**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tea Putrić

# PARADOKS O PRIJATELJSTVU

Diplomski rad

Zagreb, 2020.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tea Putrić

# PARADOKS O PRIJATELJSTVU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Od srca se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Jurju Šiftaru na neizmjernom trudu i velikoj pomoći pri pisanju ovog rada. Svima koji su bili uz mene na mom životnom putu, sudjelovali u mom obrazovanju i davali mi snage za svaki korak u mom životu.*

# Sadržaj

# Uvod

Promatrajući mrežu prijatelja kao neusmjereni graf, poznati američki sociolog Scott L. Feld došao je 1991. godine do zanimljivog otkrića. Uočio je da će u prosjeku većina pojedinaca imati manje prijatelja nego što ih imaju njihovi prijatelji, odnosno u terminima teorije grafova, da je prosječan stupanj vrha u grafu manji od prosječnog stupnja njemu susjednih vrhova. Intrigantni naslov njegovog rada, "Why your friends have more friends than you do", ("Zašto vaši prijatelji imaju više prijatelja nego vi") doprinio je da opaženi fenomen postane poznat pod sažetim nazivom paradoks o prijateljstvu (the friendship paradox). Važno je napomenuti da je paradoks tvrdnja čiji je dokaz logički neupitan, ali je intuitivno sama tvrdnja vrlo upitna.

Prije razrade osnovne ideje potrebno je definirati prijateljstvo. U idealnom slučaju, prijateljstvo je dvosmjerna, odnosno simetrična relacija. To znači da ako je osoba $u$ prijatelj osobe $v$, tada je i osoba $v$ prijatelj osobe $u$. Ovakva definicija prijateljstva svakako je pojednostavljena i daleko je od savršene, no radi operativnosti u radu uzima se kao valjana. Dokazat ćemo da prosječan stupanj vrha u grafu nije veći od prosječnog stupnja njemu susjednih vrhova, odnosno da ako pojedinac usporedi broj svojih prijatelja s brojem prijatelja svojih prijatelja, vrlo je vjerojatno da će smatrati kako ima malo prijatelja. To ne znači nužno da će svaki pojedinac imati manje prijatelja nego što u prosjeku imaju njegovi prijatelji, nego da će to vrijediti za većinu. Pokazat ćemo kako različiti rasporedi pojedinaca unutar mreže utječu na prosječne vrijednosti te neke situacije u kojima navedeni paradoks neće vrijediti.

Rad je podijeljen na šest poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su temeljni pojmovi teorije grafova kao i neki rezultati koji se upotrebljavaju u kasnijim dokazima. U drugom i trećem poglavlju pobliže se razmatra smisao i tumačenje paradoksa o prijateljstvu uz primjere koji ilustriraju njegove matematičke aspekte. Dano je nekoliko dokaza i interpretacija osnovne nejednakosti, koji osim jednostavnog prebrojavanja obuhvaćaju pristup pomoću varijance te pomoću vjerojatnosti. Četvrto i peto poglavlje posvećeno je različitim poopćenjima paradoksa o prijateljstvu, počevši od "multistep" generalizacije i homomorfnog modela.

Za potrebe dokaza nekih interpretacija paradoksa, definirat ćemo slučajnu šetnju u grafu te očekivanu vrijednost stupnja pojedinog vrha u grafu. Ako definiramo $Y_k$ kao slučajno odabran krajnji vrh uniformno slučajno odabrane šetnje duljine $k \geq 1$, tada će očekivana vrijednost stupnja tako odabranog vrha biti jednaka omjeru broja šetnji duljine $(k + 1)$ i broja šetnji duljine $k$ u tom grafu. U radu se primjenjuju neki važni rezultati teorije grafova, a jedan od najpoznatijih uspostavlja vezu između broja šetnji duljine $k$ u grafu i $k$-te potencije matrice susjedstva tog grafa.

Kako je matrica susjedstva neusmjerenog grafa simetrična matrica, ona se može dijagonalizirati nad poljem realnih brojeva. Budući da je to i nenegativna matrica, uz neke jednostavne dodatne uvjete ona je i primitivna, po teoremu D. Koeniga. Stoga je primjenjiv Perron-Frobeniusov teorem koji pruža precizne informacije o njezinom spektru i svojstvenim vektorima. Pomoću tog teorema dokazuje se da kada $k$ teži u beskonačno onda $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ konvergira prema najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice susjedstva. Zanimljivo je da za parne vrijednosti $k$ vrijedi $\mathbb{E}[d(Y_k)] \leq \mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$, ali da takva nejednakost ne vrijedi općenito za neparne $k$. Međutim, razlika $\mathbb{E}[d(Y_k)] - \mathbb{E}[d(Y_{k-1})]$ konvergira k 0 kako $k$ teži u beskonačno, neovisno o parnosti $k$.

U završnom, šestom poglavlju ukratko su opisane neke primjene i paradoksi srodni paradoksu o prijateljstvu, uz naznake kako se "lokalni" doživljaj neke društvene situacije može razlikovati od jednog pojedinca do drugog.

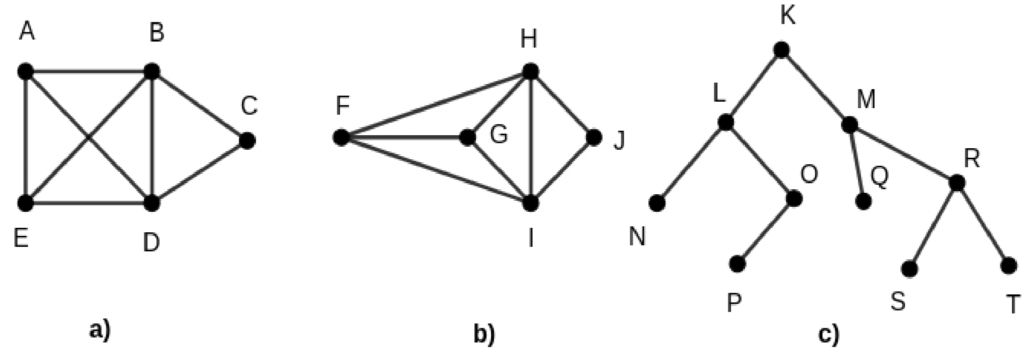
# Poglavlje 1

# Osnovni pojmovi

Na samom početku rada navedeni su osnovni pojmovi i definicije teorije grafova potrebni za razumijevanje i dokazivanje tvrdnji u nastavku rada.

## 1.1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

**Definicija 1.1.1.** **Graf** $G$ je uređeni par $G = (V(G), E(G))$. $V = V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ je konačan skup, čiji su elementi vrhovi od $G$. $E = E(G)$ je konačan skup neuređenih parova iz skupa $V$ (ne nužno različitih) koje nazivamo bridovima.




Slika 1.1.1: Primjeri grafova

Navedene oznake za skup vrhova i skup bridova dolaze od engleskih riječi *vertex* i *edge*.

**Definicija 1.1.2.** Kažemo da su dva vrha **susjedna** ako postoji brid koji ih spaja, ili formalno, vrhovi $u, v \in V$ su susjedni ako postoji $e = \{u, v\} \in E$. Tada kažemo da je vrh $u$ **incidentan** s bridom $e$, također, vrh $v$ je incidentan s bridom $e$.

**Primjer:** sa slike 1.1.1. a) možemo uočiti da su vrhovi A i B susjedni, isto tako vrhovi B i C su susjedni itd. Susjedni bridovi na tom istom grafu su npr. AB i AE jer im je vrh A zajednički.

**Definicija 1.1.3.** **Stupanj vrha** $v$ grafa $G$, u oznaci $d(v)$ je broj bridova koji su incidentni s $v$. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 **krajnji vrh**.

**Primjer:** na slici 1.1.1. a), vrh $A$ je stupnja 3, odnosno $d(A) = 3$.

**Lema 1.1.1** (o rukovanju)**.** *Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu jednak je dvostrukom broju bridova tog grafa.*

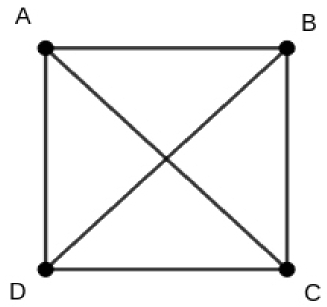
*Dokaz.* Neka su $v_1, v_2, ..., v_n$ vrhovi grafa $G$.
Neka vrh $v_1$ ima stupanj $d_1$. To znači da iz vrha $v_1$ izlazi $d_1$ bridova.
Neka vrh $v_2$ ima stupanj $d_2$. To znači da iz vrha $v_2$ izlazi $d_2$ bridova.
.
.
.
Neka vrh $v_n$ ima stupanj $d_n$. To znači da iz vrha $v_n$ izlazi $d_n$ bridova.

Zbrojimo sve stupnjeve vrhova grafa i dobit ćemo: $d_1 + d_2 + ... + d_n$. Obzirom da svaki brid povezuje dva vrha, zaključujemo da za svaka dva susjedna vrha u grafu imamo jedan brid među njima, odnosno da je u grafu dvostruko manje bridova od zbroja stupnjeva svih vrhova.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

□

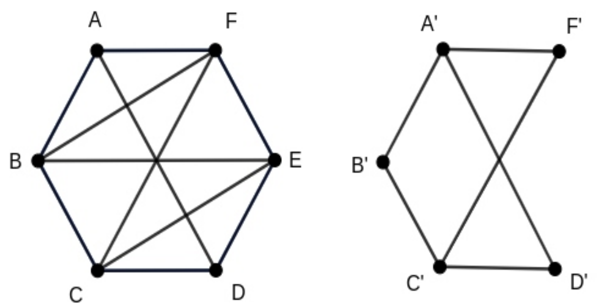
**Definicija 1.1.4.** Za graf $G$ kažemo da je **regularan** ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja.




Slika 1.1.2: Regularan graf

**Definicija 1.1.5.** **Usmjereni graf ili digraf** je graf $D$ kod kojeg je svakom bridu pridružen redom njegov početni i krajnji vrh, odnosno uređeni par vrhova. Takve bridove nazivamo **usmjerenim bridovima**. Obično se taj smjer u crtanju označava strelicama. Graf koji nije usmjeren nazivamo **neusmjereni graf**.

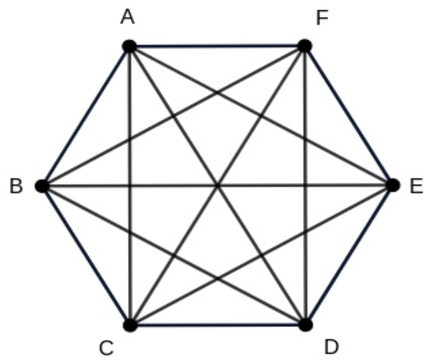
**Definicija 1.1.6.** **Podgraf grafa** $G$ je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.




Slika 1.1.3: Graf i jedan njegov podgraf

**Definicija 1.1.7.** Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se **petlja**. Dva brida ili više njih incidentnih s istim parom vrhova zovu se **višestruki bridovi**. Graf je **jednostavan** ako su svaka dva vrha spojena najviše jednim bridom i nema petlji.

