Neke varijante Pitagorinog teorema

Rajković, Lina

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:231903

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-06**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lina Rajković

NEKE VARIJANTE PITAGORINOG TEOREMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Mirko Primc

Zagreb, veljača, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Mirku Primcu na strpljenju, pomoći i vodstvu. Puno hvala mojim roditeljima, obitelji i prijateljima na podršci, razumijevanju i beskrajnom strpljenju kroz sve ove godine studiranja. Bez vas ne bih uspjela.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se Pitagorinim teoremom, tj. nekim njegovim varijantama. Bit će iskazan i dokazan na nekoliko načina. Pokazat ćemo neke od primjena Pitagorinog teorema te proučavati neke njegove varijante. Fokusirati ćemo se isključivo na konačno dimenzionalne prostore. Na kraju ćemo proučiti i određene varijante Pitagorinog teorema s operatorima i matricama.

Poglavlje 1 uvest će nas u Pitagorin teorem. Prvo ćemo se upoznati s Pitagorinom povješću, a zatim ćemo iskazati i na nekoliko načina dokazati sam teorem. Na kraju ovog poglavlja predstavit ćemo neke od njegovih mnogobrojnih primjena.

Poglavlje 2 ”Neke varijante Pitagorinog teorema”. Na samom početku ovog poglavlja definiramo i iskazujemo neke od osnovnih pojmova i teorema koji će nam trebati za daljnji rad. Tu će se naći skalarni produkt, unitaran prostor, ortogonalnost i ortonormirana baza i slično. Iskazat i dokazat ćemo teorem o projekciji. U drugom dijelu ovog poglavlja proučavat ćemo neke osnovne varijante Pitagorinog teorema. Također, izložit ćemo i obrat Pitagorinog teorema.

Poglavlje 3 započinje osnovnim pojmovima i teoremima vezanim za operatore i matrice, koji će nam biti potrebni za daljnja razmatranja. Izložit ćemo Pitagorin teorem u terminima traga operatora na konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru. Na kraju ovog poglavlja dolazimo do naše trinaeste varijante koju ćemo i dokazati.

Poglavlje 1

Pitagorin teorem

1.1 Povijest

Pitagorin teorem (poznatiji kao Pitagorin poučak) dobio je ime po grčkom matematičaru i filozofu Pitagori.

Pitagora od Samosa djelovao je u 6. stoljeću prije Krista. Nema mnogo podataka o njegovom ranom životu. Često ga se naziva prvim pravim matematičarom zbog velikog doprinosa razvoju matematike. Za razliku od kasnijih grčkih matematičara, od kojih su sačuvane i pronađene barem neke od knjiga i bilješki, Pitagorini pisani spisi nisu pronađeni te se zapravo vrlo malo zna o njegovim matematičkim dostignućima. Iako njegova djela nisu pronađena, smatra se da je on među prvima počeo istraživati temeljne principe matematike.

Pitagora je okupio grupu ljudi i osnovao školu koja je bila predana proučavanju matematike. Osim geometrije i aritmetike, bavili su se i glazbom te astronomijom. Pitagorejci (pripadnici škole) su pridružili objektima i idejama numeričke vrijednosti, jer je Pitagora vjerovao da "Brojevi vladaju svijetom". Za njih je broj bio nešto što stvarno postoji, kao što postoje fizička tijela. S druge strane, te numeričke vrijednosti imale su svoja mistična i duhovna značenja. Tako je broj jedan stvaratelj svih brojeva, jer se zbrajanjem može dobiti bilo koji drugi broj. Zbog toga je broj jedan imao poseban status.

Naravno, danas je Pitagora najpoznatiji po svom geometrijskom teoremu (Pitagorin teorem), kojeg ćemo u ovom radu proučavati. Iako je Pitagorin teorem bio poznat starim Babiloncima oko 1000 godina ranije, smatra se da je Pitagora prvi koji ga je uspio dokazati te je zbog toga nazvan upravo po njemu.

Pitagorejci, odnosno pripadnici Pitagorine škole, su otkrili mnoge bitne postavke koje se i danas koriste u raznim znanostima. Navodimo samo neke od njih:

- Suma kutova u trokutu jednaka je zbroju dva prava kuta. Također, Pitagorejci su poznavali generalizaciju, tj. da je suma unitarnjih kuteva n-stranog poligona jednaka zbroju $2n-4$ pravih kuteva i zbroj vanjskih kuteva jednak je zbroju četiri prava kuta.

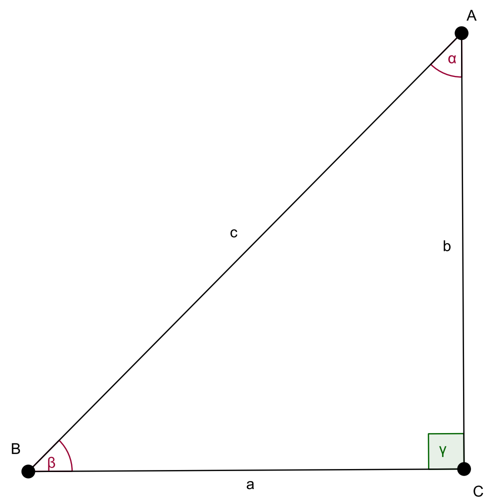
- Otkrili su pet pravilnih poliedara. Pravilni poliedri su geometrijska tijela čije su sve stranice sukladni pravilni mnogokuti. Oni su: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar.

- Otkrili su iracionalne brojeve, tako što su dokazali da duljina dijagonale kvadrata nije proporcionalna stranici tog istog kvadrata. Iracionalni brojevi su u sukobu sa Pitagorinom filozofijom da je sve broj jer je brojem smatrao omjer dva cijela broja.

- U astronomiji, Pitagorejci su mislili da je Zemlja kugla u centru Svemira. Također, su bili jedni od prvih koji su shvatili da je Venera, kao večernja zvijezda, isti planet kao Venera kao jutarnja zvijezda.

1.2 Dokaz Pitagorinog teorema

Postoji mnogo dokaza Pitagorinog teorema. Nakon samog iskaza teorema predstavit ćemo samo neke od njih.



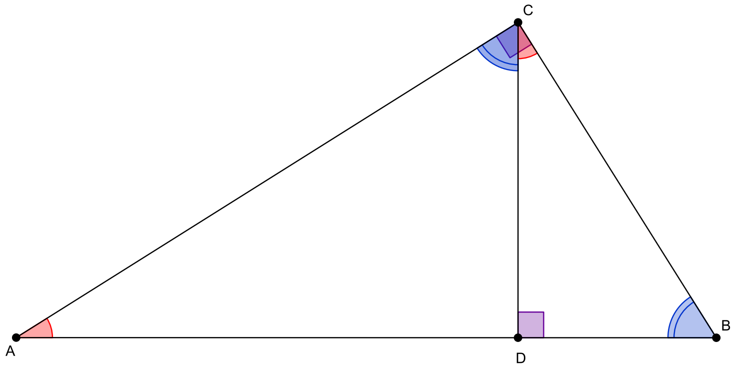
Slika 1.1: Pravokutni trokut

Teorem 1.2.1 (Pitagorin teorem)**.** *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.1}$$

gdje su a i b duljine kateta pravokutnog trokute te je c duljina hipotenuze (slika 1.1).

Dokaz. Prvi dokaz koji ćemo pokazati je preko sličnosti trokuta. Neka je trokut pravokutan s pravim kutom kod vrha C (kao što je na slici 1.2). Točka D je sjecište visine iz vrha C na stranicu AB s dužinom $\overline{AB}$.



Slika 1.2: Prvi dokaz

Uočimo (sa slike 1.2) da su prema K-K(-K) poučku o sličnosti trokuta, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$ slični. Naime, $\measuredangle CAD = \measuredangle DCB$ i $\measuredangle DBC = \measuredangle DCA$ (kao što se vidi na slici iznad). Iz sličnosti trokuta slijede omjeri:

$$\frac{a}{c} = \frac{g}{a} \quad \text{i} \quad \frac{b}{c} = \frac{f}{b}$$

gdje je $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AD} = f$ i $\overline{DB} = g$. Unakrsnim množenjem dobivamo

$$a^2 = g \cdot c \quad \text{i} \quad b^2 = f \cdot c$$

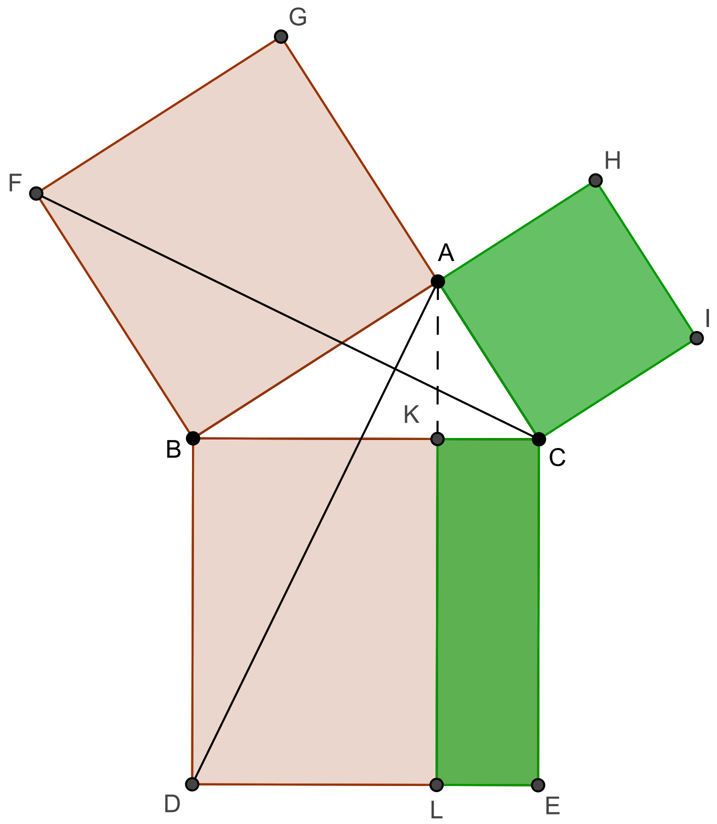
zbrajanjem prethodnih jednakosti slijedi

$$a^2 + b^2 = g \cdot c + f \cdot c = c \cdot (g + f).$$

Kako je $c = g + f$ slijedi tvrdnja teorema, tj. jednakost (1.1)

□

Dokaz. Drugi dokaz koji ćemo pokazati je Euklidov dokaz Pitagorinog teorema. Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut uz oznake kao na slici 1.3.



