Hestonov model stohastičke volatilnosti

Begić, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Begić

HESTONOV MODEL STOHASTIČKE VOLATILNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, studeni, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima

Sadržaj

Sadržaj **iv**

1 Uvod **1**

2 Osnovni razvoj cijena **3**
2.1 Brownovo gibanje i Itôv integral 3
2.2 Modeliranje na tržištu 8

3 Hestonov model za europske opcije **9**
3.1 Dinamika modela 9
3.2 Svojstva procesa varijance 12
3.3 Cijena europske call opcije 13
3.4 Hestonova parcijalna diferencijalna jednadžba 14
3.5 Parcijalne diferencijalne jednadžbe za P_1 i P_2 19
3.6 Hestonova funkcija 21
3.7 Svojstva Hestonovog modela 23

4 Rješavanje Heston-Riccatijeve jednadžbe **25**
4.1 Riccatijeva jednadžba u općenitoj formi 25
4.2 Prinos od dividende i cijena put opcije 27
4.3 Black-Scholesov model kao poseban slučaj Hestonovog modela 28

5 Diskretizacija **31**
5.1 Diskretizacija drugog reda za Cox-Ingersoll-Ross-ov model 31
5.2 Ninomiya-Victoir shema 32
5.3 Prilagodba diskretizacije kada je $\sigma^2 > 4a$ 32
5.4 Diskretizacija Hestonovog modela 34

6 Prilagodba modela i simulacija u R-u **35**
6.1 Inverzni pristup 35

6.2 `nlm` i `nlminb` funkcije u R-u 36
6.3 `quantmod` paket u R-u 37

Bibliografija **41**

Poglavlje 1

Uvod

Black-Scholes-Mertonov model najpoznatiji je matematički model na financijskim tržištima, u kojem se cijena dionica modelira pomoću geometrijskog Brownovog gibanja. U radu iz 1993. godine, matematičar i ekonomist Steven Heston predlaže generalizaciju Black-Scholes-Mertonovog modela u kojem se volatilnost rizične imovine modelira kao slučajni proces. Ta kombinacija Black-Scholes-Mertonovog i Cox-Ingersoll-Ross modela poznata je pod nazivom Hestonov model stohastičke volatilnosti i danas je jedan od najčešće korištenih modela na financijskim tržištima. Cilj diplomskog rada je uvesti Hestonov model preko pripadnog sustava stohastičkih diferencijalnih jednadžbi, analizirati njegovu dinamiku te odrediti cijenu call opcije na dionicu u polu-zatvorenoj formi. U Hestonovom modelu pojam diskretne sheme koristimo za aproksimaciju neprekidnih diferencijalnih jednadžbi pomoću diskretnih diferencijalnih jednadžbi. Kao temelj diskretne sheme za Hestonov model promatramo Ninomiya-Victoir shemu. Radi boljeg razumijevanja samog modela i njegove pozadine zadnji dio rada obrađuje prilagodbu modela i njegovu simulaciju u programu R. Najčešća metoda za prilagodbu je tržišno implicirani ili inverzni pristup koji pretpostavlja da su postojeće cijene na tržištu približno jednake stvarnim cijenama financijskih instrumenata.

Poglavlje 2

Osnovni razvoj cijena

2.1 Brownovo gibanje i Itôv integral

Prikaz Hestonovog modela započinjemo uvodom u osnovne pojmove koji se koriste kroz sve vremenski neprekidne modele financijskih tržišta. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ filtracija.

Definicija 2.1.1. *Brownovo gibanje $W = (W_t; t \geq 0)$ je slučajni proces za koji vrijedi:*

- $W_0 = 0$,
- *neprekidnost trajektorija; $t \rightarrow W_t$ je gotovo sigurno neprekidno preslikavanje,*
- *W_t ima nezavisne priraste, tj. za svaki $0 < t_1 < .... < t_n$ varijable $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ su nezavisne,*
- *za svaki $0 \leq s < t$ vrijedi $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.*

Prije definicije Itôvog integrala potrebno je prisjetiti se jednostavnih procesa. Adaptiran slučajni proces $H = (H_t; t \in [0, T])$ zove se jednostavan proces ako je jednak $\sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}>}$ za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < T\}$ intervala $[0, T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j; $j = 0, 1, ...n-1$ takve da je svaka ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S ϵ_T označavamo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.
Za slučajni proces $H \in \epsilon_T$ definiramo slučajni proces $I = (I_t; t \in [0, T])$ sa

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t}).$$

Proces I zovemo Itôv integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje W i označavamo ga sa $I_t = \int_0^t H_s dW_s = (HW)_t$.

Za prostor općih integranada uzimamo familiju $\mathbb{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t; t \in [0,T])$ za koje vrijedi $\mathbb{E}[\int_0^T H_t^2 dt] < \infty$. Tu familiju označavamo sa $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Prostor $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ je vektorski prostor sa skalarnim produktom definiranim sa:

$$\langle H, K\rangle_{L^2_{ad}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_t K_t dt\right]$$

za sve $H, K \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ i pripadnom normom

$$\| H \|^2_{L^2_{ad}} = \langle H, H\rangle_{L^2_{ad}}.$$

Kako bismo izrazili Itôv integral koristimo aproksimaciju procesa $H \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \epsilon_T$. Tada Itôv integral procesa H obzirom na Brownovo gibanje $W = (W_t; t \in [0,T])$ možemo definirati kao limes integrala jednostavnih integranada:

$$(HW)_t = I_t = \int_0^t H_u dW_u.$$

Dakle, vrijedi:

$$\int_0^t H_u dW_u = (L^2)\lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)} dW_u.$$

Definicija 2.1.2. *Neka je $W = (W_t; t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Itôv proces je slučajni proces $X = (X_t; t \geq 0)$ oblika:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t V_s ds$$

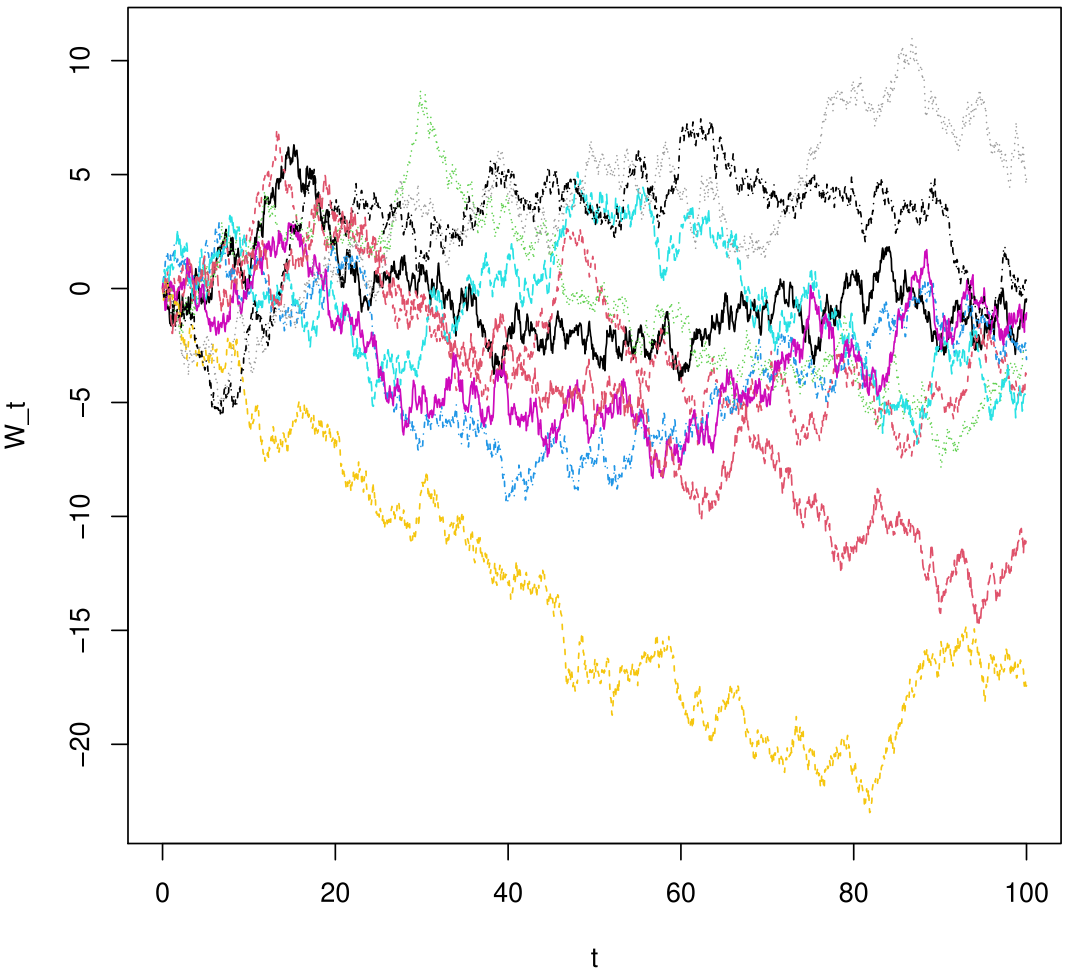
gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = (H_t; t \geq 0)$ i $V = (V_t; t \geq 0)$ $\mathbb{F}-$adaptirani procesi takvi da je $H \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ i $\int_0^t |V_s| ds < \infty$ g.s. za svaki $t \geq 0$.

Definicija 2.1.3. *Neka je $X = (X_t; t \geq 0)$ Itôv proces te $K = (K_t; t \geq 0)$ adaptiran proces za koji vrijedi $\mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 H_s^2 ds\right] < \infty$ te $\int_0^t |K_s V_s| ds < \infty$ za svaki $t \geq 0$. Itôv integral od K obzirom na Itôv proces X definiran je formulom:*

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s H_s dW_s + \int_0^t K_s V_s ds.$$

Definicija 2.1.4. *Neka je $f : [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = T\}$ particija intervala $[0,T]$. Definiramo p-varijaciju od f na Π:*

$$V^{(p)}(f,\Pi) = \sum_{j=1}^{n} | f(t_j) - f(t_{j-1}) |^p .$$



Slika 2.1: Simulacija trajektorija 10 Brownovih gibanja

Definicija 2.1.5. *Kažemo da je slučajni proces $X = (X_t; t \geq 0)$ konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajni proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t; t \geq 0)$ takav da:*

$$\langle X \rangle_t = (\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\| \to 0} V^{(2)}(X, \Pi) = (\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \mid X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \mid^2 .$$

Sljedeću tvrdnju navodimo bez dokaza, koji se može pronaći u [6].

Teorem 2.1.6. *Itôva formula za Itôv proces*
Neka je $X = (X_t; t \geq 0)$ Itôv proces i f funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi:

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)d\langle X \rangle_t.$$

Itôva formula se jednostavnije pamti u diferencijalnom obliku:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t.$$

U slučaju Brownovog gibanja dobivamo formulu:

$$df(t, W_t) = f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t)dt.$$

Neka je Z nenegativna slučajna varijabla na promatranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T)$ pri čemu je $T > 0$ fiksno vrijeme te neka za nju vrijedi: $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ i $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ sa:

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[1_A Z]. \tag{2.1}$$

Proces Radon-Nikodymove derivacije $(Z_t; 0 \leq t \leq T)$ definira se kao:

$$Z_t = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_t]$$

za sve $0 \leq t \leq T$.
Elementarni teorem za promjenu mjere na vjerojatnosnom prostoru poznat je pod nazivom Girsanovljev teorem. Za dokaz pogledati [6, Teorem 6.4].