**Definicija 1.1.8.** Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna naziva se **potpuni graf**. Potpuni graf s $n$ vrhova označavamo s $K_n$.

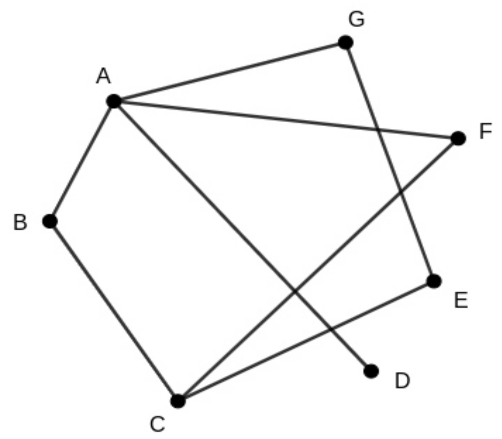



Slika 1.1.4: Potpun graf

**Definicija 1.1.9.** **Šetnja** u grafu G je netrivijalan konačan niz $W = v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi $v_i$ i bridovi $e_i$ tako da su krajevi od $e_i$ vrhovi $v_{i-1}$ i $v_i$, $\forall i, 0 \leq i \leq k$. Niz $W$ je šetnja duljine $k$. Šetnja je zatvorena ako ima pozitivnu duljinu, a početak i kraj se podudaraju.

**Definicija 1.1.10.** **Staza** je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti. Ako su i svi vrhovi različiti (osim eventualno početnog i krajnjeg) tada se ta staza naziva **put**. Za stazu ili put kažemo da su **zatvoreni** ako je početni vrh jednak krajnjem. Zatvorena staza naziva se **ciklus**.

**Definicija 1.1.11.** Za graf G kažemo da je **povezan** ako i samo ako postoji put između svaka dva vrha.

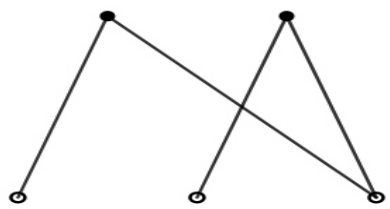



Slika 1.1.5: Put i povezanost u grafu

Na slici 1.1.5 vrhovi $D$ i $C$ su povezani. Put između njih je niz DABC. Primijetimo da to nije jedini put između tih vrhova. Također, primijetimo da su svaka dva vrha u tom grafu povezana pa je $G$ povezan graf.

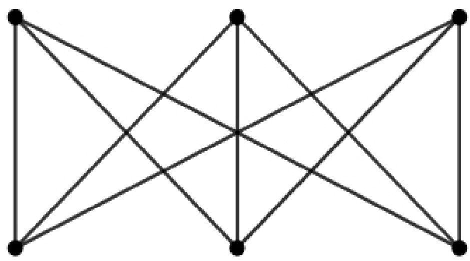
**Definicija 1.1.12.** **Komponenta povezanosti** grafa $G$, skraćeno komponenta, je maksimalni povezan podgraf od $G$ (tj. povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom većem povezanom podgrafu). Graf je povezan ako se sastoji od samo jedne komponente povezanosti (u suprotnom je nepovezan).

**Definicija 1.1.13.** Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je **bipartitan** ili dvodijelan graf ako se skup $V$ može particionirati u dva disjunktna skupa $X$, $Y$ tako da svaki brid iz $E$ spaja vrh iz skupa $X$ s vrhom iz skupa $Y$.



Slika 1.1.6: Bipartitni graf

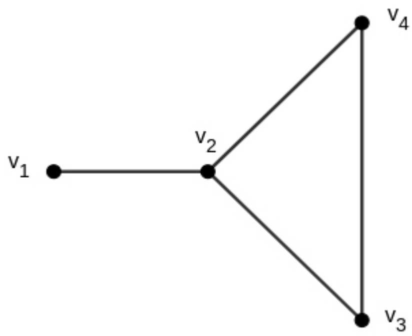
**Definicija 1.1.14.** Bipartitan graf $G = (V, E)$, pri čemu je $V = X \cup Y$ je **potpun bipartitni graf** ako je svaki vrh iz $X$ spojen sa svakim vrhom iz $Y$. Ako je $|X| = m$ i $|Y| = n$, takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označava se s $K_{m,n}$. Vrijedi $|V(K_{m,n})| = m + n$ i $|E(K_{m,n})| = m \cdot n$.



Slika 1.1.7: Graf $K_{3,3}$

## 1.2 Specijalne matrice grafa $G$

**Definicija 1.2.1.** Neka je $G$ proizvoljan graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. **Matrica susjedstva** $A(G) = A$ neusmjerenog grafa $G$ je kvadratna n × n matrica s elementima $a_{ij}$ , $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, pri čemu je $a_{ij}$ broj bridova koji spajaju vrhove $v_i$ i $v_j$.




Slika 1.1.8: Proizvoljan graf $G$

**Primjer:** Matica susjedstva $A(G)$ grafa $G$ sa slike 1.1.8 je matrica:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za proučavanje matrica važne su nam njihove svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori i drugi s njima povezani pojmovi i rezultati pa ćemo stoga i ovdje navesti nekoliko definicija i teorema.

**Definicija 1.2.2.** Neka je zadana kvadratna matrica $A$ reda $n$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** matrice $A$ ako postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Nadalje, za takav vektor $x \neq 0$ kažemo da je **svojstven vektor** matrice $A$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda$. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice $A$ nazivamo **spektar matrice** $A$.

Važan rezultat iz linearne algebre govori da je spektar realne simetrične matrice neprazan, da su sve svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice realni brojevi te, štoviše, da se realna simetrična matrica može dijagonalizirati nad poljem realnih brojeva. To znači da postoji baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ koja se sastoji od svojstvenih vektora matrice $A$ i matrica $A$ slična je dijagonalnoj matrici na čijoj su dijagonali njezine svojstvene vrijednosti, to slijedi iz:

**Teorem 1.2.1.** *Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici: ako je $H \in M_n(\mathbb{R})$ hermitska matrica onda postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i ortogonalna matrica $U \in M_n(\mathbb{R})$ za koje vrijedi $H = UDU^{-1}$.*

Preciznije tvrdnje vrijede ako je simetrična matrica pozitivna, odnosno nenegativna, što po definiciji znači da su joj svi elementi pozitivni, odnosno nenegativni.

U slučaju pozitivne simetrične matrice, postoji jedinstvena svojstvena vrijednost $r$ koja je pozitivna i pritom ima najveću apsolutnu vrijednost u cijelom spektru (spektralni radijus). Svojstvena vrijednost $r$ ima algebarsku pa stoga i geometrijsku kratnost jednaku 1. (Algebarska kratnost je kratnost $r$ kao nultočke karakterističnog polinoma matrice, a geometrijska kratnost je dimenzija pripadnog svojstvenog potprostora za $r$). Nadalje, postoji svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $r$ takav da su sve koordinate (komponente) tog vektora pozitivni brojevi, a ni za koju drugu svojstvenu vrijednost osim $r$ nema takvog svojstvenog vektora. O tome govori Perron-Frobeniusov teorem i to za pozitivne matrice koje nisu nužno simetrične (vidi [1]).

Za nenegativnu simetričnu matricu navedena svojstva ne vrijede općenito, ali i takve matrice imaju svojstveni vektor čije su sve komponente nenegativne, a pripadna svojstvena vrijednost $r$ je nenegativni realni broj. No, $r$ može biti i 0, a ne mora biti jedinstven po (najvećoj) apsolutnoj vrijednosti. Ipak, postoji varijanta Perron-Frobeniusovog teorema za tzv. ireducibilne nenegativne matrice.

Posebno, najvažnija svojstva pozitivnih matrica zadržana su i kod tzv. primitivnih matrica.

**Definicija 1.2.3.** Matrica $A$ je **primitivna** ako je nenegativna i postoji neki prirodni broj $m$ takav da je $A^m$ pozitivna matrica.

Spomenimo još da se svaka nenegativna matrica može dobiti kao limes niza pozitivnih matrica.

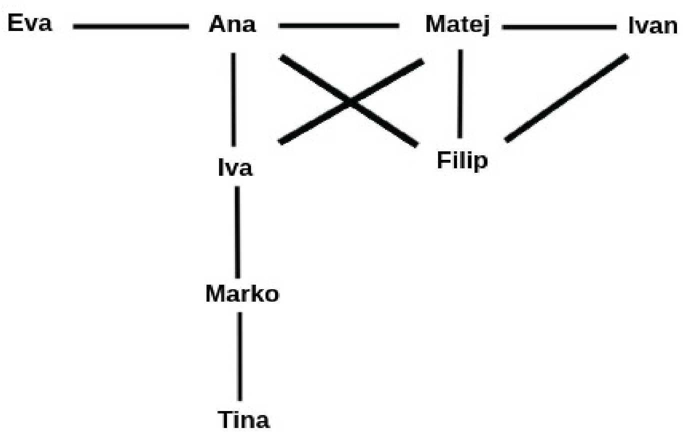
# Poglavlje 2

# Paradoks o prijateljstvu

U ovom dijelu pokazat ćemo na primjeru da ako pojedinac usporedi broj svojih prijatelja s brojem prijatelja svojih prijatelja, vrlo je vjerojatno da će smatrati da ima malo prijatelja. Na primjeru ćemo prikazati pozadinu paradoksa, pokazujući da će prosječan broj prijateljevih prijatelja biti veći od prosječnog broja prijatelja pojedinca. To nužno ne znači da će svaki pojedinac imati manje prijatelja nego što njegovi prijatelji imaju u prosjeku, nego da će vrijediti za većinu. To možemo objasniti na sljedeći način; ako imamo grupu pojedinaca s puno prijatelja i grupu pojedinaca s malo prijatelja, te oni zajedno predstavljaju mrežu prijatelja, tada će se pojedinci s puno prijatelja pojavljivati nerazmjerno u listi svih prijateljstava u toj mreži.

Na primjer, pojedinci s 40 prijatelja pojavit će se 40 puta na popisu prijateljstva te će time izazvati da tih 40 njihovih prijatelja misli da imaju malo prijatelja. S druge strane, osobe s jednim prijateljem pojavit će se samo jednom na popisu prijatelja te će izazvati da jedino njihovi prijatelji smatraju da imaju više prijatelja. Prema tome, očito je da su u liste prijateljstava u nekoj mreži prijatelja, nerazmjerno uključeni oni s najviše prijatelja.

Kako bi bolje ilustrirali navedeni paradoks prikazat ćemo proizvoljnu mrežu prijateljstava među 8 osoba (slika 2.0.1). Sa slike vidimo da Evina jedina prijateljica Ana, ima više prijatelja nego Eva. Ivanova dva prijatelja, Matej i Filip u prosjeku imaju više prijatelja nego Ivan, također Filipova tri prijatelja, Ivan, Matej i Ana u prosjeku imaju više prijatelja nego Filip itd. Od ukupno 8 osoba, njih 5 (Eva, Ivan, Iva, Filip i Tina) imaju manje prijatelja nego što je prosjek prijatelja njegovih prijatelja. Samo dvije osobe (Ana i Matej) imaju više prijatelja nego što je prosjek prijatelja njihovih prijatelja, dok samo jedna osoba (Marko) ima prijatelja koliko je i prosjek prijatelja njegovih prijatelja. Prema tome, i više od duplo (5 : 2) osoba ima manje prijatelja nego što je prosjek broja prijatelja njihovih prijatelja.