Slika 1.3: Euklidov dokaz

Kvadrati $CBDE$,$BAGF$ i $ACIH$ nacrtani su nad stranicama $\triangle ABC$.

Uočimo da je $|AB| = |FB|$ (jer je $BAGF$ kvadrat) te je $|BC| = |BD|$ (jer je $CBDE$ kvadrat). Sada kroz točku A povucimo pravac paralelan s BD tako dobivamo točke L i K. Nacrtajmo dužine CF i AD. Tada slijedi da je $\measuredangle ABD$=90°+$\measuredangle ABC$=$\measuredangle FBC$. Prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta, slijedi da su $\triangle FBC$ i $\triangle ABD$ sukladni (jer je $|AB| = |FB|$, $|BC| = |BD|$ i $\measuredangle ABD$=$\measuredangle FBC$).

Uočimo da je površina $\triangle BDK$ upola manja od površine pravokutnika $BDLK$ (slika 1.3). S druge strane, primjetimo da je površina od $\triangle BDA$ jednaka površini $\triangle BDK$, jer imaju istu osnovicu te istu duljinu visine. Slijedi da je površina $\triangle BDA$ upola manja od površine pravokutnika $BDLK$. Analogno tome vrijedi

$$P(BAGF) = 2 \cdot P(\triangle FBC) = 2 \cdot P(\triangle BDA) = P(BDLK).$$

Kako je duljina stranice kvadrata $BAGF$ jednaka $|AB|$, slijedi da je površina pravokutnika $BDLK$ jednaka $|AB|^2$. Slično pokazujemo da je

$$P(CKLE) = P(ACIH) = |AC|^2.$$

Slijedi,

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BD| \cdot |BK| + |KL| \cdot |KC| = |BD| \cdot |BK| + |BD| \cdot |KC|$$

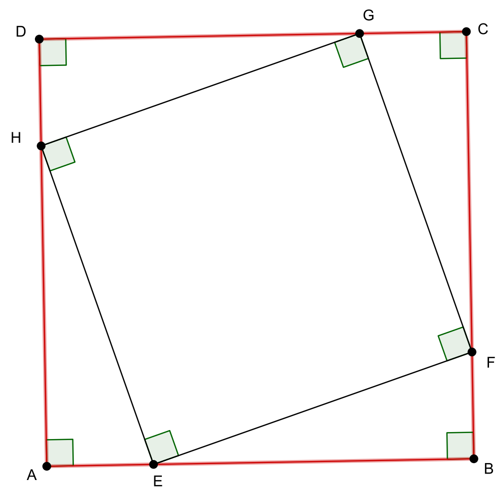
$$= |BD| \cdot (|BK| + |KC|) = |BD| \cdot |BC| = |BC|^2.$$

Dakle, dokazali smo tvrdnju teorema.

□

Dokaz. Sljedeći dokaz se još naziva Choupeijev dokaz.

Sliku smo nacrtali tako da smo unutar velikog kvadrata $ABCD$ konstruirali jedan manji kvadrat $EFGH$, te tako dobili i četiri jednaka pravokutna trokuta (slika 1.4). Označimo stranice na sljedeći način: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = a$, $\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = b$ te $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = c$.



Slika 1.4: Choupeijev dokaz

Uočimo da je površina velikog kvadrata $ABCD$

$$P_1 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Zatim je površina manjeg kvadrata $EFGH$

$$P_2 = c^2.$$

Površina četiri pravokutnih trokuta je jednaka

$$P_3 = 4 \cdot (\frac{1}{2}ab) = 2ab.$$

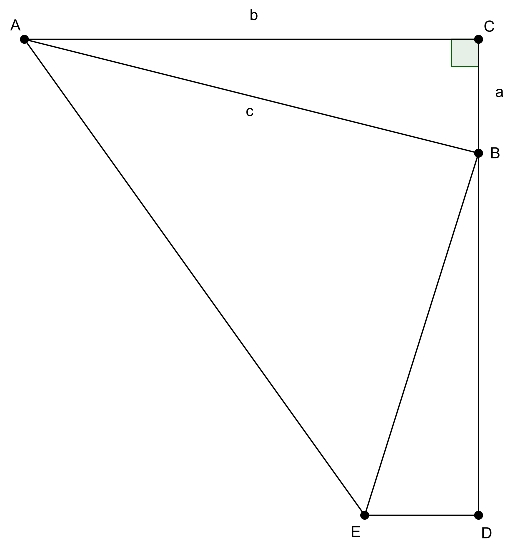
Uočimo da vrijedi

$$P_1 - P_3 = P_2$$
$$(a^2 + 2ab + b^2) - (2ab) = c^2.$$

Slijedi jednakost (1.1). Dakle, dokazali smo teorem.

□

Dokaz. Posljednji dokaz koji ćemo prikazati naziva se Garfieldov dokaz. Pogledajmo sliku 1.5. Uočimo, da je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu C. Osim toga, vrijedi da je dužina $|BD|$ sukladna dužini $|AC|$ te je $|DE|$ sukladna $|CB|$ i $|DE|$ je paralelan sa $|AC|$. Ukoliko stranice označimo kao na slici $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ i $\overline{BC} = a$. Slijedi da je $\overline{BD} = b$, $\overline{DE} = a$ i $\overline{BE} = c$ (kao što je nacrtano na slici 1.5).



Slika 1.5: Garfieldov dokaz

Uočimo da je površina trapeza $ACDE$ jednaka

$$P = \frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 \tag{1.2}$$

dok je površina tri trokuta sa slike 1.5 jednaka

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2. \tag{1.3}$$

Izjednačavanjem formula (1.2) i (1.3) dobivamo

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Dijeljenjem s $\frac{1}{2}$ dobivamo

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2.$$

Uočimo da je lijeva strana kvadrat zbroja

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Dakle, slijedi tvrdnja teorema

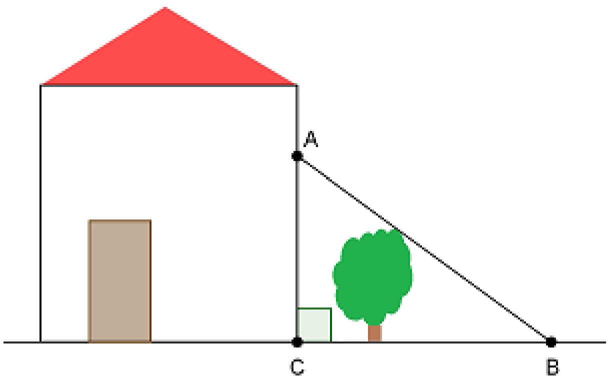
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

1.3 Razne primjene teorema

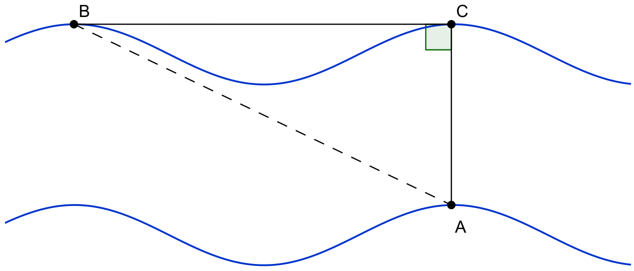
Postoji mnogo raznih primjena Pitagorinog teorema, a mi ćemo navesti samo neke od njih. Široka primjena Pitagorinog teorema može se pronaći u geometriji. Ukoliko želimo pronaći treću stranicu trokuta, a poznate su nam duljine dviju preostalih stranica, koristit ćemo upravo Pitagorin teorem. Pitagorin teorem može se primijeniti na puno geometrijskih likova. Na primjer, računajući duljine dijagonala pravokutnika, kvadrata, romba te računajući duljine visina trapeza, romba, jednakostraničnog trokuta itd. S druge strane, može se primijeniti i na prostorna tijela. Na primjer, računanjem duljine prostorne dijagonale kvadra, kocke itd.

Navedimo nekoliko primjera iz svakodnevnog života.



Ukoliko moramo popraviti prozor te su nam potrebne ljestve kako bismo došli do prozora. Ljestve moramo staviti na određenu udaljenost od kuće jer nam smeta grmlje koje se nalazi pored kuće. Prikazano je na slici iznad. Dužina $\overline{AB}$ predstavlja ljestve. Uočimo da je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Pitagorin teorem će nam pomoći kako bismo odredili koliko duge ljestve moraju biti da bi došli do prozora, ako je poznata visina prozora te udaljenost ljestvi od kuće.

Želimo preplivati rijeku najkraćim putem, no struja nas odnese nizvodno nekoliko metara. Na slici ispod dužina $\overline{AC}$ predstavlja najkraći put te dužina $\overline{BC}$ za koliko nas je struja odnijela nizvodno. Uočimo da je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Korištenjem Pitagorinog teorema možemo izračunati koliko smo zapravo preplivali, tj. duljinu hipotenuze našeg pravokutnog trokuta, ako je poznata širina rijeke te za koliko nas je struja odnijela nizvodno.