Teorem 2.1.7. *Girsanovljev teorem*
Neka je $W = (W_t; 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je $\Theta = (\theta_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptirani slučajni proces. Definiramo:

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 du\right)$$
$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_u du$$

te pretpostavimo da je $\mathbb{E}\int_0^T \theta_u^2 Z_u^2 du < \infty$. Stavimo $Z = Z_T$. Tada je $\mathbb{E}Z = 1$, te je uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ definiranu u (2.1) *slučajni proces $W^* = (W_t^* : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje.*

Nadalje navodimo Girsanovljev dvodimenzionalni teorem koji nam je potreban kroz daljnji rad.

Teorem 2.1.8. *Girsanovljev dvodimenzionalni teorem[3]*
Neka je $B = (B^{(1)}, B^{(2)}) = ((B_t^{(1)}, B_t^{(2)}); t \geq 0)$ dvodimenzionalno Brownovo gibanje, odnosno neka su $B^{(1)} = (B_t^{(1)}; t \geq 0)$ i $B^{(2)} = (B_t^{(2)}; t \geq 0)$ dva nezavisna Brownova gibanja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, $T > 0$ i $\Theta = (\theta_t; t \geq 0) = ((\theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}); t \geq 0)$ 2-dimenzionalan adaptiran slučajan proces. Definiramo:

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \theta_u \parallel^2 du\right)$$
$$\widetilde{B_t^{(i)}} = B_t^{(i)} + \int_0^t \theta_u^{(i)} du \qquad i = 1, 2$$

pri čemu je:

$$\parallel \theta_u \parallel^2 = \int_0^t (\theta_u^{(1)})^2 du + \int_0^t (\theta_u^{(2)})^2 du$$
$$\int_0^t \theta_u dB_u = \int_0^t \theta_u^{(1)} dB_u^{(1)} + \int_0^t \theta_u^{(2)} dB_u^{(2)}$$

te pretpostavimo da vrijedi: $\mathbb{E}\int_0^T \parallel \theta_u \parallel^2 Z_u^2 du < \infty$. Stavimo $Z = Z_T$. Tada je $\mathbb{E}Z = 1$ te je uz vjerojatnosnu mjeru P^* definiranu sa:

$$P^*(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

proces $\widetilde{B} = (\widetilde{B}^{(1)}, \widetilde{B}^{(2)})$ 2-dimenzionalno Brownovo gibanje.

2.2 Modeliranje na tržištu

Model počinjemo konstruirati pod pretpostavkom da se financijsko tržište koje promatramo sastoji od dvije vrste imovina. Prva imovina na našem tržištu je nerizična imovina cijene R_t u trenutku t. Ova imovina kupljena je po početnoj cijeni R_0 i prati predodređenu stopu rasta tijekom vremena. Primjer takve imovine može biti obveznica. Nerizična imovina može biti opisana običnom diferencijalnom jednadžbom:

$$dR_t = rR_t dt$$

pri čemu je r fiksna kamatna stopa na imovinu. Uzimanjem $R_0 = 1$, rješenje jednadžbe dano je s $R_t = e^{rt}$ za $t > 0$.
Druga imovina na našem tržištu je rizična imovina cijene S_t u trenutku t. Rizičnu imovinu možemo promatrati kao dionicu ili indeks dionice. U našem modelu, kretanje cijene rizične imovine možemo rastaviti na dvije komponente. Takva imovina slijedi parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}$ srednja stopa povrata, a $\sigma > 0$ konstantna volatilnost. Alternativno, tu jednadžbu možemo zapisati u integralnom obliku:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s$$

gdje je drugi integral Itôv integral, a $S_0 \geq 0$ početna cijena rizične imovine. Parametar σ može biti procijenjen kao standardna devijacija dnevnih povrata. Nažalost, pretpostavka o konstantnoj volatilnosti tijekom vremena je nerealna. Općenito, srednju stopu povrata μ i konstantnu volatilnost σ možemo zamijeniti odgovarajućim slučajnim procesima $(\mu(t, S_t); t \geq 0)$ i $(\sigma(t, S_t); t \geq 0)$ pa je cijena rizične imovine dana stohastičkom diferencijalnom jednadžbom:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t.$$

Definicija 2.2.1. *Portfelj ili strategija je $\mathbb{F}$-adaptiran slučajan proces $\Phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1); t \in [0, T])$ pri čemu je ϕ_t^0 količina novca ili obveznica u trenutku t, a ϕ_t^1 količina dionica u trenutku t. Vrijednost portfelja u trenutku t dana je sa:*

$$V_t^\Phi = \phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t.$$

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je portfelj $\Phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1); t \in [0, T])$ samofinancirajući ako je $\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T |\phi_t^1|^2 dt < \infty$ $\mathbb{P}$-g.s. i za sve $t \in [0, T]$ vrijedi:*

$$V_t^\Phi = V_0^\Phi + \int_0^t \phi_s^0 dR_s + \int_0^t \phi_s^1 dS_s \ \ \mathbb{P} - g.s.$$

Poglavlje 3

Hestonov model za europske opcije

3.1 Dinamika modela

Neka su $W^{(1)} = (W_t^{(1)}; t \geq 0)$ i $W^{(2)} = (W_t^{(2)}; t \geq 0)$ Brownova gibanja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$. Hestonov model pretpostavlja da osnovna cijena dionice, $S = (S_t; t \geq 0)$, slijedi Black-Scholesov tip slučajnog procesa, a stohastička varijanca $v = (v_t; t \geq 0)$ Cox-Ingersoll-Rossov proces. Stoga je Hestonov model prikazan pomoću bivarijatnog sustava stohastičkih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje je $\mathbb{E}[W_t^{(1)} W_t^{(2)}] = \rho t$. Zbog činjenice da je v_t uvijek nenegativno stohastičke diferencijalne jednadžbe imaju smisla. Pogledamo li heuristički, kada $v_t \to 0$ prvi se dio druge jednadžbe u (3.1) povećava, drift postaje jako pozitivan te gura proces u suprotnom smjeru, odnosno u pozitivnom smjeru, dalje od 0. Model (3.1) određen je sljedećim parametrima:

- μ drift dionice;
- $\kappa > 0$ srednja brzina obrtaja za varijancu:
- $\theta > 0$ srednja razina obrtaja za varijancu;
- $\sigma > 0$ volatilnost varijance;
- $v_0 > 0$ početna razina varijance;
- $S_0 > 0$ početna razina (cijena) dionice;
- $\rho \in [-1, 1]$ korelacija između dva Brownova gibanja $W^{(1)}$ i $W^{(2)}$.

Neki autori v_0 ne promatraju kao parametar već kao slučajnu varijablu koja označava početno stanje jer volatilnost ne možemo promatrati, već samo procijeniti. Uočimo da stohastičkim diferencijalnim jednadžbama (3.1) modeliramo proces varijance v, a ne standardne devijacije, tj. volatilnosti. Specijalno, proces varijance možemo modelirati pomoću Ornstein-Uhlenbeckovog procesa za volatilnost definiranog stohastičkom diferencijalnom jednadžbom:

$$dh_t = -\beta h_t dt + \delta dW_t^{(2)} \tag{3.2}$$

pri čemu su $\beta, \delta > 0$. Pretpostavimo li da standardna devijacija slijedi Ornstein-Uhlenbeckov proces definiran jednakošću (3.2), korištenjem formule iz Teorema 2.1.6 dobivamo stohastičku diferencijalnu jednadžbu za volatilnost:

$$dv_t = (\delta^2 - 2\beta v_t)dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_t^{(2)}.$$

Dobivena jednadžba strukturom podsjeća na drugu jednadžbu iz (3.1). Izjednačavanjem konstanti tako da vrijedi: $\kappa = 2\beta$, $\theta = \delta^2/(2\beta)$ te $\sigma = 2\delta$ pomoću izvedene jednadžbe dobivamo upravo stohastičku diferencijalnu jednadžbu iz Hestonovog modela koja prikazuje kretanje volatilnosti. Od sada nadalje pretpostavljamo da parametri κ, θ i σ zadovoljavaju tzv. Fellerov uvjet dan sa $2\kappa\theta > \sigma^2$ koji osigurava da je proces varijance uvijek strogo pozitivan.

Cijena dionica i varijanca slijede proces (3.1) uz povijesnu mjeru $\mathbb{P}$, poznatu kao fizička mjera. U svrhu određivanja cijena izvedenica, potrebno je odrediti razdiobu dvodimenzionalnog slučajnog procesa (S, v) obzirom na mjeru neutralnu na rizik. Prisjetimo se, mjera neutralna na rizik ili martingalna mjera je ona mjera s obzirom na koju je očekivanje diskontirane vrijednosti imovine u trenutku t, uvjetno na $\mathcal{F}_s$ jednako cijeni diskontirane imovine u trenutku, s, odnosno zapisano matematički:

$$\widetilde{S}_s^i = \mathbb{E}^*\left[\widetilde{S}_t^i \mid \mathcal{F}_s\right]$$

za svaki $s < t$. Heston zaključuje da je prostor ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{P}$ neprazan te da ekvivalentna martingalna mjera nije jedinstvena. Kako bismo pronašli mjeru obzirom na koju je diskontirana cijena dionice martignal; potrebno je pronaći procese koji transformiraju Brownova gibanja $W^{(i)} = (W_t^{(i)}; t \geq 0)$ u druga dva Brownova gibanja; $\widetilde{W^{(i)}} = (\widetilde{W_t^{(i)}}; t \geq 0)$ za $i = 1, 2$. Ta je mjera $\mathbb{Q}$ određena 2-dimenzionalanim adaptiranim slučajnim procesom $\Theta = (\theta_t; t \geq 0) = ((\theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}); t \geq 0)$ iz Girsanovljevog teorema.

Budući da su nam za primjenu Girsanovljevog dvodimenzionalnog teorema, Teorem 2.1.8, potrebna dva nezavisna Brownova gibanja koristimo transformaciju dvaju nezavisnih Brownovih gibanja $B^{(1)} = (B_t^{(1)}; t \geq 0)$ i $B^{(2)} = (B_t^{(2)}; t \geq 0)$. Zbog dekompozicije Choleskog vrijedi:

$$(W^{(1)}, W^{(2)}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (\rho B^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}B^{(2)}, B^{(1)}) \tag{3.3}$$

budući da vrijedi:

$$\mathbb{E}[(\rho B_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}B_t^{(2)})B_t^{(1)}] = \mathbb{E}[\rho(B_t^{(1)})^2] + \sqrt{1-\rho^2}\mathbb{E}[B_t^{(2)}B_t^{(1)}] = \rho t.$$

Heston najprije definira $\widetilde{W_t^{(1)}}$ sa:

$$\widetilde{W_t^{(1)}} = W_t^{(1)} + \frac{\mu - r}{\sqrt{\nu_t}}t. \tag{3.4}$$

Koristeći jednakost (3.4) zaključujemo da je proces cijena dionica u formi mjere neutralne na rizik zadan sa:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{\nu_t}S_t d\widetilde{W_t^{(1)}}. \tag{3.5}$$

Tada kretanje diskontirane cijene dionica slijedi stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$d\widetilde{S}_t = \sqrt{\nu_t}\widetilde{S}_t d\widetilde{W_t^{(1)}}.$$

Navedeni je proces Itôv integral pa je samim time i martingal, dakle pronašli smo ekvivalentnu martingalnu mjeru. Kako bi pronašli još jednu ekvivalentnu martingalnu mjeru prateći Hestona definiramo $\widetilde{W_t^{(2)}}$ sa:

$$\widetilde{W_t^{(2)}} = W_t^{(2)} + \frac{\lambda(S_t, \nu_t, t)}{\sigma\sqrt{\nu_t}}. \tag{3.6}$$

Za $\widetilde{W_t^{(2)}}$ vrijedi da je oblika:

$$\widetilde{W_t^{(2)}} = B_t^{(1)} + \int_0^t \theta_u^{(1)} du = W_t^{(2)} + \int_0^t \theta_u^{(1)} du.$$