Slika 2.0.1: Mreža prijatelja

Na slici 2.0.2, navedeni podatci o brojevima prijatelja prikazani su tablično. U prvom stupcu nalazi se broj prijatelja pojedine osobe, u drugom ukupan broj prijateljevih prijatelja pojedine osobe, a u trećem prosječan broj prijateljevih prijatelja za svaku osobu.

| | Broj prijatelja | Broj prijateljevih prijatelja | Prosječan broj prijateljevih prijatelja |
|---|---|---|---|
| **Eva** | 1 | 4 | 4 |
| **Ana** | 4 | 11 | 2.75 |
| **Matej** | 4 | 12 | 3 |
| **Ivan** | 2 | 7 | 3.5 |
| **Iva** | 3 | 10 | 3.3 |
| **Filip** | 3 | 10 | 3.3 |
| **Marko** | 2 | 4 | 2 |
| **Tina** | 1 | 2 | 2 |
| **Ukupno:** | 20 | 60 | 23.92 |
| **Prosjek:** | 2.5* | 3** | 2.99* |

Slika 2.0.2: Tablica broja prijatelja
* - prosjek izračunat za promatranih 8 osoba.
** - prosjek izračunat za ukupno 20 prijatelja.

Iz tablice vidimo da je prosječan broj prijatelja po osobi u ovoj mreži jednak $\frac{20}{8} = 2.5$. Prosječan broj prijateljevih prijatelja jednak je $\frac{60}{20} = 3$, dok je prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja $\frac{23.92}{8} = 2.99$. Primijetimo da su izračunata dva različita prosječna broja prijateljevih prijatelja. Prosjek od $3^{**}$ odnosi se na prosječan broj prijateljevih prijatelja ukoliko promatramo ukupan broja prijateljstava i ukupan broj prijateljevih prijatelja u cijelog mreži. Prosjek od $2.99^{*}$ dobijemo ako izračunamo prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja svake pojedine osobe.

Kako bi bolje razumjeli navedeni paradoks potrebno je razumjeti razliku između distribucije, odnosno frekvencije pojavljivanja, pojedine osobe u broju prijatelja pojedinca i distribucije broja prijateljevih prijatelja nekog pojedinca. Distribucija broja prijatelja pojedinca nije ništa drugo nego skup svih njegovih prijatelja, odnosno broj njegovih prijatelja. No, primijetimo da ćemo u distribuciji broja prijateljevih prijatelja neke pojedince uključiti i nekoliko puta. Promotrimo to na primjeru slike 2.0.1. i slike 2.0.2. Ivanovi prijatelji, Matej i Filip pridodaju svoje prijatelje u Ivanovu distribuciju broja prijatelja njegovih prijatelja. Anini prijatelji, Eva, Iva, Filip i Matej pridodaju svoje prijatelje u Aninu distribucija, pri čemu se Filip i Matej pojavljuju nekoliko puta u navedenoj distribuciji. Možemo primijetiti da svaki prijatelj pojedine osobe pridonosi njegovoj distribuciji broja prijateljevih prijatelja za onoliko koliko sam ima prijatelja.

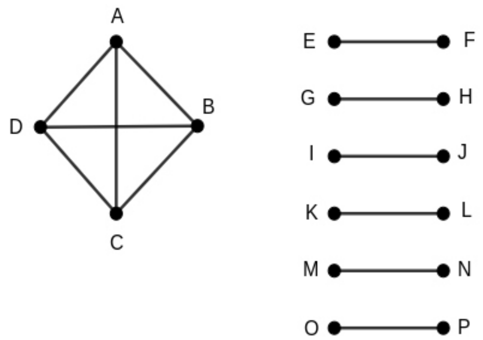
Promatranih 8 osoba zajedno ima ukupno 20 prijatelja s prosjekom od 2.5 prijatelja po osobi. Tih 20 prijatelja zajedno ima 60 prijatelja s prosjekom od 3 prijatelja po svakom prijatelju. S druge strane, prebrojimo li broj prijatelja svake pojedine osobe zasebno i prosječan broj prijateljevih prijatelja za svaku osobu vidimo da će tada prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja za promatranih 8 osoba biti 2.99. Vidimo da smo prosječan broj prijatelja izračunali na dva načina te se oni minimalno razlikuju zato što smo prilikom računanja drugog prosjeka koristili već prosječne vrijednosti.

To nas dovodi do zaključka da će barem u ovom primjeru, prosječan broj prijatelja promatranih osoba u mreži biti manji od prosječnog broja prijateljevih prijatelja.

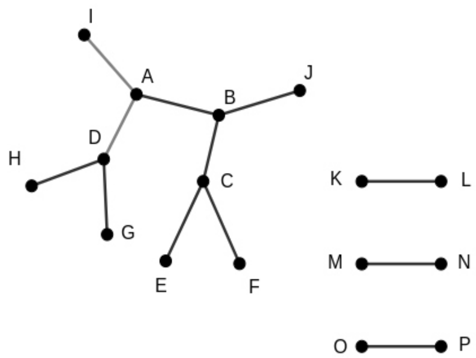
## 2.1 Različiti rasporedi pojedinaca unutar mreže

Pokazat ćemo da će različiti rasporedi prijateljstava unutar mreže utjecati na zadnje opisani prosjek. Moguće su situacije u kojima su pojedinci nerazmjerno prijatelji s drugima koji imaju jednak broj prijatelja kao i oni te situacije u kojima su neki pojedinci prijatelji samo s osobama s jednim prijateljem.

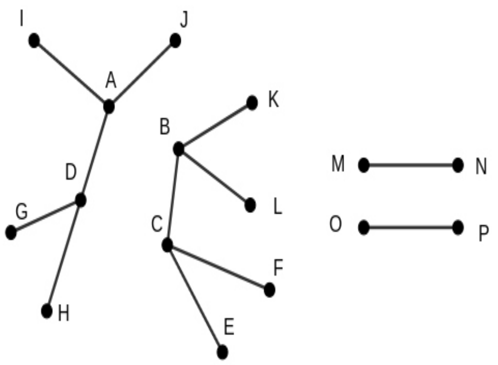
Na slikama 2.1.1-2.1.4 prikazana je ista distribucija broja prijatelja pojedinih osoba na četiri različita rasporeda. U ovoj distribuciji četiri osobe imaju po 3 prijatelja, a dvanaest osoba imaju po jednog prijatelja. Primijetimo da je prosječan broj prijatelja po osobi u svakom rasporedu jednak jer ukupno imamo 16 osoba s ukupno 24 prijateljstava što nam daje prosjek od $\frac{24}{16} = 1.5$ prijatelja po osobi. Gledamo li ukupan broj prijateljevih prijatelja u cijeloj mreži dobit ćemo da prosječan broj prijateljevih prijatelja iznosi $\frac{48}{24} = 2.0$ za svakog prijatelja nekog pojedinca, no prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja povećava se iz slike 2.1.1. prema slici 2.1.4. Pripadni prosjeci iznose redom: 1.5, 2.0, 2.17, 2.5.



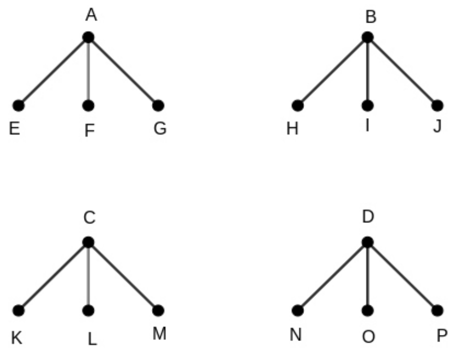

Slika 2.1.1: Razmještaj 1




Slika 2.1.2: Razmještaj 2



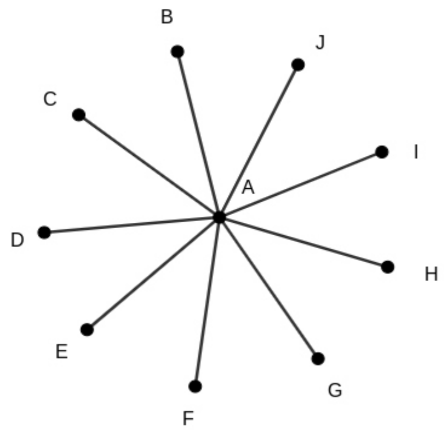

Slika 2.1.3: Razmještaj 3




Slika 2.1.4: Razmještaj 4

Primijetimo, što je manja povezanost među pojedincima i njihovim prijateljima to je prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja veći i veći je udio pojedinaca koji su ispod tog prosjeka. Promatrajući slike 2.1.2, 2.1.3 i 2.1.4, udio onih koji imaju manje prijatelja nego što je prosječan broj prosječnog broja prijateljevih

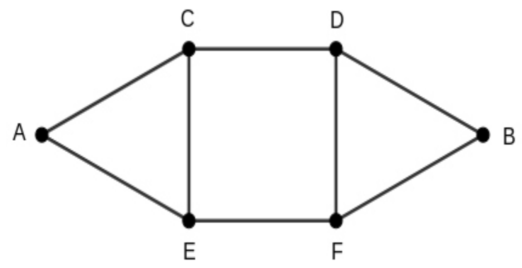
prijatelja redom iznosi 60%, 67%, 75%. Promatrani prosjek minimalan je kada je broj prijatelja svakog pojedinca jednak broju prijatelja njegovih prijatelja. U tom slučaju je prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja jednak prosječnom broju prijatelja pojedinca. Maksimalna vrijednost se postiže kada su pojedinci s najmanje prijatelja prijatelji s pojedincima s najviše prijatelja, odnosno kada je jedna osoba prijatelj sa svima ostalima, dok svi ostali nemaju više niti jednog prijatelja. Takvu distribuciju nazovimo kotač - distribucija.
U tom slučaju, prosječan broj prijatelja pojedinca može biti znatno manji od prosječnog broja prijateljevih prijatelja.




Slika 2.1.5: Kotač distribucija

Na slici 2.1.5. prikazana je kotač distribucija za 10 osoba. Prosječan broja prijatelja pojedinaca jednak je 1.8, prosječan broj prijateljevih prijatelja u cijeloj mreži iznosi 5.0, dok je prosječan broj prosječnog broja prijateljevih prijatelja jednak 8.2.

Iz prethodnih primjera vidimo da razmještaj prijateljstava u mreži utječe na broj pojedinaca koji imaju više prijatelja nego što je prosjek njihovih prijatelja. Prema tome i broj pojedinaca koji imaju manje prijatelja nego što je prosječan broj prijatelja njihovih prijatelja ovisi o razmještaju prijateljstava u mreži. Nadalje, moguće je da i većina pojedinaca ima više prijatelja nego prosjek njegovih prijatelja. Takav razmještaj prikazan je na slici 2.1.6. Osobe A i B imaju po 2 prijatelja, što je manje od prosjeka njihovih prijatelja koji je 3, no osobe C, D, E i F imaju više prijatelja nego što je prosjek njihovih prijatelja.




