1 do N i predstavlja individualne Hawkingove čestice. Ukupan Hilbertov prostor je onda dan kao direktni produkt N Hilbertovih prostora harmoničkog oscilatora: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$. Operator $|\psi\rangle\langle\psi|$ se onda može zapisati kao:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i_1 \dots i_{2k}=1}^N c_{i_1 \dots i_{2k}} |i_1 \dots i_k\rangle \langle i_{k+1} \dots i_{2k}| \right) \quad (4.33)$$

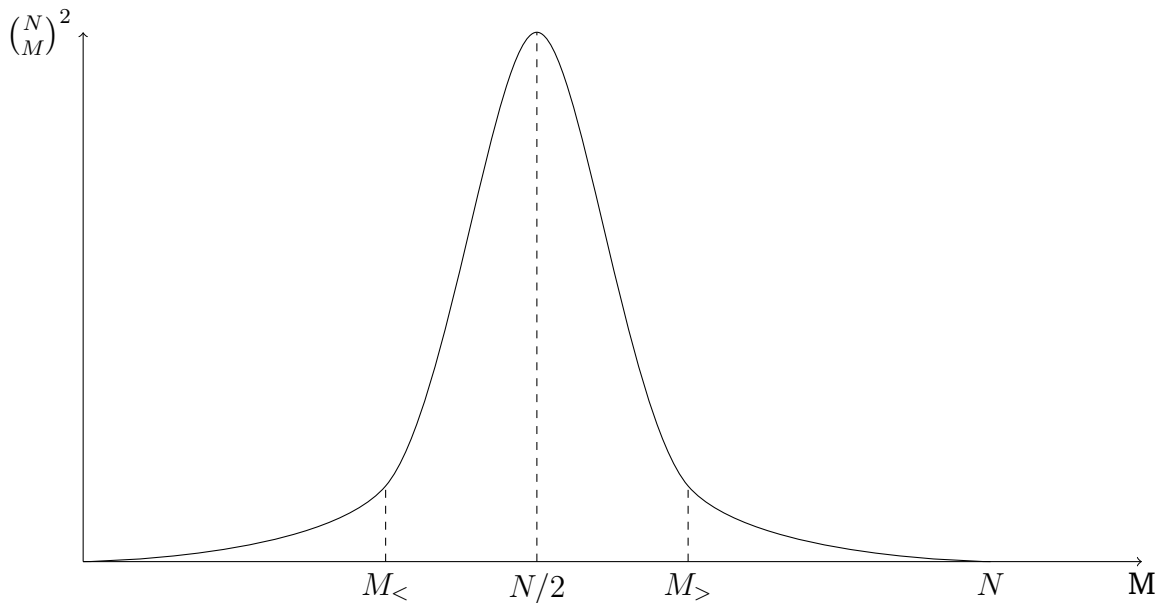
gdje se javlja raspis po bazi svih k -čestičnih operatora. Prva suma zbraja po različitim 1-, 2-, ..., N -čestičnim potprostorima, a druga suma prolazi kroz sve moguće k -čestične operatore.

Pretpostavka je sada da za općenito početno stanje materije, koeficijenti $c_{i_1 \dots i_{2k}}$ za sve $k \in [1, N]$ ne iščezavaju i poznavanje tih koeficijenata nam daje informaciju o čistoći stanja. Ova tvrdnja je u skladu s tvrdnjom kvantne mehanike, da nam poznavanje nedijagonalnih elemenata matrice gustoće daje informaciju o čistom stanju.

Poanta ovog raspisa je da se uvidi kako $|\psi\rangle\langle\psi|$ sadrži sve moguće korelacijske funkcije. Ako je nama kao promatraču izvan crne rupe dostupno tek $M < N$ čestica, mi možemo promatrati najviše M čestične operatore, i nedostajati će nam informacija o $|\psi\rangle\langle\psi|$ (tj. nećemo imati sve koeficijente c_{\dots} s $k > M$; prva suma u izrazu 4.33 će biti odrezana na M za nas). Naš opis stanja $|\psi\rangle$ u toj situaciji neće biti potpun, i bilo kojem pokušaju konstrukcije projektora $|\psi\rangle\langle\psi|$ će nedostajati operatori s više od M čestica.

Kako bismo aproksimativno odredili koliko je opis takvog promatrača nepotpun moramo odrediti koliko on odstupa od čistog stanja, a za to trebamo vidjeti koliki je udio koeficijenata c_{\dots} izostavljen u odnosu na točan opis (izraz 4.33). Aproksimacija nastupa u tome što je nejasno kako će se koeficijenti $c_{i_1 \dots i_{2k}}$ ponašati u općenitom slučaju. Oni mjere doprinos k -čestičnih korelacijskih funkcija i njihov iznos eksplicitno ovisi o početnom stanju materije. Kako bi napravili grubu ocjenu, možemo pretpostaviti da su svi koeficijenti otprilike podjednako zastupljeni, tj. da su svi $c_{i_1 \dots i_{2k}}$ za sve izbore k i sve izbore i_{\dots} istog reda veličine. U tom slučaju iznos pojedinih koeficijenata nije bitan i zanima nas samo koliko ih ima koje smo izostavili ako promatramo najviše M čestične korelacije. Pod pretpostavkom da je konačnom promatraču dostupno svih N čestica, a on mjeri najviše M čestične korelacije, znači da za dani koeficijent c_{\dots} s $2M$ indeksa takav promatrač ima red veličine $\binom{N}{M}^2$ opcija koeficijenata (ovo je aproksimativan izraz). Kako bismo razumjeli ponašanje broja koeficijenata, možemo pogledati graf te funkcije u ovisnosti o M (slika 4.4).

Iz ovoga se može zaključiti da će vanjski promatrač s razumnom sigurnošću moći rekonstruirati početno čisto stanje tek kad se iz crne rupe emitira velik udio čestica (reda veličine svih koje će se ikad emitirati, $M > N/2$). Točna granica naravno nije jasna i ostavljam tu analizu sljedećem poglavlju, kada ćemo saznati da je granica dana Pageovim vremenom (potpoglavlje 4.5.3).



Slika 4.1: Graf ponašanja broja koeficijenata za danu vrijednost $N \propto \mathcal{O}(100)$; povećavanje N čini prijelaz oštrijim, ali ne mijenja generalno ponašanje. Površina ispod grafa je proporcionalna broju koeficijenata koje promatrač koji mjeri $M_<$, $N/2$ i $M_>$ -čestična stanja može izmjeriti. Vidimo da tek kad se pređe $M = N/2$ imamo režim u kojem je većina stanja obuhvaćena.

Poanta cijele diskusije je u tome da će promatrač izvan crne rupe prvi put biti u prilici konstruirati operator koji je sličan operatoru projekcije $|\psi\rangle\langle\psi|$ (i time narušiti teorem od ranije) tek kad se iz crne rupe emitira značajan udio čestica (za sada nije jasno koji je točno kriterij za "značajan udio čestica").

Značajne korekcije na termalni spektar se stoga po prvi puta mogu uopće detektirati tek kada je crna rupa izračila značajan udio Hawkingovih čestica koje će ukupno izračiti. Pokazati će se da taj trenutak odgovara trenutku kad crna rupa izrači polovicu svoje početne entropije (potpoglavlje 4.5.3).

Zaključak ovog cijelog argumenta je sljedeći: Hawkingov izračun miješanog stanja je točan za jednostavne opservable (korelacijske funkcije malog broja čestica), do na popravke eksponencijalne u entropiji crne rupe. U tom režimu entropija isprepletenosti zračenja opravdano linearno raste. To prestaje biti dobar opis kada se promatraju korelacijske funkcije većeg broja Hawkingovih čestica ($M \gtrsim N/2$). Takve korelacijske funkcije bi mogle imati proizvoljno velike popravke u odnosu na termalne, međusobno nezavisne korelacijske funkcije koje predviđa Hawkingov spektar.

4.5.3 Pageovo vrijeme

Indikacija da se nešto posebno mora dogoditi na pola vremena evaporacije može se potvrditi generalnim razmatranjima svojstva isprepletenih sustava u nasumično odabranim čistim stanjima.

Izvodi tih rezultata su dosta tehnički zahtjevni, a nisu pretjerano poučni, pa ću u ovom potpoglavlju samo objasniti rezultate Pageovih (i popratnih) radova [29] [32] [33].

Ipak, jedna stvar koje trebamo biti svjesni je da ovi rezultati vrijede u sličnom režimu kao i rezultat prethodnog potpoglavlja; kada se sustav nalazi u *nasumično odabranom čistom stanju* po Haar mjeri, a ne u specijalno odabranom stanju prilagođenom podsustavu A ili B .

Osnovna motivacija je da ako se sustav u čistom stanju $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ podijeli na podsustave A i B , ti podsustavi će generički imati veću entropiju od ukupnog sustava. Ova izjava se matematički može izraziti svojstvom slabe subaditivnosti von Neumannove entropije (2.39):

$$S(A) + S(B) \geq S(A + B) \quad (4.34)$$

Page je predložio izračunati prosječnu entropiju isprepletenosti, za manji od dva sustava; gdje "prosječno" znači uprosječeno po svim čistim stanjima u Hilbertovom prostoru, koristeći Haar mjeru $d\mu$ od ranije.

Dimenzije podsustava su $\dim(A) = m$ i $\dim(B) = n$, a dimenzija ukupnog prostora je onda $\dim(A \otimes B) = mn$. Page je za uprosječenu entropiju "pogodio" formulu:

$$\overline{S(A)}_{|\psi\rangle} \equiv S_{m,n} = \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{2n} \quad (4.35)$$

gdje je $\overline{S(A)}_{|\psi\rangle} = \int d\mu [-\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A)]$.

Ako se dodatno uzme da ni jedan podsustav nije pretjerano malen, tj. da oba obuhvaćaju razuman broj stupnjeva slobode: $1 \ll m \leq n$, ova se formula pomoću aproksimacije: $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \ln(N) + \gamma + \frac{1}{2N}$ svodi na:

$$S_{m,n} = \ln m - \frac{m}{2n} \quad (4.36)$$

Treba uzeti u obzir da je $\ln m$ maksimalna entropija podsustava A , budući da ona odgovara uzimanju uniformne distribucije vjerojatnosti $\rho_A = \frac{1}{\text{vol}(A)} \mathbb{1}_A$ na cijelom A (primjer 2.4). Prosječna entropija isprepletenosti za podsustav B je naravno ista kao i za podsustav A , kao što znamo iz tvrdnje 2.7.

Postoje i brojni rezultati za standardnu devijaciju entropije, i ona je reda $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ za velike sustave [32], što ponovno znači da ne očekujemo da će rezultat za entropiju $S_{m,n}$ značajno ovisiti o tome koje čisto stanje odaberemo.

Iz ovog rezultata slijedi da ako je ukupni sustav u nasumično odabranom čistom stanju, mali podsustav tog sustava, za koji je $m \ll n$, ima entropiju koja je približno maksimalna, i dana standardnom Boltzmannovom formulom $\ln m$. *Ovo potvrđuje rezultat iz prethodnog potpoglavlja, koji tvrdi da ako se promatra malen sustav, tj. korelacije između samo nekolicine čestica u Hawkingovom zračenju, te će korelacije izgledati kao da su opisane maksimalno miješanim stanjem.* Ovo je u konzistentno s tvrdnjom da Hawkingovo zračenje može biti, globalno gledano, vrlo drugačije od maksimalno miješanog stanja.

Iz definicije informacije (2.44) se onda također da zaključiti da podsustav A nosi informaciju reda:

$$I(A) = S_{\text{Term}}(A) - S_{\text{vN}}(A) \sim \ln m - (\ln m - \frac{m}{2n}) = \frac{m}{2n} \text{ bitova} \quad (4.37)$$

u svojim internim korelacijama. Podsustav B analogno nosi:

$$I(B) = \ln n - (\ln m - \frac{m}{2n}) = \ln \frac{n}{m} + \frac{m}{2n} \text{ bitova} \quad (4.38)$$

u svojim internim korelacijama. Ukupni sustav ima $\ln nm$ informacije jer je u čistom stanju, što povlači da u korelacijama između podsustava A i B mora biti pospremljeno:

$$I_{\text{korelacije}}(A, B) = I(AB) - I(A) - I(B) = 2 \ln m - \frac{m}{n} \quad (4.39)$$

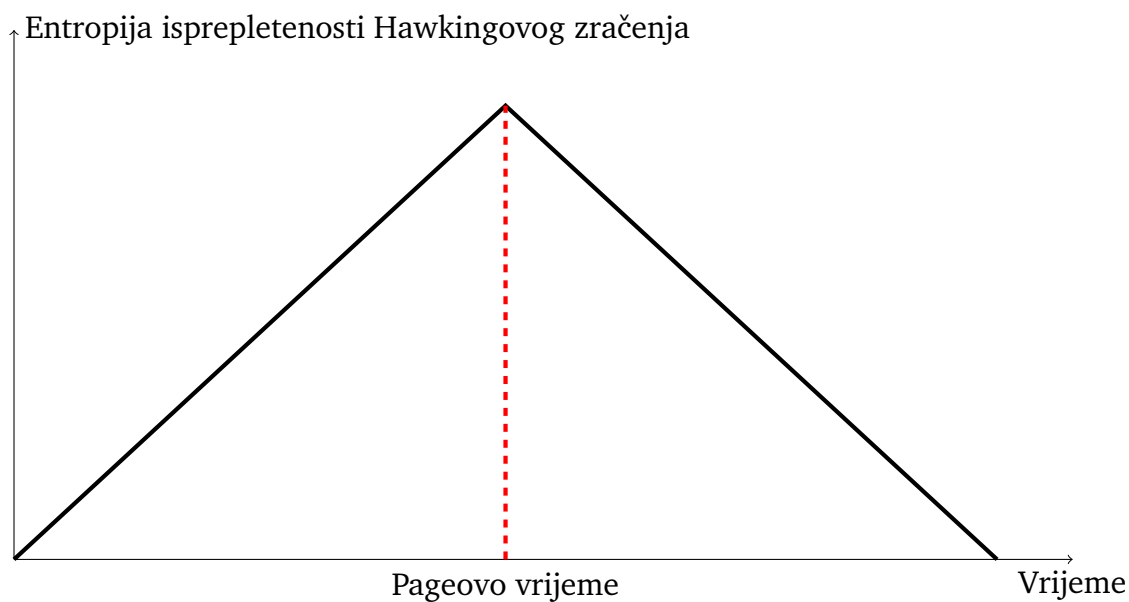
Ako je A izrazito malen podsustav $m \ll n$, on će sadržavati jako malu količinu informacije o ukupnom čistom stanju, i stoga je smisleno da je dobro opisan maksimalno miješanim stanjem.

Iz ovih rezultata se može očitati jedna posebno bitna činjenica – kada su sus-

tavi A i B jednakih veličina, oni individualno ne sadrže niti jedan bit informacije (sadrže po pola bita svaki), a sva informacija je skrivena u korelacijama između sustava A i B . Takvo razmišljanje primjenjeno na evaporaciju crne rupe, gdje je sustav A Hawkingovo zračenje izvan crne rupe, a B Hilbertov prostor materije unutar crne rupe, nalaže da do trenutka kad je pola crne rupe evaporiralo, *niti jedan bit informacije nije prenesen u Hawkingovom zračenju koje je do tada izašlo*. Ovo je posebno bitno u slučaju crnih rupa jer ne postoji promatrač koji može raditi mjerenja na sustavima A i B istovremeno, i stoga su korelacije između njih uvijek nedostupne, a ponekad je baš u tim korelacijama većina informacije o ukupnom čistom stanju.

Čisto iz perspektive sustava Hawkingovog zračenja, tek nakon što je crna rupa na pola evaporirala (u smislu pola entropije) se može očekivati da će iz nje izići prvi bit informacije, u smislu da se može očitati isključivo iz dostupnog podsustava A . Do tog trenutka ne očekujemo, u vidu ove analize, nikakvo značajno odstupanje od maksimalno miješanog stanja kao dobrog opisa Hawkingovog spektra, što potvrđuje da je trenutak $t_{\text{Page}} = t_{S=S_0/2}$ poseban.

Entropija sustava Hawkingovog zračenja se očekuje da će rasti do t_{Page} manje više linearno, u skladu s ranijom analizom (izraz 4.6) za maksimalno miješano stanje, nakon čega se mora početi smanjivati jer se informacija počne emitirati u Hawkingovo zračenje tj. Hawkingovo zračenje se počinje pročišćavati. Nadalje, nakon t_{Page} uloge sustava A i B se zamijene, unutrašnjost crne rupe postaje manji podsustav i razumno bi bilo očekivati da je ovisnost entropije o vremenu stoga simetrična oko t_{Page} . Ovo nije obavezno egzaktno jer su sustavi unutar i izvan horizonta dosta različiti, ali u prvoj aproksimaciji je otprilike točno.



Slika 4.2: Entropija isprepletenosti se očekuje da će linearno rasti do Pageovog vremena, nakon čega se mora krenuti spuštati prema 0, u konačnom vremenu koje odgovara potpunoj evaporaciji crne rupe.

Ovisnost entropije o vremenu u evoluciji kvantnog sustava zove se *Pageova krivulja* i za crnu rupu je (u prvoj aproksimaciji) prikazana na slici (4.2).

Konačno, postoji još jedan pomoćni rezultat o Hilbertovim prostorima koji bi trebao vrijediti [58], a biti će nam koristan u analizi u sljedećem poglavlju:

Recimo da uzmemo sustav u nasumično odabranom čistom stanju (ponovno, Haar mjera) i podjelimo ga na tri podsustava A, B, C s dimenzijama a, b, c . Tvrdnja je da ako vrijedi hijerarhija dimenzija: $1 \ll c \ll b < a$, posebice mali sustav C mora biti najviše isprepleten sa većim od dva preostala sustava, A . Ovo je smisleno jer je svakako isprepleten s ostatkom sustava ($A + B$), a ako smo u nasumično odabranom/prosječnom čistom stanju, isprepletenost bi trebala biti otprilike uniformno raspoređena između preostalih stupnjeva slobode u ostatku sustava. Stoga očekujemo da će omjer isprepletenosti C s A i B biti reda omjera stupnjeva slobode s kojima se C može ispreplesti, tj. $\mathcal{O}(\frac{a}{b})$.

Ako je ovo razmatranje točno, onda odmah slijedi da su Hawkingove čestice emitirane prije Pageovog vremena, kada je unutrašnjost crne rupe veći od dva sustava, primarno isprepletene s crnom rupom; a nakon Pageovog vremena, kada je već emitirano Hawkingovo zračenje veći sustav, primarno su isprepletene s tim Hawkingovim zračenjem. Ovo ponovno ide u korist tvrdnji da se informacija nakon Pageovog vre-

mena počinje emitirati iz crne rupe i da se korelacije nalaze sve više i više u samom Hawkingovom zračenju.

4.5.4 Zaključak

Ovo potpoglavlje je sadržavalo niz argumenata u korist tvrdnji da se pročišćavanje konačnog stanja Hawkingovog zračenja događa tijekom procesa evaporacije.

Popis argumenata je sljedeći:

1. Generalan rezultat kvantne mehanike je da informacija iz sustava u proizvoljno odabranom čistom stanju počne izlaziti tek kad je on na pola evaporirao. Ovo se dodatno protivi modelima u kojima se informacija oslobodi pred kraj evaporacije kad kvantno gravitacijski efekti postanu bitni.
2. Postoji distinkcija između jednostavnih i složenih opservabli. Eksponencijalno male modifikacije jednostavnih opservabli (kao korelacije između dvije Hawkingove čestice) su dovoljne da unitariziraju Hawkingov spektar i generalno ne očekujemo da ćemo takve detalje moći detektirati.
3. Ne postoji ograničenje na veličinu popravki koje složene opservable, koje uključuju velik udio čestica Hawkingovog zračenja, mogu imati. U takvim složenim opservablama se očekuje da je pospremljena informacija o početnom sustavu materije crne rupe.
4. Informacija se iz crne rupe počinje emitirati kad Hawkingovo zračenje preuzme otprilike polovicu stupnjeva slobode originalne crne rupe, tj. kad je crna rupa napola evaporirala. Taj trenutak se naziva Pageovo vrijeme t_{Page} .
5. Prije Pageovog vremena, nije moguće uopće napraviti mjerenje koje bi otkrilo informaciju o početnom stanju materije koja je stvorila crnu rupu, jer još uvijek nije izašao dovoljno velik broj čestica da se na njima izmjeri tako složena opservabla.
6. Nakon Pageovog vremena opis Hawkingovog zračenja kao sustava u maksimalno miješanom stanju prestaje vrijediti jer tada ono već nosi informaciju.

Paradoks naravno nije razrješen, jer iako su Pageovi argumenti bazirani na vrlo generalnim pretpostavkama kvantne mehanike, specijalno za crne rupe ne isključuju neke druge mogućnosti pred kraj kolapsa, tipa da se dogodi stabilizacija i da velik dio informacija zauvijek ostane unutar crne rupe; jer nije dan specifičan mehanizam

unitarizacije, samo generalno razmatranje toga što bi trebalo biti moguće. Također se ne isključuju narušenja nekih pretpostavki koje su korištene u ovim argumentima; između ostalog kvantne mehanike, efektivne teorije polja i principa ekvivalencije. Mogućnosti ovih narušenja će biti tema sljedećeg poglavlja i biti će baza moderne formulacije paradoksa informacija crnih rupa.

5 Problem informacije crnih rupa - 2. dio, moderna formulacija i vatrozid

U ovom ću poglavlju dati modernu formulaciju problema informacija crnih rupa i komentirati neka od (vrlo brojnih) mogućih rješenja, kojima je cilj izbjeći stabilne ostatke evaporacije i fundamentalan gubitak informacije. [34–36].

Pojmovi opisani u ovom poglavlju: *Komplementarnost crnih rupa, problem kloniranja u prostoru vremenu s crnom rupom, AMPS argument, monogamija isprepletenosti, paradoks slabe subaditivnosti, vatrozidi*

Moderna formulacija paradoksa crnih rupa (preuzeta direktno iz [35]) glasi ovako: Paradoks se sastoji od tvrdnje da lista vrlo razumnih pretpostavki *ne vrijedi* u prostoru vremenu u kojem se nalazi crna rupa.

Popis pretpostavki paradoksa informacija je sljedeći:

- PI1 Evolucija svih (izoliranih) procesa je unitarna, pa tako i kolapsa + evaporacije crne rupe.
- PI2 Nema stabilnih ostataka evaporacije crnih rupa. Crne rupe evaporiraju do kraja.
- PI3 Ne postoji fizikalni efekt koji se iz crne rupe prostire u okolni vakuum i nosi informaciju o mikrostanju crne rupe. Taj fizikalni efekt se u literaturi često naziva *kvantno gravitacijska ili mekana kosa*, gdje "mekana" znači da ju nije moguće opaziti van režima kvantne gravitacije.
- PI4 Efektivna teorija polja je valjana na udaljenostima većim od $\mathcal{O}(l_{\text{Planck}})$ od horizonta (tj. izvan *proširenog horizonta*).
- PI5 Efekti kvantne gravitacije su (eksponencijalno) potisnuti u okolini horizonta. Intuitivno govoreći - na horizontu se ne vide efekti kvantne gravitacije, jednako kao ni nigdje drugdje u prostoru daleko od singulariteta.

