Neke primjene linearne algebre u ekonomiji i teoriji igara

Cvetan, Nika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nika Cvetan

NEKE PRIMJENE LINEARNE ALGEBRE U EKONOMIJI I TEORIJI IGARA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, prosinac 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Htjela bih se prvo zahvaliti mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić na strpljivosti i pomoći koju mi je pružila prilikom pisanja ovog rada. Zatim, svim svojim prijateljima na neizmjernoj podršci tijekom studiranja, ali najveće hvala mojoj obitelji koja nikad nije prestala vjerovati u mene.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Input-output analiza **3**
1.1 Osnovna metoda input-output analize 3
1.2 Povijesni razvoj input-output analize 7

2 Leontiefov otvoreni input-output model **10**
2.1 Izvod modela 10
2.2 Matematički aspekt modela 16
2.3 Primjer modela 22

3 Matrične igre **24**
3.1 Osnovni pojmovi 24
3.2 Primjeri 29

4 Zaključak **33**

Bibliografija **35**

Uvod

Linearna algebra je grana matematike koja se bavi proučavanjem vektora, matrica, linearnih operatora, sustava linearnih jednadžbi te općenito vektorskih prostora i linearnih transformacija. Svoju primjenu nalazi u ostalim matematičkim disciplinama, ali i u brojnim prirodnim i društvenim znanostima. U ovom diplomskom radu želimo pokazati neke primjene linearne algebre u ekonomiji i teoriji igara.

U prvom poglavlju ovog rada upoznat ćemo se s input-output analizom. Temeljna pretpostavka ove analize je da se proizvodni sustav privrede jedne zemlje može podijeliti na određeni broj međusobno povezanih proizvodnih sektora. Input-output analiza se može provesti i na drugim područjima kao što su gradovi, općine, županije, regije, kontitenti itd. Svaki sektor u proizvodnji svojih proizvoda koristi proizvode ostalih sektora ili čak svoje proizvode. Osim što svaki sektor isporučuje svoje proizvode ostalim proizvodnim sektorima, isporučuje ih i finalnim potrošačima. Stoga ukupna razina proizvodnje određenog sektora ovisi o zahtjevima ostalih proizvodnih sektora i finalnih potrošača za njegovim proizvodima. Nabave i isporuke proizvoda između sektora možemo prikazati pomoću input-output tablice u kojoj svaki proizvodni sektor ima svoj redak i svoj stupac. Redci pokazuju raspodjelu vrijednosti proizvodnje, a stupci vrijednosnu strukturu proizvodnje. Pitanje koje se postavlja je koju bi razinu proizvodnje svaki od sektora trebao imati kako bi se zadovoljila ukupna potražnja [1] za njihovim proizvodima. Odgovor na to pitanje ćemo pronaći pomoću Leontiefovog input-output modela. Ovisno o određivanju finalne potražnje razlikujemo otvoreni i zatvoreni statički Leontiefov input-output model. S vremenom sve veće značenje ima i dinamički input-output model.

Osim što ćemo detaljnije objasniti metodu input-output analize, u ovom poglavlju kratko ćemo opisati povijest same analize. Vidjet ćemo kakvu ulogu u njenom razvoju imaju poznati autori poput Francoisa Quesnaya, Karla Marxa i Leona Walrasa. Wassily Leontief se smatra autorom koji je najviše pridonio input-output analizi i po kojem je sam model dobio ime.

Drugo poglavlje ovog rada posvećujemo Leontiefovom otvorenom input-output modelu. Za razumijevanje ovog modela pomoći će nam linearna algebra i poznavanje matrica jer se model temelji na rješavanju sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Pritom je

[1] međusektorska i finalna potražnja

proizvodni sustav privrede podijeljen na n sektora. Svaka jednadžba prikazuje distribuciju isporuka tog sektora ostalim proizvođačima i finalnim potrošačima. Uvođenjem tehničkih koeficijenata i pretpostavkom da su oni konstantni, sustav se može prikazati u matričnom obliku $Ax + d = x$, pri čemu je A kvadratna matrica tehničkih koeficijenata, x vektor proizvodnje te d vektor finalne potražnje.

Osim što smo zbog jednostavnosti pretpostavili da svaki sektor proizvodi samo jednu vrstu proizvoda i to jednom proizvodnom tehnologijom, jače pretpostavke moraju biti donešene kako bi definirali Leontiefov otvoreni input-output model. U takvom modelu se u proizvodnji jednog sektora mora koristiti barem jedan proizvod nekog drugog sektora te matrica tehničkih koeficijenata A mora biti produktivna. Ukoliko proizvodni sustav $Ax + d = x$ zadovoljava navedene pretpostavke, dolazimo do definicije Leontiefovog otvorenog input-output modela.

U ovom poglavlju ćemo dokazati teorem koji garantira egzistenciju i jedinstvenost nenegativnog rješenja modela kad je matrica tehničkih koeficijenata produktivna. Također, dokazat ćemo i teorem koji nam daje uvjete pod kojima ćemo dobiti ekonomski značajno rješenje, tj. ono rješenje koje dodjeljuje pozitivnu razinu proizvodnje svakom sektoru. Poglavlje ćemo završiti rješavanjem primjera za Leontiefov otvoreni input-output model.

U trećem poglavlju ćemo prikazati primjene linearne algebre u teoriji igara. Naglasak će biti na matričnim igrama te ćemo vidjeti kako nam teorija matrica može pomoći prilikom određivanja vrijednosti igre. Prije samih primjera matričnih igara, prisjetit ćemo se osnovnih pojmova na kojima se teorija igara temelji. Rad ćemo završiti kratkim poglavljem koji služi kao zaključak i osvrt na cjelokupni rad.

Poglavlje 1

Input-output analiza

Počeci input-output analize se naziru još u doba fiziokrata, ali smatra se da joj je prethodnica zapravo u radu neoklasičara Karla Marxa i Leona Walrasa. Njen suvremeni razvoj počinje s američkim ekonomistom ruskog podrijetla, Wassilyjem Leontiefom. Osim kratkog povijesnog razvoja input-output analize, u ovom poglavlju postavit ćemo njene osnove i pokazati kako se stvaraju input-output tablice na kojima se temelji. Pri tome nam reference [3, str. 243–265], [7] i [9] predstavljaju osnovnu literaturu iz koje crpimo sadržaj.