Slika 2.1.6: Specijalan slučaj distribucije

U sljedećem ćemo poglavlju matematički prikazati pozadinu paradoksa te njegov dokaz.

# Poglavlje 3

# Paradoks o prijateljstvu i teorija grafova

Promatrajući prijateljstvo kao neusmjereni graf $G$ u kojem vrhovi predstavljaju osobe, a bridovi prijateljstvo između osoba, S. Feld je 1991. godine pokazao u [2] da prosječan stupanj vrhova u grafu nije veći od prosječnog stupnja njemu susjednih vrhova što je ekvivalentno tvrdnji da u prosjeku, prijatelji pojedinca imaju više prijatelja nego sam pojedinac.

Osobe i njihove prijatelje, odnosno mrežu prijatelja, modeliramo koristeći graf u kojoj su dvije osobe povezane ako su prijatelji, prema tome stupanj vrha je broj prijatelja pojedine osobe. Kako je prijateljstvo dvosmjerna relacija, promatrani grafovi su neusmjereni.

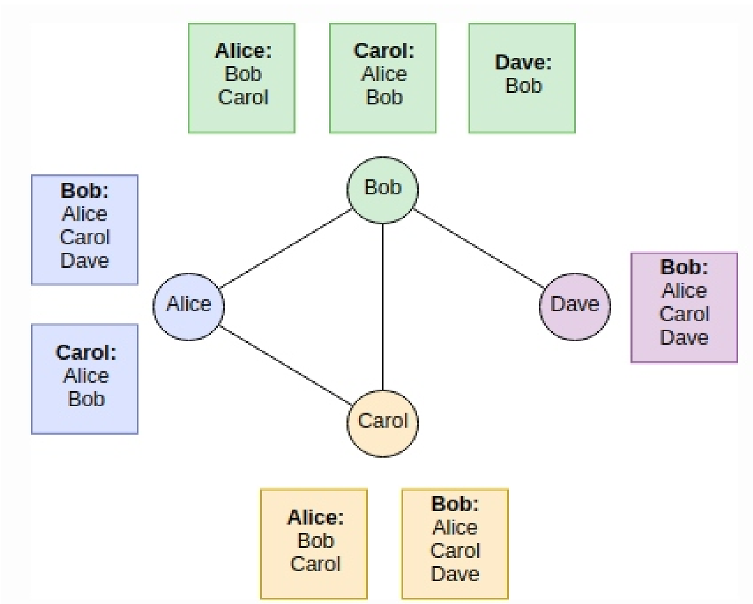
Označimo s

$$\overline{d} = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{2m}{n}$$

prosječan stupanj vrha u grafu $G$, odnosno prosječan broj prijatelja svakog pojedinca u nekoj mreži prijatelja, pri čemu je $V(G)$ skup svih vrhova, a $E(G)$ skup svih bridova u grafu $G$. Nadalje, $v$ je jedan vrh grafa $G$, a $d(v) = d(v_i), i \in \{1, .., n\}$ je stupanj vrha $v_i$. Radi jednostavnosti, neka je $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$. Pisat ćemo da je $u \sim v$ ako su $u, v$ susjedni vrhovi u grafu $G$.

Zanima nas prosječan broj prijateljevih prijatelja. Kako bi to prebrojili zamislimo da svaka osoba $v$ formira $d(v)$ lista s popisom prijateljevih prijatelja, jednu za svakog prijatelja. Svaka lista osobe $v$ nosi naziv njegovog prijatelja. Na primjer, neka je osoba $u$ prijatelj osobe $v$, osoba $v$ će na jednoj svojoj listi, naziva $u$, zapisati sve prijatelje osobe $u$.

Tada će prosječan broj prijateljevih prijatelja osobe $v$ biti jednak prosječnoj duljini njegovih lista, bez računanja naslova liste. Prema tome, prosječan broj prijateljevih prijatelja bit će jednak prosječnoj duljini svih lista promatranih osoba.




Slika 3.0.1: Prijatelji i njihove liste prijatelja. Preuzeto iz [3].

Svaka osoba $v$ formira $d(v)$ lista s nazivom svojih prijatelja pa ukupno imamo $\sum_{v\in V(G)} d(v)$ lista. Imamo $d(v)$ lista naziva $v$ zato što svaki prijatelj od $v$, kojih je ukupno $d(v)$, formira listu naziva $v$. Svaka od tih lista ima $d(v)$ napisanih prijatelja, a svaka osoba $v$ doprinosi za $d^2(v)$ ukupnoj duljini svih lista. Iz toga slijedi da je

$$\textit{Prosječan broj prijateljevih prijatelja} = \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{\sum_{v\in V(G)} d(v)}.$$

**Teorem 3.0.1** (Paradoks o prijateljstvu)**.** *U svakom grafu G vrijedi:*

$$\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{n} \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{\sum_{v\in V(G)} d(v)}.$$

*Dokaz.* Ovu nejednakost možemo dokazati primjenom Cauchy-Schwarz nejednakosti koja vrijedi u svakom unitarnom prostoru $(V, < | >)$ i glasi:

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$$

odnosno, u formulaciji pomoću norme $||a|| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$:

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq ||a||\,||b||.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori $a$ i $b$ linearno zavisni.

Neka je $V = \mathbb{R}^n$ unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
Neka je $a = (d(v_1), ..., d(v_n))$, $b = (1, 1, ..., 1)$. Tada je:

$$\langle a|b\rangle = \sum_{v\in V(G)} d(v), \quad ||a||^2 = \sum_{v\in V(G)} d^2(v), \quad ||b|| = n$$

pa vrijedi:

$$\Big(\sum_{v\in V(G)} d(v)\Big)^2 \leq n \cdot \sum_{v\in V(G)} d^2(v),$$

odnosno,

$$\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{n} \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{\sum_{v\in V(G)} d(v)}.$$

Jednakost očito vrijedi ako i samo ako je $d(v_1) = ... = d(v_n)$. □

Za drugu verziju dokaza danog teorema uvedimo sljedeću definiciju:

**Definicija 3.0.1. Varijanca** ili mjerilo raspršenosti podataka definirana je kao prosječno kvadratno odstupanje vrijednosti $d(v)$ od aritmetičke sredine $\overline{d}$:

$$Var[d(v)] = \sigma^2 = \frac{\sum_{v\in V(G)}(d(v) - \overline{d})^2}{n}$$

Budući da je varijanca definirana kao kvadrat realnog broja, ona je uvijek nenegativan broj.

Uočimo:

$$\overline{d} = \frac{1}{n} \sum_{v\in V(G)} d(v) \Rightarrow \sum_{v\in V(G)} d(v) = n \cdot \overline{d}.$$

*Dokaz.* Upotrijebimo definiciju varijance $\sigma^2$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{v\in V(G)}(d(v)-\overline{d})^2}{n} = \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v) - 2\overline{d}\sum_{v\in V(G)} d(v) + n\overline{d}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v) - 2n\overline{d}^2 + n\overline{d}^2}{n} = \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{n} - \overline{d}^2.$$

Tada je

$$\sigma^2 + \overline{d}^2 = \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{n}.$$

Kako je $\sigma^2$ nenegativna, vrijedi:

$$\overline{d}^2 \leq \overline{d}^2 + \sigma^2 = \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{n}.$$

Iz

$$\overline{d}^2 = \frac{(\sum_{v\in V(G)} d(v))^2}{n^2}$$

i gornje nejednakosti slijedi da je:

$$\overline{d}^2 = \frac{(\sum_{v\in V(G)} d(v))^2}{n^2} \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{n}.$$

Ova nejednakost ekvivalentna je sljedećoj:

$$\frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{n} \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} d^2(v)}{\sum_{v\in V(G)} d(v)},$$

a to je i trebalo dokazati.

$\square$

Primijetimo da je u iskazu teorema 3.0.1, lijeva strana jednaka $\overline{d}$, odnosno prosječnom broju prijatelja, a desna strana prosječnom broju prijateljevih prijatelja. Prema tome, pokazali smo da je prosječan broj prijateljevih prijatelja veći od prosječnog broja prijatelja pojedinca.

Navedeni paradoks možemo interpretirati na nekoliko načina. Field je u [2] dokazao dvije verzije paradoksa koje će biti prikazane. Prva verzija paradoksa, odnosno teorem, govori da ako uniformno slučajno izaberemo jednu osobu u mreži, a zatim uniformno slučajno nekog njezinog prijatelja, tada će on u prosjeku imati više prijatelja nego prvobitno izabrana osoba. Pritom, uniformno slučajan odabir znači da je vjerojatnost odabira svake osobe iz mreže jednaka. U slučaju da prva odabrana osoba nema prijatelja drugi korak nije moguće izvršiti. Prema tome promatrat ćemo samo grafove bez izoliranih vrhova.

**Definicija 3.0.2.** Vjerojatnost da uniformno slučajno odaberemo vrh $v \in V(G)$ jednaka je:

$$\mathbb{P}(X = v) = \frac{1}{n}, \quad \forall v \in V(G).$$

**Definicija 3.0.3. Očekivana vrijednost stupnja vrha** $\mathbb{E}[d(X)]$ je suma umnožaka svih vrijednosti $d(v_i), i \in \{1, ..., n\}$ i pripadnih vjerojatnosti $\mathbb{P}(X = v_i)$, tj.:

$$\mathbb{E}[d(X)] = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \cdot \mathbb{P}(X = v_i).$$

Napomena: Neka je $X_0$ uniformno slučajno izabran vrh grafa $G$, tada je očito $\mathbb{E}d(X_0) = \overline{d}$.