Pitagorin poučak je specijalan slučaj kosinusovog poučka.

Teorem 1.3.1. *Kvadrat duljina jedne stranice trokuta jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki produkt duljina tih stranica i kosinusa kuta kojeg one određuju, tj. u bilo kojem trokutu vrijedi:*

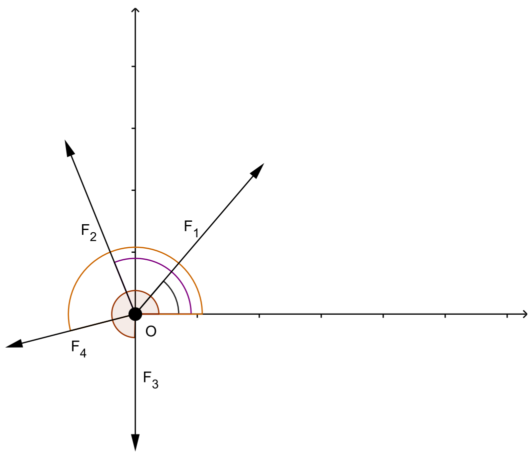
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Neka je $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Kako je $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, iz teorema 1.3.1., postaje $c^2 = a^2 + b^2$ što je upravo formula (1.1) iz Pitagorinog teorema.

Navedimo i jednu primjenu u fizici. Ukoliko na neku česticu O djeluje sustav od četiri sile (F_1, F_2, F_3, F_4) u ravnini xy te želimo izračunati rezultantu (R).



Slika 1.6: Sile koje djeluju na česticu O

Rezultanta je sila koja nastaje djelovanjem određenoga broja drugih sila (komponenata). Analitičko sastavljanje sila temelji se na algebarskom zbrajanju projekcija sila na osi koordinatnog sustava, tj. $R_x = \sum_{i=1}^{4} X_i = \sum_{i=1}^{4} F_i \cos\alpha_i$ i $R_y = \sum_{i=1}^{4} Y_i = \sum_{i=1}^{4} F_i \sin\alpha_i$, gdje je α_i kut između osi x i vektora F_i za $i = 1, 2, 3, 4$ (slika 1.6).

Tada se veličina rezultante (R) određuje primjenom Pitagorinog poučka: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$.

Ovo su samo neke od primjena Pitagorinog teorema. Može se naći još puno sličnih primjena, kako u matematici, tako i u fizici te drugim znanostima.

Poglavlje 2

Neke varijante Pitagorinog teorema

Pitagorin teorem, kojeg smo u prethodnom poglavlju iskazali i dokazali, jedan je od najosnovnijih rezultata Euklidske geometrije. U ovom poglavlju iskazat ćemo neke od osnovnih varijanti Pitagorinog teorema. Osim toga, izreći ćemo i obrat Pitagorinog teorema pod nazivom Tesarski teorem. Prije toga, iskazat ćemo neke od osnovnih pojmova i teorema koje ćemo koristiti.

2.1 Osnovni pojmovi i teoremi

U ovom poglavlju iskazat ćemo neke definicije i teoreme koje ćemo koristiti u radu. Neka je polje $\mathbb{F}$ skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Definicija 2.1.1. *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarom iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in V$;
2. *postoji* $0 \in V$ *sa svojstvom* $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in V$;
3. *za svaki* $a \in V$ *postoji* $-a \in V$ *tako da je* $a + (-a) = -a + a = 0$;
4. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$;
5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$;
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$;
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$;

8. $1 \cdot a = a, \forall a \in V.$

Sada ćemo definirati skalarni produkt koji će nam biti prijeko potreban za naš rad.

Definicija 2.1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V;$

2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in V;$

4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V;$

5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in V.$

Uočimo da svojstva 3. i 4. iz prethodne definicije povlače sljedeće

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y \rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x_i, y \in V$$

tj. skalarno množenje je linearno u prvom argumentu.

S druge strane, slično se može pokazati da je skalarno množenje antilinearno u drugom argumentu, tj. vrijedi sljedeće

$$\langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \langle x, y_i \rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x, y_i \in V.$$

Ukoliko je prostor V realan, skalarni produkt je linearan u obje varijable.

Definiramo unitaran prostor na sljedeći način:

Definicija 2.1.3. *Vektorski prostor V zajedno sa skalarnim produktom, prethodno definiranim, naziva se unitaran prostor.*

Nama su od posebno važni unitarni prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ sa kanonskim skalarnim produktom definiranim na sljedeći način

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Norma vektora u unitarnom prostoru V je funkcija

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

definirana s

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Normu vektora možemo zamišljati kao duljinu tog vektora. Sljedeća propozicija nam daje osnovna svojstva norme.

Propozicija 2.1.4. *Norma na unitarnom prostoru V ima sljedeća svojstva:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in V;$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V;$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V.$

Kažemo da je vektor x normiran ako vrijedi

$$\|x\| = 1.$$

Normiran vektor ćemo zvati jedinični vektor.

Nadalje, definirajmo ortogonalnost i ortonormiranu bazu unitarnog prostora.

Definicija 2.1.5. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka $x \perp y$) ako je*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ je ortogonalan ako je e_i okomit s e_j, $\forall i \neq j$. Skup $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je norma vektora e_i jednaka jedan, $\forall i = 1, 2, ..., k$.

Uvest ćemo i pojam baze, ali prije toga nam je potrebno nekoliko definicija.

Prvo definiramo pojam linearne nezavisnosti. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i

$$S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako vrijedi

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Definicija 2.1.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S (oznaka $[S]$) definirana je na sljedeći način:*

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Linearnu ljusku skupa vektora $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ označavat ćemo samo sa $[e_1, e_2, ..., e_n]$.

Definicija 2.1.7. *Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V ako vrijedi $[S] = V$.*

Dakle, skup S je sustav izvodnica za V ako se svaki vektor iz V može prikazati kao linearna kombinacija elemenata iz skupa S.

Sada možemo definirati pojam baze vektorskog prostora. Konačan skup $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V, ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Dolazimo do sljedeće definicije:

Definicija 2.1.8. *Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ u unitarnom prostoru V je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za V.*

Nama će biti od posebne važnosti konveksna kombinacija vektora te konveksna ljuska, a koje ćemo definirati u nastavku. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Konveksna kombinacija vektora $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$ je svaki vektor oblika

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Neka je $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Skup svih mogućih konveksnih kombinacija elemenata iz skupa S naziva se konveksna ljuska skupa S, tj.

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

U nastavku iskazujemo Gram-Schmitov postupak ortogonalizacije koji osigurava egzistenciju ortonormirane baze u svakom konačno dimenzionalnom prostoru. Prvo iskazujemo sljedeću korisnu propoziciju.

Propozicija 2.1.9. *Neka je $e_1, e_2, ..., e_n$ niz ortonormiranih vektora u V. Neka je $x \in V$. Tada je*

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i \perp [e_1, e_2, ..., e_n],$$

a vektor $\sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$ naziva se ortogonalna projekcija vektora x na potprostor $[e_1, e_2, ..., e_n]$.

Teorem 2.1.10 (Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije)**.** *Neka je dan linearno nezavisan skup* $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$*,* $k \in \mathbb{N}$*, u unitarnom prostoru* V*. Tada postoji ortonormiran skup* $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ *u* V *takav da je*

$$[e_1, e_2, ..., e_j] = [x_1, x_2, ..., x_j], \quad \forall j = 1, 2, ..., k.$$

Nadalje, ako je V *konačno dimenzionalan unitaran prostor, onda se svaki ortonormirani skup može dopuniti do ortonormirane baze od* V*.*

Navodimo nekoliko svojstva koja će nam koristiti u radu. Neka je $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za vektorski prostor V. Skalarni produkt $\langle x, y\rangle$ možemo zapisati kao tzv. Parsevalovu jednakost

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle, \quad \forall x, y \in V \tag{2.1}$$

a za normu vrijedi

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2, \quad \forall x \in V. \tag{2.2}$$

Za sljedeći dokaz bit će nam potreban Pitagorin poučak iskazan na sljedeći način:
Ako je $x \perp y$, gdje su x i y vektori u unitarnom prostoru V, onda je

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Prethodna jednakost vrijedi jer imamo

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Zbog pretpostavke slijedi da je $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$. Dakle, pokazali smo prethodnu tvrdnju.

Propozicija 2.1.11 (Besselova nejednakost)**.** *Ako je* $e_1, e_2, ..., e_k$ *ortonormirani skup u unitarnom prostoru* V*, vektor* x *u* V *i* $Q(x)$ *kao u prethodnoj propoziciji, onda je*

$$\|x\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2. \tag{2.3}$$

Posebno, vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \tag{2.4}$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x \in [e_1, e_2, ..., e_k]$*.*

Dokaz. Stavimo
$$P(x) = x - Q(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
Tada je po propoziciji 2.1.9
$$x = P(x) + Q(x), \quad P(x) \perp Q(x),$$
pa je po Pitagorinom poučku
$$\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2. \tag{2.5}$$
Budući da je $e_1, e_2, ..., e_k$ ortonormirana baza od $[e_1, e_2, ..., e_k]$ te prema Parsevalovoj jednakosti (2.2) za $P(x) \in [e_1, e_2, ..., e_k]$ imamo
$$\|P(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$
Jednakost iz teorema (2.3) slijedi iz (2.5).