1.1 Osnovna metoda input-output analize

Da bismo objasnili metodu input-output analize, prvo definirajmo pojmove koji se nalaze u samom njenom nazivu [11]:

- Input–ulazni element u proizvodnji, tj. proizvod koji određeni privredni subjekt koristi u proizvodnji nekog drugog proizvoda[1].
- Output– izlazni proizvod, tj. finalno dobro koje proizlazi iz proizvodnog procesa određenog privrednog subjekta.

Input-output analiza je dio kvantitativne ekonomske analize koja se bavi analizom povezanosti sektora proizvodnje u privredi da bi se utvrdilo kako svaki sektor proizvodnje troši proizvode drugih sektora kao elemente (inpute) u proizvodnji svojeg finalnog proizvoda (outputa). Također, bavi se i analizom izravnih i neizravnih učinaka promjena u bilo kojem sektoru na ostale sektore privrede (vidi [5]). Budući da utvrđuje međuovisnosti između sektora, input-output analiza je poznata još pod nazivom međusektorska analiza.

Jedno od glavnih pitanja input-output analize je kako podijeliti proizvodni sustav cijele

[1] može se shvatiti kao intermedijarno dobro.

privrede na određeni broj proizvodnih sektora. Ovdje veliku ulogu imaju input-output tablice, ili međusektorske tablice, na kojima se sama analiza temelji.

Prilikom konstrukcije input-output tablice u obzir se moraju uzeti sljedeće pretpostavke [13, str. 19]:

- Svaki sektor proizvodi samo jednu vrstu proizvoda.
- Svaki se proizvod klasificira u samo jedan proizvodni sektor.
- Sve proizvodne jedinice u jednom sektoru se koriste istom proizvodnom tehnologijom.

Navedene pretpostavke impliciraju potpunu homogenost proizvodnih sektora i potpunu jednoznačnost klasifikacije proizvoda koje sektori proizvode.

Pošto ne možemo podijeliti privredu na onoliki broj sektora koliko postoji proizvođača i proizvoda, svaki sektor dobivamo spajanjem više ili manje srodnih proizvodnih jedinica. Pri tome se nastoji da oni budu što homogeniji, tj. da proizvodi i tehnologije kojima se pojedine jedinice sektora koriste budu što sličnije moguće.

Kvaliteta input-output tablice, pa time i input-output analize, ovisi o broju sektora i o stupnju njihove homogenosti. Prednost velikog broja sektora je veća homogenost, ali tada prikupljanje potrebnih podataka izaziva razne statističke teškoće te se smanjuje i sama preglednost input-output tablice. Prema [12] trošak izrade tablice je proporcionalan s veličinom, odnosno s razinom detaljnosti input-output tablice, stoga se u praksi uvijek traži kompromis između broja sektora i njihove preciznosti te se usklađuje sa samim ciljem za koji se tablica izrađuje. Optimalan broj sektora se kreće od 50 do 100.

Input-output tablicama prikazujemo kretanje, odnosno kupnju i prodaju dobara i usluga između proizvodnih sektora. Proizvodne međuzavisnosti su određene inputima koji su iskazani u fizičkim jedinicama[2]. Pošto su proizvodi različiti, njihove količine se mjere različitim mjernim jedinicama[3]. Tablice se stoga izrađuju u monetarnom iskazu, odnosno vrijednosti utrošenih inputa i isporuka su iskazane u određenoj valuti. Vrijednosti se mogu svesti na istu valutu pomoću tečajne liste.

Najvažniji podaci u input-output tablicama, prema [9], su upravo vrijednosti transakcija između parova sektora, tj. isporuke sektora i sektoru j. Za sektor i kažemo da je sektor isporučitelj, a sektor j sektor primatelj. Vrijednost isporuka svih sektora sektoru j određena je količinom proizvodnje sektora j. Ukoliko sektor j poveća razinu proizvodnje, povećat će se i njegova potražnja za proizvodnim inputima koje isporučuju ostali sektori. Naprimjer, pretpostavimo da je došlo do porasta proizvodnje cesta. Tada se zahtijeva i povećanje inputa ostalih proizvoda koji se koriste u proizvodnom procesu cestogradnje,

[2]npr. količina građevinskog materijala, energije, transportnih usluga potrebnih za izgradnju cesta

[3]npr. kilogrami, litre, uloženi sati rada, Kwh električne energije

poput građevinskih materijala, energenata, transportnih i ostalih usluga. Kažemo da oni čine intermedijarnu potrošnju sektora cestogradnje. Osim međusektorske povezanosti, dio proizvoda isporučuje se i ostalim dijelovima gospodarstva čija primarna funkcija nije proizvodnja, već finalna uporaba, poput potrošnje kućanstva, potrošnje države, investicija te izvoza. Na potražnju tih neproizvodnih jedinica utječu faktori koji nisu izravno vezani uz proces proizvodnje, poput preferencija potrošača ili provođenja mjera nacionalnih politika.

Intermedijarna potrošnja se veže uz određene proizvodne procese u kojima se proizvodni inputi transformiraju, dok se u dijelu finalne potrošnje dobra i usluge koriste bez daljnje transformacije, odnosno u onom obliku koji je proizveden od strane drugih proizvođača. Primijetimo da su svi proizvodni sektori ujedno i isporučitelji i primatelji, a sektori finalne potrošnje su samo primatelji.

Prema [7] svaki proizvodni sektor ima u input-output tablici svoj redak i svoj stupac. U retku koji odgovara određenom sektoru prikazane su isporuke (prodaje, outputi) proizvoda tog sektora svim proizvodnim i potrošnim sektorima. U stupcu tog sektora prikazane su nabave (kupnje, inputi) od drugih sektora. Iz toga proizlazi da redci input-output tablice pokazuju raspodjelu vrijednosti proizvodnje, tj. strukturu tržišta prodaje tog sektora, a stupci vrijednosnu strukturu proizvodnje, tj. strukturu tržišta nabave. Kako bi navedeno bolje razumjeli, promotrimo sljedeći primjer. Primjer smo preuzeli iz [3, str. 247–248].