**Lema 3.0.2.** *Za svaki pozitivan $r \in \mathbb{R}$ vrijedi $r + \frac{1}{r} \geq 2$, s jednakošću ako i samo ako je $r = 1$.*

*Dokaz.* Nejednakost slijedi iz $(r-1)^2 \geq 0$ , nakon sređivanje i dijeljenja s $r > 0$. □

**Teorem 3.0.3** (Paradoks o prijateljstvu I.)**.** *Neka je $G$ graf bez izoliranih vrhova. Izaberimo slučajan vrh $X_1$ od $G$ tako da prvo uniformno slučajno izaberemo vrh $X_0$, a zatim uniformno slučajno vrh $X_1$ kao susjedan vrh od $X_0$. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[d(X_1) - d(X_0)] = \mathbb{E}[d(X_1)] - \overline{d} \geq 0.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je $G$ regularan, odnosno ako $\forall u, v \in V(G)$ takve da je $u \sim v$ vrijedi $d(u) = d(v)$.*

*Dokaz.* Ograničimo $\mathbb{E}[d(X_1)]$ koristeći se tvrdnjom leme 3.0.2., pri čemu je $r = \dfrac{d(x_0)}{d(x_1)}$.

$$\mathbb{E}[d(X_1)] = \frac{1}{n} \sum_{x_0 \in V(G)} \frac{1}{d(x_0)} \sum_{x_1 : x_1 \sim x_0} d(x_1) = \frac{1}{n} \sum_{\{x_0, x_1\} \in E(G)} \left( \frac{d(x_0)}{d(x_1)} + \frac{d(x_1)}{d(x_0)} \right) \geq \frac{2m}{n} = \overline{d}.$$

Jednakost slijedi iz linearnosti očekivanja, odnosno

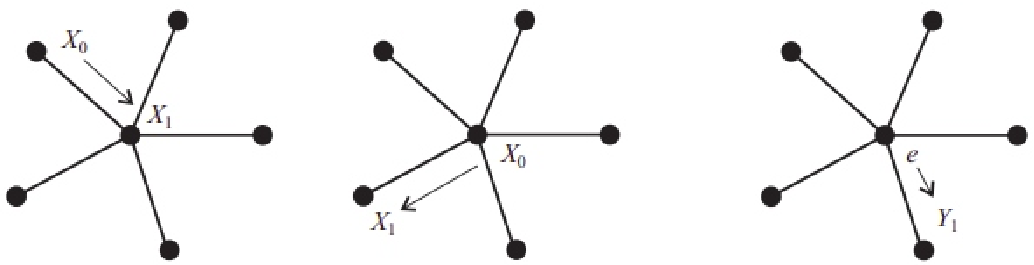
$$\mathbb{E}[d(X_1) - d(X_0)] = \mathbb{E}[d(X_1)] - \mathbb{E}[d(X_0)] = \mathbb{E}[d(X_1)] - \mathbb{E}[d(X_1)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[d(X_1)] = \mathbb{E}[d(X_0)] \text{ jer je } G \text{ regularan.}$$

□

Promotrimo drugu verziju paradoksa u kojem prvo uniformno slučajno biramo brid (prijateljstvo), a zatim uniformno slučajno jednu krajnju točku tog brida (prijatelja). Takav će model imati ista obilježja u smislu da će izabrana osoba u prosjeku imati više prijatelja. Pokažimo na primjeru da su navedena dva modela različita. Označimo sa $K_{a,b}$ potpun bipartitni graf s particijama veličine $a$ i $b$.

**Primjer:** Neka je $G = K_{1,n-1}$ i $c$ centralni vrh stupnja $n - 1$. Neka je $X_0$ uniformno slučajno izabran vrh od $G$ i $X_1$ uniformno slučajno izabran susjedan vrh od $X_0$. Nadalje, neka je $Y_1$ vrh od $G$ odabran tako da prvo uniformno slučajno odaberemo brid $e$, a zatim jedan njegov krajnji vrh, svaki s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Tada je očito: $\mathbb{P}(X_1 = c) = \frac{n-1}{n}$, a $\mathbb{P}(Y_1) = \frac{1}{2}$.




Slika 3.0.2: Prikaz razlika u odabiru $X_1$, odnosno $Y_1$ u $K_{1,5}$. Prve dvije ilustracije prikazuju vjerojatnost za odabir $X_1$, a treća, vjerojatnost za odabir $Y_1$.

Neka je $G$ graf, pri čemu je $Y_1$ slučajno odabrana krajnja točka nekog brida. Ako je $v \in V(G)$ bilo koji vrh, tada je $\mathbb{P}(Y_1 = v)$ proporcionalna broju bridova incidentnih s vrhom $v$, tj. stupnju vrha $v$. Prema tome, očekivano je da će tada i $\mathbb{E}[d(Y_1)] \geq \overline{d}$. Iako na prvi pogled nije očito da $\mathbb{E}[d(Y_1)]$ označava prosječan broj prijatelja nekog pojedinca, u idućem teoremu pokazat ćemo da će vrijediti $\mathbb{E}[d(Y_1)] \geq \overline{d}$.

**Teorem 3.0.4** (Paradoks o prijateljstvu II.). *Neka je $G$ graf s barem jednim vrhom i $Y_1$ vrh od $G$ slučajno odabran kao jedna krajnja točka uniformno slučajno odabranog brida $e$. Tada je:*

$$\mathbb{E}[d(Y_1)] \geq \overline{d},$$

*uz jednakost ako i samo ako je $G$ regularan.*

*Dokaz.* Pozivajući se na definiciju $X_0$ iz prethodnog teorema kao uniformno slučajno izabran vrh od G, slijedi da je:

$$Var[d(X_0)] = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} (d(v) - \overline{d})^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d^2(v) \right) - \overline{d}^2.$$

Označimo li $Var[d(X_0)]$ kao $\sigma^2$, dobivamo:

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d^2(v) \right) = \sigma^2 + \overline{d}^2.$$

Koristeći navedeno slijedi da je:

$$\mathbb{E}[d(Y_1)] = \frac{1}{m} \sum_{\{y_0, y_1\} \in E(G)} \frac{d(y_0) + d(y_1)}{2} = \frac{n}{2m} \cdot \frac{1}{n} \sum_{y_1 \in V(G)} d^2(y_1)$$

$$= \frac{n}{2m} (\overline{d}^2 + \sigma^2) = \frac{\overline{d}^2 + \sigma^2}{\overline{d}} = \overline{d} + \frac{\sigma^2}{\overline{d}} \geq \overline{d}.$$

Druga jednakost slijedi iz činjenice da je stupanj svakog vrha prebrojan jednom za svaki vrh s kojim je taj vrh susjedan. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sigma^2 = 0$, odnosno ako i samo ako je $G$ regularan. □

# Poglavlje 4

# ”Multistep” generalizacija

U ovom dijelu promotrit ćemo generalizacije obje verzije navedenog paradoksa koje na primjer govore o prosječnom broju prijatelja, kojeg ima prijatelj nečijeg prijatelja. Prvu generalizaciju nazivamo modelom slučajne šetnje, a drugu homomorfni model.
Uvedimo potrebne definicije.

**Definicija 4.0.1.** Preslikavanje $\varphi : V(G) \to H(G)$ je **homomorfizam** iz grafa $G$ u graf $H$ ako $\forall u, v \in V(G)$ vrijedi $u \sim_G v \Rightarrow \varphi(u) \sim_H \varphi(v)$.

**Definicija 4.0.2.** Šetnju duljine $k$ nazivamo **k-šetnjom**, a $W_k$ je skup svih šetnji duljine $k$ u grafu $G$.

Označimo put duljine $k$ sa $P_k$. Primijetimo da je šetnja $W$ duljine $k$ homomorfizam $W : P_k \to G$.

## 4.1 Model slučajne šetnje

Uniformno slučajno odaberimo vrh $X_0$, a zatim šetnju $(X_0, X_1, ..., X_k)$. Pokazat ćemo da će tada vrijediti $\mathbb{E}[d(X_k)] \geq \overline{d}$.

**Definicija 4.1.1.** Neka je $G$ graf bez izoliranih vrhova.
Definiramo niz $(X_0, X_1, X_2, ..., X_k)$ tako da uniformno slučajno odaberemo $X_0 \in V(G)$, a zatim u svakom koraku odaberemo $X_{i+1}$ kao uniformno slučajno odabran jedan od susjednih vrhova vrha $X_i$, $i \in \{0, ..., k-1\}$. Tako odabran niz nazivamo **slučajnom šetnjom** u grafu $G$.

**Lema 4.1.1.** *Za zadanu šetnju $W = (v_0, v_1, ..., v_k) \in W_k$, definiramo*

$$r(W) = \frac{1}{d(v_1) \cdot d(v_2) \cdots d(v_{k-1})} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d(v_i)}$$

*kao produkt recipročnih vrijednost stupnjeva vrhova u danoj šetnji. Tada za graf G vrijedi:*

$$\sum_{W \in W_k} r(W) = 2m, \forall k \geq 1.$$

*Dokaz.* Neka je $X = (X_0, X_1, X_2, ..., X_k)$ niz iz modela slučajne šetnje.

Za šetnju $W = (v_0, v_1, ..., v_k)$ vrijedi:

$$\mathbb{P}(X = W) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{d(v_0) \cdot d(v_1) \cdots d(v_{k-1})} = \frac{1}{n \cdot d(v_0)} \cdot r(W).$$

Prema tome,

$$\sum_{W \in W_k} r(W) = \sum_{W \in W_k} n \cdot d(v_0) \cdot \mathbb{P}(X = W) = n \cdot \mathbb{E}d(X_0) = n \cdot \overline{d} = 2m.$$

□

**Definicija 4.1.2.** Bipartitni graf s biparticijom $(X, Y)$ je **biregularan** ako su svi vrhovi iz $X$ istog stupnja te također svi vrhovi iz $Y$ jednakog stupnja.

**Teorem 4.1.2** (Generalizacija paradoksa o prijateljstvu I.)**.** *Ako je G graf bez izoliranih vrhova i k pozitivan cijeli broj tada je:*

$$\mathbb{E}[d(X_k)] \geq \overline{d}.$$

*Jednakost vrijedi za neparan k kada je G regularan. Kada je k paran zahtijevamo da je svaka komponenta od G ili regularan ili biregularan bipartitni graf.*

*Dokaz.* Neka je $i(W) = (v_k, v_{k-1}, ..., v_0)$ inverzna šetnja šetnje $W = (v_0, v_1, ..., v_k)$. Kako je skup inverznih šetnji duljine $k$ jednak skupu šetnji duljine $k$ slijedi

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[d(X_k)] &= \sum_{W \in W_k} (d(v_k)\mathbb{P}((X = W) + d(v_0)\mathbb{P}(X = i(W))) \\ &= \sum_{W \in W_k} \left( d(v_k)\frac{1}{n} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{d(v_i)} + d(v_0)\frac{1}{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{d(v_i)} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{W \in W_k} \left[ \frac{d(v_k)}{d(v_0)} + \frac{d(v_0)}{d(v_k)} \right] \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d(v_i)}$$

$$\geq \frac{1}{n} \sum_{w \in W_k} 2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d(v_i)}.$$

U zadnjem koraku primijenili smo lemu 3.0.2, pri čemu je $r = \frac{d(v_k)}{d(v_0)}$.

Nadalje,

$$\mathbb{E}[d(X_k)] \geq \frac{1}{n} \sum_{W \in W_k} r(W) = \frac{2m}{n} = \overline{d}.$$

Primijetimo da jednakost vrijedi ako i samo ako krajnji vrhovi svake šetnje duljine $k$ imaju isti stupanj. □

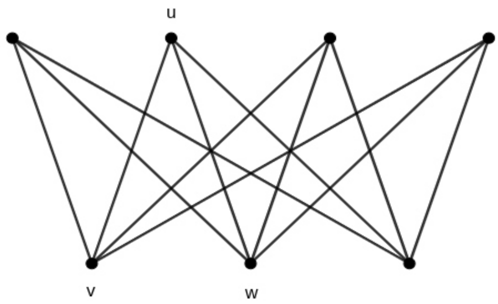
**Definicija 4.1.3.** Kažemo da je graf $G$ **regularan po k-šetnjama** ako su svi krajnji vrhovi svake šetnja duljine $k$ istog stupnja.

Sljedeća lema nam govori kada će krajnji vrhovi svake šetnje duljine $k$ imati isti stupanj.