Ako je ijedna od ovih tvrdnji netočna, onda postoji argument koji koristi tu netočnost da pokuša riješiti problem informacije.

Do tog zaključka, i posljedično ove liste se naravno došlo radeći unatrag – prvo su se kroz godine formulirala razna rješenja problema informacije, a zatim se sastavila ova lista, za koju se smatra da obuhvaća cijeli raspon mogućih zaobilaznica.

Ovu listu pretpostavki ću, kako bih se lakše referirao na njih kasnije, nazvati *pretpostavke PI* ili samo *PI*, što označava: *pretpostavke (u formulaciji) paradoksa/problema informacije*.

Kao što se argumentiralo u prošlom poglavlju, razumno je odbaciti opcije da je unitarnost narušena te da postoje stabilni ostatci evaporacije. Zbog toga se njih ponekad ni ne spominje i ostaje skup pretpostavki koje nazivamo *profinjeni PI*, koji glasi:

PPI1 Ne postoji fizikalni efekt koji se iz crne rupe prostire u okolni vakuum i nosi informaciju o mikrostanju crne rupe. Nema "mekane kose".

PPI2 Efektivna teorija polja je valjana izvan proširenog horizonta.

PPI3 Efekti kvantne gravitacije su (eksponencijalno) potisnuti u okolini horizonta.

Ovo je "efektivna" formulacija paradoksa informacija koja se koristi u modernim radovima o paradoksu informacije.

U ostatku ovog poglavlja ću razraditi jedno od predloženih rješenja paradoksa informacija, a u sljedećem ću poglavlju spomenuti neke druge opcije.

Napomena 5.1. U ovoj se listi stavka o mekanoj kosi također često ignorira jer još uvijek nije sasvim jasno kako bi se paradoks informacije uopće razriješio naruši li se ta pretpostavka [60].

Konkretno, iako je mekana kosa konzistentna s cijelim izračunom Hawkingovog zračenja još uvijek nije jasno može li se u korelacije između mekane kose upisati dovoljno informacija da se konačno stanje pročisti.

5.1 Komplementarnost crnih rupa i problem kloniranja

Ovo potpoglavlje uglavnom slijedi rad [46].

Jedan od ključnih problema s unitarizacijom stanja Hawkingovog zračenja je da ne postoji konkretan mehanizam kojim se unitarizacija dešava.

Pristupimo li najjednostavnijom linijom razmišljanja, razmatranje hipoteze da Hawkingovo zračenje uspješno odnosi informaciju iz crne rupe vodi na udvostručenje

informacije. Kad ubacimo sustav u crnu rupu, on će se nalaziti unutar crne rupe, ali će informacija o njemu također biti izbačena iz crne rupe Hawkingovim zračenjem. Udvostručenje kvantnih stanja je u kontradikciji s teoremom o zabrani kloniranja iz kvantne mehanike (teorem 5.2) i on predstavlja problem koji potpuna slika procesa unitarizacije Hawkingovog zračenja mora riješiti.

Ovaj argument kloniranja ćemo detaljnije sagledati u ovom potpoglavlju, pokazat ćemo da je dobar prigovor na unitarizaciju te ćemo ukazati na smislene načine da ga se izbjegne.

5.1.1 Kloniranje u prostorvremenu crnih rupa

U kvantnoj mehanici je vrlo jednostavno izreći i dokazati teorem o zabrani kloniranja kvantnih stanja unitarnim operatorima, i stoga ćemo prvo objasniti taj teorem, a zatim ćemo ga primijeniti na crne rupe.

Teorem 5.2. U kvantnoj mehanici se može pokazati da je nemoguće imati operator koji "klonira" kvantno stanje $|\psi\rangle$.

Pod kloniranjem se misli sljedeće: Promatramo dva identična kvantna sustava, u smislu da imaju identične Hilbertove prostore \mathcal{H} . Dodatno, dopuštamo da postoji i sustav U s Hilbertovim prostorom \mathcal{H}_U koji predstavlja bilo kakav pomoćni kvantno mehanički uređaj koji je potreban za uspješno kloniranje. Ti se sustavi nalaze u stanju $|\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle$, gdje je prvi sustav u nekom specifičnom stanju $|\psi\rangle$ koje nam je od interesa, a ostatak sustava je u proizvoljnom stanju $|e\rangle \otimes |U_0\rangle$ koje nije povezano s $|\psi\rangle$. $|e\rangle$ se treba shvatiti kao "prazno stanje" na koje će se $|\psi\rangle$ klonirati, a $|U_0\rangle$ se treba shvatiti kao "spremno stanje uređaja za kloniranje".

"Kloniranje" bi onda značilo da se nekom unitarnom operacijom $\hat{K} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_U \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_U$ stanje $|\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle$ može transformirati na sljedeći način:

$$\hat{K} |\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle = e^{i\alpha(\psi,e,U_0)} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |U_\psi\rangle \quad (5.1)$$

za bilo koje početno stanje $|\psi\rangle$. Kako su sva stanja definirana do na fazu, dopušta se sloboda faze, koja ovisi o početnim stanjima $|\psi\rangle, |e\rangle, |U_0\rangle$ na koja operator \hat{K} djeluje. Stanje $|U_\psi\rangle$ je neko konačno stanje uređaja za kloniranje i općenito se dopušta da ovisi o $|\psi\rangle$.

Tvrđnja ovog teorema je da ne postoji univerzalni operator \hat{K} , koji klonira

općenito stanje $|\psi\rangle$: $|\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |U_\psi\rangle$.

Dokaz 5.2.1. Dokaz gornjeg teorema slijedi iz ključnog uvjeta da operator \hat{K} mora biti isti za bilo koji par stanja. Počinje se uzimanjem dva *normalizirana* stanja za koja se pretpostavlja da ih \hat{K} uspješno klonira:

$$\hat{K} |\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle = e^{i\alpha(\psi,e,U_0)} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |U_\psi\rangle \quad (5.2)$$

$$\hat{K} |\phi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle = e^{i\alpha(\phi,e,U_0)} |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |U_\phi\rangle \quad (5.3)$$

Ovdje je ključno da su stanja $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$ po pretpostavci različita i normalizirana, ali su osim toga sasvim općenita. Stoga vrijedi: $|\langle\phi|\psi\rangle| \lesssim 1$.

Sljedeće se pogleda produkt stanja (5.2) i (5.3), koji glasi:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle \langle e|e\rangle \langle U_0|U_0\rangle &= \left(\langle\phi| \otimes \langle e| \otimes \langle U_0| \right) \left(|\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle \right) \\ &= \langle\phi| \otimes \langle e| \otimes \langle U_0| \hat{K}^\dagger \hat{K} |\psi\rangle \otimes |e\rangle \otimes |U_0\rangle \\ &= e^{-i(\alpha(\phi,e,U_0) - \alpha(\psi,e,U_0))} (\langle\phi| \otimes \langle\phi| \otimes \langle U_\phi|) (|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |U_\psi\rangle) \\ &= e^{-i(\alpha(\phi,e,U_0) - \alpha(\psi,e,U_0))} \langle\phi|\psi\rangle^2 \langle U_\phi|U_\psi\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdje se u drugoj jednakosti iskoristilo da je operator \hat{K} po pretpostavci unitaran. Uzimanjem modula prvog i zadnjeg reda iz izraza (5.4) te korištenjem normalizacije stanja $|e\rangle$ i $|U_0\rangle$, dobiva se:

$$|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 |\langle U_\phi|U_\psi\rangle| \quad (5.5)$$

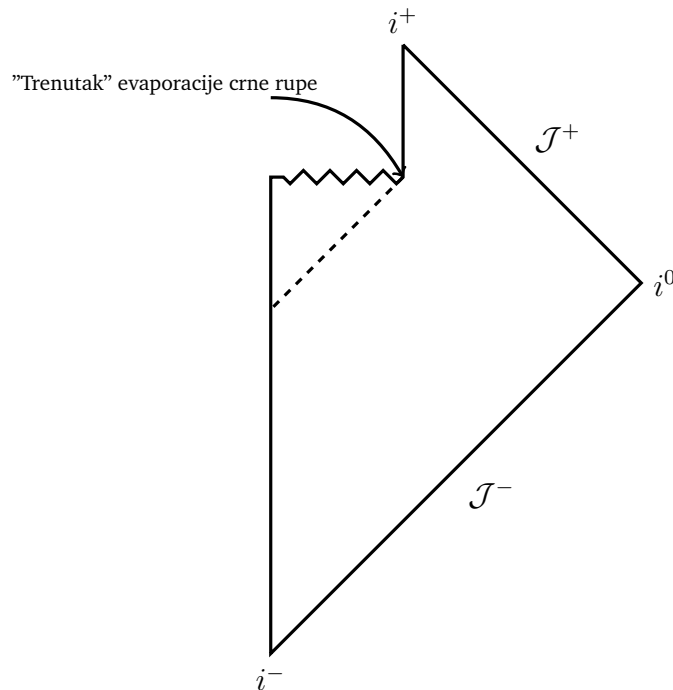
to jest:

$$1 = |\langle\phi|\psi\rangle| |\langle U_\phi|U_\psi\rangle| \quad (5.6)$$

Kako po pretpostavci nema nikakvog posebnog odnosa između stanja $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$, a ni $|U_\psi\rangle$ te $|U_\phi\rangle$, odmah vrijede nejednakosti: $|\langle\phi|\psi\rangle| \lesssim 1$ i $|\langle U_\phi|U_\psi\rangle| \leq 1$. Odmah slijedi da je izraz (5.6) općenito nemoguće zadovoljiti, osim ako se stanja $|\phi\rangle$ i $|\psi\rangle$ ne odaberu na vrlo poseban način (npr. da su ista), što je u kontradikciji s pretpostavkom da je moguće klonirati proizvoljno kvantno stanje jednim te istim operatorom \hat{K} .

Stoga zaključujemo da je *nemoguće* klonirati općenita kvantna stanja unitarnom evolucijom. \square

Spremni smo sada krenuti na primjenu za crne rupe. Radimo u Schwarzschildovom prostorvremenu crne rupe koja evaporira. Prostorvrijeme predstavljamo Penroseovim dijagramom, na slici 5.1 i ideja je odabrati potpunu Cauchyjevu plohu (koja predstavlja trenutak u vremenu) takvu da kroz nju ista informacija, tj. isto kvantno stanje, prolazi dva puta, kao što je prikazano na slici 5.2. Dodatno, u interesu će nam biti da ta Cauchyjeva ploha koju odaberemo ima dodatna "lijepa" svojstva (definirana u nastavku ovog potpoglavlja), koja će osigurati da se argument o kloniranju može provesti koristeći standardnu kvantnu mehaniku.

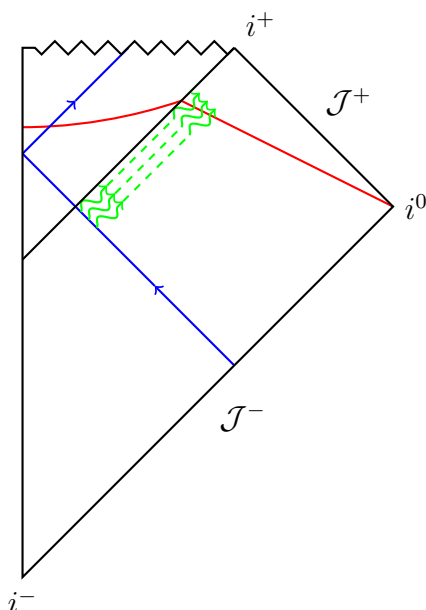


Slika 5.1: Carter Penrose dijagram prostorvremena evaporirajuće crne rupe

Udvostručenje informacija kroz Cauchyjevu plohu je moguće u prisustvu crnih rupa baš zbog specifičnih svojstava geometrije iza horizonta crne rupe, gdje t postaje prostorna, a r vremenska koordinata. Ta zamjena dopušta da se, slikovito govoreći, *lijepa* Cauchyjeva ploha dovoljno "savine" u konformnom dijagramu da informacija kroz nju prođe dva puta (za detalje vidi [37], [45]).

Za potrebe daljnje diskusije, treba definirati što su takozvane *lijepa Cauchyjeve plohe*, ili *lijepa rezanja prostorvremena* (engl. *nice slices*). Svrha će im biti definicija područja prostorvremena koje bi trebalo biti dobro opisano efektivnom teorijom polja i kvantnom mehanikom, tako da smo sigurni da je sve što radimo na njima valjano.

Budući da želimo pratiti dinamiku ujedno unutar i izvan crnih rupa, želimo nametnuti neka razumna ograničenja koja Cauchyjeve plohe moraju zadovoljavati, tako



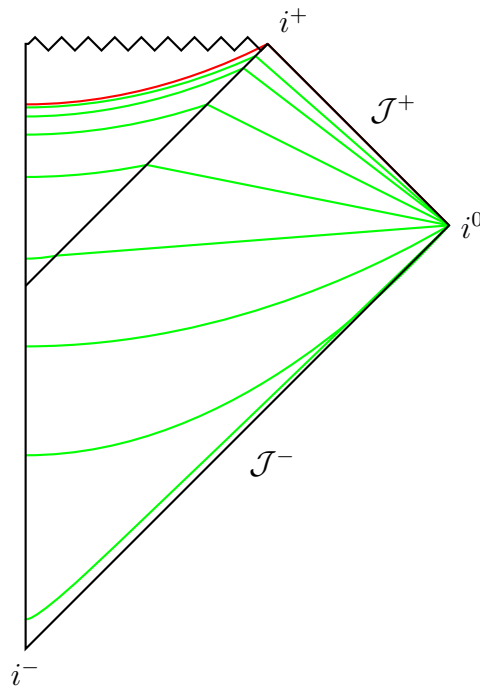
Slika 5.2: Primjer kako informacija o kvantnom stanju može dva puta proći kroz istu Cauchyjevu plohu. Materija (plavo) i izlazeće Hawkingovo zračenje (zeleno) oboje prolaze kroz Cauchyjevu plohu (crveno). Pretpostavlja se da Hawkingovo zračenje nosi informaciju o upadajućoj materiji.

da na njima svugdje možemo primijeniti efektivnu teoriju polja, bez jakih utjecaja kvantne gravitacije. Ukratko, želimo sljedeća svojstva za naša *lijepa rezanja prostor-vremena* [45]:

- Moraju biti Cauchyjeve plohe, dakle svugdje prostorne hiperplohe, takve da ih svaka kauzalna linija mora presjeći samo jednom.
- Moraju imati *lijepa* svojstva, što znači da moraju imati malu intrinzičnu i ekstrinzičnu zakrivljenost, te stoga biti dobro aproksimirane ravnim prostorvremenom. Ovo bi svojstvo bilo narušeno kad bismo dopustili da se plohe unutar horizonta proizvoljno približe singularitetu.
- Na velikim prostornim udaljenostima $r \rightarrow \infty$, Cauchyjeve plohe moraju težiti Cauchyjevim ploham u prostorvremenu Minkowskog $t = \text{const.}$, i stoga se t može koristiti kao parametar koji ih jednoznačno određuje.
- Cijelo prostorvrijeme van horizonta treba biti pokriveno unijom svih Cauchyjevih ploha. Ovo nije moguće unutar horizonta zbog zahtjeva da plohe budu *lijepo* i stoga moraju ostati razumno daleko od singulariteta, tj. od trenutka u evaporaciji crne rupe kad ona postane Planckove dimenzije.

Pod uvjetom da su sve ove pretpostavke zadovoljene, efektivna teorija polja je valjana na svim ploham. Eksplicitna konstrukcija ovakvih ploha se može pronaći u raznim

člancima [37, 38, 44, 45]. Slika (5.3) je primjer jednog skupa lijepih rezanja.



Slika 5.3: Primjer lijepih rezanja prostorvremena koja ostaju daleko od singulariteta crne rupe. Crvena linija je "zadnja" lijepa ploha, jer po definiciji ne postoje lijepe Cauchyjeve plohe koje pokrivaju cijelu unutrašnjost crne rupe.

Osnovna mana ovakvih rezanje je što ne pokriva cijelo prostorvrijeme, ali to u principu nije bitno za potrebe ovog potpoglavlja.

Ključno svojstvo lijepih rezanja koje sad želimo iskoristiti je da kroz dijelove unutar horizonta crne rupe mora proći sva materija koja je ikad upala u crnu rupu. S druge strane, kroz vanjski dio istih tih ploha mora proći sva materija koja odlazi u asimptotsku beskonačnost prostorvremena; specifično svo Hawkingovo zračenje. Ove dvije tvrdnje, u kombinaciji s pretpostavljenom unitarnosti Hawkingovog zračenja vode na problem kloniranja u blizini horizonata:

Tvrdnja 5.3. Kloniranje kvantnih stanja crnim rupama

Zamislimo da imamo dva promatrača, A i B , u prostorvremenu kolapsirajuće i zatim evaporirajuće Schwarzschildove crne rupe.

Promatrač A je FREFO tipa i upada u crnu rupu, neposredno nakon materije koja ju je stvorila. On može opaziti čisto stanje materije prije nego što upadne u singularitet.

Promatrač B je FIDO tipa, i ostaje izvan horizonta te sakuplja Hawkingovo zračenje koje izlazi iz crne rupe. Nakon što je dočekao Pageovo vrijeme, svojim kvantnim

računalom počinje dekodirati informacije o početnom stanju materije, koje je sada u crnoj rupi. Nakon što je gotov s dekodiranjem, B u svojoj kutiji Hawkingovog zračenja ima pripremljeno čisto stanje početne materije.

Čini se da nakon što promatrač B dekodira informaciju o početnom stanju materije (a neki argumentiraju da dekodiranje nije ni potrebno [2]), on je siguran da ima isto kvantno stanje koje se nalazi unutar crne rupe.

Narušenje principa zabrane kloniranja kvantnih stanja je u direktnoj kontradikciji s unitarnom evolucijom crnih rupa i s očuvanjem informacija.

Pretpostavimo li da kvantna mehanika vrijedi, *prava* unitarna evolucija, u duhu teorema 5.2 ne bi dopustila da se informacija klonira u prisustvu crnih rupa.

Problem kloniranja stoga postavlja dodatno ograničenje na točnu teoriju unitarne evolucije crne rupe. Točan model bi, osim definiranja mehanizma unitarizacije, trebao imati ugrađeno rješenje i za problem kloniranja.

Stoga, pitanja poput: "Klonira li naša unitarna teorija evaporacije crne rupe informaciju?" mogu poslužiti kao provjera je li dan pristup na dobrom tragu.

5.1.2 Postava komplementarnosti crnih rupa

Komplementarnost crnih rupa je promjena u načinu razmišljanja o Cauchyjevim ploham, za koji se smatralo da je dobar korak u rješavanju problema informacije crnih rupa. Jedan od razloga za to je što rješava problem kloniranja (tvrđnja 5.3). Nakon dugogodišnje debate u znanstvenoj zajednici, pokazalo se da to ipak nije tako i da je logička posljedica komplementarnosti postojanje *vatrozida* na horizontu. Vatrozidi se smatraju jednim od modernih rješenja problema informacija i opisati ćemo ih u potpoglavlju 5.2.

Osnova komplementarnosti crnih rupa je stara ideja [46], koja u osnovi tvrdi da se od teorije ne smije očekivati da daje konzistentne opise fizike za promatrače koji ne mogu postojati. Primjer takvog promatrača je netko tko može istovremeno raditi mjerenja unutar i izvan crne rupe. Komplementarnost tvrdi da izjave poput: "unutrašnjost crne rupe + Hawkingovo zračenje je sustav u čistom stanju" ne znače ništa jer nitko u tom trenutku ne može opaziti to čisto stanje.

Ovo vodi na zaključak da se Hilbertov prostor u kvantnoj gravitaciji ne smije faktori-

zirati na područje unutar i izvan crne rupe:

$$\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_{\text{in}} \otimes \mathcal{H}_{\text{out}} \quad (5.7)$$

već da ovisi o promatraču koji će opis Hilbertovog prostora biti adekvatan.

Komplementarnost crnih rupa se temelji na četiri pretpostavke koje se čine sasvim razumne, no pokazuje se da one nisu međusobno konzistentne osim ako se uvede zahtjev ekvivalentan izrazu (5.7).

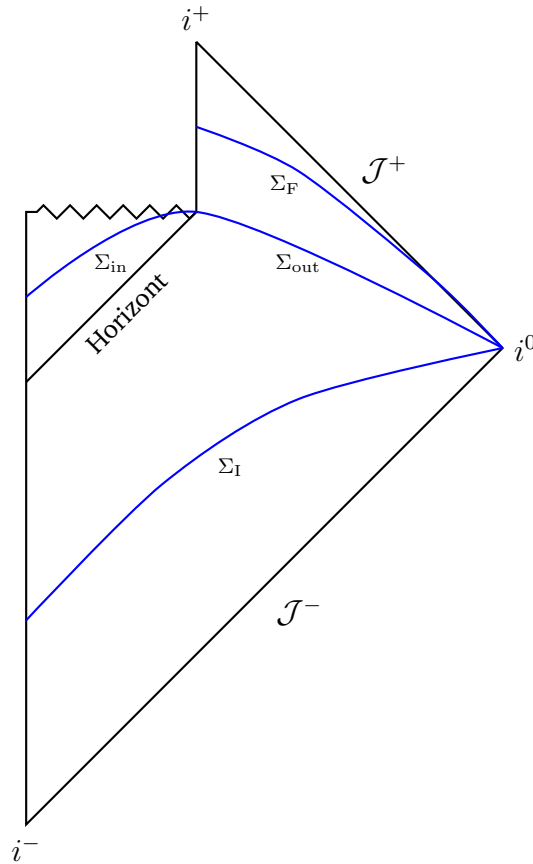
Pretpostavke komplementarnosti crnih rupa su sljedeće:

- K1 Iz perspektive udaljenog promatrača, formacija i evaporacija crne rupe se može u potpunosti opisati kvantnom teorijom polja, tj. postoji S -matrica koja opisuje unitarnu evoluciju upadajuće materije u izlazno Hawkingovo zračenje
- K2 Dok god se držimo izvan proširenog horizonta $r = 2M + \epsilon$, očekuje se da vrijedi efektivna teorija polja.
- K3 Za udaljenog promatrača, crna rupa se treba shvatiti kao kvantni sustav s Hilbertovim prostorom \mathcal{H}_{BH} kojem je dimenzija jednaka eksponenciranoj Bekenstein-Hawkingovoj entropiji - $\dim(\mathcal{H}_{BH}) \sim e^{S_{BH}}$.
- K4 *Upadajući promatrač pri prelasku horizonta ne vidi ništa neobično, horizont nije (lokalno govoreći) posebno mjesto u prostoru vremenu.*

Prve tri pretpostavke se općenito prihvaćaju kao dosta razumna svojstva semiklasične gravitacije. Četvrta pretpostavka je u osnovi princip ekvivalencije i ne očekuje se da će u ovom formatu biti narušena. Treća je možda najviše sporna, ali ako se crne rupe pokušavaju modelirati u kvantnoj fizici, to je manje više najgeneralnija stvar koja se može pretpostaviti (potpoglavlje 4.1).