Ako u (2.4) vrijedi jednakost, onda iz (2.3) slijedi $\|Q(x)\| = 0$, no onda je $Q(x) = 0$ i $x = P(x) \in [e_1, e_2, ..., e_k]$. Obratno, ako je $x \in [e_1, e_2, ..., e_k]$, onda je $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i = P(x)$ pa zbog (2.2) imamo jednakost u (2.4). □

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Kažemo da je M potprostor od V, ako je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V.

Nadalje, možemo definirati i ortogonalni komplement potprostora.

Definicija 2.1.12. *Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je*
$$M^{'} = \{x \in V : \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in M\}.$$

U nastavku ćemo iskazati i dokazati teorem o projekciji:

Teorem 2.1.13 (Teorem o projekciji)**.** *Neka je V unitaran prostor i Y konačno dimenzionalni potprostor. Tada za vektor $x \in V$ postoje jedinstveni vektori $P(x) \in Y$ i $Q(x) \perp Y$ takvi da je*
$$x = P(x) + Q(x). \tag{2.6}$$
Vektor $P(x)$ (1.1) nazivamo ortogonalna projekcija vektora x na potprostor Y. Operator $P : V \to V$, $P(x) = y$, $\forall x \in V$, je linearan, $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$ ako je $Y \neq 0$. Operator P nazivamo ortogonalni projektor prostora V na Y.

Dokaz. Prema pretpostavci teorema, Y je konačno dimenzionalni potprostor pa prema Gram-Schmidtovom postupku ortogonalizacije postoji ortonormirana baza $v_1, v_2, ..., v_k$ od Y. Neka je

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i, \quad Q(x) = x - P(x).$$

Tada je $x = P(x) + Q(x)$ traženi rastav jer je prema propoziciji 2.1.9 $Q(x) \perp Y$.

Još trebamo dokazati jedinstvenost. Ako je $x = P(x) + Q(x) = y + u$ za neki $y \in Y$ i $u \perp Y$, onda je $P(x) - y = u - Q(x)$ i vrijedi

$$P(x) - y \in Y \quad \text{i} \quad u - Q(x) \perp Y.$$

Slijedi,

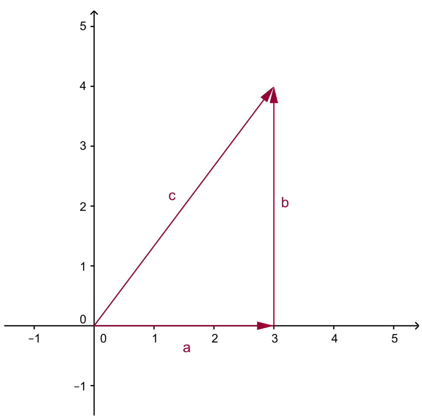
$$u - Q(x) \perp u - Q(x),$$

što povlači $u - Q(x) = 0$, odnosno $u = Q(x)$, no tada mora biti i $y = P(x)$. □

2.2 Neke od osnovnih varijanti

Za početak, uočimo da se Pitagorin teorem odnosi na dvodimenzionalnu geometriju. Postoje trodimenzionalni, n-dimenzionalni pa čak i beskonačno dimenzionalni analgoni Pitagorinog teorema.

Dvije stranice, a i b, pravokutnog trokuta možemo zamjeniti vektorima u smjeru ortogonalnih osi, a hipotenuzu vektorom x duljine c (slika 2.1).



Slika 2.1: Prva varijanta Pitagorinog teorema

Pravokutni trokut sa slike 2.1 zadovoljava Pitagorin teorem, $a^2 + b^2 = c^2$. Ovo je naša prva varijanta Pitagorinog teorema.

Odabirom jediničnih vektora e_1 i e_2 duž pozitivnih (ortogonalnih) osi, projekcija vektora x na te osi omogućuje nam da prikažemo vektor x u ortonormiranoj bazi e_1, e_2. Ustvari, izražavamo vektor x kao linearnu kombinaciju, $c_1e_1 + c_2e_2$, vektora e_1 i e_2. U ovom slučaju, ukoliko definiramo $c_1 = a$, $c_2 = b$ te duljinu vektora x sa c, $||x|| = c$ dobivamo $a^2 + b^2 = c^2$, tj.

$$||x||^2 = c^2 = c_1^2 + c_2^2 = a^2 + b^2. \tag{2.7}$$

Ovo je naša druga varijanta Pitagorinog teorema.

U ovom obliku, tvrdnju možemo iskazati za konačno dimenzionalan unitaran prostor U bilo koje dimenzije. To će biti naša treća varijanta Pitagorinog teorema. Neka je $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za U i neka je $x \in U$. Tada možemo napisati $x = \sum_{a=1}^{n} c_a e_a$.

Parsevalova jednakost kaže da je $||x||^2 = \sum_{a=1}^{n} |c_a|^2$. Ova jednakost je poopćenje Pitagorinog teorema, tj. poopćenje prethodne jednakosti (2.7) prelaskom na konačno dimenzionalan unitaran prostor bilo koje dimenzije.

Sada dolazimo do naše četvrte varijante Pitagorinog teorema. Ovo je obrat Pitagorinog teorema te ćemo ga nazivati Tesarski teorem jer ga tesari koriste kao bi provjerili jesu li napravili pravi kut.

Teorem 2.2.1 (Tesarski teorem). *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Ako vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$ onda je nasuprot stranice c pravi kut.*

Još jedno poopćenje Pitagorinog teorema može biti iskazano koristeći projekciju vektora na ortogonalne osi. Možemo formulirati teorem tako da promatramo kako se vektori jednakih duljina u smjeru koordinatnih osi projiciraju na pravac zadan nekim vektorom. U ovoj situaciji, duljine projekcija koordinatnih vektora duljine c na taj pravac imaju duljine a i b za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.

Možemo li nešto od ovoga primijeniti na ortonormirane baze u višedimenzionalnim prostorima? Odgovorom na ovo pitanje dolazimo do naše šeste varijante Pitagorinog teorema:

Propozicija 2.2.2. *Neka je $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za konačno dimenzionalan unitaran prostor U. Tada je zbroj kvadrata duljina ortogonalnih projekcija svih e_a na svaki jednodimenzionalan potprostor od U jednak 1.*

Obrat: Ako za svaki a postoji realan nenegativan t_a *i* $\sum_{a=1}^{n} t_a^2 = 1$, *onda je* $\sum_{a=1}^{n} t_a e_a$ *jedinični vektor x u U koji generira jednodimenzionalan potprostor od U na kojem svaki od* e_a *ima projekciju duljine* t_a.

Dokaz. Neka je x jedinični vektor i V jednodimenzionalan potprostor od U generiran s x.

Tada je ortogonalna projekcija od e_a na V jednaka $\langle e_a, x\rangle x$, tj. jednaka je skalarnom produktu vektora e_a i x te vrijedi

$$||\langle e_a, x\rangle x||^2 = |\langle e_a, x\rangle|^2 ||x||^2 = |\langle e_a, x\rangle|^2$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer je x jedinični vektor.

Iz Parsevalove jednakosti slijedi

$$1 = ||x||^2 = \sum_{a=1}^{n} |\langle x, e_a\rangle|^2 = \sum_{a=1}^{n} |\langle e_a, x\rangle|^2$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog Parsevalove jednakost, a posljednja jednakost vrijedi zbog svojstva skalarnog produkta.

Kako vrijedi

$$\langle e_{a'}, \sum_{a=1}^{n} t_a e_a\rangle = \sum_{a=1}^{n} t_a \langle e_{a'}, e_a\rangle = t_{a'}$$

posljednja jednakost vrijedi jer je $\langle e_{a'}, e_a\rangle = 0$ za svaki $a' \neq a$ jer je to ortonormirana baza pa su svi međusobno okomite te je za $a' = a$ skalarni produkt $\langle e_{a'}, e_a\rangle = 1$.

Slijedi da je za svaki e_a duljina projekcije na jednodimenzionalan potprostor generiran sa $\sum_{a=1}^{n} t_a e_a$ jednaka t_a.

□

Sedma varijanta daje nam odgovor na pitanje što je s ortogonalnim projekcijama ortonormiranih elemenata baze kada ih projiciramo na potprostor od U dimenzije veće od 1. Imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.2.3. *Suma kvadrata projekcija elemenata ortonormirane baze konačno dimenzionalnog unitarnog prostora U na m-dimenzionalan potprostor od U jednaka je m.*

Dokaz. Neka je V m-dimenzionalan potprostor od U te neka je $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ ortonormirana baza za V. Tada imamo da je projekcija e_a na V ustvari $\sum_{a=1}^{n}\langle e_a, f_j\rangle f_j$ čiji je kvadrat duljine jednak $\sum_{j=1}^{m}\langle e_a, f_j\rangle^2$. Svi članovi sume $\sum_{a=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle e_a, f_j\rangle^2$ su realni i nenegativni.

Iz Parsevalove jednakosti slijedi

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{n}\langle e_a, f_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} ||f_j||^2 = \sum_{j=1}^{m} 1 = m$$

prva jednakost vrijedi zbog Parsevalove jednakosti, a druga jer je $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ ortonormirana baza.

□

Osma varijanta Pitagorinog teorema je malo preformulirana prethodna propozicija.

Propozicija 2.2.4. *Ako je a suma kvadrata duljine projekcije r elemenata ortonormirane baze* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *n-dimenzionalnog unitarnog prostora U na m-dimenzionalni potprostor* U_0 *i neka je b suma kvadrata projekcija preostalih* $n-r$ *elemenata baze na ortogonalni komplement* U_0'*, tada je*

$$a - b = m - n + r. \tag{2.8}$$

Dokaz. Neka je a_j kvadrat duljine projekcije e_j na U_0. Tada je $1 - a_j$ kvadrat duljine projekcije na ortogonalni komplement U_0'.