Primjer 1.1.1. *Pretpostavimo da se ekonomija sastoji od 3 sektora: agrikultura, manufaktura i usluge. Svaki od sektora proizvodi točno jednu vrstu proizvoda: agrikulturna dobra, manufakturna dobra ili pruža usluge. Navedena tri sektora međusobno kupuju i prodaju svoje otupute. Sva dobra i usluge koji ne ulaze u proizvodni proces su korištena kako bi zadovoljila potrebe kućanstva, tj. kako bi zadovoljila finalnu potražnju. Pripadna input-output tablica je:*

	Agrikultura	Manufaktura	Usluge	Finalna potražnja	Ukupna proizvodnja
Agrikultura	15	20	30	35	100
Manufaktura	30	10	45	115	200
Usluge	20	60	–	70	150

Tablica 1.1: Input-output tablica (u dolarima)

Gledajući prvi redak tablice vidimo da se od ukupno proizvodenih agrikulturnih dobara u iznosu od 100 \$, 15 \$ agrikulturnih dobara koristi u daljnjoj agrikulturnoj proizvodnji, 20 \$ dobara je prodano manufakturi i količina dobara u iznosu od 30 \$ koristi sektor usluga. Na kraju 35 \$ agrikulturnih dobara zadovoljava potražnju kućanstva.

Čitajući drugi stupac tablice vidimo kako nam za proizvodnju manufaktornih dobara u iznosu od 200 $ treba 20 $ agrikulturnih dobara, 10 $ samih manufakturnih dobara i 60 $ usluga.

Input-output tablice imaju statističku i analitičku namjenu. Pomoću njih možemo provjeriti konzistentnosti podataka o tokovima dobara i usluga dobivenih iz različitih statističkih izvora, npr. statistike pojedinih djelatnosti, ankete o izdacima kućanstva, statistike investicija, vanjskotrgovinske investicije itd. Pogodne su za izračunavanje brojnih ekonomskih pokazatelja, npr. BDP[4], BNP[5], BDV[6], stopa nezaposlenosti itd. Gledano s analitičke strane, podaci iz input-output tablica se povezuju u makroekonomske modele pomoću kojih analiziramo veze između finalne potražnje i razine proizvodnje po sektorima te međuovisnosti između makroekonomskih agregata[7]. Riječ je o Leontiefovim input-output modelima.

U proteklom razdoblju razvile su se tri osnovne verzije Leontiefovog input-output modela. Ovisno o određivanju finalne potražnje razlikujemo otvoreni i zatvoreni input-output model. Najčešće korišteni model je otvoreni model s danim komponentama finalne potražnje za proizvodima po sektoru. Sva proizvedena dobra tada trebaju zadovoljiti zahtjeve proizvodnih sektora i finalnu potražnju[8], koju ovdje možemo shvatiti kao „otvoreni sektor". Njegova uloga nije proizvodnja, već samo potrošnja te se nalazi izvan proizvodnog sustava. Suprotno takvom modelu je zatvoreni model, pomalo i napušten, čije se komponente finalne potražnje tretiraju kao novi proizvodni sektor, tj. taj „otvoreni sektor" je apsorbiran u proizvodni sustav. U takvom modelu su sva proizvedena dobra intermedijarna po prirodi jer sve što je proizvedeno proizvelo se samo kako bi se zadovoljili zahtjevi proizvodnih sektora.

Otvoreni i zatvoreni model su tip statičkog input-output modela. Vremenom se osnovni input-output model proširio te je nastao dinamički model. Prema [9] glavna motivacija za uvođenje tog modela je činjenica da se pojedina dobra koja se koriste u proizvodnim procesima ne troše u potpunosti u tekućem razdoblju, već imaju duži vijek trajanja, npr. fiksna aktiva koju čine strojevi, oprema te transportna sredstva. U proizvodnji u tekućem razdoblju koristi se postojeća fiksna aktiva nabavljena u prethodnim razdobljima, a kako bi se zadržale ili povećale proizvodne mogućnosti potrebno je investirati u nabavu nove fiksne aktive koja će se koristiti u budućnosti.

U ovom radu će naglasak biti na otvorenom input-output modelu. Sa samim izvodom modela i matematičkom teorijom potrebnom za njegovo razumijevanje, upoznat ćemo se u drugom poglavlju ovog rada.

[4]Bruto domaći proizvod

[5]Bruto nacionalni proizvod

[6]Bruto dodana vrijednost

[7]Makroekonomski agregati su pokazatelji koji se odnose na gospodarsku aktivnost većih cjelina, npr. države, županija, općina ili pojedinih gospodarskih djelatnosti.

[8]npr. zahtjeve kućanstva

1.2 Povijesni razvoj input-output analize

Iako se suvremena input-output analiza počinje razvijati u tridesetim godinama prošlog stoljeća, većina ekonomskih povjesničara navodi Francoisa Quesnaya[9] i njegov ekonomski model „*Tableau Èconomique*" kao najranije zabilježen primjer koji sadrži osnovne ideje input-output analize. Model pokazuje važnost međusobnih interindustrijskih tokova, ili bolje rečeno, važnost međuovisnosti ekonomskih sustava.

Quesnay je bio jedan od vodećih teoretičara čiji je rad nadahnuo stvaranje skupine francuskih agrarnih socijalnih reformatora, fiziokrata. Prema [16] fiziokrati su tvrdili da se izvori bogatstva i gospodarskog razvoja nalaze u poljoprivredi. Smatrali su kako društvo treba ogranizirati na temelju prirodnih zakona te uspostaviti prirodni poredak utemeljen na nepromjenjivim prirodnim zakonima koji je kao takav najbolji i najracionalniji. Stoga su fiziokrati smatrali kako svako uplitanje države u takav poredak može samo štetiti. Držali su da gospodarski život treba prepustiti vlastitim zakonitostima i ekonomskoj slobodi, tj. da „stvari treba pustiti da idu svojim tokom".[10]

Prema fiziokratima bogatstvo ne nastaje u trgovini, kao što su u to dobra smatrali reformatori merkantilisti[11], već u poljoprivrednoj proizvodnji. U središtu njihove analize je potraga za ekonomskim viškom koji nastaje u jedinoj grani proizvodnje, poljoprivredi, kao razlika između rezultata proizvodnje (output) i količine uloženih sredstava (input). Često se ekonomski višak zove i čisti proizvod te se tada smatrao darom od prirode.