Vrijedi napomenuti da su pretpostavke 1, 2 i 4 zapravo pretpostavke PI - 1, 4 i 5 - kojima je na samom početku poglavlja formuliran paradoks informacije, izrečene na malo drugačiji način.

Za argument treba razmotriti prostorvrijeme evaporirajuće crne rupe, s tri specifične Cauchyjeve plohe, prikazane na slici 5.4. Promatraju se tri Cauchyjeve plohe: $\Sigma_I, \Sigma_{\text{Evap}} = \Sigma_{\text{In}} \otimes \Sigma_{\text{Out}}$ i Σ_F , između kojih se pretpostavlja da vrijedi unitarna evolucija u smislu da se od jedne do infinitezimalno susjedne plohe može doći unitarnom vremenskom evolucijom $U = e^{-iHt}$, gdje je Hamiltonijan H određen efektivnom teorijom polja za materiju s kojom radimo.



Slika 5.4: Slika prostorvremena evaporirajuće crne rupe, s tri Cauchyjeve plohe od interesa označene plavo. Σ_I predstavlja početni trenutak, Σ_F predstavlja konačni trenutak, a $\Sigma_{\text{Evap}} = \Sigma_{\text{In}} \otimes \Sigma_{\text{Out}}$ predstavlja trenutak evaporacije.

Tvrdnja da efektivna teorija polja vrijedi blizu singulariteta na Σ_{Evap} možda zvuči sporno, budući da je neposredno prije trenutka evaporacije crna rupa iznimno mala, masa joj je bliska Planckovoj masi i stoga je moguće da se i u blizini horizonta javljaju kvantno gravitacijske korekcije. Ključno je da kad se kaže *efektivna teorija polja*, misli se na teoriju polja koja uključuje kvantno gravitacijske korekcije na jednadžbu evolucije teorije polja u ravnom prostorvremenu. Eksplicitna konstrukcija takvih korekcije je dana za dvodimenzionalni model dilatonske gravitacije u [46]. Točna teorija za četiri dimenzije je naravno nepoznata, jer ovisi o teoriji kvantne gravitacije, a pretpostavlja se samo da je evolucija stanja u njoj unitarna.

Kako je po drugoj pretpostavci svugdje između Σ_F i Σ_{Out} efektivna teorija polja valjana, mi možemo čisto stanje $|\psi(\Sigma_F)\rangle$ unitarno evoluirati unatrag u čisto stanje $|\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle$. U trenutku evaporacije kvantno stanje sustava je stoga dano produktim

stanjem:

$$|\phi(\Sigma_{\text{In}})\rangle \otimes |\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle \quad (5.8)$$

te se unitarna evolucija dešava samo između stanja $|\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle$ i $|\psi(\Sigma_{\text{F}})\rangle$:

$$U |\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle \rightarrow |\psi(\Sigma_{\text{F}})\rangle \quad (5.9)$$

Problem je sada u tome što imamo dvije unitarne evolucije, jednu koja nalaže da se matricom S može evoluirati iz stanja $|\psi(\Sigma_{\text{I}})\rangle$ u stanje $|\psi(\Sigma_{\text{F}})\rangle$, i drugu koja nalaže da se operatorom U može evoluirati iz stanja $|\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle$ u isto konačno stanje. Iz toga slijedi da u produktom stanju $|\phi(\Sigma_{\text{In}})\rangle \otimes |\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle$, dio stanja unutar crne rupe $|\phi(\Sigma_{\text{In}})\rangle$ ne sadrži nikakvu informaciju o početnom sustavu, i uopće nije potreban za unitarnu evoluciju. Dio početnog stanja $|\psi(\Sigma_{\text{I}})\rangle$ koji *unitarnom evolucijom* upada kroz horizont crne rupe mora pri prelasku horizonta istisnuti svu informaciju o stanju početne materije koja kolapsira u crnu rupu tako da ista završi vani. Ovo znači da horizont funkcionira kao barijera informaciji, tj. da ju reflektira van crne rupe, što je očito u dosta ekstremnom sukobu s pretpostavkom da se na horizontu crne rupe ništa posebno ne može dogoditi, tj. s principom ekvivalencije. Stoga se mora zaključiti da princip ekvivalencije i unitarna evolucija nisu međusobno konzistentni.

5.1.3 Tvrdnja komplementarnosti crnih rupa

Pretpostavimo li da je unitarna evolucija točna, mora slijediti da neka od pretpostavki iz gornjeg argumenta ne vrijedi.

Tvrdnja komplementarnosti crnih rupa je da je greška u argumentu bila kad smo Hilbertov prostor u trenutku evaporacije podijelili na $\Sigma_{\text{Out}} \otimes \Sigma_{\text{In}}$, tj. kad smo pokušali stanje u trenutku evaporacije opisati produktim stanjem: $|\phi(\Sigma_{\text{In}})\rangle \otimes |\chi(\Sigma_{\text{Out}})\rangle$. Tvrdi se da nema smisla pokušavati opisati stanje ujedno unutar i van horizonta, jer ne postoji promatrač u našem svemiru koji može oba stanja opaziti istovremeno.

Umjesto toga se predlaže da se jednostavno prihvati da ne postoji konzistentan opis za mirujuće promatrače izvan crne rupe, i za promatrače koji upadaju crnu rupu, i da je sasvim prihvatljivo da takvi promatrači ne mogu dati konzistentne opise, jer nikad ne mogu međusobno iskomunicirati razliku u opisima.

FREFO promatrač koji upada u crnu rupu ne vidi da se išta posebno događa pri prelasku horizonta. Informacija upada kroz horizont zajedno s njim i nakon dovoljno vremena upada u singularitet.

S druge strane, mirujući FIDO promatrač izvan crne rupe vidi horizont kao membranu koja reflektira informaciju iz upadajuće materije u obliku Hawkingovog zračenja. On vidi da upadajućoj materiji treba beskonačno dugo vremena da upadne do horizonta crne rupe, i stoga se pretpostavlja da postoji ranije spomenuti *prošireni horizont*; 2 + 1 dimenzionalna ploha koja obuhvaća horizont te mu se nalazi blizu (u Schwarzschildovom slučaju, na $r = 2M + \epsilon$). Iz perspektive FIDO promatrača, upadajuća materija do proširenog horizonta stiže u konačnom vremenu.

Udaljenost proširenog horizonta od horizonta crne rupe je određena specifičnostima kvantno gravitacijske teorije i reda veličine je Planckove duljine:

$$l_{\text{Membrana}} \propto l_{\text{Planck}} \quad (5.10)$$

Prošireni horizont, tj. ta *membrana* apsorbira upadajuću materiju, interagira s njom i reemitira informacije u obliku modificiranog, unitarnog Hawkingovog zračenja.

Ideja o proširenom horizontu ne ulazi u kontradikciju s Hawkingovim izvedom jer je u tom izvodu jedna od pretpostavki da se Hilbertov prostor može zapisati kao produkt dijela izvan i unutar horizonta; nešto što ovaj pristup eksplicitno negira. Princip ekvivalencije također još uvijek vrijedi, jer ako se FIDO promatrač izvan crne rupe odluči ipak skočiti u crnu rupu, za njega će membrana nestati u procesu akceleracije relativno na horizont.

Ograničenje na ovaj pristup je da membrana generalno ne može nastati kao posljedica efekta semiklasične aproksimacije gravitacije. Razlog za to je što, po principu ekvivalencije, FIDO promatrač okolicu horizonta velike crne rupe vidi kao Rindler prostorvrijeme (vidi potpoglavlje B.3.4 ili [2]), za koje se ne očekuje da postoje lokalni kvantno gravitacijski efekti jer je skala zakrivljenosti tamo znatno manja od Planckove skale. Prošireni horizont se stoga mora stvoriti nekim nelokalnim kvantno gravitacijskim efektom koji zna gdje se nalazi horizont crne rupe; ploha koja nije određena lokalnim svojstvima, već globalnim ponašanjem svjetlosnih geodezika.

Vrijedi napomenuti da komplementarnost u principu rješava problem kloniranja u prostorvremenima s horizontom jer tvrdi da ni jedan promatrač ne može opaziti

više primjeraka istog kvantnog stanja te da ako postoje dva promatrača koji se ne slažu oko položaja tog kvantnog stanja, ne postoji način da si to međusobno jave prije nego jedan od njih upadne u singularitet.

Ove tvrdnje *nisu* rigorozno dokazane, ali se vjerovalo da su točne u vrijeme kad se komplementarnost smatrala najboljim pristupom problemu informacije crnih rupa, na temelju brojnih primjera [49].

Jedan od tih primjera ćemo sada razmotriti. U njemu postoje dva promatrača, jedan FIDO tipa, izvan crne rupe i jedan FREFO tipa koji upada u crnu rupu. FIDO promatrač će informaciju o kvantnom stanju FREFO promatrača moći prikupiti iz Hawkingovog zračenja, a FREFO promatrač će moći obaviti mjerenja na sebi i time doznati svoje kvantno stanje. Ti se promatrači očito ne slažu oko položaja informacije i ako si uspiju to međusobno javiti nekim fizikalnim signalom, to bi bilo ekvivalentno kloniranju informacije tj. kvantnog stanja. Tvrdnja komplementarnosti je u ovom slučaju da takav signal ne postoji i da će jedan ili oba promatrača upasti u singularitet prije nego signal drugog promatrača do njih stigne.

U primjeru koji slijedi ćemo se ograničiti na perspektivu FIDO promatrača izvan crne rupe koji nakon što iz Hawkingovog zračenja prikupi informaciju o FREFO promatraču, uskače u crnu rupu i presreće svjetlosni signal koji je FREFO promatrač poslao [2]:

Primjer 5.4. Problem: Uzmimo FIDO promatrača A koji lebdi negdje izvan proširenog horizonta crne rupe i FREFO promatrača B koji upada kroz prošireni horizont te sa sobom nosi neku količinu informacije.

A vidi kako B upada kroz prošireni horizont koji počinje emitirati Hawkingovo zračenje, koje A prikuplja. B proživljava svoj upad kroz horizont bez ikakvih problema i čim prođe kroz horizont, šalje svjetlosni signal duž horizonta (u Penroseovom dijagramu) o svom stanju.

Kada je A prikupio informaciju o sustavu B iz Hawkingovog zračenja, on skače kroz horizont i presreće signal koji je sustav B poslao pri upadu kroz crnu rupu. A sada ima dvije kopije iste informacije, tj. kvantno stanje je klonirano. Stoga, ako se ovakav eksperiment može napraviti, komplementarnost nije ni dobar model unitarizacije Hawkingovog zračenja, jer je u direktnom sukobu s kvantnom mehanikom.

Javlja se i direktan sukob s tvrdnjom komplementarnosti - da svaki promatrač može konzistentno zaključiti da on ima jedinu kopiju informacije o danom kvantnom

stanju. Čim je promatrač A prikupio informaciju iz Hawkingovog zračenja, on je morao zaključiti da ta informacija nije mogla upasti u crnu rupu. Ako se sad ispostavi da je on mogao presresti signal promatrača B , onda znamo da *zaključak* promatrača A nije konzistentan s eksperimentom, tj. da komplementarnost nije konzistentna s eksperimentom.

Rješenje: Kako bismo duplicirali ikakvu informaciju, A mora čekati dovoljno dugo da crna rupa zapravo emitira jedan bit informacije, dakle barem Pageovo vrijeme (potpoglavlje 4.5.3) koje je reda vremena evaporacije crne rupe [30]:

$$t_{\text{Page}} \propto M^3 \quad (5.11)$$

Ako si promatrač A želi dati najbolju šansu da zapravo stigne prikupiti signal promatrača B , on će se pozicionirati najbliže što može horizontu crne rupe, tek izvan širine membrane l_{Membrana} .

Ako se ograničimo na područje blizu horizonta, možemo se poslužiti Rindlerovim koordinatama ρ, η (potpoglavlje B.3.4). U ovim koordinatama, promatrač A skače u crnu rupu na sljedećim koordinatama:

$$\eta \geq \frac{t_{\text{Page}}}{4M} \propto M^2 \equiv \eta_{\text{Page}} \quad (5.12)$$

$$\rho \geq l_{\text{Membrana}} \quad (5.13)$$

Lokalne Rindler koordinate za upadajućeg promatrača poprimaju oblik Minkowski-jevih koordinata svjetlosnog stošca (tj. metrika je oblika $ds^2 = -dx^+ dx^- + r^2 d\eta^2$); konkretno $x^\pm = \rho e^{\pm\eta}$, za koje ovi uvjeti postaju:

$$x^+ = \rho e^\eta \geq l_{\text{Membrana}} e^{\eta_{\text{Page}}} \quad (5.14)$$

$$x^+ x^- = \rho^2 \geq l_{\text{Membrana}}^2 \quad (5.15)$$

Moguće rješenje bi bilo da Pageovo vrijeme nastupa toliko kasno da ako promatrač A čeka da dobije neku informaciju iz Hawkingovog zračenja te tek onda uskoči kroz horizont, njegova će putanja kroz unutrašnjost crne rupe uvijek biti baš takva da upadne u singularitet prije nego što do njega stigne signal koji je promatrač B poslao. U ovom primjeru to nije slučaj, ali se slična logika koristi u nekim drugim primjerima [49] [57].

Singularitet se u ovim koordinatama nalazi na:

$$x^+ x^- = \rho^2 = M^2 \quad (5.16)$$

što definira hiperbolu u $x^+ > 0, x^- > 0$ kvadrantu prostorvremena.

Koordinata x^- na kojoj promatrač A upada u singularitet je stoga omeđena odozgo, korištenjem izraza (5.16) i (5.14), što daje ([2], izraz (9.2.8)):

$$x^- \leq M e^{-\eta_{\text{Page}}} \quad (5.17)$$

Za detaljan izvod ovog rezultata, koristeći Kruskal-Szekeres koordinate vidi 4. poglavlje rada [49].

Taj bi zaključak sada trebao ograničiti vrijeme koje slobodno padajući promatrač B ima da emitira signal o svojem stanju, prije nego što A upadne u singularitet. Problem je što općenito nije moguće odrediti vezu između vlastitog vremena promatrača B i koordinata u, v , to jest x^- i x^+ u blizini horizonta, osim ako mu se zna točna putanja u Kruskal-Szekeres koordinatama.

Kako bismo izbjegli račun tih putanja, sada ćemo argumentirati, kao što se (prešutno) napravilo i u [2], da je upadajući promatrač približno svjetlosna čestica. Kada bi upadajući promatrač bio svjetlosnog tipa (tj. ne bi imao masu), on bi upadao po putanji $v = \text{const.}, u \propto \tau$ i imali bismo direktnu korespondenciju između vlastitog vremena i koordinate u , koja odgovara koordinati x^- u lokalnim Rindler koordinatama.

Ovo za čestice s masom nije slučaj. One putuju po drugačijoj putanji, koja je općenito funkcija i x^+ i x^- i stoga je njihovo vlastito vrijeme veće od vrijednosti x^- . Pretpostavljamo da je taj efekt povećanja vlastitog vremena, za promatrača mase manje od M (jer u suprotnom B ne bi mogao stati unutar crne rupe), neznatan u usporedbi s eksponencijalnim faktorom e^{-M^2} iz izraza (5.14).

Uz ovu pretpostavku $\tau_B \sim x^-$ sada možemo, koristeći izraz (5.17), uspostaviti ograničenje na vlastito vrijeme upadajućeg promatrača:

$$\Delta\tau_B \leq M e^{-M^2} \quad (5.18)$$

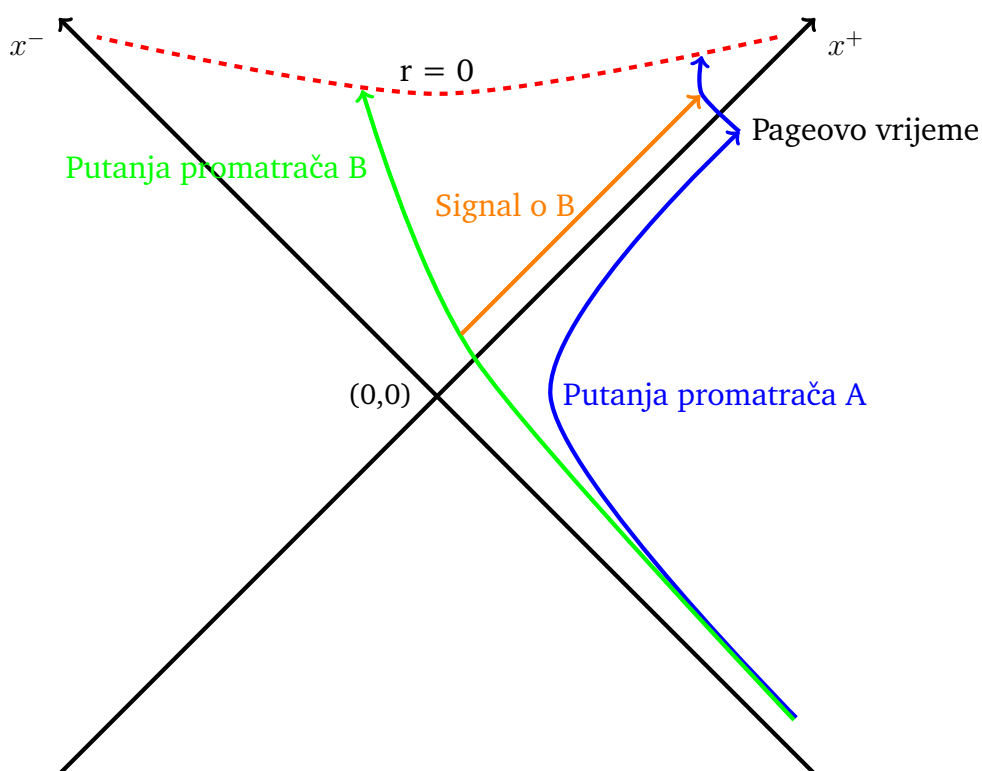
Ovaj izraz predstavlja vrijeme koje promatrač B ima da emitira informaciju o svom kvantnom stanju duž osi x^+ , tako da stigne presresti promatrača A prije nego što

upadne u singularitet.

Da bi promatrač B uspio poslati signal u tako kratkom vremenu, on mora koristiti fotone valne duljine manje od $c\Delta t$, tj. energije veće od $\frac{1}{\Delta t}$, što povlači da sustav B sadrži energiju:

$$E_B \geq \frac{e^{M^2}}{M} > M \quad (5.19)$$

gdje je u eksponentu masa izražena u jedinicama Planckove mase. Dobivena energija je značajno veća od mase crne rupe i promatrač B sam po sebi ne stane u crnu rupu.



Slika 5.5: Slika putanja iz primjera. Vidimo da kad promatrač A uskače u crnu rupu nakon Pageovog vremena, singularitet se nalazi na vrijednosti x^- koja je više negativna od one na kojoj je upao kroz horizont za sve kauzalne putanje unutar crne rupe.

Ovaj primjer je indikativan što se tiče generalnog ponašanja kad se u komplementarnosti crnih rupa pokušava klonirati informacija [49].

Primjer naveden ovdje (primjer 5.4) i oni u [49] sugeriraju da komplementarnost ima potencijal izbjeći problem kloniranja i biti dobar korak prema mehanizmu unitarizacije Hawkingovog zračenja, no ispast će da pažljivo razmatranje argumenta

komplementarnosti ipak vodi na probleme, konkretno na postojanje *vatrozida*, koji će biti tema sljedećeg potpoglavlja.

5.2 *Argument za vatrozide i AMPS paradoks*

Argumenti o vatrozidima su počeli kao pokušaji konstruiranja mehanizma kojim se komplementarnost crnih rupa manifestira, a ispalo je da su konstruirali protuprimjer; tj. ustanovili su da upadajući promatrač ne može bezazleno preći preko horizonta te da bi morao susresti visokoenergijski vatrozid i izgorjeti, baš kao što i FIDO promatrač vidi.

U radu [50] je iznesen takozvani *AMPS argument*, nazvan po inicijalima autora rada. Konkretno, ustanovljeno je da su pretpostavke komplementarnosti međusobno nekonzistentne i da stoga komplementarnost ne može biti cijela priča.

Argument ugrubo ide tako da se pokaže kako Hawkingovo zračenje mora biti maksimalno isprepleteno s više sustava istovremeno te se zatim iskoristi monogamija isprepletenosti da se zaključi kako je to nemoguće. To onda vodi na zaključak da sve pretpostavke komplementarnosti ne mogu istovremeno biti točne te da se bar jedna mora odbaciti.

Time se dobije da su "razumne" pretpostavke komplementarnosti (početak potpoglavlja 5.1.2) međusobno nekonzistentne i stoga komplementarnost ne može biti potpuno rješenje problema informacije. Nadalje se argumentira da bi odbacivanje bilo koje od prve tri pretpostavke imalo drastične posljedice na valjanost efektivne teorije polja i kvantne mehanike. Stoga se odbacuje princip ekvivalencije, što vodi na postojanje vatrozida na horizontu, čak i za promatrače koji upadaju kroz njega.

Kako je iskaz samog AMPS argumenta dosta složen, organizirat ćemo ga u nekoliko koraka, tako da ga je lakše pratiti. Ti se koraci ugrubo sastoje od sljedećeg:

- Pomoćni rezultat za iskaz ostatka izvoda
- FIDO i FREFO promatrači i rekonstrukcija maksimalne isprepletenosti Hawkingovog zračenja
- Maksimalna isprepletenost Hawkingovog para na horizontu i pojava vatrozida
- Monogamija isprepletenosti primijenjena na prethodna dva zaključka

5.2.1 Početna postava AMPS argumenta i preliminarni pomoćni rezultat

Sada ćemo izreći AMPS argument na način koji je predstavljen u originalnom radu [50].

Za početak se pretpostavlja da postulati komplementarnosti crnih rupa (početak potproglavlja 5.1.2, K1-K4) vrijede.

Imamo crnu rupu koja nastaje kolapsom čistog stanja $|\psi\rangle_I$. Koristeći prvu pretpostavku komplementarnosti, slijedi da je konačno Hawkingovo zračenje također u čistom stanju $|\psi\rangle$ koje je evoluiralo iz početnog stanja nekom unitarnom transformacijom.

Za početak treba napraviti veliku digresiju, da se izvede *pomoćni rezultat* koji će nam trebati u formulaciji paradoksa.

Čisto stanje Hawkingovog zračenja se može podijeliti na one čestice koje su iz crne rupe emitirane prije Pageovog vremena (od sad zvane *rani potprostor*, dimenzije $N_<$), i one emitirane nakon Pageovog vremena (od sad zvane *kasni potprostor*, dimenzije $N_>$):

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle_> \otimes |\psi_i\rangle_< \quad (5.20)$$

gdje je $\{|i\rangle_>\}$ ortonormalna baza vektora kasnog potprostora, a $\{|\psi_i\rangle_<\}$ je neki skup od $N_<$ stanja koja razapinju rani potprostor, ali koja nisu obavezno ortonormalna. Suma ovdje ide po dimenziji kasnog potprostora i stoga se pretpostavlja da vrijedi: $N_> \leq N_<$. Ta će tvrdnja biti opravdana nakon dokaza koji slijedi, u napomeni 5.6.