Prema tome,

$$a = a_1 + a_2 + ... + a_r$$

$$b = 1 - a_{r+1} + 1 - a_{r+2} + ... + 1 - a_n.$$

Tada prema propoziciji 2.2.3. slijedi

$$m = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Slijedi

$$a-b = a_1+a_2+...+a_r-1+a_{r+1}-1+a_{r+2}-...-1+a_n = a_1+a_2+...+a_n-n+r = m-n+r$$

što smo htjeli dokazati.

□

Provest ćemo i dokaz koji ne koristi propoziciju 2.2.3.

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za U. Neka je $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ i $\{f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_n\}$ ortonormirane baze za U_0 i U_0' , redom. Osim toga, neka je y projekcija od e_j na U_0 i

$$y = \sum_{k=1}^{m} \langle e_j, f_k \rangle f_k$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2.$$

Prema tome,

$$a = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2. \tag{2.9}$$

S druge strane, projekcija od e_j na $U_0^{'}$ je jednaka

$$\sum_{k=m+1}^{n} \langle e_j, f_k \rangle f_k$$

te je kvadrat njezine duljine

$$\sum_{k=m+1}^{n} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 = 1 - \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2.$$

Prethodna jednakost vrijedi jer je

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 \tag{2.10}$$

prva jednakost vrijedi jer je $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza, a druga vrijedi zbog Parsevalove jednakosti.

Dakle,

$$b = \sum_{j=r+1}^{n} (1 - \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2) = n - r - \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2. \tag{2.11}$$

Oduzimanjem (2.9) i (2.11) slijedi,

$$\begin{aligned} a - b &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 + \sum_{j=r+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r = m - n + r \end{aligned}$$

posljednja jednakost vrijedi zbog (2.10).

□

Još se jednom možemo pitati, vrijedi li za duljine projekcija elemenata baze da je suma njihovih kvadrata jednaka m. To je upravo obrat prethodnoga. Ustvari, možemo se pitati, postoji li m-dimenzionalan potprostor od U na kojem projekcije elemenata baze imaju duljinu m. Potvrdnim odgovorom na ova pitanja dolazimo do devete i desete varijante Pitagorinog teorema.

Poglavlje 3

Neke varijante s operatorima i matricama

U nastavku ćemo izložiti Pitagorin teorem u terminima traga operatora na konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru. Prije toga navest ćemo neke od osnovnih pojmova i teorema vezanih za operatore i matrice koji će nam biti potrebni. Na kraju ovog poglavlja dolazimo do iskaza i dokaza glavnog teorema ovog rada.

3.1 Osnovni pojmovi i teoremi

Definicija 3.1.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zove se linearan operator (oznaka $L(V, W)$) ako vrijedi*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Jasno da možemo imati i situaciju kada je $V = W$. Tada kažemo da je A linearan operator na V (oznaka $A \in L(V)$).

Na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru linearnom operatoru A pridružujemo matricu na sljedeći način:

Neka je $A \in L(V, W)$ te neka je $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza za V i $f = \{f_1, f_2, ...f_m\}$ baza za W. Ako znamo $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje opertora A, tj. A je potpuno određen svojim djelovanjem na bazi. Sada vektore $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Koeficijente posložimo u matricu

$$[A]_e^f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Prethodnu matricu ($[A]_e^f$) zovemo matrični zapis operatora A u paru baza (e, f). Ukoliko je A linearan operator na V, $A \in L(V)$, matrični zapis operatora A označavat ćemo ($[A]_e^e$) odnosno $[\alpha_{ij}]$.

U slučaju unitarnog prostora i ortonormirane baze $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ imamo sljedeću formulu

$$\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$$

U nastavku definiramo hermitski adjungiran operator i hermitski adjungiranu matricu.

Definicija 3.1.2. *Kažemo da je kvadratna matrica $H = [h_{ij}] \in M_n$ hermitska ako vrijedi $H^* = H$, tj.*

$$h_{ij} = \overline{h_{ji}}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

gdje je $\overline{h_{ji}}$ kompleksno konjugiran broj broju h_{ji}.

Realnu hermitsku matricu zovemo simetrična matrica. U slučaja realne matrice A imamo $A^* = A^t$ pa je realna matrica A simetrična ako je

$$A^t = A.$$

Bitan teorem vezan za teoriju operatora na konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru je sljedeći:

Teorem 3.1.3. *Neka je V konačno dimenzionalan unitaran prostor i A linearan operator na V. Postoji jedinstven linearan operator na V (A^*), takav da je*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \forall x, y \in V.$$

Linearan operator na V (A^*), iz prethodnog teorema, zove se hermitski adjungiran operator operatoru A.

Dakle, svaki operator na konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru ima pripadni hermitski adjungirani operator.

U radu će nam trebati i unitaran operator i unitarna matrica pa ih u nastavku definiramo.

Neka je $U : V \to V$ linearan operator na realnom ili kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada je sljedeće ekvivalentno:

1. $U^*U = UU^* = I$.
2. $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$.
3. $\|Ux\| = \|x\|$, $\forall x \in V$.
4. $Ue_1, Ue_2, ..., Ue_n$ je ortonormirana baza od V za svaku ortonormiranu bazu $e_1, e_2, ..., e_n$.
5. $Ue_1, Ue_2, ..., Ue_n$ je ortonormirana baza od V za neku ortonormiranu bazu $e_1, e_2, ..., e_n$.

Ukoliko za operator U vrijedi jedna od prethodno navedenih ekvivalentnih tvrdnji kažemo da je U unitaran operator. Unitaran operator na realnom prostoru zovemo ortogonalni operator.

Unitaran operator u ortonormiranoj bazi ima unitarnu matricu.

Propozicija 3.1.4. *Neka je U unitaran operator na V i neka je $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Tada za matrični zapis $[U]_e^e$ operatora U vrijedi*

$$[U]_e^e([U]_e^e)^* = ([U]_e^e)^*[U]_e^e = I.$$

Definicija 3.1.5. *Kompleksna kvadratna matrica U je unitarna ako vrijedi*

$$UU^* = U^*U = I.$$

Realnu unitarnu matricu zovemo ortogonalna matrica. U slučaju realne matrice A imamo $A^* = A^t$, gdje je A^t transponirana matrica. Slijedi, da je realna matrica A ortogonalna ako i samo ako vrijedi

$$A^tA = AA^t = I.$$

Osim unitarne i hermitske matrice trebat će nam idempotentna matrica te je u nastavku definiramo.

Definicija 3.1.6. *Matrica A je idempotentna matrica ako vrijedi da je $A^2 = A$.*

Jedno korisno svojstvo idempotentnih matrica, a koje će nam trebati u posljednjem dokazu je sljedeće:

Ako je A idempotentna matrica, tada je rang matrice A jednak njegovom tragu. Naime, za idempotentne matrice vrijedi da je trag jednak broju svojstvenih vrijednosti različitih od nula.

Prema teoremu o projekciji (teorem 2.1.13) uočimo da je projekcija idempotentan linearan operator $P : V \to V$, jer vrijedi $P^2 = P$. S duge strane, ortogonalna projekcija je hermitski operator. Pokažimo:

Neka je $V = V_1 + V_2$ rastav prostora V na direktnu sumu potprostora V_1 i V_2. Tada za svaki vektor $v \in V$ imamo jedinstveni rastav

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Preslikavanje

$$P : V \to V, \quad P(v) = P(v_1 + v_2) = v_1$$

zovemo projekcijom na potprostor V_1 duž potprostora V_2. Lako se pokaže da je projekcija linearno preslikavanje. Uočimo da je $P^2(v_1 + v_2) = P(v_1) = v_1 = P(v_1 + v_2)$, odnosno $P^2 = P$.

Neka je sada $V = V_1 \oplus V_2$ rastav prostora V na ortogonalnu sumu potprostora V_1 i V_2, $V_1 \perp V_2$. Tada projekciju P na V_1 duž V_2 zovemo ortogonalnom projekcijom. Pokažimo da je P hermitski operator: za $v_1, w_1 \in V_1$ i $v_2, w_2 \in V_2$ imamo

$$\langle P(v_1 + v_2), w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = \langle v_1, P(w_1 + w_2) \rangle = \langle v_1 + v_2, P(w_1 + w_2) \rangle,$$

tj. $P^* = P$.

U nastavku izlažemo definicije permutacija i transpozicija.

Definicija 3.1.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ je bilo koja bijekcija*

$$p : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}.$$

Transpozicija je permutacija koja zamjenjuje dva elementa. Preciznije, neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan te i, j takvi da je $1 \le i < j \le n$, proizvoljni. Ukoliko definiramo permutaciju p na sljedeći način

$$p(k) = \begin{cases} k, & k \neq i, j \\ j, & k = i \\ i, & k = j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

dobivamo transpoziciju. Transpoziciju ćemo označavati s $(\tau : i \longleftrightarrow j)$.

3.2 Varijante Pitagorinog teorema s operatorima i matricama

Neka je $\mathcal{H}$ n-dimenzionalan unitaran prostor i $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Neka je $\mathcal{H}_0$ m-dimenzionalan potprostor od $\mathcal{H}$ i E ortogonalna projekcija od $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}_0$. Ako je $[a_{jk}]$ matrični zapis operatora E u bazi $\{e_j\}$, tada je koeficijent $a_{jk} = \langle Ee_k, e_j\rangle$ za svaki k, j. Budući da je $E = E^* = E^2$, vrijedi

$$a_{jj} = \langle Ee_j, e_j\rangle = \langle E^2 e_j, e_j\rangle = \langle Ee_j, Ee_j\rangle = ||Ee_j||^2$$

te

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{j=1}^{n} ||Ee_j||^2.$$

Dakle, suma kvadrata duljine projekcija elemenata baze $e_1, e_2, ..., e_n$ na $\mathcal{H}_0$ je jednaka tragu operatora E. Trag operatora je jednak zbroju elemenata dijagonale matričnog zapisa operatora.