U svojem modelu Quesnay je pokazao kako se društveni proizvod, proizveden u poljoprivredi, raspodjeljuje i razmjenjuje između tri društvene klase ili tri sektora. Prvu klasu čine poljoprivrednici, tzv. produktivna klasa, drugu klasu trgovci, tzv. sterilna klasa, te su zemljoposjednici činili treću klasu. Po prvi put je dana ideja domaćeg proizvoda i njegove strukture, tj. ukupne proizvodnje u privredi, koja se u prva dva sektora stvara, a u trećem raspodjeljuje. Budući da je došlo do pojednostavljenja privredne strukture, tablice koje su se pritom koristile otvorile su velike mogućnosti da se ekonomski odnosi matematički analiziraju.

Quesnay je u svojem radu htio dosljedno prikupljati statističke podatke kako bi što točnije procijenio vrijednost godišnje proizvodnje i usporedio je s potražnjom. Zaključio je da se završetkom svih tokova između sektora dolazi do prirodnog stanja ekonomije, tj. do opće ravnoteže ponude i potražnje.

Model „*Tableau Èconomique*" predstavlja prekretnicu u povijesti ekonomije. Daljnji razvoj pristupa nastavio je Karl Marx[12] s Marxovim shemama reprodukcije. U svojim she-

[9]Francois Quesnay (1694.-1774.), francuski ekonomist i liječnik

[10]laissez faire-laissez passer.

[11]Merkantilizam–politika nastala u Francuskoj u 16. stoljeću te osmišljena kako bi maksimizirala izvoz i minimizirala uvoz za ekonomiju određene zemlje. Smatrali su da izvozni proizvodi povećavaju nacionalno bogatstvo.

[12]Karl Marx (1818.-1883.), njemački filozof, politički ekonomist, revolucionar.

mama reprodukcije u drugoj knjizi svog najvažnijeg djela „*Kapital*"[13], cijelu privredu je podijelio na dva odjeljka: odjeljak proizvodnje sredstava za proizvodnju i odjeljak proizvodnje sredstava za potrošnju te je analizirao njihove međuovisnosti. Smatra se da su Marxove sheme reprodukcije prethodile suvremenim input-output tablicama, no Marx ih nije pokušao učiniti statistički operativnima.

Od velike je važnosti i Leon Walras[14] koji 1874. godine u knjizi „*Elementi čiste ekonomske politike*"[15] definira tehničke koeficijente. Takve koeficijente Walras naziva koeficijentima proizvodnje [16] te oni prikazuju utroške reprodukcijskih materijala (input) po jedinici proizvodnje određenog proizvoda (outputa). Na taj način Walras je formulirao prvi teorijski matematički model opće ravnoteže, ali bez empirijske pozadine.

Wassily Leontief[17] se smatra ocem input-output analize. 1973. godine je zbog zasnivanja i razvoja input-output analize primio Nobelovu nagradu za ekonomiju. Kao osnovu za svoju analizu, Leontief koristi Walrasovu teoriju opće ravnoteže. Prema [7] sličnosti su u tome što je Walras definirao tehničke koeficijente i što je radio sa zatvorenim sustavom s kojim je počeo i Leontief. Međutim, Walras polazi od individualnih proizvođača i potrošača, a kod Leontiefa u međusektorskoj tablici se nalaze ekonomsko-tehnološki definirani sektori.

U Marxovim shemama reprodukcije poduzeća su bila grupirana u privredne grane i jasno se razlikovala proizvodnja za reprodukcijsku i finalnu potrošnju. Međutim, Marx je podijelio privredu na samo dva sektora s jasno definiranim obilježjima, a u međusektorskim tablicama se dijeli na veći broj sektora, od nekoliko desetaka pa čak do stotina sektora.

U knjizi „*The Structure of the American Economy, 1919.-1929.*", Leontief je objavio prve rezultate rada na input-output analizi. Za godine 1919. i 1929. izradio je prve input-output tablice američke privrede, pritom je američka privreda bila podijeljena na 41 sektor. Ono što je Leontiefu bilo od interesa je odnos između sektora i kako utječu jedni na druge. Objavljivanjem knjige 1941. godine, započinje suvremeni razvoj input-output analize. Prema [12] u nizu radova objavljenih u periodu od 1944. do 1946. godine, nastavljena su brojna istraživanja pomoću kojih se formirao otvoreni statički model i primijenio na američku privredu. U knjizi „*Studies in Structure of the American Economy*" objavljenoj 1953. godine, Leontief postavlja osnove dinamičkih modela.

Input-output analiza se prvo počela upotrebljavati u Sjedinjenim Američkim Državama. Na prvim input-output tablicama američke privrede moglo se promatrati kako promjene strukture inputa u različitim industrijama imaju utjecaj na veličinu njihove proizvodnje, cijene njihovih proizvoda i posebno na životni standard kućanstva. Početkom Drugog svje-

[13]„Das Kapital" 1.izdanje 1867., djelo se sastoji od tri knjige, a bavi se kritikom kapitalističkog sustava.
[14]Leon Walras (1834.-1910.), francuski matematičar i ekonomist.
[15]„Elements d'economie politique pure: ou theorie de la richesse sociale", 2.dio, Lausanne, 1874.
[16]coefficient de fabrication.
[17]Wassily Leontief (1905.-1999.), američki ekonomist ruskog podrijetla.

tskog rata u središtu input-output analize je bio tranzicijski proces od mirnodopske na ratnu privredu. Za vrijeme trajanja rata, na procijenjenim tablicama su se analizirali mogući problemi poslijeratne zaposlenosti, odnosno nezaposlenosti. Na kraju Drugog svjetskog rata input-output analiza je doživjela najveći pad jer su mnogi političari državno planiranje smatrali karakterističnim samo za komunističke zemlje.

Vremenom input-output analiza se počela naglo razvijati i primjenjivati u mnogim zemljama, od Kanade preko Europe pa sve do Japana i Kine. Time je došlo do razvoja računalne opreme za njenu primjenu pomoću koje se njen razvoj dodatno olakšao i ubrzao te se ne taj način proširilo područje njenog djelovanja.