Ponekad je jednostavnije promatati proces logaritamskih cijena kao kod geometrijskog Brownovog gibanja. Stohastička diferencijalna jednadžba za proces logaritamskih cijena dana je sa:

$$d\ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\nu_t)dt + \sqrt{\nu_t}dW_t^{(1)}.$$

Proces neutralan na rizik za logaritamske cijene dan je sa:

$$d\ln S_t = (r - \frac{1}{2}\nu_t)dt + \sqrt{\nu_t}d\widetilde{W_t^{(1)}}. \tag{3.7}$$

Ako dionica isplaćuje kontinuirani prinos od dividende, q, u jednadžbama (3.5) i (3.7) r zamjenjujemo sa $r - q$. Proces neutralan na rizik za varijancu možemo dobiti uvođenjem slučajne varijable $\lambda(S_t, v_t, t)$ (slučajnog procesa $(\lambda(S_t, v_t, t); t \geq 0)$) u stohastičku diferencijalnu jednadžbu za v_t na sljedeći način

$$dv_t = [\kappa(\theta - v_t) - \lambda(S_t, v_t, t)]dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widetilde{W_t^{(2)}}. \tag{3.8}$$

Funkciju $\lambda(S_t,\ v_t,$ t) zovemo premija volatilnosti rizika. Može se pokazati da se premija volatilnosti rizika može odabrati kao afina transformacija volatilnosti te ju možemo zapisati kao $\lambda(S, v, t) = \lambda v_t$, pri čemu je $\lambda > 0$ konstanta. Supstitucijom λv_t u jednadžbi (3.8) dobivamo Itôv proces obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{Q}$:

$$dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widetilde{W_t^{(2)}}$$

pri čemu su $\kappa^* = \kappa + \lambda$ te $\theta^* = \kappa\theta/(\kappa + \lambda)$ parametri neutralni na rizik za proces varijance. Dakle, dobivamo nov prikaz Hestonovog modela:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t d\widetilde{W_t^{(1)}} \\ dv_t &= \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widetilde{W_t^{(2)}} \end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\widetilde{W_t^{(1)}}\widetilde{W_t^{(2)}}] = \rho t$. Ovaj sustav zadovoljava formu bivarijatnog sustava stohastičkih diferencijalnih jednadžbi (3.1) obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{Q}$.
Ako je $\lambda = 0$, dobivamo $\kappa^* = \kappa$ te $\theta^* = \theta$ odnosno ti su parametri jednaki bez obzira gledamo li mjeru neutralnu na rizik ili fizičku mjeru. Budući da je parametar λ ugniježđen u κ^* i θ^* kada procijenimo parametre neutralne na rizik za cijene opcija već smo procijenili i λ.

3.2 Svojstva procesa varijance

Rezultati vezani za osnovna svojstva te svojstva varijance korištena u ovom potpoglavlju mogu se pronaći u [2]. Svojstva varijance v_t uvjetno na realizaciju v_s za $s < t$ mogu se odrediti korištenjem činjenice da je uvjetna distribucija slučajne varijable $2c_t v_t$ uvjetno na v_s jednaka χ^2-distribuciji s $d = 4\kappa\theta/\sigma^2$ stupnjeva slobode i parametrom necentriranosti $2c_t v_S e^{-\kappa(t-s)}$, pri čemu je

$$c_t = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}.$$

Očekivanje i varijanca od v_t, uvjetno na vrijednost v_s dane su sa:

$$m_{t,s} = \mathbb{E}[v_t \mid v_s] = \theta + (v_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)}$$

$$\Sigma_{t,s}^2 = Var[v_t \mid v_s] = \frac{v_s\sigma^2 e^{-\kappa(t-s)}}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2$$

pri čemu je detaljniji izvod moguće pronaći u [5, Chapter 1].
Kada $\kappa \to \infty$ očekivanje m se približava srednjoj razini obrtaja θ, a varijanca Σ^2 se približava 0. Kada $\kappa \to 0$ očekivanje se približava trenutnoj razini varijance, v_s, a varijanca se približava $\sigma^2 v_s(t-s)$. Kada $t \to \infty$ javlja se svojstvo vraćanja prema srednjemu odnosno *mean-reverting property* te očekivanje teži srednjoj razini obrtaja θ za varijancu.

3.3 Cijena europske call opcije

Cijena europske call opcije u Hestonovu modelu može biti prikazana slično kao u Black-Scholesovu modelu. Neka je $\tau = T - t$. Cijena europske call opcije na dionicu u trenutku t koja ne isplaćuje dividendu sa trenutnom cijenom S_t, cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T, je diskontirana očekivana vrijednost isplate obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} C(K) &= e^{-r\tau}\mathbb{E}[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau}\mathbb{E}[(S_T - K)1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau}\mathbb{E}[S_T 1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] - Ke^{-r\tau}\mathbb{E}[1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= S_t P_1 - Ke^{-r\tau}P_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

pri čemu je 1_A karakteristična funkcija događaja A, dok P_1 i P_2 predstavljaju oznake za $P_1 = e^{-r\tau}\mathbb{E}[\frac{S_T}{S_t}1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t]$, $P_2 = \mathbb{E}[1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t]$. Jednakost (3.9) vrijedi i u Black-Scholes-Mertonovom modelu, pri čemu je $P_1 = \Phi(d_1)$ te $P_2 = \Phi(d_2)$, dok su d_1, d_2 su definirani sa:

$$d_{1,2}(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right].$$

Uvedene su oznake P_1 i P_2 pri čemu P_2 predstavlja vjerojatnost opcije koja istječe u novac dok je P_1 očekivanje od S_T/S_t na događaju na kojemu opcija istječe u novac.
Neka su od sada slučajni procesi $W^{(1)} = (W_t^{(1)}; t \geq 0)$ te $W^{(2)} = (W_t^{(2)}; t \geq 0)$ Brownova gibanja s obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{E}$ očekivanje s obzirom na $\mathbb{Q}$. Tada možemo pisati:

$$\mathbb{E}[1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(\ln S_T > \ln K \mid \mathcal{F}_t) = P_2.$$

Procjena $e^{-r\tau}\mathbb{E}[S_T 1_{\{S_T>K\}}]$ zahtjeva promjenu mjere iz $\mathbb{Q}$ u mjeru $\mathbb{Q}^S$. Želimo definirati mjeru $\mathbb{Q}^S$ tako da je $\mathbb{Q}^S(A) = \mathbb{E}[S_T 1_A]$ za svaki $A \in \mathcal{F}_T$ te koristimo Radon-Nikodymovu derivaciju:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^{\mathbb{S}}} = \frac{R_T/R_t}{S_T/S_t} \tag{3.10}$$

pri čemu je $R_t = exp(\int_0^t rdu) = e^{rt}$. Prvi izraz u zadnjem redu od (3.9) možemo zapisati kao:

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[S_T 1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] = S_t\mathbb{E}\left[\frac{S_T/S_t}{R_T/R_t}1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t\right] = S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{S_T/S_t}{R_T/R_t}1_{\{S_T>K\}}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}[1_{\{S_T>K\}} \mid \mathcal{F}_t] = S_t\mathbb{Q}^S(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) = S_tP_1.$$

Ovo implicira da cijena europske call opcije iz (3.9) može biti napisana kao

$$C(K) = S_t\mathbb{Q}^S(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) - Ke^{-rt}\mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t). \tag{3.11}$$

3.4 Hestonova parcijalna diferencijalna jednadžba

Parcijalna diferencijalna jednadžba za Hestonov model poseban je slučaj parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za modele stohastičke volatilnosti. Kod Black-Scholesovog modela promatramo financijsko tržište na kojemu postoje dva financijska instrumenta; novac koji se ukamaćuje po neprekidnoj kamatnoj stopi te dionice čiju cijenu modeliramo pomoću geometrijskog Brownovog gibanja. Pravilnim odabirom izvedenice portfelj možemo učiniti bezrizičnim. Najprije promatramo portfelj Π kojega izvedenica V čini bezrizičnim:

$$\Pi = V + \Delta S.$$

U Hestonovom je modelu potrebna dodatna izvedenica kako bi se zaštitili i od odstupanja volatilnosti te ponovno učinili portfelj bezrizičnim. Stoga, formiramo portfelj koji se sastoji od opcije $V = V(S, v, t)$, Δ jedinica dionica, te φ jedinica druge opcije $U(S, v, t)$. Vrijednost portfelja dana je sa:

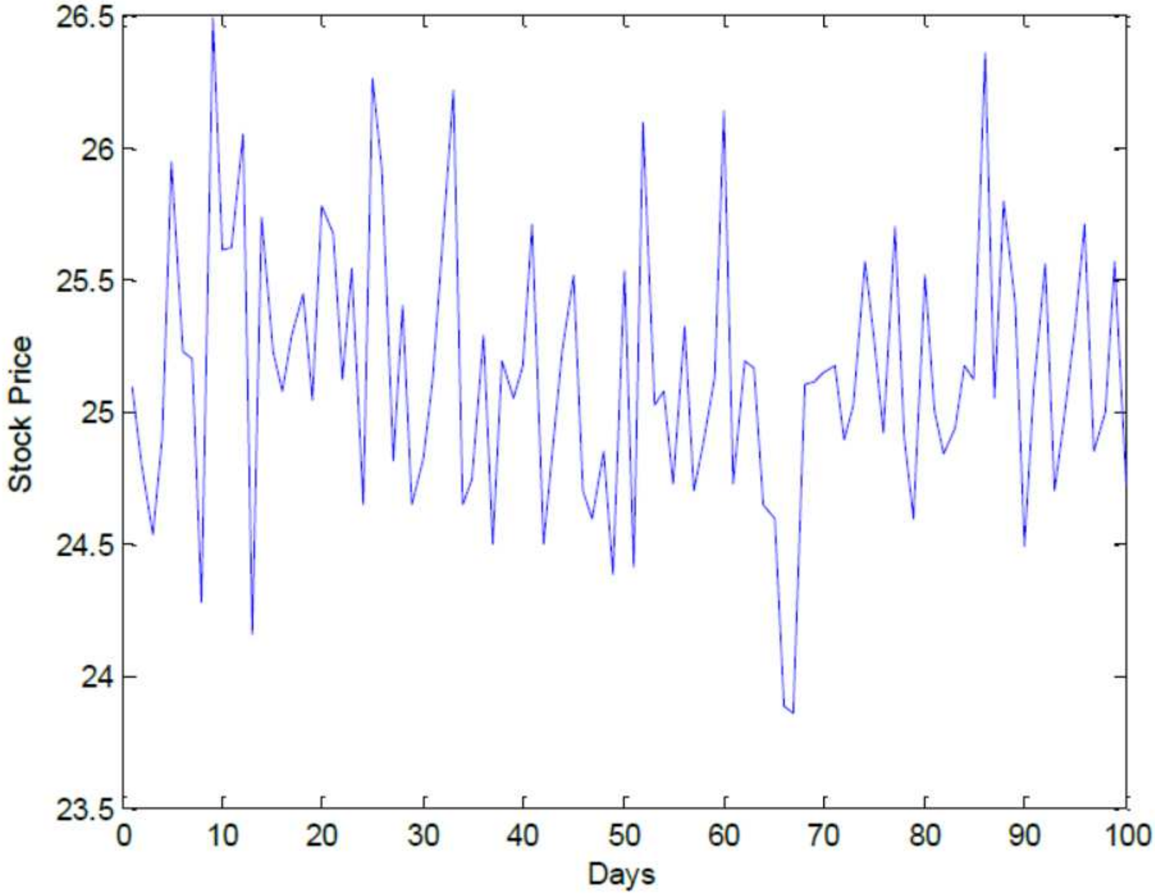
$$\Pi = V + \Delta S + \varphi U. \tag{3.12}$$