Postoji unitarna transformacija (U) od $\mathcal{H}$ na samog sebe koja preslikava $\mathcal{H}_0$ na m-dimenzionalan prostor generiran sa $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Neka je sada E_m projekcija na potprostor $\mathcal{H}_0$, te neka je $[b_{jk}]$ matrični zapis operatora E_m u bazi $\{e_j\}$ takav da su elementi dijagonale $b_{11}, b_{22}, ..., b_{mm}$ jedinice i $b_{m+1m+1}, b_{m+2m+2}, ..., b_{nn}$ nule. Budući da vrijedi $UEU^{-1} = E_m$, slijedi da matrični zapisi operatora E i E_m imaju isti trag koji je jednak m.

Ovime smo opet dokazali našu šestu varijantu Pitagorinog teorema

$$tr(E) = \sum_{j=1}^{n} ||Ee_j||^2 = m$$

gdje je "tr" funkcional koji pridružuje matrici njezin uobičajeni (nenormalizirani) trag.

Došli smo do naše jedanaeste varijante Pitagorinog teorema. Ona glasi:

Trag projekcije m-dimenzionalnog potprostora jednak je m.

Kao što smo se i za prethodne varijante pitali postoji li obrat, isto se pitamo i sada. Je li uređena n-torka $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ brojeva iz intervala $[0, 1]$, čija je suma jednaka m, dijagonala neke Hermitske idempotentne $n \times n$ matrice? Potvrdan odgovor na prethodno pitanje nas dovodi do naše dvanaeste varijante Pitagorinog teorema.

Kako bismo dokazali dvanaestu varijantu, trebat će nam sljedeća definicija i lema.

Definicija 3.2.1. *Neka je* $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *točka u* $\mathbb{R}^n$ *i* Π *grupa permutacija skupa* $\{1, ..., n\}$. *Neka je* $\mathcal{K}_{\overline{a}}$ *zatvorena konveksna ljuska od* $\{(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, ..., a_{\pi(n)}) = \pi(\overline{a}) : \pi \in \Pi\} = \Pi(\overline{a})$. $\mathcal{K}_{\overline{a}}$ *kažemo da je permutacijski politop generiran sa* $\overline{a}$.

Lema 3.2.2. *Neka je $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ i $a_1+a_2+...+a_n = b_1+b_2+...+b_n$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) $(b_1, b_2, ..., b_n) = \overline{b} \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$

(ii) $b_1 \leq a_1, b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2, ..., b_1 + ... + b_{n-1} \leq a_1 + ... + a_{n-1}$

(iii) *postoji niz točaka* $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)}) = \overline{a_1}, ..., (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}) = \overline{a_n}$ *u* $\mathcal{K}_{\overline{a}}$ *tako da* $\overline{a_1} = \overline{a}$, $\overline{a_n} = \overline{b}$ *i* $\overline{a}_{k+1} = ta_k + (1-t)\tau(\overline{a_k})$ *(konveksna kombinacija) za svaki k u skupu* $\{1, 2, ..., n\}$ *gdje je* τ *transpozicija u* Π *te za neki t iz intervala* $[0, 1]$ *u ovisnosti o k.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ iz pretpostavke $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, zaključujemo da je

$$a_1 + a_2 + ... + a_j \geq a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + ... + a_{\pi(j)}$$

za svaki j iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ i π iz Π grupe permutacija. Dakle, za svaku konveksnu kombinaciju $\overline{b}$ točaka iz $\Pi(\overline{a})$ i za svaki $j \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi

$$b_1 + b_2 + ... + b_j \leq a_1 + a_2 + ... + a_j.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Kako je $\pi(\overline{d}) \in \Pi(\overline{a})$, gdje je $\overline{d} \in \Pi(\overline{a})$ te je $\pi(\overline{c}) \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$, gdje je $\overline{c} \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$. Dakle, $\overline{a_1} = \overline{a} \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$ prema pretpostavci leme, analogno je $\overline{a}_{k+1} = ta_k + (1-t)\tau(\overline{a_k}) \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$ te slijedi $\overline{b} = \overline{a_n} = t'\overline{a}_{n-1} + (1-t')(\overline{a}_{n-1}) \in \mathcal{K}_{\overline{a}}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ako je $b_1 < a_j$ za svaki $j \in \{2, 3, ..., n\}$, onda prema pretpostavci $b_j \leq b_1 < a_j$ za sve $j \in \{2, 3, ..., n\}$ te $b_1 + b_2 + ... + b_n < a_1 + a_2 + ... + a_n$ što je kontradikcija s pretpostavkom teorema.

Neka je m najmanji broj iz skupa $\{2, 3, ..., n\}$ takav da je

$$a_m \leq b_1.$$

Budući da je, $a_m \leq b_1 \leq a_1$, postoji t iz intervala $[0, 1]$ takav da je

$$b_1 = ta_1 + (1-t)a_m.$$

Neka je τ transpozicija koja zamjenjuje 1 i m ($\tau : 1 \longleftrightarrow m$). Neka je $\overline{a}_1 = \overline{a}$ i $\overline{a}_2 = t\overline{a}_1 + (1-t)\tau(\overline{a}_1)$.

Slijedi,

$$(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, ..., a_n^{(2)}) = (ta_1 + (1-t)a_m, a_2, ..., a_{m-1}, ta_m + (1-t)a_1, a_{m+1}, ..., a_n) =$$

$$= (b_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_1 + a_m - b_1, a_{m+1}, ..., a_n).$$

Kako je $b_{m-1} \leq b_{m-2} \leq ... \leq b_1 < a_{m-1} \leq ... \leq a_2$ prema odabiru od m.

$$b_1 \leq a_1^{(2)} = b_1, b_1 + b_2 \leq a_1^{(2)} + a_2^{(2)} = b_1 + a_2, ..., b_1 + ... + b_j \leq a_1^{(2)} + ... + a_j^{(2)}$$

gdje je $j < m$.

Ako je $m \leq j \leq n-1$, onda

$$a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + ... + a_j^{(2)} = a_1 + ... + a_j \geq b_1 + b_2 + ... + b_j.$$

Sada pretpostavimo da smo konstruirali $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_j$, tako da je

$$\overline{a}_{k+1} = t\overline{a}_k + (1-t)\tau(\overline{a}_k)$$

za svaki $k \in \{1, 2, ..., j-1\}$, gdje je $t \in [0, 1]$ te τ transpozicija u Π u ovisnosti o k. Osim toga $b_1 = a_1^{(k)}, ..., b_{k-1} = a_{k-1}^{(k)}$ za svaki $k \in \{2, 3, ..., j\}$ i

$$b_1 \leq a_1^{(k)}, b_1 + b_2 \leq a_1^{(k)} + a_2^{(k)}, ..., b_1 + ... + b_{n-1} \leq a_1^{(k)} + ... + a_{n-1}^{(k)}$$

za svaki $k \in \{1, 2, ..., j\}$. Tada,

$$b_1 + b_2 + ... + b_j \leq a_1^{(j)} + a_2^{(j)} + ... + a_{j-1}^{(j)} + a_j^{(j)} = b_1 + ... + b_{j-1} + a_j^{(j)}.$$

Stoga, $b_j \leq a_j^{(j)}$.

Nadalje, za $k \in \{1, 2, ..., j-1\}$

$$a_1^{(k+1)} + a_2^{(k+1)} + ... + a_n^{(k+1)} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + ... + a_n^{(k)} = ... = a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Prema tome, $a_n^{(j)} \leq b_n \leq b_j$, gdje druga nejednakost vrijedi zbog pretpostavke leme, a prva nejednakost vrijedi jer je

$$b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} \leq a_1^{(j)} + a_2^{(j)} + ... + a_{n-1}^{(j)}.$$

Neka je m najmanji broj iz skupa $\{j+1, j+2, ..., n\}$ takav da je $a_m^{(j)} \leq b_j$.

Tada je

$$b_{j+1} \leq b_j \leq a_{j+1}^{(j)}, ..., b_{m-1} \leq b_j \leq a_{m-1}^{(j)}. \tag{3.1}$$

Iz činjenice da je $a_m^{(j)} \leq b_j \leq a_j^{(j)}$, slijedi da postoji $t \in [0, 1]$ takav da je

$$b_j = ta_j^{(j)} + (1-t)a_m^{(j)}.$$

Neka je sada τ transpozicija koja zamjenjuje j i m ($\tau : j \longleftrightarrow m$) i neka je $\overline{a}_{j+1} = t\overline{a}_j + (1-t)\tau(\overline{a}_j)$.

Slijedi,

$$(a_1^{(j+1)}, a_2^{(j+1)}, ..., a_n^{(j+1)}) = (b_1, b_2, ..., b_j, a_{j+1}^{(j)}, a_{j+2}^{(j)}, ..., a_{m-1}^{(j)}, a_j^{(j)} + a_m^{(j)} - b_j, a_{m+1}^{(j)}, a_{m+2}^{(j)}, ..., a_n^{(j)}).$$

Ako je $j + 1 = n$, imamo

$$(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}) = (b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n^{(n-1)}).$$

Zbog načina konstrukcije vrijedi sljedeće

$$a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + ... + a_n^{(n)} = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n.$$

Dakle, slijedi da je

$$(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}) = (b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n).$$

U suprotnom, moramo pokazati da vrijedi $b_1 + b_2 + ... + b_k \leq a_1^{(j+1)} + a_2^{(j+1)} + ... + a_k^{(j+1)}$ za svaki $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ kako bismo mogli provesti konstrukciju do kraja.