Poglavlje 2

Leontiefov otvoreni input-output model

Ovo poglavlje započinjemo predstavljanjem Leontiefovog otvorenog input-output modela. Navest ćemo pretpostavke koje model mora zadovoljavati te ćemo dokazati teoreme koji nam pod određenim uvjetima garantiraju egzistenciju i jedinstvenost nenegativnog rješenja modela i egzistenciju ekonomski značajnog rješenja. Pri tome nam osnovnu literaturu predstavlja referenca [1, str. 165–179]. Na kraju poglavlja riješit ćemo i jedan primjer za Leontiefov otvoreni input-output model.

2.1 Izvod modela

Međusektorski odnosi promatranog privrednog sustava u određenom razdoblju se mogu na strukturirani način prikazati pomoću Leontiefovog otvorenog input-output modela. Model se temelji na sustavu linearnih jednadžbi u kojem svaka jednadžba prikazuje distribuciju proizvodnje određenog sektora na intermedijarnu i finalnu uporabu ukupnog gospodarstva. Daje nam informacije ne samo o distribuciji proizvodnje pojedinih sektora, već i o strukturi troškova koji su pritom nastali [9].

Pretpostavimo da je proizvodni sustav podijeljen na n specijaliziranih sektora tako da svaki sektor proizvodi samo jednu vrstu dobra koja su proizvedena jednom proizvodnom tehnologijom. Drugim riječima, postoji bijekcija između dobra koja su proizvedena i tehnologija koje su korištene u njihovoj proizvodnji. Izdvajanje sektora iz input-output tablice je ekvivalentno identificiranju određene proizvodne tehnologije i određenog dobra.

Pri postavljaju jednadžbe raspodjele proizvodnje i-tog sektora koriste se sljedeće oznake:

- X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ – ukupna vrijednost proizvodnje (outputa) sektora i,

- X_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ – isporuka sektora i sektoru j, tj. dio outputa sektora i koji prelazi u sektor j da bi se normalno odvijao proces proizvodnje u sektoru j [1],
- d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ – finalna potražnja za dobrima sektora i.

Tada se ukupna vrijednost proizvodnje sektora i može prikazati jednadžbom koja prikazuje distribuciju isporuka tog sektora ostalim proizvođačima i finalnim potrošačima:

$$X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{in} + d_i = X_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

Obzirom da imamo n takvih sektora, dobivamo sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} + d_1 &= X_1 \\ X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} + d_2 &= X_2 \\ &\vdots \\ X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nn} + d_n &= X_n \end{aligned}$$

Kraće zapisano:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + d_i = X_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

odnosno u obliku input-output tablice:

	Sektor 1	Sektor 2	…	Sektor n	Finalna potražnja	Ukupna proizvodnja
Sektor 1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	d_1	X_1
Sektor 2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	d_2	X_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Sektor n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	d_n	X_n

Tablica 2.1: Input-output tablica

Neka a_{ij} označava količinu dobra sektora i koju je nužno upotrijebiti tijekom proizvodnje jedne jedinice dobra sektora j, tj.

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}. \tag{2.2}$$

[1] tzv. intermedijarna potražnja.

Iz (2.2) slijedi

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \tag{2.3}$$

Koeficijenti a_{ij} su poznati pod nazivom tehnički koeficijenti. Sad se linearni sustav jednadžbi (2.1) uz (2.3) može zapisati kao:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i = X_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.4}$$

Uz pretpostavku da su tehnički koeficijenti a_{ij} konstantni, (2.4) se može zapisati u matričnom obliku

$$Ax + d = x, \tag{2.5}$$

pri čemu je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica tehničkih koeficijenata, $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$ vektor proizvodnje (outputa), a $d \in M_{n1}(\mathbb{R})$ vektor finalne potražnje.
Označimo j-ti stupac matrice A s a_j,

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

Ovaj vektor pokazuje listu inputa koji se koriste i zahtijevaju za proizvodnju jedne jedinice j-tog dobra, stoga vektor a_j možemo shvatiti kao proizvodnu tehnologiju za dobro j.

Osim pretpostavke da svaki sektor mora proizvesti samo jednu vrstu dobra koja je proizvedena jednom proizvodnom tehnologijom, Leontiefov otvoreni input-output model mora zadovoljavati i sljedeće:

1. Proizvodnja svakog dobra zahtijeva upotrebu barem jednog drugog dobra kao input.

2. **(Linearnost)** Količina potrebnog inputa je proporcionalna razini outputa, tj. za bilo koji i vrijedi

   $$Input_i = a_{ij} \times Output_j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

   gdje je a_{ij} konstantan.
   Pretpostavka linearnosti implicira konstantne prinose na opseg proizvodnje, tj.ukoliko se svi faktori proizvodnje (inputi) povećaju za isti faktor k, proizvodnja će se povećati točno za faktor k. Također, činjenica da su a_{ij} konstantni implicira da supstitucija između inputa nije moguća[2].

[2]Proizvoda tehnologija u stvarnosti može proizvesti isti output uz korištenje različitih količina inputa, tj. inputi mogu biti međusobno zamjenjivi. Primjerice, ljudski rad i strojevi se mogu međusobno supstituirati. Pedeset radnika i jedan bager bi mogli iskopati istu količinu zemlje kao i dvadeset radnika i dva bagera.

3. **(Zajednička proizvodnja ne postoji)** Svaka proizvodna tehnologija proizvodi samo jednu vrstu dobra.[3]

Prema pretpostavkama (1)–(3), proizvodni sustav (2.5) zadovoljava sljedeće uvjete:

(a) Svi elementi matrice A su nenegativni, tj. $a_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nadalje, za svaki j postoji neki i takav da je $a_{ij} > 0$.

(b) Svako dobro je proizvedeno jednom proizvodnom tehnologijom, tj. A je kvadratna matrica.

(c) Zajednička proizvodnja ne postoji.

(d) Prevladavaju konstantni prinosi na opseg proizvodnje, tj.matrica A ostaje ista kad se vektor proizvodnje (outputa) x mijenja.