Razlog zašto dekompozicija ovako izgleda je jer kad se odabere ortonormalna baza kasnog potprostora, ništa ne garantira da će ta baza biti jednostavno isprepletena u 1 : 1 odnosu s nekom ortonormalnom bazom na ranom potprostoru. Konstrukcija koja se ovdje radi u biti kaže: generalno postoji neka doza isprepletenosti između kasnog i ranog Hawkingovog zračenja, i mi ćemo rani potprostor opisati skupom vektora $|\psi_i\rangle_<$ koji su odabrani kao *baš oni* koji daju točne isprepletenosti s kasnim ortonormalnim skupom.

Ovo se puno eksplicitnije može vidjeti opišu li se stanja $\{|\psi_i\rangle_<\}$ ortonormalnom ba-

zom $\{|j\rangle_{<}\}$. To onda daje standardni oblik općenitog isprepletenog stanja:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle_{>} \otimes |j\rangle_{<} \quad (5.21)$$

Poanta je sada promotriti razliku projekcije na stanje ranog i stanje kasnog zračenja, za koju će se ispostaviti da su iste, do na popravke reda: $\mathcal{O}(\frac{N_{>}}{N_{<}})$. Argumentirati će se da se one mogu zanemariti za realne crne rupe s $\frac{m_P}{M} \approx 0$ i da se stoga iz projekcije na prostor ranog zračenja nešto može zaključiti o prostoru kasnog zračenja i obratno.

Tvrdnja 5.5. Za nasumično odabrano čisto stanje (po Haar mjeri) vrijedi da je razlika između projekcije na stanje u kasnom potprostoru i na stanje u ranom potprostoru Hawkingovog zračenja reda veličine $\mathcal{O}(\frac{N_{>}}{N_{<}})$.

Dokaz 5.5.1. Za potrebe dokaza promatramo operator:

$$\begin{aligned} (\hat{P}_{>}^i - N_{>} \hat{P}_{<}^i)^2 &= (|i\rangle_{>} \langle i| \otimes \mathbf{1}_{<} - N_{>} (\mathbf{1}_{>} \otimes |\psi_i\rangle_{<} \langle \psi_i|))^2 \\ &= (|i\rangle_{>} \langle i| - N_{>} |\psi_i\rangle_{<} \langle \psi_i|)^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

tj. njegovu očekivanu vrijednost po mikrokanonskoj Haar mjeri $d\mu$, definiranoj ranije u izrazu (4.23). Tu se dakle ponovno pretpostavlja da je sustav u proizvoljno odabranom čistom stanju, koje nije posebno dobro prilagođeno bazi odabranom za dekompoziciju Hawkingovog zračenja.

Operator se može raspisati, koristeći svojstva projektora $P^2 = P$, no treba uzeti u obzir da stanja $|\psi_i\rangle_{<}$ nisu normirana:

$$\begin{aligned} (\hat{P}_{>}^i - N_{>} \hat{P}_{<}^i)^2 &= \hat{P}_{>}^{i2} + N_{>}^2 \hat{P}_{<}^{i2} - 2N_{>} \hat{P}_{<}^i \hat{P}_{>}^i \\ &= \hat{P}_{>}^i + N_{>}^2 \langle \psi_i | \psi_i \rangle_{<} \hat{P}_{<}^i - 2N_{>} \hat{P}_{<}^i \hat{P}_{>}^i \\ &= (|i\rangle_{>} \langle i| \otimes \mathbf{1}_{<}) \\ &\quad + N_{>}^2 \langle \psi_i | \psi_i \rangle_{<} (\mathbf{1}_{>} \otimes |\psi_i\rangle_{<} \langle \psi_i|) \\ &\quad - 2N_{>} (|i\rangle_{>} \langle i| \otimes |\psi_i\rangle_{<} \langle \psi_i|) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Izračun očekivane vrijednosti onda daje:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \left(\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i \right)^2 | \psi \rangle &= \sum_{ab} \langle a | \otimes \langle \psi_a | \left[\left(|i\rangle_> \langle i| \otimes \mathbf{1}_< \right) \right. \\ &\quad \left. + N_>^2 \langle \psi_i | \psi_i \rangle_< \left(\mathbf{1}_> \otimes | \psi_i \rangle_< \langle \psi_i | \right) \right. \\ &\quad \left. - 2N_> \left(|i\rangle_> \langle i| \otimes | \psi_i \rangle_< \langle \psi_i | \right) \right] | b \rangle_> \otimes | \psi_b \rangle_< \end{aligned} \quad (5.24)$$

što nakon malo preuređivanja daje:

$$\langle \psi | \left(\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i \right)^2 | \psi \rangle = \langle \psi_i | \psi_i \rangle_< \left[\left(1 - N_> \langle \psi_i | \psi_i \rangle_< \right)^2 + N_>^2 \sum_{i \neq b} | \langle \psi_i | \psi_b \rangle_< |^2 \right] \quad (5.25)$$

gdje se koristila ortogonalnost $|i\rangle_>$ te se uzelo u obzir da $|\psi_i\rangle_<$ nisu ortogonalni niti normalizirani. Nadalje, suma \sum_{ab} je podijeljena na dijagonalni dio $i = j$ i nedijagonalni dio, radi lakšeg nastavka računa.

Taj rezultat sad još treba usrednjiti po Haar mjeri:

$$\frac{\overline{\langle \psi | \left(\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i \right)^2 | \psi \rangle}}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle_<} = \int d\mu \left[\left(1 - N_> \langle \psi_i | \psi_i \rangle_< \right)^2 + N_>^2 \sum_{j \neq i} | \langle \psi_i | \psi_j \rangle_< |^2 \right] \quad (5.26)$$

ili, ako se ψ_i zapiše u ortonormalnoj bazi $|\psi_i\rangle_< = \sum_k c_{ik} |k\rangle_<$:

$$\begin{aligned} \int d\mu \left[\left(1 - N_> \sum_{kl} c_{ik}^* c_{il} \langle k|l\rangle_< \right)^2 \right. \\ \left. + N_>^2 \sum_{j \neq i} \sum_{klmn} c_{ik}^* c_{jl} c_{jm}^* c_{in} \langle k|l\rangle_< \langle m|n\rangle_< \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ovdje je bitno primijetiti da su granice u sumama različite, jer je suma po j došla od produkta dva $|\psi\rangle$ stanja, a suma po $klmn$ od raspisa stanja $|\psi_i\rangle$ po ortogonalnoj bazi.

Da bismo izračunali ovo očekivanje, trebamo dva pomoćna rezultata:

$$\overline{c_{ab}^* c_{cd}} = \int d\mu c_{ab}^* c_{cd} = \int d\mu \delta_{ac} \delta_{bd} |c_{ab}|^2 = \frac{1}{\dim(\mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>)} \delta_{ac} \delta_{bd} \int d\mu \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \overline{c_{ab}^* c_{cd} c_{ef}^* c_{gh}} &= \int d\mu c_{ab}^* c_{cd} c_{ef}^* c_{gh} = (\delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{eg} \delta_{fh} + \delta_{ag} \delta_{bh} \delta_{ce} \delta_{df}) \int d\mu |c_{ab}|^4 \\ &= (\delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{eg} \delta_{fh} + \delta_{ag} \delta_{bh} \delta_{ce} \delta_{df}) \frac{1}{\dim(\mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>)^2} \int d\mu \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdje je $\dim(\mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>) = N_< N_>$, te se koristila simetrija Haar metrike na zamjene pa-

rova indeksa koeficijenata c . Više detalja o ovom računu se može pronaći u dodatku C, konkretno u izrazima (C.72) i (C.75).

Zatim, da bi se izvrijednila jednačba (5.26) tj. (5.27), treba izračunati tri očekivane vrijednosti:

$$N_{>} \langle \overline{\langle \psi_i | \psi_i \rangle_{<}} \rangle = N_{>} \sum_{kl}^{N_{<}} \overline{c_{ik}^* c_{il}} \langle k|l \rangle_{<} \quad (5.30)$$

$$N_{>}^2 \langle \overline{\langle \psi_i | \psi_i \rangle_{<}^2} \rangle = N_{>}^2 \sum_{klmn}^{N_{<}} \overline{c_{ik}^* c_{il} c_{im}^* c_{in}} \langle k|l \rangle_{<} \langle m|n \rangle_{<} \quad (5.31)$$

$$N_{>}^2 \sum_{i \neq j}^{N_{>}} \langle \overline{|\langle \psi_i | \psi_j \rangle_{<}|^2} \rangle = N_{>}^2 \sum_{j \neq i}^{N_{>}} \sum_{klmn}^{N_{<}} \overline{c_{ik}^* c_{jl} c_{jm}^* c_{in}} \langle k|l \rangle_{<} \langle m|n \rangle_{<} \quad (5.32)$$

Primjenom (5.28) na očekivanje (5.30), uz identitet $\sum_k^{N_{<}} \delta_{kk} = N_{<}$ imamo:

$$\begin{aligned} N_{>} \sum_{kl} \overline{c_{ik}^* c_{il}} \langle k|l \rangle_{<} &= N_{>} \sum_k \int d\mu c_{ik}^* c_{ik} = N_{>} \sum_k \frac{\delta_{ii}}{N_{<} N_{>}} \delta_{kk} \int d\mu \\ &= \frac{N_{>}}{N_{<} N_{>}} \delta_{ii} \sum_k \delta_{kk} = \delta_{ii} = 1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Drugi, malo složeniji član se dobije računanjem (5.32) pomoću (5.29):

$$\begin{aligned} N_{>}^2 \sum_{j \neq i} \sum_{km} \int d\mu c_{ik}^* c_{jk} c_{jm}^* c_{im} &= N_{>}^2 \sum_{j \neq i} \sum_{km} \frac{(\delta_{ij} \delta_{kk} \delta_{ji} \delta_{mm} + \delta_{ii} \delta_{km} \delta_{jj} \delta_{km})}{N_{<}^2 N_{>}^2} \\ &= \frac{1}{N_{<}^2} \sum_{j \neq i}^{N_{>}} (0 + \delta_{ii} \delta_{jj}) \sum_k \delta_{kk} = \frac{N_{<} (N_{>} - 1)}{N_{<}^2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Konačno, zadnja očekivana vrijednost (5.31) se može brzo očitati iz gornjeg rezultata za (5.32), ako se stavi $i = j$, umjesto $i \neq j$ odmah na početku:

$$\begin{aligned} N_{>}^2 \sum_{km} \int d\mu c_{ik}^* c_{ik} c_{im}^* c_{im} &= N_{>}^2 \sum_{km} \frac{(\delta_{ii} \delta_{kk} \delta_{ii} \delta_{mm} + \delta_{ii} \delta_{km} \delta_{ii} \delta_{km})}{N_{<}^2 N_{>}^2} \int d\mu \\ &= \frac{1}{N_{<}^2} \left(\sum_k \delta_{kk} \sum_m \delta_{mm} + \delta_{ii} \sum_k \delta_{kk} \right) \delta_{ii} = \frac{(N_{<} + 1)}{N_{<}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Uvrštavanjem svega natrag u (5.26) dobivamo:

$$\frac{\langle \psi | (\hat{P}_{>}^i - N_{>} \hat{P}_{<}^i)^2 | \psi \rangle}{\langle \psi_i | \psi_i \rangle} = \left(1 - 2 + \frac{(N_{<} + 1)}{N_{<}} + \frac{N_{>} - 1}{N_{<}} \right) = \frac{N_{>}}{N_{<}} \quad (5.36)$$

što je najavljeni rezultat. \square

Analogno, i značajno jednostavnije se može izračunati i očekivana vrijednost samog operatora:

$$\overline{\langle \psi | (\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i) | \psi \rangle} \quad (5.37)$$

koja nakon malo raspisivanja te korištenja izraza (5.28):

$$\begin{aligned} \overline{\langle \psi | (\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i) | \psi \rangle} &= \int d\mu \left[\sum_{a=1}^{N_>} \delta_{ii} \langle \psi_a | \psi_a \rangle_< - N_> \sum_{a=1}^{N_>} |\langle \psi_a | \psi_i \rangle_<|^2 \right] \\ &= \int d\mu \left[\delta_{ii} - N_> \sum_a \frac{\delta_{ai}}{N_>} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Stoga, ako djelujemo projektorom $|\psi_i\rangle_< \langle \psi_i|$ na rani potprostor nasumično odabranog stanja Hawkingovog zračenja $|\psi\rangle$, to će djelovanje do na članove reda $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N_>}{N_<}}\right)$ izgledati kao djelovanje projektorom $|i\rangle_>$ u prostoru kasnog zračenja:

$$\langle \psi | (\hat{P}_>^i - N_> \hat{P}_<^i) | \psi \rangle \approx 0 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N_>}{N_<}}\right) \quad (5.39)$$

to jest:

$$N_> |\psi_i\rangle_< \langle \psi_i | \psi \rangle = |i\rangle_> \langle i | \psi \rangle + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N_>}{N_<}}\right) \quad (5.40)$$

Nadalje, skup projektora $\{|i\rangle_> \langle i|\}$ je dobra baza za operatore u potprostoru kasnog zračenja, i stoga se očekuje da se u principu kombiniranjem operatora $|\psi_i\rangle_< \langle \psi_i|$ u ranom potprostoru može projicirati na bilo koji potprostor kasnog zračenja.

Napomena 5.6. Prije nego nastavimo dalje, treba još komentirati pretpostavku AMPS argumenta da je broj Hawkingovih čestica emitiranih nakon Pageovog vremena $N_>$ značajno manji od broja Hawkingovih čestica emitiranih prije Pageovog vremena $N_<$ [50]. To je smisleno budući da se prosječna energija Hawkingovih kvanta povećava kako se masa crne rupe smanjuje pa će u drugoj polovici evaporacije biti stvoren manji broj čestica veće prosječne energije. Ova pretpostavka je bitna jer nam dopušta da ustanovimo vezu između ranog i kasnog Hawkingovog zračenja, tj. da zanemarimo članove reda $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{N_>}{N_<}}\right)$.

Konkretan primjer primjene gornjeg rezultata će se koristiti u nastavku dokaza: Zamislimo da u kasnom potprostoru postoji kvant Hawkingovog zračenja frekvencije ω . Po drugoj pretpostavci komplementarnosti crnih rupa za promatrača u asimptotskoj beskonačnosti vrijedi efektivna teorija polja i stoga on tom modu može pridružiti jedinstven operator spuštanja b_ω . Tim se operatorom onda definira operator broja čestica $b_\omega^\dagger b_\omega$ u tom specifičnom modu u kasnom potprostoru. Analogno se može napraviti za svaki mod kasnog Hawkingovog zračenja.

Koristeći tvrdnju koju smo dokazali (dokaz 5.5.1) i posljedično izraz (5.40), odmah slijedi da se u ranom potprostoru može konstruirati neki operator $\hat{P}_{<,\omega}$ koji ima efekt projekcije ukupnog stanja $|\psi\rangle$ na potprostor razapet modovima b_ω u kasnom potprostoru. Konkretno, uzmimo, kao i u dokazu, ortonormalnu bazu kasnog potprostora $\{|i\rangle_>\}$, te odaberimo $|i = 1_\omega\rangle_>$ kao stanje kasnog Hawkingovog zračenja u kojem postoji samo jedan kvant frekvencije ω . Korištenjem raspisa iz dokaza, postoji stanje $|\psi_\omega\rangle_<$ u ranom potprostoru, koje je isprepletano samo s $|1_\omega\rangle_>$, i koristeći izraz (5.40) dobivamo:

$$|\psi_\omega\rangle_< \langle\psi_\omega|\psi\rangle = \frac{1}{N_>} |1_\omega\rangle_> \langle 1_\omega|\psi\rangle + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{1}{N_>N_<}}\right) \quad (5.41)$$

Iz ovoga slijedi da ako promatrač skupi Hawkingove čestice koje su emitirane prije Pageovog vremena, u ranom potprostoru, on će imati pristup svim operatorima: $|\psi_\omega\rangle_< \langle\psi_\omega|$. Tvrdnja 5.5 onda kaže da je to vrlo slično (za izrazito velike crne rupe praktički isto) tome da rani promatrač ima pristup kasnom potprostoru razapetom operatorima $|1_\omega\rangle_> \langle 1_\omega|$ te da stoga može odrediti hoće li u budućnosti biti emitirana Hawkingova čestica frekvencije ω .

Dodatno je bitno ustanoviti da se dani mod Hawkingovog zračenja može evoluirati unatrag do proširenog horizonta jednadžbama sličnim izrazu (3.36), uz trivijalnu razliku da će tamo imati veću frekvenciju zbog plavog pomaka

$$\omega \rightarrow \omega_* = \omega \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2M}{2M+\delta}}} \quad (5.42)$$

Ovo je opravdano aproksimacijom geometrijske optike, koja je opisana u potpoglavlju 3.2.3, koja u osnovi tvrdi da se Hawkingove čestice gibaju po svjetlosnim linijama u prostorvremenu i da je jedini efekt potencijala crveni pomak frekvencije, pod uvjetom

da su dovoljno visoke energije da se potencijal crne rupe u njihovoj jednadžbi propagacije (u Schwarzschildovom slučaju recimo izraz (3.36)) može zanemariti. Ovo nam dopušta da zaključimo kako FIDO promatrači blizu horizonta također mogu opaziti identičan spektar (visoko energijskog) Hawkingovog zračenja te posljedično doći do istih zaključaka o stanju kasnog Hawkingovog zračenja. Jedina je razlika u odnosu na asimptotskog promatrača plavi pomak frekvencije, koji se lako odračuna.

U daljnjem postupku, kad razmatramo FIDO promatrače blizu horizonta, ograničavamo se na područje manje udaljenosti od $R_{\text{Schwarzschild}}$, ali značajno veće od nekoliko Planckovih duljina, da ostavimo prostora za potencijalne efekte kvantne gravitacije na horizontu.

5.2.2 FIDO i FREFO promatrači; rekonstrukcija maksimalne isprepletenosti Hawkingovog zračenja

Za početak treba skrenuti pozornost na diskusiju o FIDO promatračima u prostorvremenu Schwarzschildove crne rupe u potpoglavlju 3.2.3 i konkretno na izraz (3.41) koji nalaže da se polje u prostorvremenu s horizontom mora razviti po dva skupa operatora podizanja i spuštanja - jedan skup b^{hor} pridružen modovima na horizontu i drugi skup b^{out} pridružen modovima u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti. Razlog za to je što treba definirati operatore na potpunoj Cauchyjevoj plohi (za definiciju vidi npr. [8]) koja garantira da ćemo na njoj moći opisati sve fizikalne čestice u prostorvremenu (tj. da nam ništa neće promaknuti, recimo tako da upadne kroz horizont). Potpunija diskusija kvantne teorije polja u zakrivljenoj pozadini se može pronaći u [24] i [26].

Mi ćemo u ovom poglavlju i nadalje operatore FIDO promatrača označavati s b , tako da raspis polja glasi:

$$\phi = \sum_i (b_i^{out} u_i^{out} + b_i^{hor} u_i^{hor} + \text{h.k.}) \quad (5.43)$$

Kutne koordinate su potisnute u interesu kompaktnosti notacije.

Prebacimo se sad u perspektivu upadajućeg FREFO promatrača koji prelazi horizont i upada u crnu rupu, nakon Pageovog vremena. Pod uvjetom da je on sjedio ispred crne rupe od njenog nastanka, on je mogao prikupljati rane Hawkingove čestice te rekonstruirati stanje kasnog Hawkingovog zračenja iz njih. Stoga on u principu

može ustanoviti, za danu kasnu Hawkingovu česticu $|i\rangle_>$, s kojim je specifičnim stanjem ranog zračenja $|\psi_i\rangle_<$ ona isprepletena. Štoviše, Hawkingova čestica mora s tim stanjem biti maksimalno isprepletena, budući da vrijedi dekompozicijom iz izraza (5.20), koji opisuje maksimalnu isprepletenost.

Sada treba ustanoviti što takav promatrač vidi kad upada u crnu rupu, i zaključak će biti da vidi skup stanja koja su isprepletena preko horizonta; tj. vidi točno Hawkingove parove dane izrazom (3.57). Iz ovoga će slijediti da smo uspjeli konstruirati promatrača koji istovremeno može opservirati isprepletenost neke specifične kasne Hawkingove čestice s nekim podskupom ranog Hawkingovog zračenja tako da čeka ispred crne rupe i prikuplja rano zračenje, te zatim skoči u crnu rupu zajedno s tim Hawkingovim parom i opservira maksimalnu isprepletenost predviđenu s (3.57), što je u kontradikciji s monogamijom isprepletenosti.

Opis perspektive upadajućeg promatrača sada slijedi. Konačan je cilj ustvrditi formu maksimalne isprepletenosti, nalik (3.57).

Koristeći četvrtu pretpostavku možemo zaključiti da dok god se promatrač nalazi daleko od singulariteta, nalazi se na lijepim Cauchyjevim plohama i stoga lokalno vrijedi efektivna teorija polja. Takav promatrač ne vidi horizont kao mjesto na kojem se dešava beskonačna dilatacija vremena već su mu sve koordinate tamo kontinuirane. Stoga on cijelo prostorvrijeme opisuje na jednoj povezanoj Cauchyjevoj plohi s jednom bazom modova te odgovarajućim skupom operatora podizanja i spuštanja a_ω koji detektiraju upadajuće čestice.

Sljedeće će nam trebati veza između operatora podizanja i spuštanja FIDO i FREFO promatrača. Kao što je poznato iz izvoda Hawkingovog zračenja (potpoglavlje 3.2.3), operatori podizanja i spuštanja su, za različite promatrače s različitim izborima modova, povezani Bogoljubovljevim transformacijama (izrazi (3.31) i (3.42)). Veza operatora glasi:

$$b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} a_{\omega'}^\dagger) \quad (5.44)$$

Za promatrače s različito odabranim modovima (kao što su FIDO i FREFO promatrač), koeficijenti α i β oba nisu jednaki nuli i mogu se eksplicitno izračunati.

Račun koji sad treba napraviti je zapravo točno račun Hawkingovog zračenja [24], i stoga se rezultati mogu preuzeti iz ranijeg poglavlja o tom izvodu (izrazi (3.46) i

(3.47)), da se zaključi:

$$|\alpha_{\omega\omega'}| = e^{4\pi M\omega_i} |\beta_{\omega\omega'}| \quad (5.45)$$

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \quad (5.46)$$

Treba uzeti u obzir da ovo određuje operatore α i β do na relativnu fazu $e^{i\phi}$.

Primjenom izraza (3.43) za eksplicitan oblik veze operatora dobivamo:

$$b_\omega = \frac{1}{\sqrt{e^{8\pi M\omega} - 1}} (e^{4\pi M\omega} e^{i\phi} a_\omega + a_\omega^\dagger) \quad (5.47)$$

Invertiranjem relacije (3.43) za a_ω dobivamo:

$$a_\omega = \frac{1}{\sqrt{e^{8\pi M\omega} - 1}} (e^{4\pi M\omega} e^{i\phi} b_\omega^\dagger - b_\omega) \quad (5.48)$$

Po razmatranjima iz poglavlja o izvodu Hawkingovog zračenja (izraz (3.57)), iz ove eksplicitne relacije se može dobiti veza između vakuuma koje vidi promatrač koji upada kroz horizont, s operatorima a i promatrač koji miruje izvan horizonta, s operatorima b (izraz (3.57)) i ta veza glasi:

$$|0^a \rangle = \mathcal{N} \prod_k \sum_N e^{-4\pi N M \omega_k} \left| N_k^{b^{hor}} \right\rangle \otimes \left| N_k^{b^{out}} \right\rangle \quad (5.49)$$

Ovaj korak rastavljanja prostora na područje unutar i izvan horizonta je u nekoj mjeri u sukobu s komplementarnosti, koja nalaže da ovakva stanja nisu opservabilna i da ih se stoga ne treba razmatrati.