**Lema 4.1.3.** *Graf $G$ je regularan po k-šetnjama ako i samo ako je $G$ regularan po k'-šetnjama gdje je $k' \in \{1, 2\}$ i $k' \equiv k \pmod 2$. Nadalje, graf regularan po 1-šetnjama je isto što i regularan graf. $G$ je regularan po 2- šetnjama ako i samo ako je svaka komponenta od $G$ ili regularan ili biregularan bipartitni graf.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je graf $G$ regularan po $k$ - šetnjama i neka su $v$ i $w$ krajnji vrhovi $k'$ - šetnje $W$. Tada postoji $k$ - šetnja s krajnjim vrhovima $v$ i $w$ dobivena prelaskom preko prvog brida od $W$ nekoliko puta. Drugi smjer očito vrijedi jer neposrednim nadovezivanjem $k'$ - šetnji nastaje $k$ - šetnja.

Očito je da je graf regularan po 1 - šetnjama ekvivalentan regularnom grafu te ako je $G$ regularan ili biregularan bipartitni graf tada je $G$ regularan po 2 - šetnjama. Nadalje, pretpostavimo da je $G$ regularan po 2 - šetnjama i bez smanjenja općenitosti, povezan. Ako $G$ sadrži neparan ciklus tada se od bilo koja dva vrha od $G$ može formirati šetnja parne duljine, prema tome $G$ je regularan. Ako je $G$ bipartitni graf tada se bilo koja dva vrha iz iste biparticije mogu povezati šetnjom parne duljine što znači da moraju biti istog stupnja. □




Slika 4.1.1: Graf $K_{4,3}$

Graf $K_{4,3}$ sa slike 4.1.1 je regularan po 4 - šetnjama jer je regularan po 2 - šetnjama. Vrhovi $u$ i $v$ su krajnji vrhovi 2 - šetnje $W = (v, u, w)$. 4 - šetnja s krajnjim vrhovima $v$ i $w$ je šetnja $W' = (v, u, v, u, w)$ koju smo dobili prelaskom preko prvog brida šetnje $W$ tri puta.

## 4.2 Homomorfni model

Homomorfni model uniformno slučajno odabire $Y \in W_k$. Neka je $(Y_0, Y_1, ..., Y_k)$ slučajno odabrana šetnja duljine $k$ između svih šetnji duljine $k$ u grafu $G$. Koristeći rezultat iz [4] pokazat ćemo da je $\mathbb{E}[d(Y_k)] \geq \overline{d}$ za $k$ neparan, dok za paran $k$ nejednakost neće općenito vrijediti, pri čemu je $Y_k$ oznaka za slučajno odabran krajnji vrh šetnje duljine $k$.

**Definicija 4.2.1.** Neka je zadan graf $G$ s barem jednim bridom i neka je $k \geq 1$ cijeli broj. Definiramo niz $Y = (Y_0, Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ kao uniformno slučajno izabran $Y \in W_k$.

Za $k = 1$, homomorfizam iz $P_1$ u $G$ su svi uređeni parovi $(y_0, y_1)$ vrhova iz $G$ takvi da je $y_0 \sim y_1$. Odnosno, ako je $Y$ uniformno slučajno odabrana šetnja iz $W_1$ tada je $Y_1$ uniformno slučajno odabran krajnji vrh te šetnje.

**Lema 4.2.1.** *Neka je G graf, tada je*

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{|W_{k+1}|}{|W_k|}.$$

*Dokaz.* Neka je $w = (w_0, w_1, ..., w_k) \in W_k$.
Postavimo da je $init(w) = (w_o, w_1, ..., w_{k-1})$. Tada je:

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{1}{|W_k|} \sum_{w \in W_k} d(w_k) = \frac{1}{|W_k|} \sum_{w \in W_k} |w' \in W_{k+1} : init(w') = w| = \frac{|W_{k+1}|}{|W_k|}.$$

$\square$

Označimo sa $v_k = \frac{|W_k|}{n}$ prosječan broj šetnji duljine $k$ u grafu $G$ koje počinju od uniformno slučajno odabranog vrha. Važno je za primijetiti da je prosječan broj šetnji duljine 1 u grafu $G$ isto što i prosječan stupanj vrha u grafu $G$, odnosno $v_1 = \dfrac{2m}{n} = \overline{d}$. Dokaz sljedećeg teorema nalazi se u [4].

**Teorem 4.2.2** (Erdős - Simonovits)**.** *Za svaki graf $G$ s $n$ vrhova, pri čemu je $k \geq 1$ vrijedi:*

$$v_k^{1/k} \geq \overline{d} = v_1^{1/1}.$$

*Nadalje, ako je $k \geq t \geq 1$ i $k$ paran tada je:*

$$v_k^{1/k} \geq v_t^{1/t}.$$

Iz leme 4.2.1 i teorema 4.2.2 slijedi:

**Teorem 4.2.3** (Generalizacija paradoksa o prijateljstvu II.)**.** *Neka je $G$ graf s barem jednim vrhom, $k \geq 1$ neparan i $t \leq k$. Tada vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[d(Y_k)] \geq \overline{d}$.
2. $\Big(\mathbb{E}[d(Y_t)] \cdot \mathbb{E}[d(Y_{t+1})] \cdots \mathbb{E}[d(Y_k)]\Big)^{(1/k-t+1)} \geq \overline{d}$.

   *Drugim riječima, geometrijska sredina niza $\mathbb{E}[d(Y_i)]$ koji završava s neparnim indeksom $i$, nije manja od prosječnog stupnja vrha u grafu $G$.*

*U oba slučaja jednakost vrijedi ako je $k > 1$ i $G$ regularan graf.*

*Dokaz.* Neka je $k \geq 1$ neparan cijeli broj. Tada je $k+1$ paran cijeli broj pa prema teoremu 4.2.2, slijedi:

$$v_{k+1}^{1/(k+1)} = (|W_{k+1}|/n)^{1/(k+1)} \geq (|W_k|/n)^{1/k} = v_k^{1/k} \qquad /^{(k+1)}$$

$$\frac{|W_{k+1}|}{n} \geq \frac{|W_k|}{n}\left(\frac{|W_k|}{n}\right)^{1/k}.$$

Primijenimo ponovno teorem 4.2.2.,

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{|W_{k+1}|}{|W_k|} \geq \left(\frac{|W_k|}{n}\right)^{1/k} = v_k^{1/k} \geq \overline{d}. \tag{1}$$

Za dokaz drugog dijela teorema primijetimo da je

$$\mathbb{E}[d(Y_t)] \cdot \mathbb{E}[d(Y_{t+1})] \cdots \mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{|W_{k+1}|}{|W_t|},$$

daljnji dokaz provodimo analogno. Za jednakost je potrebno da vrijedi jednakost u (1), a za to zahtijevamo da je $G$ regularan.

□

Na primjeru ćemo pokazati da je uvjet da je $k$ neparan iz teorema 4.2.3. nužan.

**Primjer:** Promotrimo graf $K_{a,b} \cup K_c$. Tada je:

$$|W_k| = \begin{cases} (a+b)(ab)^{k/2} + c(c-1)^k, & k \;\; neparan \\ 2(ab)^{(k+1)/2} + c(c-1)^k, & k \;\; paran \end{cases}$$

pri čemu je:

$$\overline{d} = (2ab + c(c-1))/(a+b+c).$$

Za paran $k$, vrijedi $\dfrac{|W_{k+1}|}{|W_k|} \geq \overline{d}$ ako i samo ako je

$$[2(ab)^{(k+2)/2} + c(c-1)^{k+1}](a+b+c) - [(a+b)(ab)^{k/2} + c(c-1)^k](2ab + c(c-1)) \geq 0.$$

Ova nejednakost ne vrijedi kada je $k = 2, a = 1, b = 5$ i $c = 3$.
Za proizvoljan, paran $k$, uvedimo supstituciju $a = t^2, b = t^6$ i $c = t^3$. Tada na lijevoj strani dobivamo polinom s početnim članom $-t^{4k+12}$, prema tome za veliki cjelobrojni $t$, za graf $K_{t^2,t^6} \cup K_{t^3}$ je $\mathbb{E}[d(Y_k)] < \overline{d}$.

# Poglavlje 5

# Još neke generalizacije

Za dva pojedinca kažemo da su $k$-udaljeni prijatelji ako između njih postoji lanac od $k$ prijatelja. Paradoks o prijateljstvu kaže da očekivani broj prijatelja 1 - udaljenih prijatelja nekog pojedinca nije manji od broja 0 - udaljenih prijatelja istog tog pojedinca. U ovom dijelu promatrat ćemo vezu između $k$ i $(k+1)$ - udaljenih prijatelja, odnosno vezu između $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ i $\mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$, gdje je $Y_k$ slučajno odabran krajnji vrh, slučajno odabrane šetnje duljine $k \geq 1$. Pokazat ćemo da $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ nije veće od $\mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$ ako je $k$ pozitivan paran broj i da takva relacija neće vrijediti za neparan $k$. Pokazat ćemo da ako $k$ teži u beskonačno da tada $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ teži prema najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice susjedstva $A = A(G)$ pripadnog neusmjerenog grafa $G$. Jedna od posljedica tog rezultata je da se razlika između $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ i $\mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$ smanjuje kako se $k$ povećava, neovisno o parnosti $k$.

Prema definicijama iz prethodnih poglavlja, $|W_k|$ je ukupan broj šetnji duljine $k$, tada je $|W_0| = |V(G)|$. Neka je $e = (1, ..., 1)$ vektor s $|V|$ elemenata čiji su svi elementi jednaki 1.

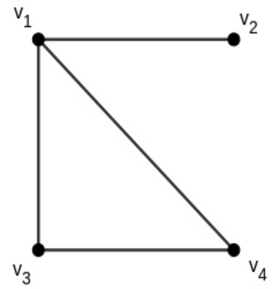
Sljedeći teorem smatra se jednim od važnijih teorema teorije grafova, uspostavlja vezu između broja šetnji duljine $k$ i potencije matrice susjedstva. Dokaz se može pronaći u [5]. Provodi se matematičkom indukcijom po duljini šetnje $k$. Za $k = 1$ tvrdnja je očita, a korisno je primijetiti da za $k = 2$ slijedi izravno iz definicije množenja matrica.

**Teorem 5.0.1.** *Neka je $A(G) = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa $G$ i $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Tada je $(i, j)$ - ti član $k$-te potencije $A^k$ jednak broju $(v_i, v_j)$ - šetnji duljine $k$. Broj svih šetnji u grafu $G$ duljine $k$ jednak je sumi svih članova od $A^k$.*

Drugim riječima, $(i, j)$ - ti element od $A^k$ jednak je broju različitih puteva u kojima su osobe $v_i$ i $v_j$, $(k - 1)$ - udaljeni prijatelji.

Tada vektor $A^k e$ određuje ukupan broj $(k-1)$ - udaljenih prijatelja za svakog pojedinca, a $|W_k| = e'A^k e$ ukupan broj $(k-1)$ - udaljenih prijatelja svih pojedinaca, odnosno ukupan broj šetnji duljine $k$ u grafu $G$.