Pretpostavimo li da se portfelj samofinancira, promjena u vrijednosti portfelja dana je sa:

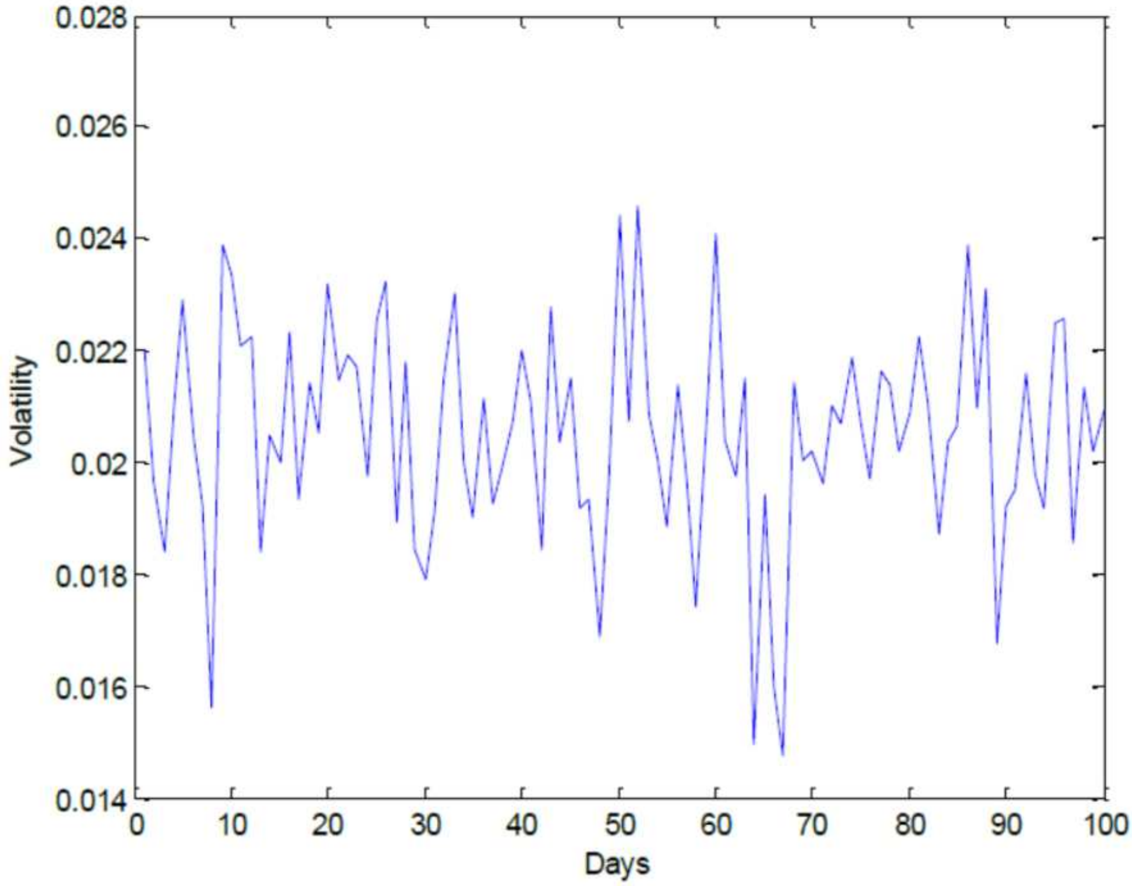
$$d\Pi = dV + \Delta dS + \varphi dU. \tag{3.13}$$

Strategija je slična strategiji korištenoj za Black-Scholesov model. Primjenjujemo generalizirani oblik Itôve leme kako bismo pronašli procese koji opisuju kretanje vrijednosti opcija U i V što kasnije koristimo za izvod procesa koji opisuje kretanje vrijednosti portfelja Π. Nakon toga tražimo vrijednosti parametara Δ i φ uz koje je portfelj bezrizičan te taj rezultat koristimo za izvod Hestonove parcijalne diferencijalne jednadžbe.
Izvođenje forme bezrizičnog portfelja započinjemo primjenom generaliziranog oblika Itôve leme na diferencijalni oblik $V(S, v, t)$. Korištenjem generalizirane Itôve formule za funkciju dvaju Itôvih procesa slijedi:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}v\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}dt + \sigma\rho vS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v}dt \tag{3.14}$$



Slika 3.1: Dinamika cijena dionica u Hestonovom modelu. Slika je preuzeta iz [7, Figure 3.1.]



Slika 3.2: Dinamika volatilnosti u Hestonovom modelu. Slika je preuzeta iz [7, Figure 3.2.]

pri čemu smo koristili da je $(dS)^2 = vS^2(dW^{(1)})^2 = vS^2dt$, $(dv)^2 = \sigma^2 v dt$, $dS\,dv = \sigma v S\,dW^{(1)}dW^{(2)} = \sigma\rho v S\,dt$, $(dt)^2 = 0$, te $dW^{(1)}dt = dW^{(2)}dt = 0$. Primjenom Itôve leme na diferencijalni oblik od $U(S, v, t)$ dobivamo izraz jednak (3.14), ali po varijabli U. Uvrstimo li ta dva izraza u (3.13) promjena u vrijednosti portfelja može biti zapisana kao:

$$\begin{aligned}
d\Pi &= dV + \Delta dS + \varphi dU \\
&= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right]dt \\
&+ \varphi\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma v S\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right]dt \\
&+ \left[\frac{\partial V}{\partial S} + \rho\frac{\partial U}{\partial S} + \Delta\right]dS + \left[\frac{\partial V}{\partial v} + \varphi\frac{\partial U}{\partial v}\right]dv.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Kako bi portfelj bio zaštićen od kretanja tržišta i volatilnosti, posljednja dva izraza u (3.15) moraju biti jednaki nula. Iz toga zaključujemo da su parametri definirani sa:

$$\varphi = -\frac{\partial V}{\partial v}/\frac{\partial U}{\partial v}, \qquad \Delta = -\rho\frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti parametara φ i Δ u (3.15) dobivamo:

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma v S\frac{\partial^2 V}{\partial S\,\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right]dt \\
&+ \varphi\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma v S\frac{\partial^2 U}{\partial S\,\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right]dt
\end{aligned}$$

Što kraće možemo pisati kao $d\Pi = (A + \varphi B)dt$. Budući da kretanje vrijednosti portfelja gledamo s obzirom na bezrizičnu kamatnu stopu, promjenu u vrijednosti portfelja možemo zapisati kao $d\Pi = r\Pi dt$. Koristeći jednakost (3.12) imamo $A + \varphi B = r(V + \Delta S + \varphi U)$ iz čega ponovno slijedi:

$$\frac{A - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{B - rU + rS\frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}. \tag{3.16}$$

Pogledamo li bolje jednadžbu, možemo vidjeti da je lijeva strana funkcija od V, dok je desna strana jednadžbe (3.16) funkcija od U. Pomoću izvoda iz [5, Chapter 1] vidimo da obje strane mogu biti zapisane kao funkcija više varijabli, $f(S, v, t)$ zadana sa:

$$f(S, v, t) = -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t)$$

pri čemu je $\lambda(S, v, t)$ premija volatilnosti rizika. Koristeći činjenicu da je premija volatilnosti rizika afina transformacija volatilnosti; $\lambda(S, v, t) = \lambda v$ supstitucijom funkcije $f(S, v, t)$

u lijevu stranu jednadžbe (3.16) dobivamo:

$$-\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t) = \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right] - rU + rS\frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}.$$

Posložimo faktore kako bismo dobili Hestonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u varijabli cijene S:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+\rho\sigma vS\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}-rU+rS\frac{\partial U}{\partial S}+[\kappa(\theta-v)-\lambda(S,v,t)]\frac{\partial U}{\partial v} = 0. \quad (3.17)$$

Granični uvjeti u jednadžbi vrijede za europsku call opciju s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K. U trenutku dospijeća, vrijednost call opcije jednaka je unutarnjoj vrijednosti te je dana sa

$$U(S, v, T) = max(0, S - K).$$

Kada je cijena dionice nula, call opcija je bezvrijedna. Za velike vrijednosti od S cijena opcije raste linearno. Cijena opcije se obično povećava s volatilnosti, no ograničena je cijenom dionice. Kada volatilnost postigne svoju najveću vrijednost, cijena opcije ima tendenciju postati jednaka cijeni dionice. To implicira tri granična uvjeta:

$$U(0, v, t) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \qquad U(S, \infty, t) = S.$$

Parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.17) možemo zapisati kao

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U - rU = 0$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\alpha = {} & rS\frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2}{\partial S^2} \\ & + [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)]\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2}{\partial S\partial v}\end{aligned} \quad (3.18)$$

generator Hestonovog modela. Prvi dio u jednadžbi (3.18) je generator Black-Scholesovog modela, pri čemu je $v = \sqrt{\sigma_{BS}}$, a σ_{BS} Black-Scholesova konstantna volatilnost.
Definiramo logaritamsku cijenu $x = \ln S$ i izražavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u varijablama (x, v, t) umjesto (S, v, t). Dolazimo do jednostavnije forme parcijalne diferencijalne jednadžbe u kojoj se ne pojavljuje trenutna cijena S. Zbog lančanog pravila vrijedi:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{S}\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial x}.$$

Zbog pravila produkta vrijedi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial x} = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u Hestonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.17) svi izrazi sa S nestaju te dobivamo Hestonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u terminima logaritamske cijene $x = \ln S$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}v)\frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x}& \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + [\kappa(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial U}{\partial v} &= 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.5 Parcijalne diferencijalne jednadžbe za P_1 i P_2

Jednadžbu (3.11) možemo zapisati korištenjem $x = x_t = \ln S_t$ te $\tau = T - t$ u obliku

$$C(K) = e^x P_1 - Ke^{-r\tau} P_2. \tag{3.20}$$

Ta jednadžba izražava cijenu europske call opcije $C(K)$ u terminima vjerojatnosti pozitivnih isplata $P_1 = \mathbb{Q}^S(S_T > K)$ te $P_2 = \mathbb{Q}(S_T > K)$. Budući da europska call opcija zadovoljava jednadžbu (3.19) potrebno je pronaći parcijalne derivacije jednadžbe (3.20) po varijablama, te izraziti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u terminima P_1 i P_2.
Parcijalna derivacija cijene europske call opcije $C(K)$ po t dana je sa

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^x\frac{\partial P_1}{\partial t} - Ke^{-r\tau}\left[-rP_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t}\right].$$

Parcijalna derivacija po x:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^x\left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x}\right] - Ke^{-r\tau}\frac{\partial P_2}{\partial x}.$$

Druga parcijalna derivacija:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= e^x P_1 + 2e^x\frac{\partial P_1}{\partial x} + e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ &= e^x\left[P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right] - Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Parcijalno deriviramo po v:

$$\frac{\partial C}{\partial v} = e^x\frac{\partial P_1}{\partial v} - Ke^{-r\tau}\frac{\partial P_2}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} = e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2}.$$

Parcijalno deriviramo po v i x:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial v} = e^x \left[\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v}.$$

Budući da je europska call opcija $C(K)$ financijska izvedenica, ona zadovoljava Hestonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.19) koju možemo zapisati u varijabli $C(K)$;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial C}{\partial x} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} = 0. \quad (3.21)$$

Hestonov model pretpostavlja da (3.21) vrijedi za sve vrijednosti europske call opcije $C(K)$, posebno i za svaku cijenu izvršenja $K \geq 0$, svaku cijenu dionice $S_t \geq 0$ te svaku kamatnu stopu $r \geq 0$. Ako uzmemo $K = 0$ i $S_t = 1$ jednadžba (3.9) daje opciju čija je cijena P_1. Ova će opcija također slijediti (3.21). Slično, uzmemo li $S_t = 0$, $K = 1$ i $r = 0$ u (3.9) dobivamo opciju čija je cijena $-P_2$. Budući da za $-P_2$ vrijedi parcijalna diferencijalna jednadžba, ona vrijedi i za P_2.
Promatramo članove napisanih parcijalnih derivacija od $C(K)$ koji u sebi sadrže P_1, dijeljenjem sa e^x te uvrštavanjem u jednadžbu (3.21) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} &+ \frac{1}{2} v \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] + \rho \sigma v \left[\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - r P_1 + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Pojednostavljivanjem izraza dobivamo:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} + [\rho \sigma v + \kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} = 0. \quad (3.22)$$

Slično, promatranjem članova parcijalnih derivacija od $C(K)$ koji u sebi sadrže P_2, dijeljenjem sa $-K e^{-r\tau}$ te uvrštavanjem u parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.21) slijedi:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_2}{\partial v} = 0. \quad (3.23)$$

Pojednostavljeno korištenjem indeksa j jednadžbe (3.22) i (3.23) možemo zapisati kao

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0 \qquad (3.24)$$

za $j = 1, 2$ pri čemu je $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$ te $b_2 = \kappa + \lambda$. Korištenjem tih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi lako je izvesti (3.21).