Uz pretpostavku da je matrica $I - A$ regularna, sustav (2.5) ima jedinstveno rješenje dano s

$$x = (I - A)^{-1}d.$$

Matrica $(I - A)^{-1}$ je poznata pod nazivom Leontiefova inverzna matrica. Pomoću nje možemo dobiti razinu proizvodnje koju svaki sektor treba ostvariti ukoliko se želi zadovoljiti ukupna potražnja za različitim dobrima i uslugama. Također, pomoću nje možemo vidjeti kako se razina proizvodnje mijenja kad se mijenja finalna potražnja.

Svaki proizvodni sektor može odlučiti hoće li proizvesti neko dobro ($x_i > 0$) ili će odustati od proizvodnje ($x_i = 0$). Negativna razina outputa ovdje nema ekonomskog značenja.

Garantiraju li nam navedene pretpostavke koje karakteriziraju matricu A i jednadžba (2.5) ekonomski značajno rješenje, tj. rješenje koje svakom sektoru dodjeljuje pozitivnu razinu proizvodnje? Odgovor je ne. Da bismo saznali zašto, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.1.1.

Pretpostavimo kako je gospodarstvo neke zemlje podijeljeno na dva sektora i zadovoljene su pretpostavke (1)–(3). Neka su matrica tehničkih koeficijenata i vektor finalne potražnje dani s

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.3 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

[3] U stvarnosti to nije uvijek slučaj, npr. promotrimo rafineriju nafte. Rafiniranje sirove nafte je tehnologija koja vodi do stvaranja raznih naftnih derivata (tekući plin, dizelsko gorivo, benzin, motorna ulja itd.) te se tada proizvodna tehnologija ne može odnositi na samo jedan određeni proizvod.

Odredimo tada razinu proizvodnje svakog sektora.

Primijetimo da matrica A zadovoljava uvjet (a) i da je finalna potražnja pozitivna za oba dobra. Međutim,

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1.7021277 & -2.765957 \\ -0.6382979 & 0.212766 \end{bmatrix},$$

te je dobiven vektor proizvodnje (outputa) koji zadovoljava ukupnu potražnju

$$x = (I - A)^{-1} d = \begin{bmatrix} -11.70 \\ -0.64 \end{bmatrix},$$

pri čemu su brojevi zaokruženi na dvije decimale. Dobili smo rješenje koje nije ekonomski značajno jer oba sektora imaju negativnu razinu proizvodnje. Struktura matrice A je takva da za bilo koji nenegativni vektor finalne potražnje nije moguće dobiti nenegativnu razinu proizvodnje za oba sektora.

Koristeći $(I - A)x = d$ možemo zapisati

$$\begin{cases} -0.1x_1 - 1.3x_2 = d_1 \\ -0.3x_1 + 0.8x_2 = d_2 \end{cases}$$

Zbrajajući ove dvije linearne jednadžbe dobivamo,

$$-0.4x_1 - 0.5x_2 = d_1 + d_2 \geq 0.$$

Pošto je desna strana jednadžbe nenegativna, očito je da x_1 i x_2 ne mogu istovremeno biti nenegativni.

Ovaj rezultat pokazuje da dosadašnje pretpostavke nisu dovoljne za dobivanje ekonomski značajnog rješenja sustava. Da bismo pronašli ono što nam nedostaje, pogledajmo prethodni primjer. U tom primjeru $a_{11} = 1.1$, tj. da bi se proizvela jedna jedinica prvog dobra zahtijeva se 1.1 jedinica tog dobra kao inputa. Očito je da se takva proizvodna tehnologija neće izvršiti, jer je rastrošna. Kako bi se isključile rastrošne proizvodne tehnologije, uvodi se sljedeća pretpostavka.

4. **(Nerastrošna proizvodna tehnologija)** Ukupna vrijednost proizvodnje svakog sektora veća je od dijela proizvodnje koji se koristi kao input u vlastitoj proizvodnji. U terminima koeficijenata matrice A, ova se pretpostavka može iskazati kao

$$a_{ii} < 1 \quad \text{za svaki } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Međutim, ova pretpostavka ne isključuje mogućnosti da neki sektor ne može isporučiti količinu proizvoda potrebnu za proizvodnju drugih dobra i/ili ne može zadovoljiti finalnu potražnju.

Iz (2.5) je jasno da bi višak outputa, tj. količina outputa koja nije korištena kao input u svojoj proizvodnji, bio dovoljan da zadovolji zahtjeve za inputima drugih sektora i finalnu potražnju. Drugim riječima, proizvodni sustav bi trebao biti sposoban proizvesti barem onoliko koliko se koristi kao input, odnosno htjeli bismo da vrijedi

$$X_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, \quad \text{za svaki } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.6}$$

Nerastrošnost, iako nužna, nije dovoljna za garanciju takvog ishoda. Potreban je jači uvjet na proizvodnu strukturu.

Prisjetimo se.

Definicija 2.1.2. *Matrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ je nenegativna matrica ako je $a_{ij} \geq 0$ za svaki $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definicija 2.1.3. *Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je pozitivan ako je $x_i > 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je strogo veći od vektora $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ako je $x - y > 0$ odnosno, po komponentama, $x_i - y_i > 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sad možemo izvesti definiciju od ključne važnosti.

Definicija 2.1.4. *Nenegativna matrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ je produktivna ako postoji vektor $x > 0$ takav da je*

$$x > Ax.$$

Kažemo da je proizvodni sustav $Ax + d = x$ produktivan, ako je matrica tehničkih koeficijenata A produktivna.

Tako dolazimo do nove i posljednje pretpostavke koju Leontiefov otvoreni input-output model mora zadovoljavati:

5. Matrica tehničkih koeficijenata A je produktivna.

Pretpostavke koje smo do sad donijeli su dovoljne kako bi okarakterizirali proizvodni sustav koji daje ekonomski značajne rezultate.

Napomena 2.1.5. *Mogli smo promatrati i matrice za koje postoji vektor $x > 0$ takav da je $Ax = x$, no mi ćemo se u radu ograničiti na Leontiefov otvoreni input-output model.*

Definicija 2.1.6 (Leontiefov otvoreni input-output model). *Proizvodni sustav*

$$Ax + d = x$$

koji zadovoljava sljedeće pretpostavke:

(a) Za svaki j postoji neki i takav da je $a_{ij} > 0$.