Nadalje imamo 3 različita slučaja.

1. ako je $1 \leq k \leq j$, onda je

$$b_1 + b_2 + ... + b_k = a_1^{(j+1)} + a_2^{(j+1)} + ... + a_k^{(j+1)}$$

2. ako je $j + 1 \leq k \leq m - 1$, onda je zbog (3.1)

$$b_1+b_2+...+b_j+b_{j+1}+...+b_k \leq b_1+b_2+...+b_j+a_{j+1}^{(j)}+...+a_k^{(j)} = a_1^{(j+1)}+a_2^{(j+1)}+...+a_k^{(j+1)}$$

3. ako je $m \leq k \leq n - 1$, onda je

$$b_1 + b_2 + ... + b_k \leq a_1^{(j)} + a_2^{(j)} + ... + a_k^{(j)} = a_1^{(j+1)} + a_2^{(j+1)} + ... + a_k^{(j+1)}$$

□

Slijedi teorem koji će biti dvanaesta varijanta Pitagorinog teorema.

Teorem 3.2.3. *Neka je ϕ preslikavanje koje pridružuje svakoj Hermitskoj $n \times n$ matrici $[a_{jk}]$ točke $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \overline{a}$ u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\mathcal{K}_m$ slika restrikcije ϕ na skup $\mathcal{P}_m$, gdje je $\mathcal{P}_m$ skup projekcija ranga m te $m \in \{0, 1, ..., n\}$ i neka je $\mathcal{K}$ slika restrikcije ϕ na skup $\mathcal{P}$, gdje je $\mathcal{P}$ skup svih projekcija. Tada je $\overline{a} \in \mathcal{K}_m$ ako i samo ako vrijedi $0 \leq a_{jj} \leq 1$, za svaki j i vrijedi $\sum_{j=1}^{m} a_{jj} = m$ te $\overline{a} \in \mathcal{K}$ ako i samo ako vrijedi $0 \leq a_{jj} \leq 1$, za svaki j i vrijedi $\sum_{j=1}^{m} a_{jj} \in \{0, 1, ..., n\}$.*

Dokaz. Neka je $A = [a_{jk}]$ Hermitska matrica i U unitarna matrica sa $\xi \sin\theta, \sin\theta$ na j, j i k, k mjestu, redom te $-\cos\theta, \xi\cos\theta$ na j, k i k, j mjestu, redom. Neka su na svim ostalim dijagonalnim mjestima (osim j, j i k, k) jedinice i na svim preostalim mjestima nule. ξ je kompleksni broj modula 1 takav da je $\overline{\xi a_{jk}} = -\xi a_{jk}$.

Tada matrica UAU^{-1} ima $a_{jj}\sin^2\theta + a_{kk}\cos^2\theta$ na j, j mjestu i $a_{jj}\cos^2\theta + a_{kk}\sin^2\theta$ na k, k mjestu te a_{hh} na h, h mjestu gdje je $h \neq j, k$.

Neka je $t = sin^2\theta$ i τ transpozicija u skupu $\{1, 2, ..., n\}$ koja mjenja j i k, $(\tau : j \longleftrightarrow k)$ te $\overline{a}_\tau = (a_{\tau(1),\tau(1)}, a_{\tau(2),\tau(2)}, ..., a_{\tau(n),\tau(n)})$.

Uočimo da je

$$\phi(UAU^{-1}) = t\overline{a} + (1-t)\overline{a}_\tau.$$

Kako je $VEV^{-1} \in \mathcal{P}_m$ za svaku unitarnu matricu V, gdje je $E \in \mathcal{P}_m$. Dakle, za $\overline{a} \in \mathcal{K}_m$ slijedi da je $t\overline{a} + (1-t)\overline{a}_\tau \in \mathcal{K}_m$, za svaki $t \in [0, 1]$ i svaku transpoziciju τ skupa $\{1, 2, ..., n\}$.

Iz prethodne leme slijedi da $\mathcal{K}_m$ ima permutacijski politop $\mathcal{K}_{\overline{a}}$ za svaki $\overline{a} \in \mathcal{K}_m$. Dakle, točka $\overline{a}$ koja ima m koordinata jednakih 1 te $n - m$ koordinata jednakih 0 nalazi se u $\mathcal{K}_m$. Ako je $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ te $0 \leq b_j \leq 1$ za svaki $j \in \{1, 2, ..., n\}$ i $\sum_{j=1}^{m} b_j = m$, tada slijedi

$$b_1 \leq 1, b_1+b_2 \leq 1+1, ..., b_1+b_2+...+b_m \leq m, b_1+b_2+...+b_{m+1} \leq m+0, .., b_1+b_2+...+b_{n-1} \leq m.$$

Iz prethodne leme slijedi

$$\overline{b} \in \mathcal{K}_{\overline{a}} \subseteq \mathcal{K}_m.$$

Dakle, vrijedi tvrdnja teorema za $\mathcal{K}_m$. Kako je $\mathcal{K} = \cup_{m=0}^{n}\mathcal{K}_m$ slijedi tvrdnja teorema za $\mathcal{K}$.

□

Upravo smo dokazali dvanaestu varijantu Pitagorinog teorema.

U nastavku ćemo iskazati i dokazati trinaestu varijantu koja je proširenje prethodnog teorema.

Teorem 3.2.4. *Ako je $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ uređena n-torka realnih brojeva iz intervala $[0, 1]$ čija je suma prirodan broj, onda postoji realna Hermitska (simetrična) idempotentna $n \times n$ matrica s dijagonalom $a_1, a_2, ..., a_n$.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: Provjeravamo vrijedi li tvrdnja za $m = 1$

Neka je E_1 matrica projekcija generirana vektorom $x = (a_1^{1/2}, a_2^{1/2}, ..., a_n^{1/2})$. Neka je $\{e_j\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$ gdje je e_j n-torka sa jedinicama na j-tom mjestu , a na preostalima nule tj. $e_j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$. Matrični prikaz za E_1 s obzirom na prethodnu bazu na j,k-tom mjestu ima skalarni produkt $\langle E_1e_k, e_j\rangle$. Odakle slijedi,

$$\langle E_1e_k, e_j\rangle = \langle\langle e_k, x\rangle x, e_j\rangle = \langle a_k^{1/2}x, e_j\rangle = a_k^{1/2}a_j^{1/2}.$$

Primjetimo da se matrica sastoji od nenegativnih realnih brojeva. Uočimo, j-ti dijagonalni element je $\langle E_1e_j, e_j\rangle = a_j$ te je $a_j \geq 0$ što smo i htjeli pokazati.

Korak indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $m - 1$ gdje je $m \geq 2$ cijeli broj. Pretpostavimo da je $a_1 + a_2 + ... + a_n = m$.

Neka je k najmanji cijeli broj j za koji vrijedi $a_1 + a_2 + ... + a_j \geq m - 1$ te neka je $a = m - 1 - \sum_{r=1}^{k-1} a_r$. Uočimo da je tada $a + \sum_{r=1}^{k-1} a_r = m - 1$.

Prema bazi indukcije postoji Hermitski idempotentan E_2 s matričnim prikazom $[a_{jr}]$ u bazi $\{e_j\}$ gdje je svaki a_{jr} realan te su dijagonalni elementi $a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a, 0, 0, ..., 0$.

Neka je F_2 ustvari E_2 s jedinicom na $k+1, k+1$ mjestu. Svaki element matrice sa j ili r većim od k je nula. Dakle, F_2 je projekcija.

Neka je $W_k(\theta)$ unitarni operator čiji matrični prikaz u bazi $\{e_j\}$ ima $\sin\theta$ na k, k mjestu i $k+1, k+1$ mjestu te $-\cos\theta$ i $\cos\theta$ na $k, k+1$ i $k+1, k$ mjestu, redom. Na preostalim dijagonalnim mjestima ima jedinice, te na svim preostalim mjestima nule.

Neka je $p(k, \theta, F_2) = W_k(\theta) F_2 W_k(\theta)^*$. Obzirom na bazu $\{e_j\}$, matrični prikaz za $p(k, \theta, F_2)$ na dijagonali ima sljedeće elemente

$$a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a\sin^2\theta + \cos^2\theta, a\cos^2\theta + \sin^2\theta, 0, ..., 0.$$

Na j, r mjestu ima a_{jr}, gdje oboje j i r nisu veći od $k-1$, te nule gdje su j ili r veći od $k+1$.

Dakle, elementi u k-tom retku matričnog prikaza za $p(k, \theta, F_2)$ su

$$a_{k1}\sin\theta, ..., a_{kk-1}\sin\theta, a\sin^2\theta + \cos^2\theta, (a-1)\sin\theta\cos\theta, 0, ..., 0$$

elementi u k+1-om retku su

$$a_{k1}\cos\theta, ..., a_{kk-1}\cos\theta, (a-1)\sin\theta\cos\theta, a\cos^2\theta + \sin^2\theta, 0, ..., 0.$$

Dok su elementi u k-tom stupcu

$$a_{1k}\sin\theta, ..., a_{k-1k}\sin\theta, a\sin^2\theta + \cos^2\theta, (a-1)\sin\theta\cos\theta, 0, ..., 0$$

te u k+1-om stupcu

$$a_{1k}\cos\theta, ..., a_{k-1k}\cos\theta, (a-1)\sin\theta\cos\theta, a\cos^2\theta + \sin^2\theta, 0, ..., 0.$$

Prema izboru od k, vrijedi $m - 1 \leq \sum_{r=1}^{k-1} a_r + a_k$. Slijedi $a = m - 1 - \sum_{r=1}^{k-1} a_r \leq a_k \leq 1$ gdje duga nejednakost vrijedi zbog pretpostavke teorema.