3.6 Hestonova funkcija

Rješenja jednadžbi (3.24) za $j = 1, 2$ nije lako dobiti te zbog toga uvodimo pojam karakteristične funkcije. Kada su nam poznate karakteristične funkcije lako je odrediti vjerojatnosti pozitivnih isplata P_1 i P_2. Neka je f_j za $j = 1, 2$ karakteristična funkcija od $\ln S_T$ uvjetno na $x_t = \ln S_t$ i v_t, obzirom na vjerojatnost $\mathbb{Q}$ za $j = 2$ i s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{Q}^S$ za $j = 1$. Heston pretpostavlja da je uvjetna karakteristična funkcija za temeljnu cijenu dionice oblika:

$$f_j(\phi; x, v) = \exp\left(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x\right) \tag{3.25}$$

za $j = 1, 2$ pri čemu je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, C_j i D_j koeficijenti, a $\tau = T - t$ vrijeme dospijeća. Koristeći Gil-Pelaez inverzni teorem iz [4], P_j za $j = 1, 2$ možemo zapisati kao:

$$P_j(x, v, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\varphi \log(K)} f_j(\varphi; x, v)}{i\varphi}\right] d\varphi$$

za j=1,2. Tada zbog Feynman-Kac teorema prikazanog u [5] vrijedi:

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial f_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + (r - u_j v)\frac{\partial f_j}{\partial x} + (\kappa\theta - b_j v)\frac{\partial f_j}{\partial v} = 0. \tag{3.26}$$

Kako bismo riješili parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, potrebno je izračunati parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f_j}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau}v\right) f_j, \quad \frac{\partial f_j}{\partial x} = i\phi f_j, \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} = i^2\phi^2 = -\phi f_j^2,$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v} = D_j f_j, \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} = D_j^2 f_j, \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = i\phi D_j f_j.$$

Supstitucijom diferencijala u jednadžbu (3.26) te dijeljenjem jednakosti sa f_j dobivamo:

$$-\left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau}v\right) + \rho\sigma v i\phi D_j - \frac{1}{2}v\phi^2 + \frac{1}{2}v\sigma^2 D_j^2 + (r + u_j v)i\phi + (\kappa\theta - b_j v)D_j = 0.$$

Faktore u gornjoj jednadžbi posložimo ovisno o tome imaju li uz sebe v ili nemaju:

$$v\left(-\frac{\partial D_j}{\partial \tau} + \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j + u_j i\phi - b_j D_j\right) + \left(-\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + ri\phi + \kappa\theta D_j\right) = 0.$$

Budući da jednakost vrijedi za svaki v rastavom jednakosti te izjednačavanjem oba sumanda s nulom slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_j}{\partial \tau} &= \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} &= ri\phi + \kappa\theta D_j. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Uz početne uvjete $D_j(0,\phi) = 0$ i $C_j(0,\phi) = 0$ prva jednadžba je Riccatijeva diferencijalna jednadžba dok je druga obična diferencijalna te može biti riješena nakon uvrštavanja izraza za D_j.
Prvu jednadžbu iz (3.27) možemo zapisati kao kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + (\rho\sigma i\phi - b_j)D_j + (-\frac{1}{2}\phi^2 + u_j i\phi).$$

Dodatno, uvodimo oznake: $Z_j = (-\frac{1}{2}\phi^2 + u_j i\phi)$, $Q_j = (-\rho\sigma i\phi + b_j)$, $R_j = -\frac{1}{2}\phi^2 u_j i\phi$ pomoću kojih možemo pisati:

$$D_j' = Z_j - Q_j D_j + R_j D_j^2.$$

Koristeći Riccatijevu jednadžbu uz supstituciju $D_j = \frac{-w'}{R_j w}$ dobivamo:

$$w'' + Q_j w' + R_j = 0. \tag{3.28}$$

Karakteristična jednadžba za (3.28) oblika je $x^2 + Q_j x + R_j = 0$ s korijenima:

$$x_{1,2} = \frac{-Q_j \pm \sqrt{Q_j^2 - 4R_j}}{2}$$

te je rješenje za w dano sa $w = Ke^{x_1\tau} + e^{x_2\tau}$. Uvrštavanjem rješenja od w u jednakost za D_j dobivamo:

$$D_j = -\frac{1}{R_j}\left(\frac{Kx_1e^{x_1\tau} + x_2e^{x_2\tau}}{Ke^{x_1\tau} + e^{x_2\tau}}\right).$$

Iz uvjeta $D_j(0,\phi) = 0$ slijedi $K = \frac{-x_2}{x_1}$. Dobivamo rješenje za D_j:

$$D_j(\tau,\phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2}\left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}}\right)$$

pri čemu je:

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$
$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}.$$

Integriranjem druge jednakosti iz (3.27) dobivamo rješenje za C_j:

$$C_j = \int_0^\tau ri\phi dy + \kappa\theta \int_0^\tau D_j dy + c$$

gdje je c konstanta do koje možemo doći nakon integriranja i korištenja početnog uvjeta $C_j(0,\phi) = 0$. Rješenje dobivamo uvrštavanjem:

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right].$$

Nakon što smo dobili koeficijente karakteristične funkcije konačno ju možemo u cijelosti zapisati. Varijabla x predstavlja logaritamsku cijenu dionice, v je varijanca dok početnu vrijednost v_0 moramo procijeniti.

3.7 Svojstva Hestonovog modela

Hestonov je model cijenjen i prepoznat kao značajan model za određivanje cijena izvedenica. Ipak, dolazi s ponekim manama.
Prednosti:

- Model dolazi u poluzatvorenoj formi za europsku call opciju koja je definirana formulom (3.20) te koja je posebice korisna kod kalibracije. U praksi; modeli određivanja cijena opcija dozvoljavaju velike brojeve. Važno je imati mogućnost brzog određivanja procijenjenih parametara kako bi proces trajao što kraće i zbog toga je poželjna poluzatvorena forma.

- Hestonov model nije određen pojedinom distribucijom kao što je primjera radi Black-Scholesov određen jediničnom normalnom.

- Krivulja volatilnosti poznata je u mnogim literaturama pod nazivom Volatility smile. Nakon rješavanja Hestonove parcijalne diferencijalne jednadžbe dobili smo ne-arbitražnu cijenu europske call opcije. Tu cijenu koristimo za računanje primijenjene volatilnosti koristeći Black-Scholesov model. Izgled krivulje primijenjene volatilnosti ovisi o predznaku korelacije. U slučaju da je korelacija jednaka nuli; volatilnost novca se smanjuje, a volatilnost izvan novca povećava. Pozitivna korelacija uzrokuje da je krivulja volatilnosti oblika parabole pozitivne orijentacije, dok negativna korelacija daje parabolu negativne orijentacije odnosno okrenutu prema dolje.

- Volatilnost ima svojstvo vraćanja prema srednjem što znači da se nakon pojave šokova u volatilnosti ona s vremenom vraća na početnu vrijednost, to dolazi od parametara srednjeg povrata koji se nalazi na našem tržištu.

Nedostaci:

- Glavni je problem uključiti kalibriranje modela. Zbog velike osjetljivosti početnih parametara rezultati dobiveni malim promjenama mogu značajno varirati.

- Diskretizacija može biti problematična kada se vrijednosti volatilnosti približavaju nuli ili u slučaju velikih vrijednosti volatilnosti. Zbog toga se rade posebne analize u slučaju kada je vrijednost u okolici nule.

- Model uključuje integriranje potencijalno velikih izraza što može dovesti do problema i divergencije integrala. Zbog toga je važno naglasiti poluzatvorenu formu koja uključuje integraciju.

Poglavlje 4

Rješavanje Heston-Riccatijeve jednadžbe

4.1 Riccatijeva jednadžba u općenitoj formi

Riccatijeva jednadžba ima važnu ulogu u rješavanju problema vezanih za financijsku matematiku, te također daje algoritam za klasifikaciju zatvorenih rješenja. Razlomljena Riccatijeva jednadžba poznata je kao dio rješenja za Hestonovu karakterističnu funkciju zbog svoje eksplicitne forme te je potrebno osloniti se na numeričke metode kako bih se došlo do rješenja. Riccatijeva jednadžba za $y(t)$ s koeficijentima $P(t)$, $Q(t)$ i $R(t)$ definirana je sa

$$\frac{dy(t)}{dt} = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)y(t)^2.$$

Jednadžba može biti riješena uzimajući u obzir sljedeću diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$w'' - \left[\frac{P'}{P} + Q\right] w' + PRw = 0 \tag{4.1}$$

što možemo zapisati kao $w'' + bw' + cw = 0$. Rješenje jednadžbe (4.1) zadovoljava sljedeću jednakost:

$$y(t) = -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{R(t)}.$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti pomoću kvadratne jednadžbe $r^2 + br + c = 0$, koja ima dva rješenja; α i β:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe drugog reda (4.1) dano je sa

$$w(t) = Me^{\alpha t} + Ne^{\beta t}$$

pri čemu su M i N konstante. Rješenje Riccatijeve jednadžbe tada je jednako

$$y(t) = -\frac{M\alpha e^{\alpha t} + N\beta e^{\beta t}}{Me^{\alpha t} + Ne^{\beta t}} \frac{1}{R(t)}.$$

Iz jednakosti (3.27) zaključujemo da Hestonova Riccati jednadžba može biti zapisana kao:

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2 \tag{4.2}$$

pri čemu su

$$P_j = u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2, \qquad Q_j = b_j - \rho\sigma i\phi, \qquad R = \frac{1}{2}\sigma^2$$

za $j = 1, 2$. Pripadajuća diferencijalna jednadžba drugog reda je

$$w'' + Q_j w' + P_j R w = 0$$

te $D_j = -\frac{1}{R}\frac{w'}{w}$. Pomoćna jednadžba $r^2 + Q_j r + P_j R = 0$ ima korijene:

$$\alpha_j = \frac{-Q_j + \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j + d_j}{2}$$
$$\beta_j = \frac{-Q_j - \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j - d_j}{2}$$

$$d_j = \alpha_j - \beta_j = \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R} = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}.$$