(b) A je kvadratna produktivna matrica.

(c) $d \geq 0$ je nenul vektor.

se zove Leontiefov otvoreni input-output model.

2.2 Matematički aspekt modela

Egzistencija jedinstvenog nenegativnog rješenja

U ovom odjeljku želimo pokazati da za bilo koji nenul vektor finalne potražnje $d \geq 0$ možemo dobiti jedinstveno nenegativno rješenje Leontiefovog otvorenog input-output modela iz definicije 2.1.6.

Da bismo dokazali egzistenciju i jedinstvenost nenegativnog rješenja kad je matrica tehničkih koeficijenata produktivna, dokazat ćemo prvo neke matematičke rezultate koji će nam biti potrebni za dokaz glavnog teorema. Matematički rezultati koje koristimo su dani sljedećim lemama.

Lema 2.2.1. *Neka su x i y vektori takvi da $x \geq y$ i neka je A nenegativna matrica. Tada je $Ax \geq Ay$.*

Dokaz. Neka su x_i i y_i i-te komponente vektora x i y, redom. Neka je a_{ij} element i-tog retka j-tog stupca matrice A. Tada se i-ti element vektora Ax i Ay može zapisati kao

$$a_i x = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \text{i} \quad a_i y = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \quad \text{za} \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

gdje je a_i i-ti redak matrice A kojeg shvaćamo kao vektor redak. Pošto je A nenegativna matrica, tada je $a_{ik} \geq 0$ za sve i i k. Stoga je,

$$a_i x - a_i y = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - y_k) \geq 0 \quad \text{za svaki} \quad i$$

ili skraćeno,

$$Ax \geq Ay.$$

□

Lema 2.2.2. *Neka je A produktivna matrica. Označimo s a^s_{ij} element i-tog retka j-tog stupca matrice A^s. Tada vrijedi*

$$\lim_{s\to\infty} a^s_{ij} = 0.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Iz definicije 2.1.4 slijedi da postoji $x > 0$ takav da je

$$x > Ax.$$

Pošto je A nenegativna matrica, vrijedi $Ax \geq 0$. Tada postoji $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ takav da

$$\lambda x > Ax \geq 0. \tag{2.7}$$

Množeći (2.7) s matricom A i koristeći lemu 2.2.1 dobivamo,

$$\lambda(Ax) \geq A(Ax) = A^2 x \geq 0. \tag{2.8}$$

S druge strane, množeći (2.7) s λ dobivamo,

$$\lambda^2 x > \lambda(Ax) \geq 0. \tag{2.9}$$

Nejednakosti (2.8) i (2.9) zajedno daju

$$\lambda^2 x > A^2 x \geq 0.$$

Pretpostavimo da za neki $s \geq 2$ vrijedi

$$\lambda^{s-1} x > A^{s-1} x \geq 0. \tag{2.10}$$

Množeći (2.10) s λ dobvamo

$$\lambda^s x > \lambda A^{s-1} x \geq 0. \tag{2.11}$$

Uočimo da je A^{s-1} nenegativna pa po lemi 2.2.1 iz (2.7) dobivamo

$$A^{s-1}(\lambda x) \geq A^{s-1}(Ax). \tag{2.12}$$

Iz (2.11) koristeći (2.12) imamo

$$\lambda^s x > A^{s-1}(\lambda x) \geq A^{s-1}(Ax) = A^s x \geq 0. \tag{2.13}$$

Stoga, za svaku produktivnu matricu A postoji $x > 0$ takav da vrijedi (2.13) za svaki $s \in \mathbb{N}$. Kako je $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, slijedi $\lim_{s\to\infty} \lambda^s = 0$. Tada iz (2.13), koristeći teorem o sendviču, dobivamo

$$\lim_{s\to\infty} A^s x = 0,$$

odnosno

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{s} x_j = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.14}$$

Uočimo da za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zbog $x_k > 0$, $a_{ik} \geq 0$ za sve $k \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$0 \leq a_{ij}^{s} x_j \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{s} x_k, \tag{2.15}$$

pa po teoremu o sendviču iz (2.15) i (2.14) slijedi

$$\lim_{s\to\infty} a_{ij}^{s} = 0.$$

□

Lema 2.2.3. *Ako je A produktivna matrica i ako je $x \geq Ax$ za neki x, tada je $x \geq 0$.*

Dokaz. Množeći $x \geq Ax$ sekvencijalno $s - 1$ puta matricom A i koristeći lemu 2.2.1 dobivamo

$$x \geq Ax \geq A^2x \geq \ldots \geq A^s x,$$

odnosno

$$x \geq A^s x, \quad \text{za svaki } s \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$x \geq \lim_{s\to\infty} A^s x$$

Kako je prema lemi 2.2.2 $\lim_{s\to\infty} A^s x = 0$, dobivamo da je $x \geq 0$. □

Lema 2.2.4. *Ako je A produktivna matrica, tada je I-A regularna matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $I - A$ je singularna matrica. Tada postoji $x \neq 0$ takav da je

$$(I - A)x = 0 \tag{2.16}$$

ili ekvivalentno,

$$x = Ax.$$

Iz leme 2.2.3 slijedi $x \geq 0$. Nadalje, očito je da i vektor $-x$ zadovoljava jednadžbu (2.16), tj.

$$(I - A)(-x) = 0.$$

Ponovno zbog leme 2.2.3 mora vrijediti $-x \geq 0$. Nejednakosti $-x \geq 0$ i $-x \leq 0$ su istodobno zadovoljene samo za $x = 0$, što je u kontradikciji s $x \neq 0$. □

Pomoću prethodne četiri leme dokazujemo glavni teorem ovog poglavlja.

Teorem 2.2.5. *Neka je A produktivna matrica. Za dani nenul vektor $d \geq 0$, sustav*

$$(I - A)x = d \tag{2.17}$$

ima jedinstveno nenegativno rješenje.

Dokaz. Po lemi 2.2.4, matrica $I - A$ je regularna. Stoga jednadžba (2.17) ima jedinstveno rješenje $\tilde{x}$.