Ipak, sve u svemu ovo je standardni rezultat – promatrač koji upada kroz horizont vidi vakuum opisan kao produkt lijevog i desnog stanja čestica na Rindlerovom horizontu, i njega ćemo koristiti u argumentima koji slijede.

5.2.3 Maksimalna isprepletenost Hawkingovog para na horizontu i pojava vatrozida

Sad ćemo argumentirati da bilo kakvo odstupanje od maksimalne isprepletenosti, dane Hawkingovim stanjem (5.49) uzrokovalo nastajanje čestica na horizontu.

Literatura se u ovom trenutku poziva na tvrdnju da će horizont za upadajućeg pro-

matrača biti stanje bez čestica ako i samo ako je njegovo Minkowskijevo vakuumsko stanje dano u Rindler koordinatama kao maksimalno isprepleteno stanje (5.49). Ovo je smisleno, budući da je opis Minkowskijevog vakuuma na Rindler Hilbertovom prostoru (po principu ekvivalencije) dan točno s (5.49). Neko odstupanje od toga mora značiti da se za FREFO promatrača tu ne radi o Minkowskijevom vakuumu.

Konkretno, tvrdi se da je takva isprepletenost jedino što sprječava da se na Rindler horizontu (a po pretpostavci ekvivalencije, i horizontu prave crne rupe) generira beskonačni skok u tenzoru energije i impulsa [53] i stoga divergentno zračenje koje izlazi iz horizonta, iz perspektive *upadajućeg promatrača*.

Ta tvrdnja se može heuristički izvesti [34] ako Minkowskijevo vakuumsko stanje (5.49) zamijenimo direktnim produktom:

$$\rho \rightarrow \rho_L \otimes \rho_R \quad (5.50)$$

reduciranih matrica gustoće $\rho_L = \text{Tr}_R \rho$ i $\rho_R = \text{Tr}_L \rho$. Ovakvo stanje, po konstrukciji, za promatrače u lijevom i desnom Rindler kvadrantu izgleda identično kao vakuumsko stanje i stoga promatrači strogo ograničeni na te potprostore lokalno ne bi smjeli moći vidjeti ikakvu razliku. Razlika može nastupiti tek u području gdje reducirane matrice gustoće prestaju biti dobar opis prostorvremena - pri prelasku horizonta. S druge strane, čim pređemo horizont, u novom smo kvadrantu Rindler prostora, u kojem je opis reduciranom matricom ponovno valjan, i stoga ne očekujemo nikakvo odstupanje od vakuuma. Ovako se može zaključiti da odstupanje od vakuuma može nastupiti točno na horizontu i da je stoga određeno distribucijom sličnom delta funkciji.

Ključno je uvidjeti da je fundamentalna razlika između ovako definiranog produktnog stanja, i stanja zračenja iz Hawkingovog izvoda (5.49) u isprepletenosti koju dvije strane horizonta posjeduju. U ovom je slučaju isprepletenost 0, a u (5.49) je isprepletenost maksimalna. Stoga se često kaže da je maksimalna isprepletenost zračenja preko horizonta ono što horizont čini glatkim.

Potpuniji tretman nastajanja vatrozida se može pronaći u [54], gdje se izvodi divergencija u tenzoru energije i impulsa na horizontu kad se poremeti isprepletenost Minkowskijevog vakuuma.

Ovo sve skupa znači da je četvrta pretpostavka komplementarnosti - princip ekviva-

lencije - ovisna o tome da je izlazno zračenje b^{out} maksimalno isprepleteno s ulaznim zračenjem b^{hor} .

5.2.4 Monogamija isprepletenosti primijenjena na prethodna dva zaključka

AMPS argument sada nailazi na kontradikciju u postulatima komplementarnosti, koji kažu sljedeće:

Prvi postulat tvrdi da je Hawkingovo zračenje opisano čistim stanjem. Ovo u kombinaciji s Pageovom krivuljom, i ranijom analizom o ranom i kasnom potprostoru zračenja znači da za svaki kasni Hawkingov kvant $|i\rangle_>$ postoji neko rano stanje Hawkingovog zračenja $|\psi_i\rangle_<$ s kojim je on maksimalno isprepleten.

S druge strane, četvrti postulat je (po [53]) ekvivalentan tome da je svaka izlazna čestica Hawkingovog zračenja maksimalno isprepletena s odgovarajućom upadajućom česticom; jer ako nije tako, horizont je visokoenergijsko more čestica za upadajućeg promatrača i princip ekvivalencije je narušen.

Po drugom postulatu, na cijelom području izvan horizonta vrijedi efektivna teorija polja. To znači da se može odabrati Hawkingova čestica iz kasnog potprostora Hawkingovog zračenja koja se slobodno može evoluirati unatrag kroz zanemarivi potencijal Schwarzschildovog prostorvremena, do područja relativno blizu horizonta. Za takvu česticu istovremeno vrijede dvije stvari; vrijedi da je ona maksimalno isprepletena isključivo s nekim potprostorom ranog Hawkingovog zračenja $|\psi_i\rangle_<$, jer je ukupno stanje čisto po pretpostavci unitarnosti; i s druge strane da je maksimalno isprepletena s upadajućim kvantom Hawkingovog zračenja, po pretpostavci da princip ekvivalencije vrijedi.

Monogamija isprepletenosti (poglavlje 2.3.3) nalaže da je ovakva situacija nemoguća i stoga smo suočeni s izborom – možemo birati između unitarnosti konačnog Hawkingovog zračenja ili principa ekvivalencije. Možemo argumentirati da su sve pretpostavke komplementarnosti crnih rupa na neki način korištene u ovom izvodu, i stoga je moguće da bi izbacivanje bilo koje od pretpostavki moglo izbjeći ovakvu kontradikciju. U osnovi se različiti argumenti za rješavanje AMPS paradoksa svode na izbor pretpostavke komplementarnosti koju treba narušiti te objašnjenja zašto je to najbolji izbor.

5.2.5 Pojednostavljen AMPS argument; paradoks jake subaditivnosti

U interesu rezimiranja cijelog argumenta u čitljivijem i malo pojednostavljenom formatu sada ću izložiti elementaran postupak baziran na valjanosti Pageove krivulje. Argument je moguće izreći vrlo jednostavno:

Pretpostavljamo da Pageova krivulja vrijedi za evaporirajuću crnu rupu.

Uzmimo da imamo ukupni sustav ABC u čistom stanju. C je unutrašnjost crne rupe, B je Hawkingov kvant emitiran u režimu kasne crne rupe, nakon Pageovog vremena, a A je N kvanta Hawkingovog zračenja emitiranih prije B .

Tvrdnja Pageove krivulje je da sustav AB s N plus prvim Hawkingovim kvantom mora imati manju von Neumannovu entropiju od samog sustava A s N Hawkingovih kvanta, tj.:

$$S_{AB} < S_A \quad (5.51)$$

S druge strane, po Hawkingovom računu (izraz 3.57) sustavi B i C moraju biti maksimalno isprepleteni i to vodi na zaključak da je BC čisto stanje $S_{BC} = 0$.

Koristeći ekvivalentan zapis jake subaditivnosti von Neumannove entropije (izraz (2.37)) imamo:

$$S_{AB} + S_{BC} \stackrel{0}{\geq} S_A + S_C \geq S_A \quad (5.52)$$

što je u direktnoj kontradikciji s prvom nejednakosti koja se dobila iz Pageove krivulje. Naravno, problema ne bi bilo kada ne bismo istovremeno smjeli koristiti Pageovu krivulju i zaključiti da je BC sustav u čistom stanju.

Zaključak je sličan AMPS argumentu – ne možemo istovremeno imati unitarnu evoluciju i maksimalno isprepleteno stanje preko horizonta crne rupe.

Unitarna evolucija se u argumentu pojavila kad smo pretpostavili da je Pageova krivulja valjana, tj. da je kvant Hawkingovog zračenja emitiran nakon N -tog isprepleten s prethodnih N kvanta i da je stoga entropija $S_{AB} < S_A$.

Mathur je u radu [37] pokazao da je ovakav argument otporan na mala odstupanja od maksimalne isprepletenosti između kvanta B i C , tj. da zaključak preživljava.

5.2.6 Zaključak AMPS argumenta

Tvrđnja AMPS paradoksa je sljedeća: *Sve četiri pretpostavke komplementarnosti crnih rupa, koliko god se razumne činile, ne mogu biti istovremeno točne. Od barem jedne moramo odustati.* U radu [50] tvrde da je najkonzervativniji pristup odustati od principa ekvivalencije i prihvatiti da upadajući promatrač naleti na more visoko energijskih Hawkingovih čestica pri prelasku horizonta i tamo izgori.

Naravno, postoji mogućnost i da se u argumentu iskoristila neka skrivena pretpostavka koju je lakše odbaciti.

Pretpostavimo li da skrivenih pretpostavki nema, u principu se AMPS paradoks može riješiti na jedan od četiri načina:

1. Odustajemo od unitarnosti evolucije, informacija je fundamentalno izgubljena u procesu evaporacije crnih rupa.
2. Odustajemo od valjanosti efektivne teorije polja izvan horizonta.
3. Treba drastično promijeniti kvantno mehanički opisa crnih rupa.
4. Odustajemo od principa ekvivalencije; na horizontu postoji fizikalni vatrozid kojeg oba promatrača vide.

Razlog zašto se originalno predložilo odustajanje od principa ekvivalencije je jer svi ostali izbori zahtijevaju drastične modifikacije fundamentalnih principa fizike; primarno kvantne mehanike.

1) Prvi izbor je odustati od unitarne evolucije, i stoga prihvatiti gubitak informacija. Već je argumentirano zašto ovo nije poželjno, iako postoje razlozi zašto se ovo još uvijek zagovara i uključuju na primjer formulacije kvantne gravitacije integralima po putovima koji se sumiraju po različitim topologijama prostorvremena [71].

2) Drugo rješenje je odustati od valjanosti efektivne teorije polja u područjima male zakrivljenosti, daleko od singulariteta crne rupe. Da bi ovaj pristup razriješio paradoks, potrebno je da kvantna teorija polja ima velike kvantno gravitacijske korekcije u područjima male zakrivljenosti. Modeli ovakvih efekata uključuju *nenasilnu nelo-kalnost* [61], *ER=EPR* [62] te *direktni modeli vatrozida iz teorije struna* [63]. Ni jedan pristup nije sasvim uspješan jer obično uključuje jako puno nepoželjnih pretpostavki ili radi samo u specijaliziranim situacijama.

3) Treća pretpostavka zahtijeva da se unutrašnjost crne rupe može modelirati kao kvantno mehanički sustav – tako da je opisana nekim Hilbertovim prostorom. Ova

pretpostavka je podržana argumentima iz holografije koji nalažu da je entropiju crne rupe točno interpretirati kao interne stupnjevi slobode dualnog termalnog stanja u konformnoj teoriji polja, a argumentiralo joj se u korist i u potpoglavlju 4.1.

Odustati od ove pretpostavke implicira drastičnu modifikaciju kvantne mehanike (i holografije) i uključuje npr. *postavljanje konačnih uvjeta za valnu funkciju na singularitetu* [59].

4) Četvrta pretpostavka je jedina je koja nije zasnovana na nekom fundamentalnom principu kvantne mehanike i stoga je jedina koja se može donekle bezazleno narušiti. S druge strane, princip ekvivalencije je (povijesno) iznimno bitan koncept i nije mala stvar potpuno odustati od njega.

Kompletniji popis različitih rješenja se može pronaći u radovima [57], [36].

5.2.7 Prihvate li se vatrozidi, što s komplementarnosti?

Neposredno nakon objave AMPS rada se smatralo da se komplementarnost ipak može spasiti i da se vatrozidi mogu izbjeći; i to primjenom argumenta dosta sličnog Suskindovom, iz potpoglavlja o komplementarnosti 5.1.3. Ukratko, tvrdilo se da promatrači kao što su opisani u originalnom iskazu AMPS argumenta ne mogu postojati, ali da je razlog za to dosta suptilan i da ga je stoga teško konstruirati. Pokušaji su se radili argumentima sličnim onima u radu [49].

Ovo se pokazalo netočno, a argument ćemo ugrubo objasniti u sljedećem primjeru.

Primjer 5.7. Tvrdnja [57] je da možda upadajući promatrač ne može opaziti isprepletenost ranog Hawkingovog zračenja A s kasnom Hawkingovom česticom koja nastaje na horizontu B i istovremeno tu isprepletenost s upadajućom Hawkingovom česticom C . Ako je ovo istina, onda bi se moglo argumentirati da problema fundamentalno nema, jer je jedino što je bitno da *sve istovremeno opazive entropije* budu konzistentne, tj. da vrijedi monogamija isprepletenosti samo među istovremeno opazivim sustavima. Očito je da promatrač u budućoj asimptotskoj beskonačnosti svakako ne može opaziti upadajuću česticu, pa njega nema potrebe ni razmatrati.

Odmah se može zaključiti jedna stvar, a to je da upadajući promatrač može sakupiti bar neku količinu informacija o stanju ranog zračenja A , i stoga da može skupiti parcijalnu informaciju o isprepletenosti B i A . Razlog zašto je to moguće je jer on

može čekati izvan crne rupe i sakupljati bitove neko vrijeme i dok god ne čeka pre-tjerano dugo, još uvijek može uskočiti u crnu rupu i napraviti potrebna mjerenja da uspostavi maksimalnu isprepletenost između B i C .

Pitanje je sad samo koliko Hawkingovih čestica izvan crne rupe zapravo mora de-tekirati da dobije dovoljno informacija o isprepletenosti B i A da naruši jaku su-baditivnost. Što više bitova sakupi, to više snižava S_{AB} i približava se minimalnoj vrijednosti, koja se koristila u AMPS argumentu. Potrebno je samo da se S_{AB} us-pije smanjiti dovoljno kako bi se mogao uspostaviti korak (5.51), tj. da se ustanovi da novo emitirana Hawkingova čestica B zapravo pročišćava stanje Hawkingovog zračenja. Onda automatski slijedi kontradikcija iz AMPS argumenta. Ovakva ar-gumentacija znači da postoji ograničen broj bitova koje upadajući promatrač smije opaziti bez da upadne u režim u kojem je vatrozid neizbježan.

Argument u [57], pomoću rezultata iz [51], onda tvrdi da za proizvoljno velike crne rupe promatrač može ostati izvan horizonta proizvoljno dugo, rekonstruirati stanje ranog zračenja do koje god želi preciznosti i stoga uspostaviti korak (5.51) do koje god točnosti je potrebno.

U ovom se primjeru pojavljuju neki elementi eksplicitne primjene teorije kvantne informacije, na problem informacije crnih rupa. To je relativno opširna tema i nećemo ju obrađivati u ovom radu. Reference koje opisuju tu problematiku su: [47] [51], te bilješke profesora Preskilla [52].

Iz ovog primjera, i nekih sličnih razmatranja se čini da je vatrozid neizbježan, i da je potrebno ili dobro argumentirati napuštanje neke od preostalih pretpostavki komplementarnosti ili krenuti sasvim novim pristupom nezavisnim od ovoga.

6 Ostala rješenja problema informacije crnih rupa, ukratko

Rješenja paradoksa informacija crnih rupa ima još mnogo, i pokrivaju širok raspon pristupa. Većina popularnih pristupa se eksplicitno poziva na AdS/CFT argumente ili teoriju struna i zahtijevali bi vrlo velike digresije da se pošteno objasne. Stoga ih nećemo uvoditi jednako detaljno kao vatrozide, već samo objasniti da postoje, što tvrde i referencirati prikladnu literaturu.

Sva rješenja razmatramo u kontekstu profinjenog PI skupa pretpostavki tj. ekvivalentnog profinjenog skupa pretpostavki komplementarnosti, i stoga svako rješenje mora narušiti jednu od sljedeće četiri stavke:

1. Iz perspektive udaljenog promatrača, formacija i evaporacija crne rupe se može u potpunosti opisati kvantnom teorijom polja, tj. postoji S -matrica koja opisuje unitarnu evoluciju upadajuće materije u izlazno Hawkingovo zračenje
2. Dok god se držimo izvan proširenog horizonta $r = 2M + \epsilon$, efektivna teorija polja vrijedi.
3. Crna rupa je sustav čija je unutrašnjost adekvatno opisana kvantnom mehanikom (Hilbertovim prostorom), bar daleko od singulariteta.
4. *Upadajući promatrač pri prelasku horizonta ne vidi ništa neobično, horizont nije (lokalno) posebno mjesto u prostorvremenu.*

6.1 Mikrostanja crne rupe, strunaste crne rupe (eng. fuzzballs)

Ovaj pristup, kao i vatrozidi, narušava četvrtu pretpostavku - princip ekvivalencije, ali ujedno se može interpretirati kao efekt postojanja kose za kvantno gravitacijske crne rupe.

Ideja je motivirana eksplicitnim konstrukcijama u AdS/CFTu [64]. Pretpostavlja se da postoje mikrostanja crne rupe kojih ima $e^{S_{\text{BH}}}$ te da su ta mikrostanja potpuno opisana u nekoj potpunijoj teoriji kvantne gravitacije.

Postojanje mikrostanja crne rupe se onda objašnjava na sljedeći način: crna rupa je predstavljena strunom + gravitonom, namotanim oko kompaktne dimenzije. Mikrostanja tog sustava odgovaraju različitim načinima na koje količina gibanja gravitona može biti raspoređena po modovima vibracije strune.

Možemo napraviti jednostavan primjer takvog brojanja stanja na toy modelu koji kvalitativno aproksimira teoriju struna:

Primjer 6.1. Radimo u modelu u kojem postoji kompaktna dimenzija prostorvremena kao mala kružnica Planckove dimenzije zalijepljena u svakoj točki prostorvremena. Opseg te kružnice je reda Planckove duljine L_P .

Modovi koji smiju postojati na zatvorenoj struni koja obuhvaća tu kompaktnu dimenziju moraju biti periodični, jer je struna zatvorena. Tako recimo struna namotana 3

puta oko te kompaktne dimenzije ima duljinu $3L_P$ i smije imati modove koji su periodični u nekom cjelobrojnom djelitelju duljine $3L_P$. Generalno, duža struna znači veća napetost, jer strune imaju fundamentalnu dimenziju i moraju se rastegnuti kako bi obuhvatile tu kompaktnu dimenziju.

Različite modove možemo indeksirati s k , cijelim brojem, koji predstavlja funkcije s periodom $\frac{L_{\text{string}}}{k}$. Frekvencija takvog moda je onda $\sim k$, a kako su gravitoni bezmaseni, njihova propagacija na struni je dana disperzijom

$$E \sim \omega = k \quad (6.53)$$

i stoga modovi veće frekvencije nose proporcionalno veću energiju.

Recimo sad da imamo graviton s kvantiziranim impulsom iznosa $\sim n_g$. Također imamo zatvorenu strunu koja je namotana u kompaktnoj dimenziji prostorvremena, n_s puta. Graviton putuje po toj struni i stoga može imati svoj impuls podijeljen između svih mogućih modova.

Ukupan broj kvanta energije je dan s $n_g n_s$ (jer duža struna znači veća napetost i stoga veći prijenos energije).

Energija pojedinog harmonika k na struni, u kojoj je n_k kvanta energije je onda dana s: $k n_k$, i stoga uvjet da skup svih kvanta daje točan iznos ukupne energije glasi:

$$\sum_{k=1}^{n_g n_s} k n_k = n_g n_s \quad (6.54)$$

Pitanje entropije je onda ekvivalentno pitanju koliko ova jednadžba ima rješenja. Taj problem nije trivijalno riješiti, i svodi se na problem *particije broja N*, tj. u našem slučaju broja $n_g n_s$.

Rješenje je dano izrazom:

$$P_{n_g n_s} \propto e^{2\pi\sqrt{n_g n_s}} \quad (6.55)$$

Vidimo da je broj rješenja proporcionalan eksponentu, tj. invertiranjem formule, možemo pisati:

$$S \propto \ln P_{n_g n_s} = 2\pi\sqrt{n_g n_s} \quad (6.56)$$

i stoga imamo entropiju koja raste s dimenzijom sustava, tj. konkretno s brojem mikrostanja u sustavu.

Ovaj primjer je naravno vrlo pojednostavljen model, ali reprezentativan je mehanizma kojim se u teoriji struna zapravo generiraju mikrostanja crne rupe. Za potpuniju analizu čitatelj se može referirati na pregledne članke, npr. [65].

Filozofija strunastih crnih rupa je u tome da se u takvom modelu horizont zapravo ne formira, već da je crna rupa samo složena nakupina struna u specifičnom mikrostanju koje ovisi o početnim uvjetima materije koja kolapsira u nju. Strunasta struktura se makroskopski gledano naravno ne bi mogla razlučiti, i crna rupa bi izgledala kao i u klasičnoj gravitaciji za klasične promatrače. Nadalje, spektar kojim takva nakupina struna zrači odgovara Hawkingovom spektru, i evaporacija nastavlja kao i u uobičajenoj teoriji, samo sada bez problema gubitka informacije; jer ne postoji horizont u pravom smislu riječi, i strune ga samo oponašaju nekim mehanizmom. Ovaj pristup je u neku ruku najdirektnije rješenje jer daje eksplicitan model horizonta i njegovog spektra te govori kako točno interpretirati entropiju crne rupe.

Dodatno, postoji i popratni koncept komplementarnosti ovakvih strunastih crnih rupa (eng. *fuzzball complementarity*) koji nalaže da upadanje kroz horizont za promatrača A znači da će strune koje ga sačinjavaju interagirati sa strunama na "horizontu", te se s njima spojiti, u procesu efektivno kopirajući informaciju o promatraču A . S druge strane, za promatrača A , ovo upadanje kroz horizont je relativno bezazlena procedura, i očekuje se da bi iskustvo bilo vrlo slično upadanju kroz horizont klasične crne rupe – praktički neprimjetno. Konačna interpretacija je onda analogna komplementarnosti klasičnih crnih rupa. Izvori ovih tvrdnji se također mogu pronaći u preglednom radu [66].

Ipak, ovo rješenje nije savršeno; eksplicitne konstrukcije su dane samo u jako idealiziranim slučajevima i nije jasno mogu li se proširiti i na realističnije sustave, iako se te stvari aktivno istražuju.

6.2 $ER=EPR$

Ovo je rješenje modifikacija osnovnih pretpostavki kvantne mehanike, tj. njene veze s općom teorijom relativnosti.

$ER=EPR$ znači *Einstein-Rosen = Einstein-Podolsky-Rosen*.

Einstein-Rosen mostovi su prostorne plohe u prostorvremenima vječnih crnih rupa koje imaju strukturu crvotočine. Vode iz jednog asimptotski ravnog područja prostorvremena u drugo, također asimptotski ravno područje.