Rješenje Hestonove Riccati jednadžbe tada je:

$$D_j = -\frac{1}{R}\frac{w'}{w} = -\frac{1}{R}\left(\frac{M\alpha_j e^{\alpha_j \tau} + N\beta_j e^{\beta_j \tau}}{Me^{\alpha_j \tau} + Ne^{\beta_j \tau}}\right) = -\frac{1}{R}\left(\frac{H\alpha_j e^{\alpha_j \tau} + \beta_j e^{\beta_j \tau}}{He^{\alpha_j \tau} + e^{\beta_j \tau}}\right) \tag{4.3}$$

pri čemu je $H = M/N$. Inicijalni uvjet $D_j(0, \phi) = 0$ implicira da, kada $\tau = 0$ uvrstimo u (4.3), brojnik postaje $H\alpha + \beta = 0$, iz čega slijedi $H = -\beta/\alpha$. Rješenje D_j postaje:

$$D_j = -\frac{\beta_j}{R}\left(\frac{-e^{\alpha_j \tau} + e^{\beta_j \tau}}{-g_j e^{\alpha_j \tau} + e^{\beta_j \tau}}\right) = -\frac{\beta_j}{R}\left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}}\right) = \frac{Q_j + d_j}{2R}\left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}}\right)$$

pri čemu je

$$g_j = -H = \frac{\beta_j}{\alpha_j} = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} = \frac{Q_j - d_j}{Q_j + d_j}.$$

Rješenje za D_j stoga možemo pisati kao

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2}\left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}}\right).$$

Rješenje C_j dobivamo integriranjem druge jednadžbe u (3.27):

$$C_j = \int_0^\tau ri\phi dy + a\left(\frac{Q_j + d_j}{\sigma^2}\right)\int_0^\tau \left(\frac{1 - e^{d_j y}}{1 - g_j e^{d_j y}}\right)dy + H_1 \tag{4.4}$$

pri čemu je H_1 konstanta. Prvi integral jednak je $ri\phi\tau$, a drugi može biti riješen koristeći supstituciju $x = exp(d_j y)$ iz koje slijedi $dx = d_j exp(d_j y)dy$ i $dy = dx/(xd_j)$. Jednadžba (4.4) postaje

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{d_j}\left(\frac{Q_j + d_j}{\sigma^2}\right)\int_1^{exp(d_j\tau)}\left(\frac{1 - x}{1 - g_j x}\right)\frac{1}{x}dx + H_1 \tag{4.5}$$

gdje je $a = \kappa\theta$. Integral u (4.5) možemo dobiti rastavljanjem na parcijalne razlomke integranada

$$\begin{aligned}\int_1^{exp(d_j\tau)} \frac{1 - x}{x(1 - g_j x)}dx &= \int_1^{exp(d_j\tau)}\left[\frac{1}{x} - \frac{1 - g_j}{1 - g_j x}\right]dx \\ &= \left[\ln x + \frac{1 - g_j}{g_j}\ln(1 - g_j x)\right]\Bigg|_{x=1}^{x=exp(d_j\tau)} \\ &= \left[d_j\tau + \frac{1 - g_j}{g_j}\ln(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j})\right].\end{aligned}$$

Ponovnom supstitucijom integrala u (4.5) dobivamo rješenje za C_j:

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right] \tag{4.6}$$

pri čemu smo koristili inicijalni uvjet $C_j(0, \theta) = 0$ iz kojeg slijedi $H_1 = 0$.

4.2 Prinos od dividende i cijena put opcije

Ako pretpostavimo da je isplata dividendi kontinuirana, možemo ih uključiti u naš model. U tom slučaju, r zamjenjujemo sa $r - q$ u jednadžbi (3.5) te dobivamo

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t d\widetilde{W_t^{(1)}}.$$

Rješenje za C_j u jednadžbi (4.6) postaje

$$C_j = (r-q)i\phi\tau + \frac{\kappa\phi}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\ln\left(\frac{1-g_j e^{d_j\tau}}{1-g_j}\right)\right].$$

Da bi dobili cijenu europske put opcije $P(K)$ u trenutku t najprije računamo cijenu europske call opcije $C(K)$ u trenutku t. U jednadžbu (3.9) moramo uključiti $e^{-q\tau}$ kao prinos od dividende:

$$C(K) = S_t e^{-q\tau}P_1 - Ke^{-r\tau}P_2. \tag{4.7}$$

Cijenu put opcije možemo izraziti iz call-put pariteta

$$P(K) = C(K) + Ke^{-r\tau} - S_t e^{-q\tau}.$$

4.3 Black-Scholesov model kao poseban slučaj Hestonovog modela

Black-Scholesov model pretpostavlja da je kretanje cijene S_t obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{Q}$ dano stohastičkom diferencijalnom jednadžbom:

$$dS_t = rS_t + \sigma_{BS}S_t d\widetilde{W_t}.$$

Kako bi došli do rješenja ove jednadžbe najprije primjenjujemo Itôvu lemu kako bismo dobili kretanje procesa logaritamskih cijena dionica $d\ln S_t$ iz čega dobivamo dobro poznato geometrijsko Brownovo gibanje dano sa:

$$S_t = S_0 exp([r - \sigma_{BS}^2/2]t + \sigma_{BS}\widetilde{W_t}).$$

Iz toga slijedi da je uvjetno na $\mathcal{F}_t$ prirodni logaritam cijene dionice $\ln S_T$ normalno distribuirana slučajna varijabla s varijancom $\sigma_{BS}^2\tau$ i očekivanjem $\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2)\tau$ pri čemu je $\tau = T - t$ vrijeme do isteka opcije. Iz toga slijedi da za prirodni logaritam cijene dionice, $\ln S_T$ u Black-Scholesovom modelu vrijedi:

$$\mathbb{E}[e^{i\phi\ln S_T} \mid \mathcal{F}_t] = exp\left(i\phi\left[\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2\right)\tau\right] - \frac{1}{2}\phi^2\sigma_{BS}^2\tau\right). \tag{4.8}$$

Black-Scholesova parcijalna diferencijalna jednadžba dana je sa:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2 S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} - rU = 0.$$

Cijena call opcije u Black-Scholesovom modelu dana je sa:

$$C_{BS}(K) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

pri čemu su

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma_{BS}^2/2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma_{BS}^2/2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_{BS}\sqrt{\tau}$$

te Φ funkcija distribucija jedinične normalne razdiobe. Pretpostavljamo da je volatilnost σ_{BS} konstantna. Uzmemo li $\sigma = 0$ Riccatijeva jednadžba (4.2) postaje diferencijalna jednadžba prvog reda

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j,$$

pri čemu je $P_j = u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2$ te $Q_j = b_j$. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$D_j(\tau,\phi) = \frac{(u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2)(1 - e^{-b_j y})}{b_j}. \tag{4.9}$$

Općenito u slučaju $\sigma > 0$ možemo (4.9) uvrstiti u izraz za C_j u drugoj jednadžbi (3.27) te integrirati

$$\begin{aligned} C_j(\tau,\phi) &= ri\phi\tau + a\int_0^\tau \frac{(u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2)(1 - e^{-b_j y})}{b_j} dy + H_1 \\ &= ri\phi\tau + \frac{a(u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2)}{b_j}\left[\tau - \frac{(1 - e^{b_j\tau})}{b_j}\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

gdje smo koristili početni uvjet $C_j(0,\phi) = 0$ iz kojega slijedi $H_1 = 0$.
Uvrštavamo dobivene C_j i D_j u izraz za karakterističnu funkciju te radimo isto kao u slučaju $\sigma > 0$. Koeficijent korelacije, ρ, se više ne pojavljuje u izrazima za C_j i D_j.
Nadalje, promatramo slučaj kada je $j = 2$. Uvodimo $u_2 = -\frac{1}{2}$ i $b_2 = \kappa$ (uz $\lambda = 0$) u jednadžbe (4.9) i (4.10), pretpostavljamo $\theta = v_0$ te supstituiramo dobivene rezultate za $D_2(\tau,\phi)$ i $C_2(\tau,\phi)$ u karakterističnu funkciju (3.25). Drugu karakterističnu funkciju uvjetno na $\mathcal{F}_t$ možemo zapisati kao:

$$f_2(\phi) = exp\left(i\phi\left[x_0 + \left(r - \frac{1}{2}v_0\right)\tau\right] - \frac{1}{2}\phi^2 v_0\tau\right) \tag{4.11}$$

gdje je $x_0 = \ln S_0$ početna logaritamska cijena dionica, a v_0 konstantna varijanca. Jednadžba (4.11) jednakog je oblika kao jednadžba (4.8) uz karakterističnu funkciju $x_T = \ln S_T$ u Black-Scholesovom modelu, te uz Black-Scholesovu volatilnost $\sigma_{BS} = \sqrt{v_0}$.

Pri mjeri neutralnoj na rizik $\mathbb{Q}$, cijena dionice S_T uvjetno na $\mathcal{F}_t$ ima log normalnu distribuciju s varijancom $\sigma_{BS}^2\tau$ i očekivanjem $\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2)$ pomoću čega dobivamo:

$$\mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) = \Phi\left(\frac{\mu - \ln K}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}}\right) = \Phi(d_2).$$

Primjenom mjere kao u (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^S(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) &= \int_K^\infty d\mathbb{Q}^S = \int_K^\infty \frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} d\mathbb{Q} = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}\int_K^\infty S_T q_T(x)dx \\ &= \frac{e^{-r\tau}}{S_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \mid S_T > K] \qquad (4.12)\end{aligned}$$

pri čemu je $q_T(x)$ funkcija gustoće od S_T. Supstitucijom varijance i očekivanja od S_T te uvrštavanjem dobivenog izraza u posljednju liniju u jednadžbi (4.12) dobivamo

$$\mathbb{Q}^S(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) = \Phi\left(\frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}}\right) = \Phi(d_1).$$

Zbog toga, cijena Black-Scholesove call opcije može biti zapisana u formi jednadžbe (3.11) na sljedeći način:

$$C(K) = S_t\mathbb{Q}^S(S_T > K \mid \mathcal{F}_t) - Ke^{-r\tau}\mathbb{Q}(S_T > K \mid \mathcal{F}_t).$$

Poglavlje 5

Diskretizacija

Pod pojmom diskretna shema shvaćamo aproksimaciju neprekidnih diferencijalnih jednadžbi pomoću diskretnih diferencijalnih jednadžbi. Kako bismo prikazali kretanje cijene dionice $S = (S_t; t \geq 0)$ potrebno je promatrati stohastičku varijancu $v = (v_t; t \geq 0)$. Proces stohastičke varijance primjer je Cox-Ingersoll-Ross-ovog procesa koji je u početku korišten za modeliranje kratkoročnih kamatnih stopa. Iako postoje točne metode za simuliranje, slabije se koriste zbog male brzine izvršavanja. Cox-Ingersoll-Ross-ov proces nije definiran za negativne vrijednosti. Zbog toga moramo posebno analizirati proces kada je trenutna vrijednost u okolici nule. Potrebna nam je shema koja se ponaša drugačije u okolini nule, ali i dalje daje rezultat koji konvergira ispravnoj metodi. U Cox-Ingersoll-Ross-ovom modelu volatilnost σ utječe na negativan predznak modela.