**Primjer:**




Slika 5.0.1: Graf $G$

Matrice susjedstva $A$ i $A^2$ grafa $G$ na slici 5.0.1 dane su sa:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 e = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$|W_k| = e'A^2 e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 18.$$

Promotrimo matricu $A^2(G)$, $(1,1)$ element je 3, odnosno postoje 3 šetnje duljine 2 između vrhova $v_1$ i $v_1$, a to su: $(v_1, v_2, v_1), (v_1, v_3, v_1), (v_1, v_4, v_1)$. Drugim riječima, postoje 3 različita puta u kojima su osobe $v_1$ i $v_1$ 1 - udaljeni prijatelji.
Elementi matrice $A^2 e$ određuju ukupan broj 1 - udaljenih prijatelja za svakog pojedinca pa tako osoba $v_1$ ima ukupno pet 1-udaljenih prijatelja, a iz $|W_k| = 18$ vidimo da u ovom grafu postoji ukupno 18 različitih šetnji duljine 2.

U lemi 4.2.1 pokazali smo da je:

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{|W_{k+1}|}{|W_k|} = \frac{e'A^{k+1}e}{e'A^k e}$$

odnosno da je očekivani stupanj vrha $Y_k$ jednak očekivanom broju $(k-1)$ - udaljenih prijatelja slučajno odabranog pojedinca. Koristeći se navedenim oznakama, paradoks iz teorema 3.0.1 ekvivalentan je relaciji $\mathbb{E}[d(Y_0)] \leq \mathbb{E}[d(Y_1)]$, odnosno da očekivani broj prijatelja pojedinca nije veći od očekivanog broja prijatelja 1 - udaljenog prijatelja. Ovaj rezultat možemo generalizirati.

**Teorem 5.0.2.** *Neka je $k = 2l \geq 0$ paran broj. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] \leq \mathbb{E}[d(Y_{k+1})].$$

Očekivani broj prijatelja $(k-1)$ - udaljenih prijatelja nije veći od očekivanog broja prijatelja $k$ - udaljenih prijatelja kada je $k$ paran.

*Dokaz.* Neka je $A'$ transponirana matrica matrice $A$. Kako je $A$ simetrična matrica vrijedi $A = A'$. Primijenimo li Cauchy-Schwarz nejednakost u obliku

$$(a'b)^2 \leq (a'a)(b'b),$$

pri čemu je skalarni produkt vektora (stupčastih matrica) $a$ i $b$ izražen kao matrični produkt $a'b$, na $A^{k+1} = A^{2l+1} = A'^l A^{l+1}$ dobivamo sljedeće:

$$(e'A^{2l+1}e)^2 = (e'A'^l A^{l+1}e)^2 \leq (A^l e)'(A^l e)(A^{l+1}e)'(A^{l+1}e) = (e'A^{2l}e)(e'A^{2l+2}e).$$

Podijelimo li obje strane nejednakosti sa $(e'A^{2l}e)(e'A^{2l+1}e)$ dobivamo:

$$\frac{e'A^{2l+1}e}{e'A^{2l}e} \leq \frac{e'A^{2l+2}e}{e'A^{2l+1}e}$$

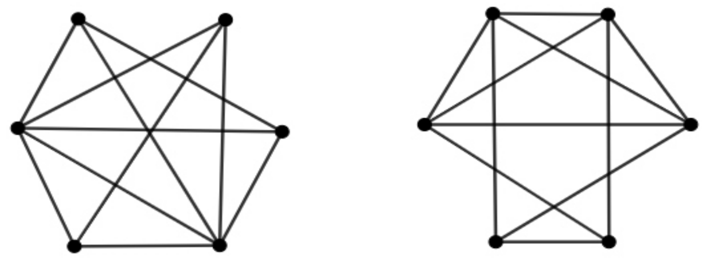
Kako je $|W_k| = e'A^k e$ i $\mathbb{E}[d(Y_k)] = \frac{|W_{k+1}|}{|W_k|}$ prethodni izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbb{E}[d(Y_k)] \leq \mathbb{E}[d(Y_{k+1})], \forall k = 2l \geq 0.$$

□

Navedena relacija neće općenito vrijediti za neparan $k$.

**Primjer.**



Slika 5.0.2: Grafovi $G_1$ (lijevo) i $G_2$ (desno)

Za graf $G_1$ na slici 5.0.2 vrijedi $\mathbb{E}[d(Y_1)] > \mathbb{E}[d(Y_2)]$, dok za graf $G_2$ vrijedi $\mathbb{E}[d(Y_1)] < \mathbb{E}[d(Y_2)]$.

Izračunajmo $\mathbb{E}[d(Y_1)]$ i $\mathbb{E}[d(Y_2)]$ za grafove $G_1$ i $G_2$.

**Graf $G_1$:**

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2(G_1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^3(G_1) = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 6 & 11 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 11 & 13 & 11 & 11 \\ 6 & 11 & 6 & 11 & 6 & 7 \\ 11 & 13 & 11 & 12 & 11 & 11 \\ 7 & 11 & 6 & 11 & 6 & 6 \\ 6 & 11 & 7 & 11 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{E}[d(Y_1)] = \frac{|W_2|}{|W_1|} = \frac{e'A^2e}{e'A^1e} = \frac{86}{22} \approx 3.909,$$

$$\mathbb{E}[d(Y_2)] = \frac{|W_3|}{|W_2|} = \frac{e'A^3e}{e'A^2e} = \frac{326}{86} \approx 3.790.$$

Stoga je $\mathbb{E}[d(Y_1)] > \mathbb{E}[d(Y_2)]$.

**Graf $G_2$:**

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2(G_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^3(G_2) = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 10 & 5 & 9 & 12 \\ 12 & 8 & 5 & 10 & 12 & 9 \\ 10 & 5 & 2 & 9 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 9 & 2 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 10 & 5 & 8 & 12 \\ 12 & 9 & 5 & 10 & 12 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{E}[d(Y_1)] = \frac{|W_2|}{|W_1|} = \frac{e'A^2e}{e'A^1e} = \frac{82}{22} \approx 3.727,$$

$$\mathbb{E}[d(Y_2)] = \frac{|W_3|}{|W_2|} = \frac{e'A^3e}{e'A^2e} = \frac{306}{82} \approx 3.731.$$

Stoga je $\mathbb{E}[d(Y_1)] < \mathbb{E}[d(Y_2)]$.

**Teorem 5.0.3.** *Kada k teži prema beskonačno tada $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ teži prema najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice $A(G)$.*

*Dokaz.* Kako bismo postigli da spektar matrice $A$ ima potrebna svojstva, pretpostavimo da je graf $G$ povezan i nebipartitan. Tada se može primijeniti teorem D. Königa (vidi [6]) prema kojem je $A$ primitivna matrica. Nadalje, primijeni se Perron-Frobeniusov teorem pa $A$ ima realnu pozitivnu svojstvenu vrijednost $\lambda_1$, a za sve ostale svojstvene vrijednosti $\lambda_i$ vrijedi $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1, \forall i = 2, ..., n$. Uzmimo da su svojstvene vrijednosti poredane po veličini, počevši od $\lambda_1$ kao najveće. Označimo sa $x_i$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_i$. Primjenjujući da se $A$ dijagonalizira u bazi svojstvenih vektora, možemo pisati $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i'$.

Iz toga slijedi da je ukupan broj $(k-1)$ - udaljenih prijatelja jednak:

$$|W_k| = e'A^k e = \sum_{i}^{n} \lambda_i^k e' x_i x_i' e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \alpha_i = \lambda_i^k \left( \alpha_1 + \sum_{i=2}^{N} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \alpha_i \right),$$

gdje je $\alpha_i = e' x_i x_i' e = (x_i' e)'(x_i' e) \geq 0$ realan broj. Nadalje,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[d(Y_k)] = \lim_{k\to\infty} \frac{e'A^k e}{e'A^{k-1} e} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k \left( \alpha_1 + \sum_{i=2}^{N} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \alpha_i \right)}{\lambda_1^{k-1} \left( \alpha_1 + \sum_{i=2}^{N} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{k-1} \alpha_i \right)}$$

$$= \lambda_1 \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_1 + \sum_{i=2}^{N} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \alpha_i}{\alpha_1 + \sum_{i=2}^{N} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{k-1} \alpha_i} = \lambda_1.$$

Prema tome, kada vrijednost $k$ teži prema beskonačno, tada očekivani broj prijatelja od $(k-1)$ - udaljenih prijatelja teži prema najvećoj svojstvenoj vrijednosti od $A$.

□

Posljedica ovog teorema je da razlika $\mathbb{E}[d(Y_k)] - \mathbb{E}[d(Y_{k-1})]$ konvergira k 0 kako $k$ teži u beskonačno.

## 5.1 Mjere centralnosti grafa

Centralnost se odnosi na najvažniji vrh u nekom grafu. Najčešće je vrh koji ima najviše veza središnji, ali za određivanje središnjih vrhova u mrežama postoji nekoliko mjera centralnosti.

### Centralnost prema stupnju vrha

Važnost nekog vrha u mreži ovisi isključivo o broju bridova s kojima je taj vrh incidentan. Koristeći matricu susjedstva $A(G)$ promatranog neusmjerenog grafa $G$ s $n$ vrhova, stupanj $d(v_i)$ pojedinog vrha $v_i$ u grafu možemo izraziti kao:

$$d(v_i) = (A \cdot e)_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

gdje je $e$ vektor-stupac jedinica, odnosno $e = (1, 1, 1, ...)'$.

## Centralnost svojstvenog vektora

Jedna od mjera centralnosti prema stupnju vrha jest centralnost svojstvenog vektora. Vrh u grafu je važniji što mu je veća povezanost s drugim vrhovima koji su također važni.
Važnost ne brojimo prema broju susjednih vrhova tog vrha nego prema broju koji je proporcionalan sumi susjednih vrhova njegovih susjednih vrhova. Centralnost $x_i$ prema stupnju vrha $v_i$ proporcionalna je sumi centralnosti njegovih susjeda pa dobivamo:

$$x_i = \lambda_1^{-1} \sum_j A_{ij} x_j$$

gdje je $\lambda_1$ najveća svojstvena vrijednost matrice $A$.

**Definicija 5.1.1. Beta centralnost** definiramo kao težinsku sumu broja $(k-1)$ - udaljenih prijatelja:

$$c(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k e,$$

gdje je $A^k e$ vektor broja $(k-1)$ - udaljenih prijatelja, a $\beta$ pozitivan broj.