Einstein-Podolsky-Rosen paradoks je misaoni eksperiment u kojem se razmatralo je li kvantna mehanika potpuna teorija ili ima skrivene varijable koje su sadržane u nekoj potpunijoj teoriji. Detalji nisu pretjerano bitni; ono što je ključno je da je uključivao isprepletenu stanja, slična onima iz Hawkingovog zračenja.

Tvrdnja ER=EPR paradoksa je u osnovi da su isprepletene čestice povezane nepremostivim (prostornim) crvotočinama, poput Einstein-Rosen mostova. [62]

Motivacija za ovakav prijedlog je bazirana na tome da je maksimalna ekstenzija Schwarzschildove crne rupe u AdS/CFTu dualna skupu isprepletjenih čestica u konformnoj teoriji polja. [68]

Način na koji bi ovaj pristup riješio paradoks je da se uvidi da ako se svo Hawkingovo zračenje skuplja i stalno kolapsira u crnu rupu, onda ER=EPR nalaže da je ta crna rupa s originalnom povezana crvotočinom. Tvrdi se da je ovo bitno jer zaobilazi dualnost isprepletenosti koja postoji u paradoksu vatrozida.

Postava ovdje ovisi o tome da se Hawkingove čestice zapravo kolapsiraju u crnu rupu. Autori originalnog rada [62] stoga tvrde da se slična stvar može tvrditi i za slobodne Hawkingove čestice koje bi mogle biti povezane s crnom rupom kroz crvotočine Planckove dimenzije, koje nisu opazive, osim pomoću kvantne gravitacije.

Ovakav model, iako naizgled nelokalan, ipak ne dopušta superluminalan prijenos signala.

Problem je što je ovo rješenje donekle nedorečeno i nejasno je kako bi u generalnom slučaju riješilo problem informacije, tj. izbjeglo vatrozide. Iako neki konkretni modeli postoje [67], nije jasno može li ovakav pristup uopće generalno razriješiti paradoks.

7 Završni komentari

7.1 Eksperimentalna testiranja

Za kraj, vrijedi kratko komentirati što se točno može napraviti u području eksperimenta za ovaj problem.

Eksperimentalna testiranja na crnim rupama su danas još uvijek nemoguća, posebice jer su crne rupe poznate astrofizici sve takvoga tipa da vjerojatno neće doživjeti svoje vrijeme evaporacije prije nego se nešto drastično dogodi našem svemiru.

Povezani efekti se ipak mogu istraživati analiziranjem gravitacijskih valova u potrazi za plimnim deformacijama ili indikativnim multipolnim strukturama koje bi predstavljale odstupanje od klasične teorije. Dosadašnja opažanja nisu konkluzivna, a i nejasno je koliko bi se detalja moglo sa sigurnošću pripisati specifičnom modelu kvantnih crnih rupa, a koliko nekom drugom efektu.

7.2 Zaključak

Vrlo je jasno da se paradoks informacija crnih rupa ne može riješiti na potpuno zadovoljavajuć način bez potpune teorije kvantne gravitacije koja će predvidjeti što se točno događa na horizontu i u blizini singulariteta. Najpopularniji pristupi u tom pogledu su AdS/CFT i teorija struna, koji motiviraju neka od brojnih rješenja paradoksa, iako naravno postoje i druge alternative.

Unatoč tome, paradoks je moguće formulirati i bez tih alata, i baš u tome je njegova prava snaga. Bez pozivanja na eksplicitnu teoriju kvantne gravitacije, paradoks stoji i u kontekstu opće teorije relativnosti i stoga se *ne može* riješiti odbacivanjem neke specifične teorije kvantne gravitacije, koja tako i tako nema velike posljedice na eksperimentalne podatke.

Baš nasuprot, paradoks zahtjeva odbacivanje pretpostavki nama već poznatih i vrlo dobro testiranih teorija kvantne fizike i opće teorije relativnosti; što predstavlja iznimno težak problem. Rješenja poput modela vatrozida prihvaćaju tu neizbježnost i doista odbacuju dio opće teorije relativnosti. Rezultat je neka vrsta (nepotpunog) rješenja, ali opet nije sasvim zadovoljavajuće niti je jasno bi li tako drastična modifikacija zakona fizike imala posljedice na poznate eksperimente. Najljepši pristup rješenju bi vjerojatno bio da se u formulaciji paradoksa pronađe skrivena pretpostavka koja se može lakše narušiti, tako da se ne mora odustati od ničeg poznatog, ali uspjeha u tom pogledu za sada još nema.

Kako god bilo, ključna uloga paradoksa postoji u daljnjem istraživanju kvantne gravitacije, u kojem on predstavlja prepreku koju svaka dobra teorija gravitacije mora uspješno riješiti.

Pravo rješenje nas u vidu toga sigurno tek čeka, a trenutna je uloga paradoksa motivirati dobre avenije za daljnje istraživanje te informirati istraživače kojim putem kročiti kroz nepreglednu šumu isprepletenog stanja kvantne fizike i klasične gravitacije.

Dodaci

Dodatak A Notacijske konvencije

Ovdje ćemo definirati sve notacijske konvencije koje namjeravamo koristiti u ovom radu. Većinom ćemo slijediti Susskinda [2].

Signatura Lorentzovih metrika bit će takva da vremenske koordinate imaju negativni predznak. Npr. (3+1) Minkowski glasi: $(-, +, +, +)$.

Prostornovremenske koordinate će se pisati indeksima s grčkim slovima: $x^\mu, T^{\mu\nu}$. Prostorne koordinate na plohama kodimenzije 1 će se pisati latinskim slovima "iz sredine abecede": x^i, T^{jk} .

Prostorne koordinate na plohama kodimenzije 2 (npr. na horizontu crne rupe) će se pisati velikim latinskim slovima s početka abecede: x^A, T^{BC} .

Penroseova notacija apstraktnih indeksa će se pisati s malim latinskim slovima s početka abecede: $x^a, T^{b,c}$.

Parcijalne derivacije se mogu skraćeno pisati sa zarezom: $\partial_\phi T^\mu{}_{\nu\rho} = T^\mu{}_{\nu\rho,\phi}$. Kovarijantne derivacije se mogu skraćeno zapisati s točkom sa zarezom: $\nabla_\phi T^\mu{}_{\nu\rho} = T^\mu{}_{\nu\rho;\phi}$.

Radit ću u Planckovim jedinicama, za koje vrijedi:

$$\hbar = k_B = G = c = 1 \quad (\text{A.1})$$

gdje je k_B Boltzmannova konstanta, G Newtonova gravitacijska konstanta i c brzina svjetlosti. Po potrebi ću u konačne rezultate vratiti \hbar i/ili G kako bi se u njima eksplicitno vidjela pojava kvantne fizike ili gravitacije.

Dodatak B Pozadina iz matematike i opće teorije relativnosti

U ovom ćemo poglavlju izložiti standardne rezultate vezane uz crne rupe koji će se koristiti u ostatku rada. Teoreme ćemo izreći riječima, osim u slučajevima u kojima će matematički detalji biti relevantni.

B.1 Osnovne definicije iz opće teorije relativnosti

B.1.1 Izometrije i Killingovi vektori

Izometrija prostorvremena (\mathcal{M}, g) se za potrebe ovog rada definira kao simetrija, tj. invarijantnost metrike na translacije u smjeru nekog vektorskog polja. Kao što je poznato iz diferencijalne geometrije, koncept Liejeve derivacije duž vektorskog polja k^a odgovara uspoređivanju tenzora samog sa sobom, prije i nakon translacije za k^a . Stoga se izometrija prostorvremena (\mathcal{M}, g) definira uvjetom:

$$0 = L_k g_{\mu\nu} = k^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \nabla^\rho k_\nu + g_{\nu\rho} \nabla^\rho k_\mu \stackrel{!}{=} \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu \quad (\text{B.1})$$

gdje se u naglašenoj jednakosti iskoristila kompatibilnost metrike s kovarijantnom derivacijom.

Killingov vektor, tj. Killingovo vektorsko polje (oba se izraza koriste za istu stvar; zapravo se radi o vektorskom polju) su popratni koncept izometriji prostorvremena i definiraju se kao rješenja jednadžbe (B.1).

B.1.2 Asimptotski ravno prostorvrijeme; beskonačnosti prostorvremena

Za prostorvrijeme (\mathcal{M}, g) se kaže da je asimptotski ravno, ako postoji koordinatni sustav koji se u limesu velike udaljenosti $x_i x^i \rightarrow \infty$ reducira na Minkowskijevo prostorvrijeme η_{ab} i neku malu popravku h_{ab} :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (\text{B.2})$$

Mala popravka se očekuje da trne prikladno brzo:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{B.3})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab,c} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab,cd} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (\text{B.5})$$

U danom prostorvremenu koje je asimptotski ravno se mogu definirati različite

beskonačnosti:

- Prostorna beskonačnost, dana s $r \rightarrow \infty$
- Vremenska beskonačnost, dana s $t \rightarrow \infty$
- Buduća svjetlosna beskonačnost, dana s $t + r \rightarrow \infty$
- Prošla svjetlosna beskonačnost, dana s $t - r \rightarrow -\infty$

Svjetlosne beskonačnosti se mogu interpretirati kao plohe u prostorvremenu kroz koje "okomito" prolaze radijalno izlazeći i upadajući fotoni.

B.1.3 Horizont prostorvremena

Postoje različite definicije horizonta u općoj teoriji relativnosti, ovisno o čemu se govori. Za crne rupe, najčešće se definira na sljedeći način:

Definicija B.1. Apsolutni horizont crne rupe

Uzmimo prostorvrijeme (\mathcal{M}, g) koje je asimptotski ravno, tako da postoji buduća svjetlosna beskonačnost (ploha koja odgovara $t + r = \infty$ u asimptotski Minkowski koordinatama). Definirajmo sada skup točaka: $P \subset \mathcal{M}$ kroz koje se prođe ako se uzmu svi svjetlosni geodezici koji završavaju u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti i maksimalno se prošire u prošlost (do $-\infty$ svog afinog parametra).

Definicija crne rupe glasi: $B = \mathcal{M} \setminus P$ ili riječima: skup svih točaka kroz koje se *ne* prođe kad se svi svjetlosni geodezici, koji su stigli do buduće svjetlosne beskonačnosti, prošire maksimalno u prošlost.

Konačno, horizont se definira kao rub crne rupe $\mathcal{H} = \partial B$.

Ovo je definicija koja se u literaturi obično koristi za definiciju globalnog horizonta crne rupe, ali problem je što je nejasno kako bi se jednostavno očitao iz metrike, jer ovisi o globalnim svojstvima prostorvremena. U vidu toga, u nekim se slučajevima može dati nešto jednostavnija definicija:

Definicija B.2. Definicija horizonta u asimptotski Minkowski koordinatama [2]

Metrika asimptotski ravnog prostorvremena (\mathcal{M}, g) treba se zapisati u koordinatama koje teže sfernim koordinatama na Minkowskijevom prostorvremenu kako se udaljavamo u asimptotsko područje ($x^i x_i \rightarrow \infty$). Horizont crne rupe onda odgovara hiperplohi kodimenzije-1, definiranoj uvjetom: $g_{tt} = 0$.

B.2 Vrste crnih rupa i teoremi o jedinstvenosti

Počnimo od sferno simetričnog, statičnog rješenja Einsteinove jednačbe u (3+1) dimenzija, zapisanog u sfernim koordinatama:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.6})$$

Dva elementarna slučaja su:

- Schwarzschildovo rješenje, u vakuumu:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

- Reissner-Nördström (od sad nadalje skraćeno: "RN") rješenje, u Maxwell pozadini s nabojem Q:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

Pod određenim tehničkim uvjetima, može se pokazati da su ova rješenja i jedinstvena, no za razumjeti iskaz teorema potrebna je definirati što je statično prostorvrijeme:

Definicija B.3. Stacionarno i statično prostorvrijeme [5]

Prostorvrijeme (\mathcal{M}, g) je stacionarno ako na njemu postoji Killingovo vektorsko polje k^a koje je asimptotski (konkretno, za $x^i x_i \rightarrow \infty$) vremensko.

Prostorvrijeme je statično ako je stacionarno i ako je vremensko vektorsko polje k^a ortogonalno na neku hiperplohu (matematički: $k^{[a}\nabla^b k^{c]} = 0$ to jest $k \wedge dk = 0$; za detalje vidi: [7]).

Intuitivno, stacionarno prostorvrijeme je takvo da se "ne mijenja u vremenu" u istom smislu u kojem se Minkowskijevo prostorvrijeme ne mijenja u vremenu (dakle, dok god odaberemo razumni koordinatni sustav). Primjer prostorvremena koje nije stacionarno je ono u kojem se javljaju gravitacijski valovi, koji će svakako nakon dovoljno vremena pobjeći do beskonačne radijalne udaljenosti i perturbirati simetriju na vremenske translacije. Posebno jednostavan (ali ne kovarijantan) način da se stacionarnosti definira je: "Ako se može pronaći koordinatni sustav u kojem metrika ne ovisi o vremenu, prostorvrijeme je stacionarno." (Za dokaz vidi [7].)

Statičnost je profinjenje koncepta stacionarnosti koje zabranjuje i rotiranje prostorvremena. Uvjet hiperplošne ortogonalnosti, kako je zapisan u gornjoj definiciji, je

malo apstraktan, ali nakon malo matematike može se prevesti u formu:

$$\partial_a k_b - \partial_b k_a = f(x)k_b \quad (\text{B.7})$$

gdje se desna strana jednakosti može svesti na 0, lokalno na mnogostrukosti i odgovara normaliziranju vektora k^a . Odavde se može prepoznati da je ovo zapravo definicija rotacije vektorskog polja (u smislu $\vec{\nabla} \times \vec{k}$), tako da se zahtjev hiperplošne ortogonalnosti može shvatiti kao zahtjev da rotacija lokalno, a u originalnoj formi iz gornje definicije, i globalno, iščezava.

Također nije teško pokazati da je ovaj uvjet, u prikladnom koordinatnom sustavu, ekvivalentan iščezavanju nedijagonalnih komponenti metrike: g_{ti} , koji su zaslužni za generiranje rotacije prostorvremena jer vežu vremenske translacije i prostorno gibanje (za detalje vidi [7]).

Teorem B.4. Israel, Jedinstvenost statičnih sferno simetričnih (ne)nabijenih crnih rupa [3] [4].

Ako je prostorvrijeme crne rupe rješenje Einstein(-Maxwell) jednadžbi, statično, asimptotski ravno i horizont je topološka sfera, slijedi da je opisana Schwarzschildovim (RN) rješenjem.

Rotirajuće crne rupe su svakako fizikalno realistične, a intuitivno je jasno da ne mogu biti sferno simetrične jer imaju preferiranu os rotacije koji kvari sfernu simetriju. Rješenje aksijalno simetrične crne rupe zove se Kerr-Newman (KN) rješenje, i glasi:

$$ds^2 = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2 \quad e = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

u takozvanim *Boyer-Lindquist koordinatama* (t, r, θ, ϕ) . U njemu se pojavljuju 4 parametra: M, a, Q i P.

M odgovara masi crne rupe u smislu sličnom Schwarzschildovoj crnoj rupi. Q i P su električni i magnetski monopolni naboji u crnoj rupi i javljaju se samo u kombinaciji $e = \sqrt{Q^2 + P^2}$. Kombinacija aM odgovara angularnom momentu crne rupe J . KN

rješenje je asimptotski ravno $((t, r, \theta, \phi)$ teže sfernoj Minkowski metrici) i ima dva Killingova vektorska polja koja poprimaju posebno jednostavan oblik:

$$k^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad m^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \quad (\text{B.9})$$

Konačno, u prikladnim limesima, $a \rightarrow 0$ (i $e \rightarrow 0$), Kerrovo rješenje teži u RN (tj. Schwarzschildovo) rješenje.

U duhu ranijih razmatranja o jedinstvenosti sferno simetričnih crnih rupa (Teorem B.4), oslabi li se restrikcija sferne simetričnosti na aksijalno simetrične stacionarne crne rupe može se pokazati i generalnija tvrdnja - da je najopćenitije moguće rješenje Einstein-Maxwell jednadžbi Kerr-Newman metrika.

Definicija B.5. Definicija stacionarne aksijalno simetrične crne rupe [8]

Prostorvrijeme koje je asimptotski ravno je stacionarna aksijalno simetrična crna rupa ako:

- (i) Ima Killingovo vektorsko polje t^a koje je asimptotski vremensko.
- (ii) Ima Killingovo vektorsko polje m^a koje je asimptotski prostorno.
- (iii) m^a generira 1-parametarsku grupu izometrija: $U(1)$.
- (iv) $[t^a, m^b] = 0$.

Uvjet (iii) zaslužuje dodatno pojašnjenje. Kada vektorsko polje generira $U(1)$ grupu izometrija, to znači da se skup svih izometrija metrike (koje se vrše djelovanjem Lieve derivacije) ponaša kao kompleksna eksponencijalna funkcija: $e^{i\phi}$, gdje je ϕ jedini parametar. Dakle uzastopne izometrije primijenjene na metrikum funkcioniraju po pravilu: $e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$.

Slijedi ranije najavljeni rezultat:

Tvrdnja B.6. Crne rupe nemaju kosu [10] [11] Prostorvrijeme crne rupe (\mathcal{M}, g) koje je stacionarno, aksijalno simetrično, asimptotski ravno i zadovoljava neke razumne tehničke pretpostavke je opisano *Kerr-Newman* rješenjem, s parametrima: M , a , e . (za diskusiju, vidi [9], str. 875)

Generički u realističnim kolapsima materije uvijek očekujemo da će materija odstupati od savršene sferne simetrije, da će imati angularni momenat i eventualno naboj. U vidu toga, konačno stanje bilo kojeg kolapsa materije će uvijek završiti kao

Kerr-Newman crna rupa. (Može se pokazati da crne rupe ne mogu imati ni jake ni slabe naboje; vidi [9]).

Vrijedi napomenuti da se u ovom razmatranju nazire jedan od prvih problema poveznice koncepata informacije i crnih rupa:

Neovisno koliko je neki sustav kompleksan, tj. koliko makroskopskih ili mikroskopskih stupnjeva slobode sadrži – ako se bilo kojim mehanizmom kolapsira u crnu rupu, biti će u potpunosti opisan isključivo s najviše 3 makroskopska parametra Kerrove crne rupe - M , a i e .

Nalaže se pitanje: *Gdje je sva informacija o početnom sustavu nestala?*

B.3 FIDO i FREFO promatrači; Rindler prostorvrijeme; površinska gravitacija; maksimalna ekstenzija prostorvremena

Sljedeće potpoglavlje će sadržavati: *opis singulariteta Schwarzschildove crne rupe, definiciju FIDO i FREFO promatrača, definiciju površinske gravitacije, opis Rindler prostorvremena i njegovog značaja, opis koordinatnih sustava za ekstenziju Schwarzschildove crne rupe*

B.3.1 Površinska gravitacija i FIDO promatrači

Schwarzschildovo prostorvrijeme, kako je zapisano u (B.6) ima dva singulariteta: jedan u $r = 2M$ i drugi u $r = 0$. U tim točkama neke komponente metrike iščezavaju, a neke divergiraju i stoga je nemoguće pronaći inverz.

Dobro je poznat standardni argument da $r = 2M$ nije zapravo pravi singularitet prostorvremena već koordinatno-ovisna divergencija koja se javlja zbog odabira koordinatnog sustava. Da bi se to provjerilo, obično se izračuna neka koordinatno invarijantna veličina koja ne pokazuje patološko ponašanje u $r = 2M$, npr. najlakše je izračunati volumni element Schwarzschildove metrike:

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \tag{B.10}$$

koji ne divergira niti ide u 0 za $r = 2M$.

$\theta = 0, \pi$ su koordinatni singulariteti sfernog sustava.

Stoga predmeti koji su imali konačan volumen daleko od horizonta neće odjednom pri dolasku na horizont biti stisnuti u točku ili beskonačno razvučeni. Isto se ne može reći za točku $r = 0$, u kojoj volumni element doista ide u 0, i ukazuje na postojanje fizikalnog singulariteta.

Alternativno, u literaturi se obično računa takozvani Kretschmann skalar:

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2}{r^6} \Big|_{r=2M} = \frac{3}{4M^4} \quad (\text{B.11})$$

koji opet ne poprima nikakvu kritičnu vrijednost u $r = 2M$, već tek u $r = 0$, gdje i očekujemo pravi singularitet. Kretschmann skalara predstavlja "plimne sile" koje osjeća objekt infinitezimalnog volumena. Iz gornjeg izraza se vidi da na horizontu, za iznimno masivne crne rupe, te plimne sile postaju izrazito male. S druge strane, one u $r = 0$ divergiraju, i u blizini singulariteta se dešava tzv. "špagetifikacija".

Da se otkrije u čemu je problem s Schwarzschildovim koordinatama, trebat ćemo izračunati *vlastitu akceleraciju promatrača blizu horizonta*.

U slučaju Schwarzschildove metrike, koordinate u kojima je zapisana u izrazu (B.6) su asimptotski Minkowski. To povlači da promatrači za koje vrijedi: $dr = d\theta = d\phi = 0$ – "FIDO's" (engl. *fiducial observers*) – asimptotski izgledaju kao mirujući promatrači u Minkowskijevom prostorvremenu. Nadalje, ako zamislimo dva FIDO promatrača, odmah slijedi da oni jedan u odnosu na drugoga miruju pa stoga možemo ustvrditi da svaki FIDO promatrač miruje u odnosu na asimptotski mirujućeg Minkowski promatrača (koji je također FIDO tipa). Kako bi promatrač mogao mirovati u zakrivljenom prostoru crne rupe, on mora akcelerirati radijalno prema van, a kako se približavamo horizontu, ta akceleracija divergira. Kako bismo to provjerali, možemo izračunati vlastitu akceleraciju nekog FIDO promatrača, čija je putanja opisana četverovektorima u njegovom vlastitom sustavu te u asimptotskom Schwarzschildovom sustavu:

$$u_{\text{vlastita}}^\mu = (dt/d\tau, dr/d\tau, d\theta/d\tau, d\phi/d\tau) = |_{\text{FIDO}} (1/\sqrt{f(r)}, 0, 0, 0) \quad (\text{B.12})$$

$$u_{\text{asimptotski}}^\mu = (dt/dt, dr/dt, d\theta/dt, d\phi/dt) = |_{\text{FIDO}} (1, 0, 0, 0) \quad (\text{B.13})$$

gdje je FIDO promatračevo vlastito vrijeme definirano relacijom: $d\tau = \sqrt{|g_{tt}|}dt$. Asimptotski Schwarzschildov sustav se ovdje, i u rezultatima koji slijede treba shva-

titi kao $r \rightarrow \infty$ limes vlastitog sustava, u kojem $f(r) \rightarrow 1$ i $d\tau = dt$.