5.1 Diskretizacija drugog reda za Cox-Ingersoll-Ross-ov model

Pomoću [1] Cox-Ingersoll-Ross-ov proces možemo zapisati u integralnoj formi kao:

$$X_t^x = x + \int_0^t (a - kX_s^x)ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s$$

s parametrima $(a, k, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, pri čemu je $t \in [0, T]$, a $x \geq 0$. Ovim procesom modeliramo proces volatilnosti u Hestonovom modelu.
Nadalje, uvodimo generator Hestonovog modela:

$$L^{CIR} f(x) = (a - \kappa x)\partial_x f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x \partial_x^2 f(x).$$

5.2 Ninomiya-Victoir shema

Koristeći teorem [1, Theorem 1.18] vidimo da operator L^{CIR} možemo rastaviti na dva procesa tako da je

$$L^{CIR} = V_0^{CIR} + \frac{1}{2}(V_1^{CIR})^2$$

pri čemu su:

$$V_0^{CIR} f(x) = (a - \kappa x - \frac{\sigma^2}{4}) f'(x)$$
$$V_1^{CIR} f(x) = \sigma \sqrt{x} f'(x).$$

Eksplicitno možemo riješiti obične diferencijalne jednadžbe povezane sa V_0^{CIR} i V_1^{CIR} te dobivamo sljedeća rješenja:

$$X_0^{CIR}(t,x) = xe^{-\kappa t} + (a - \frac{\sigma^2}{4})\Psi_\kappa(t) \tag{5.1}$$

$$X_1^{CIR}(t,x) = (\sqrt{x} + \frac{\sigma}{2}t)^2 \tag{5.2}$$

gdje je:

$$\Psi_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\kappa t}}{\kappa}, & \kappa \neq 0 \\ t, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Iz drugog dijela jednadžbe (5.1) vidimo da Ninomiya-Victoir-ova shema nije definirana za $\sigma^2 > 4a$ jer je u tom slučaju vrijednost od X_0^{CIR} manja od 0. Originalno dobijemo da je $X_1^{CIR}(t,x) = ((\sqrt{x} + \frac{\sigma}{2}t)^+)^2$, ali Ninomiya i Victoir zapisuju jednadžbu samo za pozitivne vrijednosti.
Ninomiya-Victoir-ovu shemu za Cox-Ingersoll-Ross-ov proces $\widehat{X}_t^x$ definiramo sa

$$\widehat{X}_t^x(x,t) = e^{-\frac{\kappa t}{2}} \left(\sqrt{\left(a - \frac{\sigma^2}{4}\right)\psi_\kappa(\frac{t}{2}) + e^{-\frac{\kappa t}{2}}x} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{t}N \right)^2 + \left(a - \frac{\sigma^2}{4}\right)\psi_\kappa(\frac{t}{2})$$

za $\kappa \neq 0$ pri čemu proces nije definiran za $\sigma^2 > 4a$ i male vrijednosti od $x \geq 0$, a $N \sim N(0,1)$ je normalno distribuirana slučajna varijabla.

5.3 Prilagodba diskretizacije kada je $\sigma^2 > 4a$

Shema koja je do sada pokazana dobra je u slučaju kada vrijedi $\sigma^2 \leq 4a$. U tom je slučaju diskretizacija uvijek ne-negativna. Ako to ne vrijedi, odnosno vrijedi da je $\sigma^2 > 4a$

moramo prilagoditi shemu diskretizacije. U tom slučaju razlikujemo 2 sheme ovisno o tome jesmo li u okolini nule ili ne. Drugi je slučaj jednostavniji te ćemo ga rješavati pomoću jednostavne prilagodbe Ninomiya-Victoir sheme. Budući da normalna distribucija ima pozitivnu gustoću nad skupom $\mathbb{R}$, postoji šansa da naš proces volatilnosti poprima negativne vrijednosti. To možemo postići korištenjem normalne slučajne varijable koja može biti aproksimirana pomoću diskretnih slučajnih varijabli pri čemu koraci odgovaraju momentima. Primjer diskretne slučajne varijable odgovarajuće distribucije je:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ideja supstitucije je da ako imamo ograničenu distribuciju, lako možemo provjeriti postoji li vjerojatnost poprimanja negativnih vrijednosti u čijem slučaju kažemo da smo u okolini nule i primijenimo drugu shemu.
Posljednja situacija koju promatramo je kada je diskretizacijska shema blizu 0. Potencijalno rješenje možemo dobiti aproksimacijom modela pomoću slučajne varijable $\widehat{X}_t^x$. U tom će slučaju varijabla $\widehat{X}_t^x$ poprimiti dvije vrijednosti; $x_+(t,x) > x_-(t,x) \geq 0$ s pripadnim vjerojatnostima $\pi(t,x)$ i $1 - \pi(t,x)$

$$\begin{pmatrix} x_-(t,x) & x_+(t,x) \\ 1-\pi(t,x) & \pi(t,x) \end{pmatrix}.$$

Budući da želimo da su vrijednosti $\widehat{X}_t^x$ i X_t^x jednake, mora vrijediti:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_1(t,x) &= \pi(t,x)x_+(t,x) + (1-\pi(t,x))x_-(t,x) \\ \widetilde{u}_2(t,x) &= \pi(t,x)x_+(t,x)^2 + (1-\pi(t,x))x_-(t,x)^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

pri čemu je

$$\widetilde{u}_q(t,x) = \mathbb{E}[(X_t^x)^q]$$

za $q = 1, 2$. Računanjem dobivamo sljedeća rješenja:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_1(t,x) &= xe^{-\kappa t} + a\psi_\kappa(t) \\ \widetilde{u}_2(t,x) &= \widetilde{u}_1(t,x)^2 + \sigma^2\psi_\kappa(t)[a\psi_\kappa(t)/2 + xe^{-\kappa t}]. \end{aligned}$$

Kako bismo izračunali vjerojatnost $\pi(t,x)$ ponovno koristimo jednadžbe (5.3):

$$\pi^2(t,x) - \pi(t,x) + \frac{\widetilde{u}_1(t,x)^2}{4\widetilde{u}_2(t,x)} = 0.$$

Rješavanjem jednadžbe i uzimanjem većeg rješenja dobivamo

$$\pi(t,x) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\widetilde{u}_1(t,x)^2}{\widetilde{u}_2(t,x)}}}{2}. \tag{5.4}$$

5.4 Diskretizacija Hestonovog modela

Podsjetimo se, Hestonov model primjenom dekompozicije Choleskog možemo zapisati kao:

$$dv_t = (a - kv_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \tag{5.5}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t}S_t(\rho dW_t^{(2)} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(1)}). \tag{5.6}$$

Neka je Π proizvoljna particija segmenta $[0, T]$. Kako bismo mogli prikazati kretanje cijene dionice pomoću dva Brownova gibanja definiramo Stratonovićev integral sa:

$$\int_0^T X_t \circ W_t = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{X_{t_i+1} + X_{t_i}}{2}(W_{t_i+1} - W_{t_i}).$$

Uvodimo dodatan proces dX_t^2 sa:

$$dX_t^2 = v_t dt$$

te dobivamo rješenje za $S_t^{W^{(2)}}$:

$$S_t^{W^{(2)}} = S_0^{W^{(2)}} \exp\left[\left(\mu - \frac{\rho}{\sigma}a\right)t + \left(\frac{\rho}{\sigma}k - \frac{1}{2}\right)(X_t^2 - X_0^2) + \frac{\rho}{\sigma}(v_t - v_0)\right]$$

i rješenje za $S_t^{W^{(1)}}$:

$$S_t^{W^{(1)}} = S_0^{W^{(1)}} \exp\left(\sqrt{(1-\rho^2)v_t}N\right)$$

pri čemu je $N \sim N(0, 1)$ normalno distribuirana slučajna varijabla.

Na ovaj smo način konstruirali diskretizacijsku shemu drugog reda za Cox-Ingersoll-Ross-ov proces bez restrikcije na parametre, posebno shema prihvaća velike vrijednosti parametra σ. Drugi doprinos sheme jest korištenje Ninomiya-Victoir sheme kako bismo dobili rekurzivnu konstrukciju shema drugoga reda. Iako kod Hestonovog modela nisu direktno zadovoljene sve pretpostavke, rezultati imaju smisla. Točna analiza pogreške u Hestonovom modelu zahtijeva veliku analizu po trenutcima.

Poglavlje 6

Prilagodba modela i simulacija u R-u

Prilagodba modela zapravo je pronalaženje parametara modela koji će najbolje prikazati dane podatke. Korišteni podaci mogu biti povijesni u slučaju da želimo dobiti parametre neovisne o vremenu kako bismo promatrali njihov razvoj. Alternativno, podatke možemo prilagoditi samo trenutnim podacima i dobiti ili vremenski ovisne parametre ili parametre nastale pod pretpostavkom da je vrijeme nepromjenjivo.
Alternativna prilagodba ima određene posljedice; u tom slučaju, koristimo statističke alate kako bismo dobili parametre modela, npr. računamo sredinu između dvije povijesne vrijednosti kako bismo dobili srednju stopu povrata. U prilagodbi, temeljne parametre dobivamo pomoću procjena; na primjer metodom maksimalne vjerodostojnosti, modelima predviđanja grešaka itd.

6.1 Inverzni pristup

Najbolji pristup prilagodbe Hestonovog modela je inverznim pristupom ili tržišno impliciranim pristupom ("market implied approach"). Kako bismo dobili sve parametre odjednom; pretpostavljamo da su postojeće cijene na tržištu blizu stvarnih cijena financijskih instrumenata. Kao posljedicu, dobivamo da prilagodba modela ovisi o već postojećim instrumentima što znači da su nam potrebne potpune informacije o tržištu kako bismo dobili parametre modela. U slučaju da tržište nije dovoljno likvidno, osobe koje trguju pristat će na ne-fer cijenu imovine što može biti dovoljan poticaj za pokušaj uklapanja u model.
Ideja prilagodbe Hestonovog modela je minimizacija funkcije razlike između cijena na tržištu za čistu Europsku opciju C^{market} i cijenu dobivenu Hestonovom jednadžbom C^{heston}.
Jednostavna funkcija za analizu razlike dana je sa:

$$f(K_i, T_i) = \min_{\xi} \sum_i |C_i^{market} - C_i^{heston}|$$

pri čemu i označava i-tu promatranu opciju na tržištu s cijenom izvršenja K_i i vremenom dospijeća T_i, a ξ označava skupinu početnih parametara. Izbor funkcije prilagodbe ne bi bio složen kada bi model savršeno opisivao podatke i kada bi algoritam optimizacije uvijek pronalazio globalni minimum. No, u našem slučaju, podaci često nisu savršeni. Za algoritam optimizacije, koristimo funkciju `nlm` u R-u.

6.2 `nlm` i `nlminb` funkcije u R-u

Nelinearna optimizacijska funkciju u R-u označena je sa `nlm`. Parametri potrebni za poziv funkcije:

- `f` - optimizacijska funkcija koju želimo minimizirati. U našem slučaju, to je razlika između cijene na tržištu i one dobivene Hestonovim modelom;

- `p` - početni parametar od kojeg naša optimizacija započinje potragu za minimumom. U našem slučaju, unosimo početne procjene parametara za Hestonov model.