Odaberimo θ_2 od θ tako da je $a\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = a_k$, te vrijedi

$$\begin{aligned} a\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 &= a\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 + a\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 - a\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2 = \\ &= a(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) + (\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) - (a\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) = \\ &= a + 1 - a_k = m - 1 - \sum_{r=1}^{k-1} a_r + 1 - a_k = m - \sum_{r=1}^{k} a_r = \sum_{r=k+1}^{n} a_r. \end{aligned}$$

Pokažimo da takav θ postoji:

Stavimo $x = \cos^2\theta$. Tada je $1 - x = \sin^2\theta$. Slijedi,

$$a(1 - x) + x = a_k$$

$$a - ax + x = a_k$$

$$(1 - a)x = a_k - a.$$

Kako je $1 - a \geq 0$ imamo

$$x = \frac{a_k - a}{1 - a} > 0 \quad i \quad \frac{a_k - a}{1 - a} < 1$$

Dakle, $a_k - a < 1 - a$.

Neka je $p(k, \theta_2, F_2) = F_3$, te uočimo da su svi elementi matričnog prikaza za F_3 realni.

Matrični prikaz projekcija $p(k + 1, \theta, F_3)$ na dijagonali ima sljedeće elemente

$$a_1, a_2, ..., a_k, (\sum_{r=k+1}^{n} a_r)\sin^2\theta, (\sum_{r=k+1}^{n} a_r)\cos^2\theta, 0, ..., 0.$$

Ponovno odaberimo θ_3 od θ, takav da $(\sum_{r=k+1}^{n} a_r)\sin^2\theta_3 = a_{k+1}$.

Dakle, matrični prikaz projekcije $p(k + 1, \theta_3, F_3) = F_4$ ima sljedeće elemente na dijagonali

$$a_1, a_2, ..., a_{k+1}, (\sum_{r=k+2}^{n} a_r), 0, ..., 0.$$

Nastavljamo s ovakvom konstrukcijom. Formiramo $p(k + 2, \theta, F_4)$ i tako dalje sve dok ne dođemo do $p(n - 1, \theta, F_{n-k+1})$. Ponovno, pravilno odabiremo θ_{n-k+1} te neka je F_{n-k+2} Hermitska idempotentna matrica projekcija $p(n - 1, \theta_{n-k+1}, F_{n-k+1})$. Dijagonalni elementi matričnog prikaza za F_{n-k+2} su upravo $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ te su svi elementi matrice realni. $\square$

Bibliografija

[1] Damir Bakić. *Linearna Algebra*. Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] George Bachman, Lawrence Narici. *Functional Analysis*. Academic Press, Inc. (London) LTD., 1966.

[3] Richard V. Kadison. *Pythagorean Theorem:1. The finite case*. Mathematics Department, University of Pennsylvania, 4178-4184, 2001.

[4] Damir Keček, Ana Poldrugač, Predrag Vuković. *Poopčenje Pitagorinog poučka*. Tehnički glasnik 7, 103-107, 2013.

[5] John L. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag, New York, Co 1955, reprint 1975.

[6] Zlatan Kulenović. *Tehnička Mehanika 1*. Pomorski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2013.

[7] Svetozar Kurepa. *Uvod u Linearnu Algebru*. Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[8] Sthephanie J. Morris. *The Pythagorean Theorem*. The University of Georgia, Department of Mathematics Education, 2000.
`http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/student.folders/morris.stephanie/emt.669/essay.1/pythagorean.html`

[9] Goran Muić, Mirko Primc. *Vektorski Prostori*.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf`

[10] Tamara Nemeth, Goran Stajčić. *Matematika 8*. Profil, Zagreb, 2007.

[11] Anthony Powell. *Pythagorean Theorem*. The Kindly Ones, p. 51, University of Chicago Press, 1995.
`http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/`

[12] Explorations and Proofs,
`http://www.geom.uiuc.edu/ demo5337/Group3/proofs.html`

[13] Pythagoras of Samos,
`http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Biographies/Pythagoras.html`

Sažetak

U ovom smo radu proučavali neke od varijanti Pitagorinog teorema. Nakon povijesti Pitagore, dokazali smo Pitagorin teorem na četiri različita načina. Prvi dokaz je bio preko sličnosti trokuta. Zatim su slijedili Euklidov dokaz, Choupeijev te Garfildov dokaz. Predstavili smo neke primjene Pitagorinog teorema u matematici, zatim i u fizici, računajući rezultantu.

Naša prva varijanta Pitagorinog teorema, pokazuje da ako zamijenimo stranice trokuta vektorima u smjeru ortogonalnih osi, te hipotenuzu vektorom x Pitagorin teorem vrijedi. Druga varijanta, iskazuje da projekcija vektora x na osi određene jediničnim vektorima, omogućuje da vektor x izrazimo kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora. Treća varijanta, proširuje prethodnu tvrdnju na konačno dimenzionalan unitaran prostor bilo koje dimenzije. Tesarski teorem, tj. obrat Pitagorinog teorema je naša četvrta varijanta. Peta varijanta je još jedno poopćenje Pitagorinog teorema iskazanog koristeći projekciju vektora na ortogonalne osi. Šesta i sedma varijanta (propozicija 2.2.2 i propozicija 2.2.3) daje nam odgovor na pitanje, može li se nešto od prethodnog primijeniti na ortonormirane baze u višedimenzionalnim prostorima. Dok je osma varijanta (propozicija 2.2.4) malo preformulirana sedma varijanta. Obrat prethodne varijante je naša deveta varijanta. Deseta varijanta nam daje odgovor na pitanje postoji li m-dimenzionalan potprostor od U na kojem projekcije elemenata baze imaju duljinu m.

U zadnjem poglavlju, fokusirali smo se na neke varijante Pitagorinog teorema s operatorima i matricama. Tako, naša jedanaesta varijanta pokazuje da je trag projekcije m-dimenzionalnog potprostora jednaka m. Dvanaesta varijanta pokazuje da je uređena n-torka $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ brojeva iz intervala $[0, 1]$, čija je suma jednaka m dijagonala neke Hermitske idempotentne $n \times n$ matrice. Upravo nas, prethodna varijanta dovodi i do posljednje trinaeste varijate Pitagorinog teorema, koja je teorem 3.2.4: Ako je $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ uređena n-torka realnih brojeva iz intervala $[0, 1]$, čija je suma prirodan broj, onda postoji realna simetrična idempotentna $n \times n$ matrica s dijagonalom $a_1, a_2, ..., a_n$.

Summary

In this work we have studied some of the variants of the Pythagorean theorem. After the history of Pythagoras, the Pythagorean theorem was proved in four different ways. The first evidence was through similarity of triangles. Followed by Euclid's proof, Choupei's and Garfild's proof. Then some applications of the Pythagorean theorem in mathematics and physics were presented.

Our first variant of Pythagorean theorem, shows that if we replace the two sides of the triangle by orthogonal axes and the hypotenuse by a vector x of the length c the Pythagorean theorem will be valid. Another variant, express x as the linear combination of certain unit vectors. The third variation is to, extend the previous statement on the finite dimensional unitary space of any dimension. Carpenter's Theorem is our fourth variant and is inverse of the Pythagorean Theorem. The fifth variant is another formulation of the Pythagorean theorem in terms of the projections of vectors of equal length along the axes onto the line determined by a vector. The sixth and seventh variant (proposition 2.2.2 and proposition 2.2.3) gives us the answer to the question: Can something of this nature be said for orthonormal bases in higher-dimensional spaces? While the eighth variant (proposition 2.2.4) is a slightly reformulated seventh variant. The inverse of the eighth variant is our ninth variant. Tenth variant gives us the answer to the question whether there is a m-dimensional subspace of U on which projections of the basis elements have length of m.

In the last chapter, we are focused on variants of the Pythagorean theorem with operator-matrix methods. So, our eleventh variant indicates that the trace of a projection with m-dimensional range is equal to m. The twelfth variant indicates that the ordered n-tuple $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ of numbers in $[0, 1]$, with sum m is diagonal of some idempotent self-adjoint $n \times n$ matrix. The previous variant leads to the last thirteenth variant of the Pythagorean theorem, which is a theorem 3.2.4: If $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ is an ordered n-tuple of numbers in $[0, 1]$ with sum a positive integer, then there is an idempotent self-adjoint $n \times n$ matrix with diagonal entries $a_1, a_2, ..., a_n$ and all entries real.

Životopis

Lina Rajković rođena je dana 4. ožujka 1991. godine u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole Pavleka Miškine u Zagrebu upisuje XV. gimnaziju (Program međunarodne mature). Završetkom XV. gimnazije upisuje matematiku na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij Matematike, nastavnički smjer, završava 2014. godine te iste upisuje diplomski studij, smjer Financijska i poslovna matematika. Uz prethodno navedeno obrazovanje završetkom srednje škole te prestankom aktivnog treniranja postaje sudac sinkroniziranog plivanja te povremeno pomoćni trener u Hrvatskom akademskom klubu sinkroniziranog plivanja Mladost. Godine 2009. polaže za pripravnika snowboarda. Nakon par godina polaže i za učitelja snowboarda. Godine 2016. dobiva certifikat (IPMA Level D) za voditelja projekta. Iste godine pohađa te uspješno dobiva certifikat (moj EU project), nakon devetomjesečne edukacije za pripremu i provedbu EU projekata. Tijekom studija, uz razne studentske poslove, radi i na projektu kalkulacije studije isplativosti za izvor geotermalne energije u Podravini i Varaždinu. Od stranih jezika odlično poznaje engleski jezik (C1), te francuski jezik (B2). Osim toga, ima i osnovno znanje iz njemačkog i španjolskog jezika.