Akceleracija se u općoj teoriji relativnosti definira kao usmjerena kovarijantna derivacija vektora brzine, duž putanje čestice: $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, tj. jednadžbom geodezika; koja ako ne iščezava, znači da čestica ne prati ravne linije u prostorvremenu, i stoga mora akcelerirati.

$$a_{\text{vl}}^\mu = \frac{d}{d\tau} u_{\text{vl}}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u_{\text{vl}}^\nu u_{\text{vl}}^\rho = \Gamma_{tt}^r \cdot (1/\sqrt{f(r)})^2 \quad (\text{B.14})$$

$$a_{\text{asimp}}^\mu = \frac{d}{dt} u_{\text{asimp}}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u_{\text{asimp}}^\nu u_{\text{asimp}}^\rho = \Gamma_{tt}^r \cdot (1)^2 \quad (\text{B.15})$$

Od Christoffelovih simbola, jedini oblika Γ_{tt}^μ koji ne iščezava je:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{M}{r^2} f(r) = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (\text{B.16})$$

i stoga imamo:

$$a_{\text{vl}}^r = \frac{M}{r^2} \quad (\text{B.17})$$

$$a_{\text{asimp}}^r = \frac{M}{r^2} \quad (\text{B.18})$$

U skladu s očekivanjima, jedina neiščezavajuća komponenta akceleracije je radijalna, i ona odgovara akceleraciji koju tijelo mora vršiti kako bi se zadržalo na konstantnom radijusu. Vlastita akceleracija je točno klasični rezultat za akceleraciju, ali to je samo slučajnost jer se i dalje radi o komponenti četverovektora koja se transformira sa proizvoljnim koordinatnim transformacijama.

Da bi se dobila koordinatno invarijantna veličina, treba izračunati modul četverovektora akceleracije $a^2 = a^\mu a_\mu = a^r a_r = a^r a^r g_{rr}$:

$$a_{\text{vl}}^2 = \frac{M^2}{r^4} g_{rr} = \frac{M^2}{r^4} \frac{1}{f(r)} = \frac{M^2}{r^4} \frac{1}{1 - 2M/r} \quad (\text{B.19})$$

$$a_{\text{asimp}}^2 = \left[\frac{M^2}{r^4} \frac{1}{1 - 2M/r} \right] \Big|_{r=\infty} = \frac{M^2}{r^4} \quad (\text{B.20})$$

Iz perspektive FIDO-a tik uz horizont $r = 2M$, akceleracija potrebna da bi ostao na mjestu divergira kako se približava horizontu, što odgovara intuiciji – potrebna je beskonačna količina akceleracije da bi se izbjeglo upadanje u crnu rupu. S druge

strane, FIDO-u u beskonačnosti se čini da tik uz horizont treba samo konačna količina akceleracije $a = \frac{1}{4M}$ kako bi se mirovalo.

Akceleracija asimptotskog Minkowski promatrača $\kappa \equiv \sqrt{a_{\text{asimp}}^2}$, ili kako se to često slikovitije kaže: "sila koju bi promatrač u beskonačnosti osjetio da (bezmasenim) užetom spusti predmet jedinične mase tik do horizonta crne rupe", se u literaturi obično naziva *površinska gravitacija crne rupe*.

Gore izrečena konstrukcija površinske gravitacije je intuitivno jasna, ali ima manu što ovisi o Schwarzschildovom koordinatnom sustavu i nejasno je kako bi se brzo dobila za druge crne rupe bez da se ponavlja cijela argumentacija. Koordinatno invarijantna definicija površinske gravitacije za generalne crne rupe se može napraviti pomoću koncepta Killingovog horizonta:

Definicija B.7. Killingov horizont

Killingov horizont je hiperploha u prostorvremenu na kojoj norma nekog Killingovog vektora k^a tog prostorvremena postane jednaka nuli.

Definicija B.8. Površinska gravitacija

Površinska gravitacija κ se definira pomoću jednadžbe geodezika za Killingov vektor, izvrijeđen na njegovom pripadajućem Killingovom horizontu:

$$\left[k^b \nabla_b k^a = \kappa k^a \right] \Big|_{k^a k_a = 0} \quad (\text{B.21})$$

U slučaju Schwarzschildovog prostorvremena, znamo da je prostorvrijeme statično i da ima asimptotski vremensko Killingovo vektorsko polje k^a , koje u Schwarzschildovim koordinatama ima oblik: $\frac{\partial}{\partial t}$, tj. zapisano kao četverovektor: $(1, 0, 0, 0)$, a lako se provjeri i da njegova norma iščezava na horizontu:

$$k^a k_a|_{r=2M} = k^a k^b g_{ab} = g_{tt}|_{r=2M} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Big|_{r=2M} = 0 \quad (\text{B.22})$$

Onda iz definicije (B.21) analognim računom kao i ranije, slijedi ranije dobiveni rezultat za Schwarzschildovu crnu rupu:

$$\kappa_{\text{Schwarzschild}} = \frac{M}{r^2} \Big|_{r=2M} = \frac{1}{4M} \quad (\text{B.23})$$

Kao što vidimo, ako crnu rupu učinimo prikladno masivnom, gravitacija na površini se smanjuje i stoga se horizont može doimati sasvim bezazlenim. Ova će se veličina

kasnije pojaviti u Hawkingovom izvodu zračenja.

Napomena B.9. Apsolutni horizont u slučaju Schwarzschildovog prostorvremena odgovara Killingovom horizontu, iako to generalno nije uvijek slučaj.

Za kraj, htio bih još navesti da se za RN i Kerr-Newman crnu rupu također analognim pristupom mogu dobiti površinske gravitacije. Za dodatne detalje o površinskoj gravitaciji, vidi [2, 5, 7, 8, 12].

Sada vidimo što je problem u $r = 2M$ – mi radimo u sustavu prilagođenom promatračima koji miruju, i koji moraju beskonačno jako akcelerirati kako se približavaju $r = 2M$, što je nefizikalno i metrika zbog toga divergira.

B.3.2 FREFO promatrači

Sada ćemo uvesti novu klasu promatrača: one koji radijalno upadaju u crnu rupu ($dt \neq 0, dr \neq 0, d\theta = 0, d\phi = 0$) – ”FREFO” (engl. *freely falling observer*).

Želimo vidjeti kako je opisano gibanje takvih promatrača pri prelasku preko horizonta iz perspektive FIDO promatrača, postavljenog recimo u asimptotskoj beskonačnosti i s druge strane kakvo je njihovo iskustvo u vlastitom sustavu pri prelasku horizonta.

Za izračunati putanju promatrača, mogli bismo rješavati jednadžbu geodezika, ali postoji jednostavniji način, u ovako visoko simetričnim slučajevima. Prvo moramo uvesti koncept očuvanih veličina, a time i Lagranžijana. Za gibanje točkastih čestica u gravitacijskom polju, Lagranžijan je zadan kao duljina linijskog elementa u zakrivljenom prostorvremenu (što je smisleno jer želimo reproducirati jednadžbu geodezika):

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (\text{B.24})$$

ili ekvivalentno (za diskusiju vidi npr. [13] ili [7]):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] \quad (\text{B.25})$$

gdje λ parametrizira putanju čestice, i po njemu se integrira u akciji. Ovi su izrazi stoga reparametrizacijski invarijantni.

Jednadžbe gibanja se onda dobiju iz Euler-Lagrange (EL) jednadžbe:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{d\mathcal{L}}{d(dx^\mu/d\lambda)} = \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \quad (\text{B.26})$$

Poznata posljedica EL jednadžbi je da ako Lagranžijan ne ovisi o nekoj varijabli x^μ , odmah slijedi da je $\frac{d\mathcal{L}}{d(dx^\mu/d\lambda)}$ očuvana veličine, u ovom slučaju duž geodezika.

Primjenimo li ovo za Schwarzschildovu crnu rupu, imamo Lagranžijan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2(\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \right) \quad (\text{B.27})$$

iz kojeg se odmah vidi da ne ovisi ni o t ni o ϕ , i stoga ima očuvane veličine:

$$-E \equiv \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{t}} = -f(r)\dot{t} \quad (\text{B.28})$$

$$L \equiv \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = r^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \quad (\text{B.29})$$

Čestica koja se slobodno giba po vremenskoj putanji duž normaliziranog četverovektora: $u^a = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ imat će stoga te dvije očuvane veličine. Dodatno, kako je situacija sferno simetrična, svo gibanje će se dešavati na 2D plohi koja prolazi kroz ishodišta i stoga se može odabrati $\theta = 0$.

Iskoristimo li uvjet $(u^a)^2 = \epsilon$ ($= 0$ odgovara svjetlosnoj putanji, $= -1$ odgovara vremenskoj), imamo:

$$g_{00}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -\epsilon \quad (\text{B.30})$$

i nakon malo preslagivanja:

$$(E^2 + \epsilon) = \dot{r}^2 + \epsilon \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2mL^2}{r^3} \quad (\text{B.31})$$

što je konačna jednadžba gibanja čestica u Schwarzschildovom prostorvremenu.

Sada smo spremni primijeniti ovu jednadžbu na gibanje FREFO promatrača, jednom iz perspektive njegovog vlastitog vremena, a drugi put iz perspektive asimptotskog FIDO promatrača.

U daljnjem razmatranju će biti ključna relacija između FIDO promatračevog asimp-

totskog i FREFO promatračevog vlastitog vremena:

$$d\tau = \sqrt{1 - 2M/r} dt \quad (\text{B.32})$$

kao što se može odmah očitati iz metrike. Dodatno, oba vremena postaju jednaka u limesu $r \rightarrow \infty$.

Treba primijetiti da u oba slučaja, FREFO promatrač ima $L = 0$, jer upada u crnu rupu radijalno, i stoga se jednačba znatno pojednostavnjuje.

Također, energija E se može odrediti iz početnog uvjeta, kad je FREFO jako daleko ($r \rightarrow \infty$) od crne rupe, u praktički ravnom prostorvremenu, iz definicije E (B.28) možemo očitati $E = f(r_0)|_{r_0=\infty} = 1$.

S određenim svim parametrima, krećemo na rješavanje jednačbe, iz perspektive FREFO promatrača pomoću njegovog vlastitog vremena. Jednačba glasi (za $\epsilon = -1$):

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} \quad (\text{B.33})$$

što se jednostavno separira, i nakon integracije daje:

$$r \propto (\tau_0 - \tau)^{2/3} \quad (\text{B.34})$$

FREFO promatrač nakon konačnog iznosa afinog parametra τ_0 upada u singularitet u ishodištu, a vidi se iz jednačbe (B.34) da percipira i prelazak horizonta $r = 2M$ u konačnom vremenu.

Iz perspektive FIDO promatrača, situacija je nešto drugačija. Vrijeme kojim promatrač parametrizira putanju je dt , a ne $d\tau$, i izraz koji povezuje te dvije parametrizacije je: $E = \dot{t}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$.

Egzaktna jednačba (s $L = 0$, $\epsilon = -1$) je onda:

$$(E^2 - 1) = \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{2M}{r} \quad (\text{B.35})$$

$$(E^2 - 1) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 E^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} - \frac{2M}{r} \quad (\text{B.36})$$

i kad se još malo presloži:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right)^{1/2} E^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (\text{B.37})$$

Ovu jednadžbu je nepotrebno u potpunosti rješavati, jer nas uglavnom zanima samo ponašanje oko horizonta; specifično što se desi u limesu $r \rightarrow 2M + \tilde{r}$, gdje je \tilde{r} malo. Za rješenje u beskonačnost tako i tako znamo da se asimptotski približava FREFO rješenju od ranije.

Nakon uvrštavanja limesa i izvrednjavanja do najnižeg reda u \tilde{r} , izraz se svodi na:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(E^2 - \left(\frac{\tilde{r}}{2M}\right)\right)^{1/2} E^{-1} \left(\frac{\tilde{r}}{2M}\right) \quad (\text{B.38})$$

Uz napomenu da je $E \propto \mathcal{O}(1)$, možemo zaključiti da je prva zagrada s desne strane $\propto E$ i stoga ostaje:

$$\frac{dr}{\tilde{r}} = \frac{dt}{2M} \quad (\text{B.39})$$

Uvrsti li se natrag $\tilde{r} = r - 2M$, rješenje za gibanje blizu horizonta glasi:

$$(r - 2M) \propto e^{-t/2M} \quad (\text{B.40})$$

Za FIDO promatrača u beskonačnosti, radijalno slobodno upadajući promatrač *nikad ne stigne do horizonta*, već mu se samo približava sve sporije i sporije. Isti bi rezultat vrijedio i za FIDO promatrače blizu horizonta, samo bi se kod njih ušlo u režim eksponencijalnog pada puno kasnije.

U konačnici, sve ovo vodi na jedinstveni zaključak: unutrašnjost crne rupe je stvarna, fizikalna i geodezici se sasvim normalno ponašaju nakon prelaska horizonta. Na horizontu se ne dešava ništa drastično i ima smisla pokušati proširiti prostorvrijeme u unutrašnjost crne rupe.

B.3.3 Rindler prostorvrijeme

Rindlerovo prostorvrijeme je poznato kao opis relativističkih čestica koje se gibaju konstantnom akceleracijom (na ravnoj pozadini), a kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, to je točno opis gibanja FIDO promatrača u blizini horizonta crne

rupe (u zakrivljenom prostorvremenu). Ideja će biti kasnije u radu koristiti Rindlerovo prostorvrijeme kako bi se olakšali računi lokalnih veličina na malih komadima prostorvremena u blizini horizonta.

Slijedi kratki opis ključnih karakteristika Rindler prostorvremena, a još detalja se može pronaći u većini knjiga o općoj teoriji relativnosti (npr. [7]).

Počnimo od Minkowskijevog prostorvremena tako da metrika glasi:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (\text{B.41})$$

U ovakvim slučajevima, kad je metrika oblika: $\mathbb{R}^{1,1} \otimes \mathbb{S}_2$, angularne koordinate θ, ϕ se mogu potisnuti (tj. ne pisati od sad nadalje) ako se zapamti da svaka točka (t, r) zapravo predstavlja 2-sferu.

Cilj je sada pronaći koordinatnu transformaciju Minkowskijevog prostorvremena $(t, r) \rightarrow (\eta, \rho)$ koja odgovara sustavu koji uniformno radijalno akcelerira. Takav će sustav u momentalno mirujućem sustavu promatrača, biti opisan četverovektorima: $u^a = (\dot{r} = 1, \dot{r} = 0)$ i $a^a = (0, a = \text{const})$, što će se tretirati kao "početni uvjet". Za bilo kojeg drugog FIDO promatrača imat će generalni oblik: $u^a = (u^0(\tau), u^1(\tau))$ i $a^a = (0, a)$, uz uvjet $u^2 = -1$ kako bi putanja bilo vremenska.

Uvjet $u^2 = -1$ ograničava komponente u^a :

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 = 1 \quad (\text{B.42})$$

koji se može riješiti s:

$$\begin{aligned} u^0 &= \cosh(K\tau) \\ u^1 &= \sinh(K\tau) \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Ovo rješenje odmah zadovoljava početni uvjet: $u^a(0) = (1, 0)$.

Neodređenu konstantu K se može odrediti iz definicije akceleracije $a^c = u^a \nabla_a u^c = \frac{d}{d\tau} u^c + \Gamma_{ab}^c u^a u^b$, uz napomenu da smo u Minkowskijevom prostorvremenu i stoga

Christofelli iščezavaju:

$$(0, a) = a^c = \frac{d}{d\tau} u^c = \frac{d}{d\tau} (\cosh(K\tau), \sinh(K\tau)) = (K \sinh(K\tau), K \cosh(K\tau)) \quad (\text{B.44})$$

Usporedbom prvog i zadnjeg izraza, vidimo da u početnom trenutku: $\tau = 0$ imamo $K = a$.

Sad kad imamo potpuno određen četverovektor možemo istražiti neka svojstva gibanja akcelerirane čestice.

Za početak, možemo potražiti oblik metrike u sustavu čestice koja se giba uniformno akcelerirano. Prvo treba dobiti koordinate putanje čestice u Rindler sustavu. Integrirajući rezultat (B.43) imamo:

$$x^\mu = \int u^\mu d\tau = \frac{1}{a} (\sinh a\tau, \cosh a\tau) \quad (\text{B.45})$$

Što izgledom podsjeća na sferni sustav, zapisan u hiperboličnim koordinatama. Motivirani time, možemo definirati novi koordinatni sustav:

$$\begin{aligned} x^0 &= \rho \sinh \eta \\ x^1 &= \rho \cosh \eta \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

gdje je ρ "radijalna varijabla" koja odgovara inverzu akceleracije tijela s domenom $[0, \infty]$, a η je "kutna varijabla" koja odgovara reskaliranom vlastitom vremenu τ s domenom $[-\infty, +\infty]$.

U ovim koordinatama, metrika poprima očekivani oblik:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 \\ &= -(d\rho \sinh \eta + \rho \cosh \eta d\eta)^2 + (d\rho \cosh \eta + \rho \sinh \eta d\eta)^2 \\ &= -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Iz (B.45, B.46) ili uvjeta (B.42) se odmah vidi da akcelerirane čestice opisuju hiperbole u $t - r$ prostoru. Sve hiperbole teže linijama $t/r = \pm 1$, što odgovara gibanju brzinom svjetlosti u Minkowskijevom prostorvremenu (što je smisleno, kao posljedica beskonačnog duge konstantne akceleracije). Granične su hiperbole dane s $\rho = 0$, tj.

$a = \infty$, što podsjeća na divergenciju akceleracije potrebne za mirovanje na horizontu crne rupe.

Bitno je napomenuti da se u Rindler koordinatnom sustavu radi o Minkovskom prostorvremenu iz perspektive akcelerirajućeg promatrača. Takav akcelerirajući promatrač se asimptotski približava nekom paru svjetlosnih linija (u ovom slučaju onima iz ishodišta) i iz slike se može očitati da on nikad neće biti u prilici utjecati na događaje ispod svoje $t = -r$ linije, niti će moći dobivati signale koji nastaju iznad $t = r$ linije. Ovakvo ponašanje je karakteristično za horizonte bijele i crne rupe, ali treba primijetiti da se ovdje radi o savršeno uobičajenom, ravnom Minkowskijevom prostorvremenu. Uzrok ove pojave je jednostavno "loš" izbor koordinatnog sustava (B.45) koji ne uspijeva pokriti cijelo prostorvrijeme jer je prilagođen klasi promatrača koji npr. "bježe" od svjetlosnih signala emitiranih nakon $t = 0$. U analogiji s ovim slučajem, moguće je zamisliti da i za Schwarzschildovu metriku postoji "bolji" koordinatni sustav koji neće divergirati na horizontu i koji će dati pristup dodatnim dijelovima prostorvremena skrivenim iza horizonta. Pojam proširenja prostorvremena iza horizonta odabirom prikladnih koordinata se zove *ekstenzija prostorvremena* i o njoj će biti riječ u sljedećem poglavlju.

B.3.4 Rindler prostorvrijeme kao limes područja u blizini horizonta

Kako bi se upotpunila naizgledna analogija iz prošlog poglavlja, sada ćemo pokazati kako se Rindler (i posljedično Minkowski) prostorvrijeme može dobiti iz Schwarzschildovog rješenja, ograničenog na područje blizu horizonta. Ovaj izvod prati proceduru u 1. poglavlju knjige [2]

Krećemo od Schwarzschildove metrike:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.48})$$

s $f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$.

Za početak treba definirati varijablu koja mjeri vlastitu udaljenost stacionarnog promatrača od horizonta:

$$d\rho \equiv f(r)^{-1/2}dr$$

$$\rho = \sqrt{r(r-2M)} + 2M \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} \right) \quad (\text{B.49})$$

Metrika poprima oblik:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.50})$$

gdje se sad r treba shvatiti kao funkcija od ρ koja se dobije računanjem (B.49).

Treba primijetiti da iako smo uveli novu koordinatu, ova metrika je i dalje singularna na horizontu jer vremenska komponenta g_{tt} tamo iščezava i još uvijek joj se ne može izračunati inverz.

Ograničenje na područje blizu crne rupe svodi se na uzimanje: $r = 2M + \epsilon$, što daje:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{2M + \epsilon} \approx 1 - \frac{2M}{2M} - (-\epsilon/2M) = \frac{\epsilon}{2M} \quad (\text{B.51})$$

$$\rho \approx \sqrt{2M\epsilon} + 2M\sqrt{\epsilon/2M} = 2\sqrt{2M\epsilon} \quad (\text{B.52})$$

tj. kombiniranjem: $f(r) \approx \frac{\rho^2}{16M^2}$.

Metrika onda poprima oblik:

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{16M^2} dt^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.53})$$

Konačno, redefiniranjem vremenske varijable $\eta = t/4M$ dobivamo Rindler oblik metričke:

$$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + r(\rho)^2 d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.54})$$

Metrika se još može pretvoriti u potpuno Minkowski zapis, ograničimo li se na mali angularni dio horizonta: $\theta \approx 0$; $\sin \theta \approx \theta$ i preimenovanjem koordinata:

$$2M\theta \cos \phi = x \quad (\text{B.55})$$

$$2M\theta \sin \phi = y \quad (\text{B.56})$$

te korištenjem inverznih transformacija (B.46), što u konačnici daje metriku u blizini horizonta:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{B.57})$$

Ovo je potpuno *ravna* metrika, koja opisuje (malo) područje u blizini horizonta te još jedna indikacija da se u blizini horizonta stvarno ne dešava ništa patološko, već da su u rješenju crne rupe samo koordinate problematične.

Iz principa ekvivalencije, moralo bi slijediti da je perspektiva akcelerirajućeg promatrača ista, bila ona na horizontu crne rupe, u zakrivljenom prostorvremenu ili u Minkowski, tj. Rindler prostorvremenu.

B.3.5 Koordinatni sustavi i maksimalna ekstenzija Schwarzschildovog prostorvremena

Do sad već postoji dosta indikacija da se područje iza horizonta može opisati na fizikalno smislen način. Motivirani diskusijom iz prethodnih potpoglavlja, sada treba uvesti koordinate koje mogu izbjeći koordinatnu divergenciju na horizontu i omogućiti proširenje domene Schwarzschildovog prostorvremena, preko horizonta, a i dalje. Diskusija svih koordinatnih sustava je dosta opsežna tema, i detalje izostavljamo jer postoje u većini knjiga o općoj teoriji relativnosti; npr. [13] [9] [7] [8].

Kao što smo ranije vidjeli, promatrači koji upadaju u crne rupe dobivaju uvid i u područje iza horizonta; i stoga su koordinate prilagođene takvim promatračima (specifično, ulaznim i izlaznim svjetlosnim geodezicima) pogodnije za proučavanje prostorvremena crne rupe.

Ključni koordinatni sustav je *Kruskal-Szekeres koordinatni sustav* ($u = T + R, v = T - R, \theta, \phi$), dan s transformacijama:

$$T = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{B.58})$$

$$R = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{B.59})$$

izvan horizonta, i sličnim transformacijama s dodatnim predfaktorom – pod korijenom

$$T = \left(-\frac{r}{2M} + 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{B.60})$$

$$R = \left(-\frac{r}{2M} + 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{B.61})$$

unutar horizonta.