Dodatno, moguće je uključiti još parametara optimizacijske funkcije kao i dodatne numeričke parametre za optimizaciju; kao što je maksimalan broj koraka koje funkcija optimizacije može napraviti ili broj iteracija koje dozvoljavamo optimizacijskoj funkciji. Trebamo uzeti u obzir da je potrebno promijeniti parametre ako rezultat ne zadovoljava traženu točnost ili povećati brzinu konvergencije kada tražimo manje točno rješenje. Kada funkciju prilagođavamo stvarnim podacima, funkcija ne mora nužno prihvaćati sve podatke. U nekim slučajevima to može dovesti do prekoračenja veličine ("over-fitting").
Alternativno možemo koristiti `nlminb` funkciju koja uzima dva dodatna parametra; `lower` i `upper`. Oni služe kao granice za naše parametre. Vrijednosti funkcije `nlminb` su podskup rješenja funkcije `nlm` pa mogu slabije odgovarati traženom rješenju kada ih usporedimo. To je cijena koja odgovara rješenju prilagodbe modela i pretpostavkama kakve bismo željeli.
Prilagodbu možemo poboljšati množenjem razlika težinama; primjerice s jednim od Grka - mjerom rizika Vega. Vega mjeri intenzitet volatilnosti opcije osnovne imovine. Dodatno, možemo se odlučiti kvadrirati, a zatim korjenovati razlike na sljedeći način:

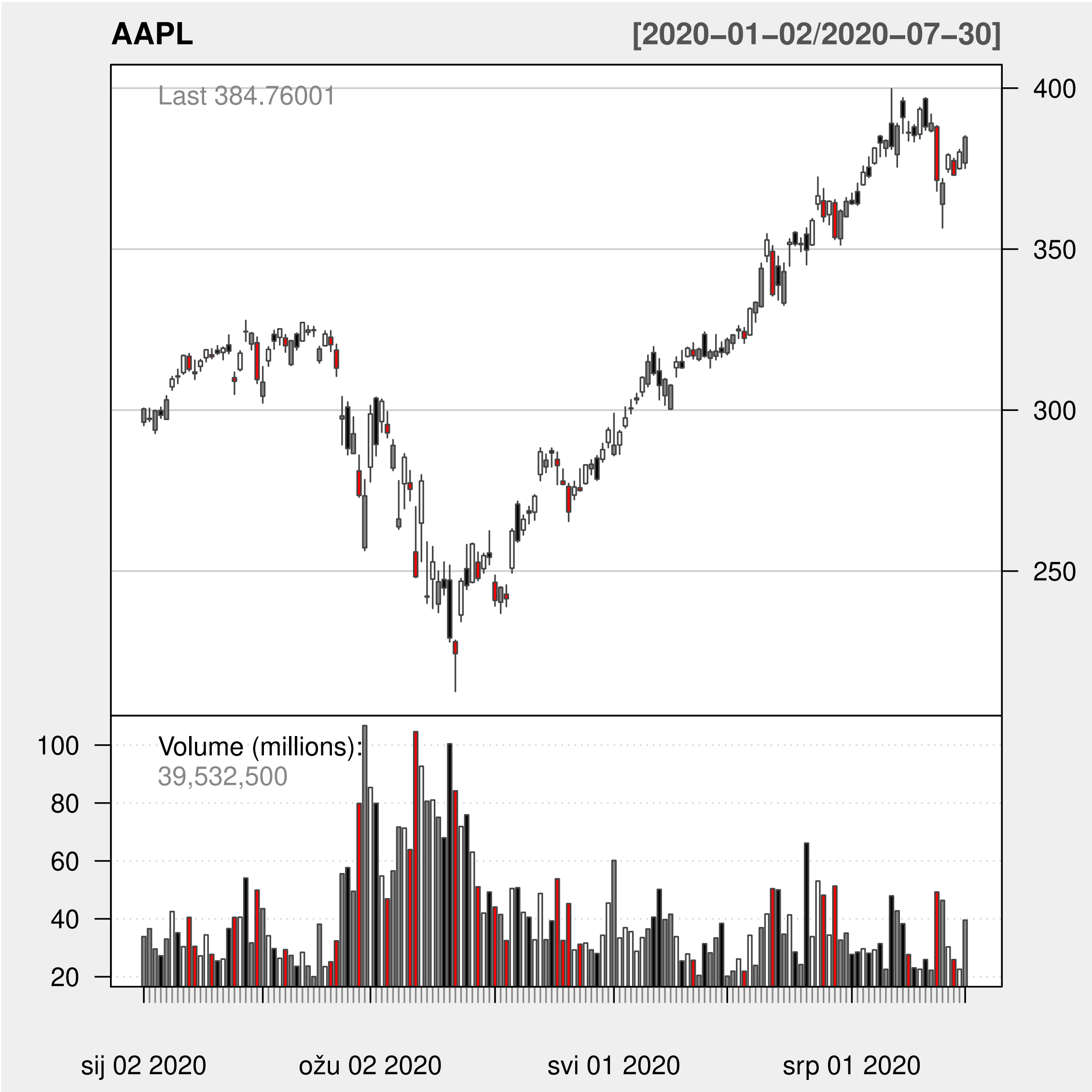
$$f(K_i, T_i) = \min_{\xi} \sqrt{\sum_i \omega_i (C_i^{market} - C_i^{heston})^2}.$$

6.3 `quantmod` paket u R-u

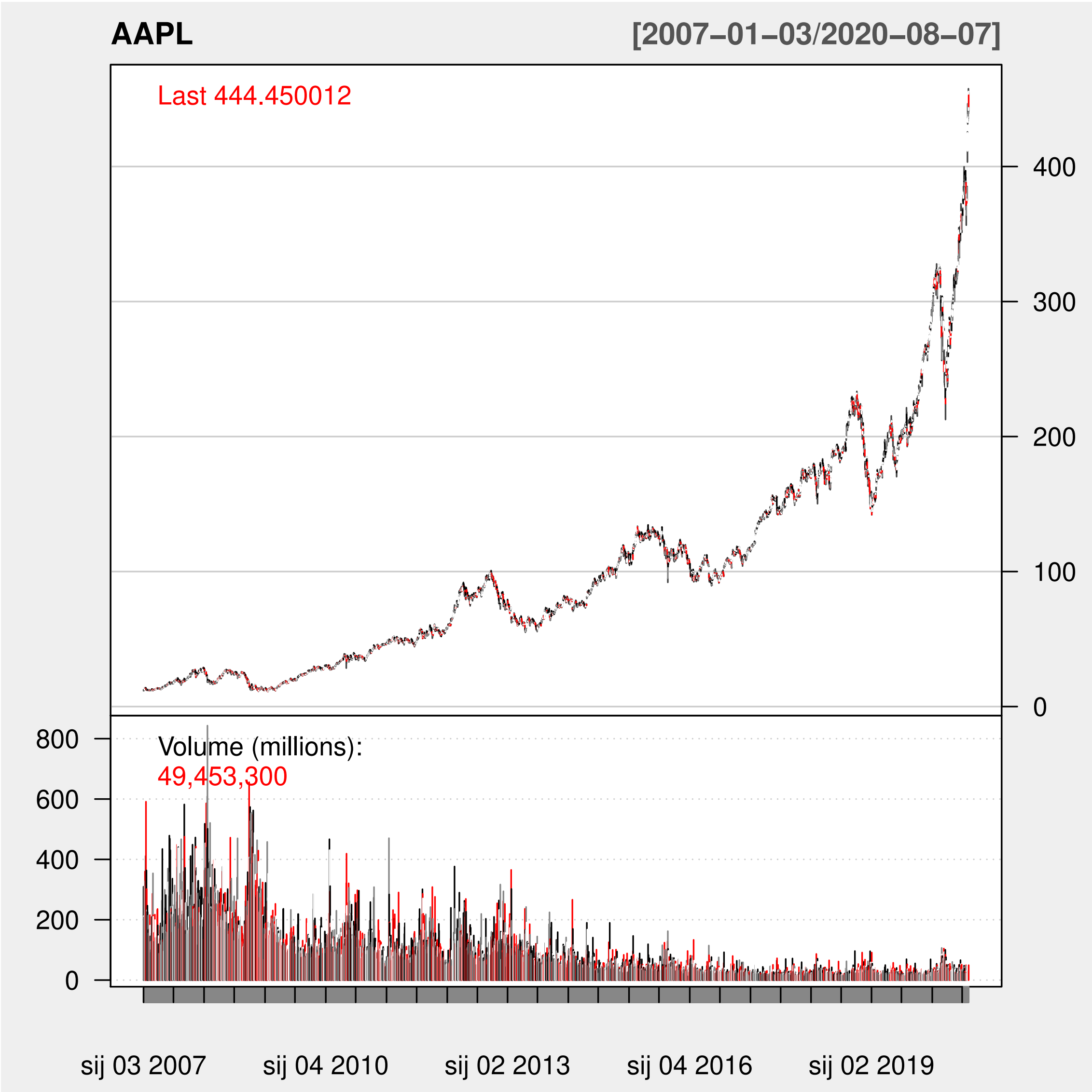
Podatke u program R možemo učitati direktno koristeći neki od paketa; `quantmod` paket direktno preuzima podatke s online repozitorija kao što je Yahoo finance. U našem slučaj koristit ćemo upravo taj repozitorij.
Podatke učitavamo funkcijom `getSymbols`; argumenti potrebni funkciji su naziv dionice čije nas vrijednosti zanimaju te proizvoljno možemo dodati početni i krajnji datum razdoblja za koje promatramo cijenu dionice. Funkcija vraća više podataka:

- open - početna cijena dionice;
- high - najviša cijena dionice ostvarena tog dana;
- low - najniža cijena dionice ostvarena tog dana;
- close -završna cijena dionice;
- volume - volumen trgovanja;
- adjusted - prilagođena cijena.

Funkcije `head` i `tail` ispisuju 6 početnih odnosno krajnjih vrijednosti dionice. Jedna od korištenih funkcija za grafički prikaz podataka je `chartSeries` te dodatno na grafu možemo prikazati pokazatelj divergentnosti prosječne pokretljivosti `addMACD` ili linije ispod i iznad srednje razine cijena `addBBands`. Sljedeći grafički prikazi prikazuju kretanje cijene dionice APPLE.



Slika 6.1: Prikaz kretanja cijene dionice APPLE tijekom ove godine.



Slika 6.2: Prikaz kretanja cijene dionice APPLE za razdoblje od 2007.godine do danas.

Bibliografija

[1] Aurelien Alfonsi, *A second-order discretization scheme for the CIR process: application to the Heston model*, 2008.

[2] F. Mercurio D. Brigo, *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation, and Credit*, Springer Finance, 2006.

[3] Steven E.Shreve, *Stohastic calculus for finance; Continuous-Time Models*, Springer Finance, 2004.

[4] J. Gil-Pelaez, *Note on the Inversion Theorem*, sv. 38, Biometrika, 1951.

[5] Fabrice Douglas Rouah, *The Heston Model And Its Extensions in Matlab and C*, Wiley, 2013.

[6] Zoran Vondraček, *Skripta iz Financijskog modeliranja*, 2008, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm17-predavanja.html`, posjećena 2020-10-30.

[7] Yuan Yang, *Valuing a European option with the Heston model*, Rochester Institute of Technology, 2013.

Sažetak

Hestonov model najpopularniji je model stohastičke volatilnosti za određivanje cijena opcija. Djelomično je za to zaslužna njegova zatvorena forma. Neki autori cijenu call opcije nazivaju poluzatvorenom zbog numeričke integracije koja je potrebna da bismo zadržali P_1 i P_2. No, Black-Scholesov model također zahtjeva numeričku integraciju, kako bi zadržao $\Phi(d_1)$ i $\Phi(d_2)$. U tom smislu, Hestonov model daje cijene call opcija koje nisu manje zatvorene od onih u Black-Scholesovom modelu. Razlika je u tome što programski jezici često imaju naviku koristiti standardnu normalnu distribuciju dok Hestonove vjerojatnosti nisu ugniježđene te ih se mora dograditi koristeći numeričku integraciju.

Summary

Heston model is the most popular model of stochastic volatility for determination option price. The reason for that is its closed form. Some authors may call the price of the call option semi-closed because of the numeric integration that is needed to keep P_1 and P_2. Black-Scholes model also demands numeric integration to keep $\Phi(d_1)$ adn $\Phi(d_2)$. In that sence, Heston model gives prices of call options that are not less closed than the ones in Black-Scholes model. The difference is that programming languages have the habit to use standard normal distribution while Hestons probabilities are not included and we have to include them by using numeric integration.

Životopis

Rođena sam 2. ožujka 1996. godine u Bjelovaru. Tamo završavam osnovnu školu, a nakon nje upisujem Gimnaziju Bjelovar. Godine 2014. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, koji završavam 2018. godine te stječem naziv sveučilišni prvostupnik matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika, kojeg završavam ovim radom.