Ovaj red konvergira samo ako je $\beta < \frac{1}{\lambda_1}$, gdje je $\lambda_1$ granična vrijednost očekivanog broja $k$-udaljenih prijatelja. Prema tome, svaki član ovog izraza povezan je s paradoksom. Jedna interpretacija parametra $\beta$ je ta da on označava vjerojatnost prijenosa virusa (ili informacije) s pojedine osobe na njegove prijatelje. U našem slučaju, $\beta^{k-1}$ je vjerojatnost prijenosa virusa (informacije) do $(k-1)$ - udaljenog prijatelja, a vrijednost $c(\beta)$ tada je jednaka očekivanom broju prijenosa virusa ili informacija koji potječu od različitih pojedinaca. Kako vrijednost $\beta$ teži prema $1/\lambda_1$, tako beta centralnost teži prema svojstvenoj centralnosti, (vidi [7]). Prema tome, svojstvena centralnost jednaka je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k e,$$

gdje je $\beta$ proizvoljno blizu, no manji od granične vrijednosti

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e' A^{l-1} e}{e' A^l e}\right).$$

# Poglavlje 6

# Primjena i povezani paradoksi

## 6.1 Primjena paradoksa

Primjenu paradoksa o prijateljstvu pronalazimo u medicini, posebno u praćenju i spriječavanju širenja zaraza. Kako bi spriječili širenje zaraze najbolja, no ne i izvediva opcija je cijepljenje svih osoba. Druga opcija je cijepljenje određene skupine ljudi koji imaju veću vjerojatnost da prenesu virus. U toj skupini ljudi nalaze se osobe koje imaju puno prijatelja. U idealnoj situaciji, mogli bismo napraviti graf svih prijateljstava i vidjeti koje bi osobe bile glavni kandidati za cijepljenje. U praksi ovakav pristup bi bio skup i spor, no uzmemo li neki slučajan uzorak ljudi (što je analogno odabiru slučajnih vrhova u grafu $G$) i zatražimo ih da imenuju svoje prijatelje, velike su šanse da neće imenovati osobe s malim brojem prijatelja. Prema tome, imenovane osobe će biti vrlo vjerojatno popularne pa će imati i veću šansu da se zaraze te su oni primarna skupina za cijepljenje. Jedno takvo istraživanje proveli su Christakis, N. A. i Fowler, J. H. 2010. godine, ([8]). U tom istraživanju, pojedinci iz prvo izabrane grupe zarazili su se dva tjedna kasnije nego prijatelji koje su sami imenovali.

## 6.2 Povezani paradoksi

Jedan od povezanih paradoksa navedenih u [2] nosi naziv ”paradoks veličine razreda”. Ako postoje razlike u broju učenika u razredima, tada će učenici imati osjećaj da je prosječna veličina razreda veća nego što u stvari jest. Do ovoga dolazi jer više učenika pohađa veće razrede dok manje učenika pohađa manje razrede.

Zamislimo da u nekoj školi, postoji 90 razreda. U 80 razreda nalazi se po 5 učenika, dok je u svakom od preostalih 10 razreda njih 50.

Primijetimo da je tada 400 učenika u manjim razredima, a njih 500 u većim. Tada je prosjek učenika po razredu:

$$\frac{80 \cdot 5 + 10 \cdot 50}{80 + 10} = \frac{400 + 500}{90} = 10.$$

No, uzmemo li u obzir iskustvo svakog pojedinog učenika i veličinu razreda u kojem se on nalazi, slijedi da se 400 učenika nalazi u razredu od ukupno 5 učenika, a 500 učenika u razredu od njih 50, tada je prosjek učenika u razredu prema iskustvima učenika jednak:

$$\frac{400 \cdot 5 + 500 \cdot 50}{400 + 500} = \frac{2000 + 25000}{900} = 30.$$

Vidimo da je prosjek učenika u razredu prema iskustvima učenika veći nego što je stvarni prosjek učenika po razredu. S jedne strane, većina učenika će imati osjećaj da se nalazi u razredu koji je iznadprosječan po broju učenika dok će s druge strane školska referada smatrati da većina njihovih razreda ima malo učenika. Obje strane su u pravu i zato ovu pojavu nazivamo paradoksom veličine razreda.

Napomenimo da se paradoks veličine razreda najčešće pojavljuje u situacijama koje se ne čine paradoksalnim. Tako na primjer, većina gradova je mala, no većina ljudi živi u velikim gradovima; većina organizacija je mala, no nesrazmjerno veliki broj pojedinaca radi za velike organizacije. Prosječan broj osoba na plaži nekog tipičnog dana će uvijek biti manji nego što je prosječan broj osoba koje će pojedina osoba vidjeti na plaži, to proizlazi iz toga što će puno ljudi biti na plaži kada je gužva, ali samo nekoliko njih kada je plaža gotovo prazna.

# Bibliografija


[1] H. Cairns, *A short proof of Perron's theorem*. adresa: `http://pi.math.cornell.edu/~web6720/Perron-Frobenius_Hannah%20Cairns.pdf`.

[2] J. B. Kramer, J. Cutler i A. J. Radcliffe, *The Multistep Friendship Paradox*. Mathematical Association of America, 2016, str. 900–908. adresa: `http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.123.9.900`.

[3] A. Ipran, *The Friendship Paradox And You*. adresa: `https://www.alexirpan.com/2017/09/13/friendship-paradox.html`.

[4] P. Erdősand i M. Simonovits, *Compactness results in extremal graph theory*. 1982, str. 275–288.

[5] T. Harju, *Lecture Notes on Graph Theory*. Department of Mathematics, University of Turku, 2011.

[6] D. Koenig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, serija Teubner-Archiv zur Mathematik 6. Teubner, 1986, ISBN: 3322003035.

[7] P. Bonacich, *Power and Centrality: A Family of Measures*, 5. University of Chicago Press, 1987, str. 1170–1182. adresa: `http://www.jstor.org/stable/2780000`.

[8] N. A. Christakis i J. H. Fowler, *Social Network Sensors for Early Detection of Contagious Outbreaks*. 2010.

[9] S. L. Feld, *Why Your Friends Have More Friends Than You Do*. University of Chicago Press, 1991, str. 1464–1477. adresa: `http://www.jstor.org/stable/2781907`.

[10] M. Ben Sliman i R. Kohli, *Friendship Paradox Generalization and Centrality Measures*. 2019. adresa: `https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3395317`.

[11] W. R. J., *Introduction to graph theory*, Fourth edition. Harlow: Prentice Hall, ISBN: 0582249937.

[12] D. Hemenway, *Why Your Classes Are Larger Than "Average"*, 3. Mathematical Association of America, 1982, str. 162–164. adresa: http://www.jstor.org/stable/2690083.

[13] M. Marinović, *Mjere centralnosti u kompleksnim mrežama*. Diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2018.

[14] D. Bakić, *Linearna algebra*. Školska knjiga, 2008.

# Sažetak

Promatra li se mreža prijatelja kao neusmjereni graf u kojem vrhovi predstavljaju osobe, a bridovi dvosmjernu relaciju prijateljstva, pokazano je da prosječan stupanj vrha grafa nije veći od prosječnog stupnja njegovih susjednih vrhova. Ovaj rezultat naziva se paradoksom o prijateljstvu, zbog interpretacije u obliku: ”Vaši prijatelji imaju više prijatelja nego Vi”. Navedeni paradoks se može interpretirati na još nekoliko načina. Primjerice, odaberimo li uniformno slučajno jednu osobu u mreži, a zatim uniformno slučajno nekog njezinog prijatelja, tada će on u prosjeku imati više prijatelja nego prvobitno izabrana osoba.

Uz pomoć slučajnih šetnji u grafu, navedeni paradoks može se generalizirati na ”prijatelja prijateljevog prijatelja” za kojeg će vrijediti isti rezultat ako pazimo na parnost duljine promatrane šetnje. Navedena generalizacija možeme se proširiti ako se uvede definicija $k$ - udaljenih prijatelja. Paradoks o prijateljstvu tada kaže da očekivani broj prijatelja 1 - udaljenih prijatelja nekog pojedinca nije manji od broja 0 - udaljenih prijatelja istog tog pojedinca.

Promatra se veza između $k$ i $(k + 1)$ - udaljenih prijatelja, odnosno veza između očekivanja $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ i $\mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$, gdje je $Y_k$ slučajno odabran prijatelj, od dva proizvoljna $k$ - udaljena prijatelja. Tada će za pozitivan paran $k$ vrijediti $\mathbb{E}[d(Y_k)] \leq \mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$, dok za neparan $k$ nejednakost općenito ne vrijedi. Ako $k$ teži prema beskonačno tada $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ teži prema najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice susjedstva $A(G)$ pripadnog neusmjerenog grafa $G$ promatrane mreže prijatelja. Pritom se primjenjuje Perron - Frobeniusov teorem o primitivnim nenegativnim matricama.

Proučavanje ovog fenomena dovelo je do različitih primjena, npr. kod predviđanja i usporavanja širenja epidemija. Ako se otkrije koje osobe su važnije u nekoj mreži prijatelja tada cijepljenjem tih osoba možemo usporiti ili spriječiti širenje zaraze. Važnost pojedinog vrha u grafu može se procjenjivati različitim kriterijima pa je navedeno nekoliko takvih mjera centralnosti.

# Summary

By observing a network of friends as a non-directional graph in which the vertices represent persons and the edges represent a bi-directional relation of friendship, it is shown that the average degree of the vertex of the graph is not greater than the average degree of its adjacent vertices. This phenomenon is called the friendship paradox, and is interpreted as follows: ”Your friends have more friends than you.” This paradox can be interpreted in several other ways. For example, if we uniformly at random select one person in a network and then uniformly at random select one of his friends, then that person in average has more friends than the originally selected person.

With the help of random walks in the graph, we can generalize this paradox to “a friend of a friend of a friend” for which the same result will be valid if we pay attention to the parity of the length of the observed walk. We can extend this generalization by introducing the definition $k$ - distant friends. The friendship paradox then says that the expected number of friends of an individual's 1 - distant friends is not less than the number of 0 - distant friends of the same individual. The connection between $k$ and $(k+1)$ - distant friends is observed, respectively the connection between expectations $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ and $\mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$, where $Y_k$ is a randomly selected person, of two arbitrary $k$ - distant friends. Then for a positive even $k$ the $\mathbb{E}[d(Y_k)] \leq \mathbb{E}[d(Y_{k+1})]$ will hold, while for the odd $k$ the inequality generally does not hold. If $k$ tends to infinity then $\mathbb{E}[d(Y_k)]$ tends to the largest eigenvalue of the adjacency matrix $A(G)$ of the corresponding undirected graph $G$ of the observed friendship network. The Perron - Frobenius theorem on primitive nonnegative matrices is applied.

The study of this phenomenon has led to various applications, e.g., in predicting and slowing the spread of epidemics. If we find out which people are more important in a network of friends then by vaccinating those people we can slow down or prevent the spread of the infection. The importance of each vertex in the graph can be assessed by various criteria, so several such measures of centrality are listed.

# Životopis

Zovem se Tea Putrić. Rođena sam 23.10.1995. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Josip Račić upisala sam 2001. godine u Zagrebu, međutim zbog selidbe sam završila Osnovnu školu Špansko - Oranice. Nakon završetka osnovne škole, 2010. godine upisujem Prirodoslovno - matematičku gimnaziju Lucijan Vranjanin u Zagrebu. Potom 2014. godine na matematičkom odsjeku Prirodoslovnog matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Završetkom preddiplomskog studija te stjecanjem prvostupničke diplome 2018. godine na istom fakultetu nastavila sam obrazovanje upisavši Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.