Metrika u ovim koordinatama poprima oblik:

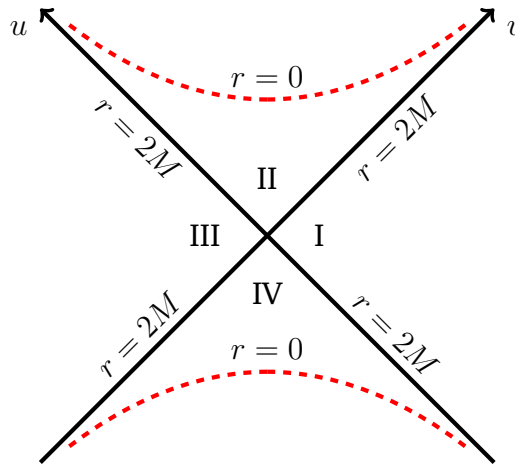
$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.62})$$

ili ekvivalentno pomoću (u, v, θ, ϕ) :

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{r/2M} (-dudv) + r^2 d\Omega_{(2)}^2 \quad (\text{B.63})$$

gdje se r treba shvatiti kao funkcija (u, v) , dana relacijom: $(\frac{r}{2M} - 1)e^{r/2M} = u^2 - v^2$. Metrika očigledno ostaje kompletno ne degenerirana na horizontu $r = 2M$.

Za opis originalnog dijela Schwarzschildovog prostorvremena, u, v koordinate imaju domene $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, a unutrašnjost crne rupe se onda dobije proširenjem u koordinate i na pozitivne vrijednosti. Nadalje, ispada da ako se domena koordinata u, v maksimalno proširi na $(-\infty, +\infty)$ metrika ostaje kompletno ne-singularna, osim u točki koja odgovara $r = 0$. Konkretno, imamo područja I i II koja predstavljaju prostor vrijeme izvan i unutar crne rupe, ali pojavljuju se i ne-fizikalna područja III i IV; gdje III predstavlja "paralelni svemir", kazualno odvojen od svemira u kojem mi živimo, a IV takozvanu *bijelu rupu*. Ova dodatna područja predstavljaju crnu rupu koja je oduvijek postajala, radije nego onu koja je nastala kao posljedica gravitacijskog kolapsa. [8] [13]



Slika B.1: Kruskal-Szekeres dijagram prostorvremena crne rupe.

B.4 Carter-Penrose konformni dijagrami

Ovo potpoglavlje prati [7, 8, 13].

Sada se mogu uvest Carter-Penrose dijagrami, koji se dobiju takozvanom konformnom transformacijom Kruskal-Szekeres metrike:

Definicija B.10. Konformna transformacija metrike

Konformna transformacija metrike je transformacija oblika: $\tilde{g} = \Omega^2(x)g$.

Konformne transformacije imaju svojstvo da čuvaju oblik svjetlosnih stožaca. Ako je neki vektor svjetlosan u metrici $g(k, k) = 0$, onda je svakako svjetlosan i u metrici $\Omega^2 g(k, k) = \Omega^2 0 = 0$; ni jedan faktor to ne može promijeniti.

Metrike se analognim argumentom također slažu oko definicije vremenskih i prostornih vektor.

S druge strane, geodezici ne moraju izgledati isto u oba slučaja, jer se pri računanju Christoffelovih simbola javljaju derivacije metrike, i stoga dodatni faktori tipa $\partial\Omega^2$. Ti faktori onda modificiraju rješenja jednadžbe geodezika.

Konformna kompaktifikacija je specijalna vrsta konformne transformacije u kojoj se točke iz beskonačnosti mapiraju na konačnu koordinatnu udaljenost. Metrika se naravno javlja u obliku $\tilde{g} \rightarrow \Omega^2 g$, i faktor Ω^2 divergira kad se izvrijedni u točkama koje odgovaraju beskonačnosti u staroj metrici. Ipak, zbog ranije navedenih svojstava, ako nas zanima samo kauzalna struktura prostorvremena, Ω^2 se može potpuno ignorirati, i ostajemo s metrikom kojoj su sve koordinate konačne domene. Ovo je korisno za crtanje dijagrama koji predstavljaju cijelo beskonačno prostorvrijeme na konačnom komadu papira. Posebna korist kompaktifikacije je što olakšava argumente vezane uz različite tipove beskonačnosti (prostornu, vremensku, svjetlosnu, etc.)

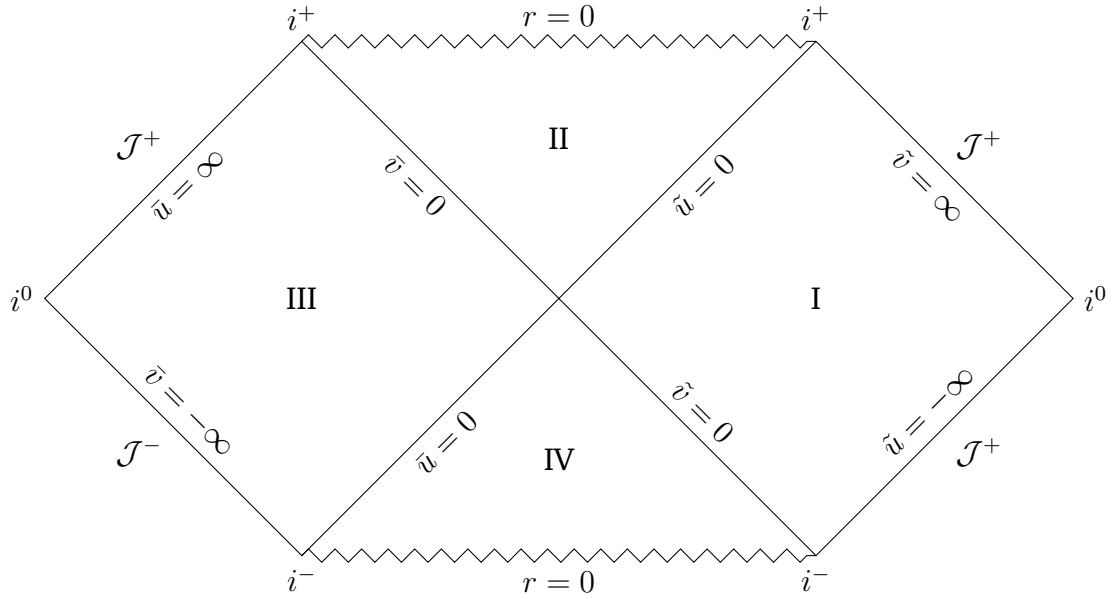
Tranformacija koja se primjenjuje na Kruskal-Szekeres metriku je obično:

$$\tilde{u} = \arctan u \tag{B.64}$$

$$\tilde{v} = \arctan v \tag{B.65}$$

što očigledno ima svojstvo da beskonačne intervale koordinata $u, v \in (-\infty, +\infty)$ mapira u konačne intervale koordinata $\tilde{u}, \tilde{v} \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ovdje ponovno imamo četiri regije, analogne onima iz Kruskal-Szekeres dijagrama od ranije, ali su sada i različite vrste beskonačnosti eksplicitne na slici. i^\pm



Slika B.2: Carter Penrose dijagram, s označenim beskonačnostima.

su buduća i prošla vremenska beskonačnost, i^0 je prostorna beskonačnost, a \mathcal{J}^\pm su buduće i prošle svjetlosne beskonačnosti.

Definicija B.11. Ekstenzija prostorvremena Prostorvrijeme (\mathcal{M}, g) ima ekstenziju (\mathcal{M}', g') ako je $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ i g je izometrično $g'|_{\mathcal{M}}$.

Generalno, ako prostorvrijeme ima geodezike koji završavaju na konačnoj vrijednosti svog afinog parametra u bilo kojim koordinatama; to obično povlači ili da su došli do fizikalnog singulariteta ili da su prešli koordinatni singularitet, te da se prostorvrijeme može proširiti na područje iza koordinatnog singulariteta, gdje se geodezici nastavljaju.

Maksimalna ekstenzija prostovremena je onda takva da daljnje ekstenzije ne postoje. *Schwarzschildovo prostorvrijeme zapisano pomoću Kruskal-Szekeres koordinata, ili slikovitije prikazano preko Carter-Penrose dijagrama je baš takva maksimalna ekstenzija.*

Dodatak C Usrednjene sume koeficijenata po Haar mikrokanonskoj mjeri

U potpoglavljima 4.5.3 i 5.2.1 su se koristila usrednjenja po Haar mikrokanonskoj mjeri, definiranoj izrazom (4.23):

$$d\mu = a d\alpha_1 d\alpha_1^* \dots d\alpha_N d\alpha_N^* \delta\left(\sum_i |\alpha_i|^2 = 1\right) \quad (\text{C.66})$$

gdje je a konstanta koja osigurava normalizaciju $\int d\mu = 1$, a α_i su koeficijenti u raspisu po bazi neke valne funkcije:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |i\rangle \quad (\text{C.67})$$

gdje je N dimenzija Hilbertovog prostora.

Pri računima s Haar mjerom, računati ćemo veličine poput:

$$\int d\mu \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_A} \alpha_{j_1}^* \dots \alpha_{j_B}^* \quad (\text{C.68})$$

za koje će nam trebati dva svojstva Haar mjere.

Prvo, vidimo iz definicije mjere da je mjera invarijantna na rotacije koeficijenata: $\alpha_i \rightarrow e^{i\theta_i} \alpha_i$, budući da svaki koeficijent c_i ulazi u mjeru zajedno sa svojim parom c_i^* . Primijenimo li ovo na općeniti integral, dobije se sljedeće:

$$\int d\mu \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_A} \alpha_{j_1}^* \dots \alpha_{j_B}^* = e^{i(\sum_{a=1}^A \theta_a - \sum_{b=1}^B \theta_b)} \int d\mu \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_A} \alpha_{j_1}^* \dots \alpha_{j_B}^* \quad (\text{C.69})$$

Zbog simetrije Haar mjere, integral je identičan, do na globalnu fazu zbog podintegralnih koeficijenata, koja ili iščezava, ili je integral po Haar mjeri jednak nuli. Kako su izbori individualnih faza potpuno proizvoljni, općenito ta globalna faza nije 0, osim u specijalnom slučaju kad se pojavljuje isti broj koeficijenata α i α^* te su skupovi indeksa isti $\{i_1 \dots i_A\} = \{j_1 \dots j_B\}$, tako da se globalna faza krati član po član.

To vodi na zaključak da integral po Haar mjeri nije 0 ako i samo ako ima isti broj α i α^ koeficijenata, te identične skupove indeksa na tim koeficijentima.*

Drugo svojstvo koje će nam trebati je odmah jasno iz definicije i kaže da je Haar mjera simetrična na zamjene parova indeksa $d\alpha_i d\alpha_i^* \leftrightarrow d\alpha_j d\alpha_j^*$ i stoga možemo slo-

bodno mijenjati parove indeksa podintegralnih αc^* parova.

Prvi rezultat koji nam treba je

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^*} = \int d\mu \alpha_i \alpha_j^* \quad (\text{C.70})$$

koji odmah možemo pojednostavniti zahvaljujući prvom svojstvu Haar mjere, koje kaže da i mora biti jednako j . Stoga imamo:

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^*} = \delta_{ij} \int d\mu |\alpha_i|^2 \quad (\text{C.71})$$

Zatim, koristeći drugo svojstvo imamo:

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^*} = \delta_{ij} \int d\mu |\alpha_i|^2 = \delta_{ij} \int d\mu \frac{1}{N} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_N|^2) = \delta_{ij} \frac{1}{N} \quad (\text{C.72})$$

gdje se u zadnjoj jednakosti koristila normalizacija stanja $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ te normalizacija Haar mjere $\int d\mu = 1$.

Sličan postupak možemo napraviti i za složenije rezultate:

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^* \alpha_k \alpha_l^*} = \int d\mu \alpha_i \alpha_j^* \alpha_k \alpha_l^* \quad (\text{C.73})$$

Sad postoji više načina da se upare indeksi α i α^* , u skladu s prvim svojstvom Haar mjere, pa treba pokriti sve mogućnosti:

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^* \alpha_k \alpha_l^*} = (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \int d\mu |\alpha_i|^2 |\alpha_k|^2 \quad (\text{C.74})$$

Izračun ostatka integrala se sada radi sličnim trikom kao i u prvom rezultat, s tim da se generalno mora napraviti podjela na $i = k$ i $i \neq k$ slučajeve.

Nama će u principu trebati samo rezultat za $i \neq k$ koji slijedi iz korištenja drugog svojstva Haar mjere $\int d\mu \alpha_i = \frac{1}{N} \int d\mu$, kao i u prvom rezultatu:

$$\overline{\alpha_i \alpha_j^* \alpha_k \alpha_l^*} = \frac{(\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk})}{N^2} \quad (\text{C.75})$$

Vrijedi napomenuti da će se ovi rezultati pojaviti u potpoglavlju 5.2.1 u malo drugačijem okruženju, gdje su svi indeksi i, j, k, l "udvostručeni", u smislu da predstavljaju parove indeksa $i \rightarrow i_1 i_2$ i analogno za $ijkl$. U tom slučaju, rezultati su

potpuno identični uz zamjene: $\delta_{ij} \rightarrow \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}$

Ovi se rezultati originalno spominju u radu [50].

Potpuniji tretman ovih rezultata, uključujući potpuni izraz za drugi rezultat C.75 te očekivanja većeg broja koeficijenata $\alpha\alpha^*$ se mogu pronaći u člancima [72] i [73]. [74] je pregledni članak koji u dodatku B ima još izvora o ovoj temi.

Bibliography

- [1] Kittel C. Elementary statistical physics. Courier Corporation; 2004 Mar 1.
- [2] Susskind L, Lindesay J. An introduction to black holes, information and the string theory revolution: The holographic universe. World Scientific; 2005.
- [3] Israel W. Event horizons in static vacuum space-times. // Physical review. 1967 Dec 25;164(5):1776.
- [4] Israel W. Event horizons in static electrovac space-times. Communications in Mathematical Physics. 1968 Sep 1;8(3):245-60.
- [5] Hawking SW, Ellis GF. The large scale structure of space-time. Cambridge university press; 1973.
- [6] Baulieu L, Rabinovici E, Harvey J, Pioline B, Windey P, editors. Progress in String, Field and Particle Theory. Springer Science & Business Media; 2012 Dec 6.
- [7] Blau M. Lecture notes on general relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics; 2011 Mar.
- [8] Reall H. Part 3 Black Holes. Lecture notes given as part of the Cambridge University Mathematical Tripos. 2014.
- [9] Misner CW, Thorne KS, Wheeler JA. Gravitation. Macmillan; 1973 Sep 15.
- [10] Carter B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. Physical Review Letters. 1971 Feb 8;26(6):331.
- [11] Robinson DC. Uniqueness of the Kerr black hole. Physical Review Letters. 1975 Apr 7;34(14):905.
- [12] Wald RM. General relativity. University of Chicago press; 2010 May 15.
- [13] Poisson E. A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics. Cambridge university press; 2004 May 6.
- [14] Bekenstein JD. Black holes and the second law. Lett. Nuovo Cim. 1972 Aug 12;4(737):113.

- [15] Bekenstein JD. Black holes and entropy. *Physical Review D*. 1973 Apr 15;7(8):2333.
- [16] Page DN. Huge violations of Bekenstein's entropy bound. arXiv preprint gr-qc/0005111. 2000 May 24.
- [17] Feynman, Richard: *Statistical mechanics: a set of lectures (advanced book classics)*. 1998.
- [18] Wang QA. Incomplete information and fractal phase space. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004 Feb 1;19(3):639-44.
- [19] Braunstein SL, Pati AK. Quantum information cannot be completely hidden in correlations: implications for the black-hole information paradox. *Physical review letters*. 2007 Feb 23;98(8):080502.
- [20] Braunstein SL, Pati AK. Quantum information cannot be completely hidden in correlations: implications for the black-hole information paradox. *Physical review letters*. 2007 Feb 23;98(8):080502.
- [21] Hawking SW. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*. 1972 Jun 1;25(2):152-66.
- [22] Bardeen JM, Carter B, Hawking SW. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*. 1973 Jun 1;31(2):161-70.
- [23] Hawking SW. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*. 1975 Aug 1;43(3):199-220.
- [24] Mukhanov V, Winitzki S. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge university press; 2007 Jun 14.
- [25] Bousso R. The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*. 2002 Aug 5;74(3):825.
- [26] Fabbri A, Navarro-Salas J. *Modeling black hole evaporation*. World Scientific; 2005.

- [27] Lloyd S. Black Holes, Demons and the Loss of Coherence: How complex systems get information, and what they do with it (Doctoral dissertation, Rockefeller University).
- [28] Page DN. Information in black hole radiation. *Physical review letters*. 1993 Dec 6;71(23):3743.
- [29] Page DN. Average entropy of a subsystem. *Physical review letters*. 1993 Aug 30;71(9):1291.
- [30] Page DN. Time dependence of Hawking radiation entropy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2013 Sep 24;2013(09):028.
- [31] Araki H, Lieb EH. Entropy inequalities. In *Inequalities 2002* (pp. 47-57). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [32] Bianchi E, Donà P. Typical entanglement entropy in the presence of a center: Page curve and its variance. *Physical Review D*. 2019 Nov 18;100(10):105010.
- [33] Foong SK, Kanno S. Proof of Page's conjecture on the average entropy of a subsystem. *Physical review letters*. 1994 Feb 21;72(8):1148.
- [34] Harlow D. Jerusalem lectures on black holes and quantum information. *Reviews of Modern Physics*. 2016 Feb 2;88(1):015002.
- [35] Compere G. Are quantum corrections on horizon scale physically motivated?. arXiv preprint arXiv:1902.04504. 2019 Feb 12.
- [36] Marolf D. The Black Hole information problem: past, present, and future. *Reports on Progress in Physics*. 2017 Jul 21;80(9):092001.
- [37] Mathur SD. The information paradox: a pedagogical introduction. *Classical and Quantum Gravity*. 2009 Oct 23;26(22):224001.
- [38] Polchinski J. String theory and black hole complementarity. arXiv preprint hep-th/9507094. 1995 Jul 18.
- [39] Ellis J, Hagelin JS, Nanopoulos DV, Srednicki M. Search for violations of quantum mechanics. *Nuclear physics. B*. 1984 Jul 1;241(SLAC-PUB-3134).

- [40] Hawking SW. Breakdown of predictability in gravitational collapse. *Physical Review D*. 1976 Nov 15;14(10):2460.
- [41] Banks T, Susskind L, Peskin ME. Difficulties for the evolution of pure states into mixed states. *Nuclear Physics B*. 1984 Sep 24;244(1):125-34.
- [42] Chen P, Ong YC, Yeom DH. Black hole remnants and the information loss paradox. *Physics reports*. 2015 Nov 22;603:1-45.
- [43] Hebecker A, Mikhail T, Soler P. Euclidean wormholes, baby universes, and their impact on particle physics and cosmology. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. 2018 Oct 8;5:35.
- [44] Puhm A, Rojas F, Ugajin T. (Non-adiabatic) string creation on nice slices in Schwarzschild black holes. *Journal of High Energy Physics*. 2017 Apr 1;2017(4):156.
- [45] Susskind L. Entanglement is not enough. *Fortschritte der Physik*. 2016 Jan;64(1):49-71.
- [46] Susskind L, Thorlacius L, Uglum J. The stretched horizon and black hole complementarity. *Physical Review D*. 1993 Oct 15;48(8):3743.
- [47] Harlow D, Hayden P. Quantum computation vs. firewalls. *Journal of High Energy Physics*. 2013 Jun 1;2013(6):85.
- [48] Mann RB. Black holes: thermodynamics, information, and firewalls. In *Black Holes: Thermodynamics, Information, and Firewalls 2015* (pp. 1-95). Springer, Cham.
- [49] Susskind L, Thorlacius L. Gedanken experiments involving black holes. *Physical Review D*. 1994 Jan 15;49(2):966.
- [50] Almheiri A, Marolf D, Polchinski J, Sully J. Black holes: complementarity or firewalls?. *Journal of High Energy Physics*. 2013 Feb 1;2013(2):62.
- [51] Hayden P, Preskill J. Black holes as mirrors: quantum information in random subsystems. *Journal of high energy physics*. 2007 Sep 26;2007(09):120.

- [52] Preskill J. Ph219 Quantum Computation - Lecture Notes. 1997-2020. <http://theory.caltech.edu/preskill/ph219/index.html#lecture>
- [53] Hooft GT. The Scattering matrix approach for the quantum black hole: An Overview. *International Journal of Modern Physics A*. 1996 Oct 20;11(26):4623-88.
- [54] Giddings SB. Black hole information, unitarity, and nonlocality. *Physical Review D*. 2006 Nov 17;74(10):106005.
- [55] Giddings SB. Why aren't black holes infinitely produced?. *Physical Review D*. 1995 Jun 15;51(12):6860.
- [56] Giddings SB. Why aren't black holes infinitely produced?. *Physical Review D*. 1995 Jun 15;51(12):6860.
- [57] Bousso R. Complementarity is not enough. *Physical Review D*. 2013 Jun 20;87(12):124023.
- [58] Papadodimas K. Black Holes and Quantum Information - Lecture 2. Spring School on Superstring Theory and Related Topics — (smr 3276). 2019 Mar 28.
- [59] Horowitz GT, Maldacena J. The black hole final state. *Journal of High Energy Physics*. 2004 Feb 19;2004(02):008.
- [60] Carney D, Chaurette L, Neuenfeld D, Semenoff G. On the need for soft dressing. *Journal of High Energy Physics*. 2018 Sep 1;2018(9):121.
- [61] Giddings SB. Nonviolent nonlocality. *Physical Review D*. 2013 Sep 10;88(6):064023.
- [62] Maldacena J, Susskind L. Cool horizons for entangled black holes. *Fortschritte der Physik*. 2013 Sep 2;61(9):781-811.
- [63] Giveon A, Itzhaki N. String theory versus black hole complementarity. *Journal of High Energy Physics*. 2012 Dec 1;2012(12):94.
- [64] Lunin O, Mathur SD. AdS/CFT duality and the black hole information paradox. *Nuclear Physics B*. 2002 Feb 18;623(1-2):342-94.
- [65] Mathur SD. The fuzzball proposal for black holes: An elementary review. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*. 2005 Jul 15;53(7-8):793-827.

- [66] Mathur SD. A model with no firewall. arXiv preprint arXiv:1506.04342. 2015 Jun 14.
- [67] Gharibyan H, Penna RF. Are entangled particles connected by wormholes? Evidence for the ER= EPR conjecture from entropy inequalities. *Physical Review D*. 2014 Mar 3;89(6):066001.
- [68] Van Raamsdonk M. Building up spacetime with quantum entanglement. *General Relativity and Gravitation*. 2010 Oct 1;42(10):2323-9.
- [69] Rocha JV. Evaporation of large black holes in AdS: coupling to the evaporon. *Journal of High Energy Physics*. 2008 Aug 22;2008(08):075.
- [70] Ribeiro GA, Klümper A. Correlation functions of the integrable spin-s chain. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016 May 12;49(25):254001.
- [71] Thorne K. *Geometrodynamics: The Nonlinear Dynamics of Curved Spacetime*. USČR, MFF UK Praha. 2019 May 16. <https://www.youtube.com/watch?v=fbL6F7itwtM>
- [72] Creutz M. On invariant integration over SU (N). *Journal of Mathematical Physics*. 1978 Oct;19(10):2043-6.
- [73] Mello PA. Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1990 Sep 21;23(18):4061.
- [74] Beenakker CW. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of modern physics*. 1997 Jul 1;69(3):731.