Vrijedi

$$(I - A)\tilde{x} = d \geq 0.$$

Tada iz leme 2.2.3 slijedi $\tilde{x} \geq 0$. □

Napomena 2.2.6. *Neka je $d > 0$ vektor finalne potražnje. Ukoliko pretpostavimo da sustav* (2.17) *ima nenegativno rješenje x, tada je $x - Ax = (I - A)x = d > 0$ i $x > Ax \geq 0$ pa je $x > 0$, tj. A je produktivna matrica.*

Napomena 2.2.7. *Primijetimo da produktivnost matrice A nije nužna da bi dobili nenegativno rješenje sustava* (2.17). *Na primjer, za $d = 0$ sustav ima rješenje $x = 0$ za bilo koju matricu A. Međutim, ako je $d > 0$, nenegativno rješenje x postoji ako i samo ako je matrica A produktivna.*

Još jedan rezultat matematičke ekonomije koji garantira postojanje nenegativnog vektora proizvodnje koji je rješenje Leontiefovog otvorenog input-output modela se može izvesti iz sljedećeg teorema.

Teorem 2.2.8. *Neka je A nenegativna matrica. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) A je produktivna;

(ii) matrica $(I - A)^{-1}$ postoji i nenegativna je;

(iii) sve uzastopne glavne minore matrice $I - A$ su pozitivne;

Uvjet pod (*iii*) se zove Hawkins-Simonov uvjet, a ekvivalentnost uvjeta (*iii*) i (*ii*) je poznata kao Hawkins-Simonov teorem [6].

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Pretpostavimo da je A produktivna matrica. Tada matrica $(I - A)^{-1}$ postoji po lemi 2.2.4. Definirajmo

$$\Psi_s = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^s.$$

Tada je

$$A\Psi_s = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{s+1}.$$

Stoga imamo,

$$(I - A)\Psi_s = I - A^{s+1}.$$

Uzimajući limes kad $s \to \infty$ s obje strane, iz leme 2.2.2 dobivamo,

$$\lim_{s\to\infty}[(I - A)\Psi_s] = I.$$

Na kraju imamo

$$\lim_{s\to\infty}\Psi_s = (I - A)^{-1}.$$

Pošto je $A \geq 0$, imamo $\Psi_s > 0$, a onda je

$$(I - A)^{-1} = \lim_{s\to\infty}\Psi_s \geq 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Pretpostavimo da je $(I - A)^{-1}$ nenegativna. Uzmimo bilo koji $d > 0$. Tada sustav $(I - A)x = d$ ima jedinstveno rješenje $x = (I - A)^{-1}d \geq 0$. Po napomeni 2.2.7 slijedi da je A produktivna matrica.

Dokaz ekvivalentnosti Hawkins-Simonovog uvjeta (iii) i uvjeta produktivnosti (i) se nalazi u knjizi [15, str. 384–385]. □

Uvjeti za dobivanje pozitivnog (ekonomski značajnog) rješenja

Ekonomski značajno rješenje Leontiefovog otvorenog input-output modela je ono koje dodjeljuje pozitivnu razinu proizvodnje (outputa) svakom sektoru. Želimo pronaći uvjete koje bi matrica A trebala zadovoljavati u tom slučaju. Pokažimo prvo neke rezultate koji će nam pomoći pri tome.

Definicija 2.2.9. *Matrica $P \in M_n(\mathbb{R})$ je matrica permutacije ako u svakom retku i u svakom stupcu ima točno jednu jedinicu, dok su na svim ostalim mjestima nule.*

Definicija 2.2.10. *Kažemo da je $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, reducibilna ako postoji matrica permutacije $P \in M_n(\mathbb{R})$ i $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ takvi da je*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in M_r(\mathbb{C}),\ \tilde{A}_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{C}),\ \tilde{A}_{12} \in M_{n,n-r}(\mathbb{C}).$$

Definicija 2.2.11. *Matrica A je ireducibilna ako nije reducibilna.*

Sljedeće dvije leme nam daju karakterizaciju ireducibilnih matrica.

Lema 2.2.12. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je ireducibilna ako i samo ako za svaki $j \neq k$ postoji konačan niz*

$$j = i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}, i_m = k$$

takav da su svi elementi $a_{i_{j-1}i_j}$ matrice A različiti od 0 *za $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

U terminima teorije grafova to znači da je direktni graf $G(A)$ s vrhovima $\{1, \ldots, n\}$ i lukovima $\{j \to k \mid a_{jk} \neq 0\}$ jako povezan, tj. za svaka dva različita vrha j i k postoji put između njih. Dokaz se može pronaći u [4, str. 36–37].

Lema 2.2.13. *Nenegativna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je ireducibilna ako i samo ako za svaki $j \neq k$ postoji neki $m > 0$ tako da je (j, k)-ti element matrice A^m pozitivan.*

Dokaz. Neka je $A^m = (a^m_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$. Imamo

$$a^2_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, a_{ik}.$$

Indukcijom po m dobivamo

$$a^m_{jk} = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} a_{ji_1}\, a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{m-2} i_{m-1}}\, a_{i_{m-1}k}. \tag{2.18}$$

Očito da nejednakost $a^m_{jk} > 0$ vrijedi ako i samo ako postoji pozitivan sumand u sumi (2.18), tj. postoje $i_1, \ldots, i_{m-1}$ takvi da su svi elementi $a_{ji_1}, a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_{m-1}k}$ pozitivni. Po lemi 2.2.12 to je ekvivalentno s tim da je matrica A ireducibilna. □

Tako dolazimo do teorema koji garantira postojanje ekonomski značajnog rješenja Leontiefovog otvorenog input-output modela.

Teorem 2.2.14. *Za nenegativnu matricu A, sljedeća tri uvjeta su ekvivalentna:*

(i) za svaki nenul $d \geq 0$, sustav $Ax + d = x$ ima pozitivno rješenje;

(ii) matrica $(I - A)^{-1}$ je pozitivna;

(iii) matrica A je produktivna i ireducibilna.

Dokaz. (*i*) ⇒ (*ii*) Ako vrijedi (*i*), tada za svaki $d > 0$ postoji x takav da je $x - Ax = d > 0$, stoga je A produktivna matrica. Tada $(I - A)^{-1}$ postoji po teoremu 2.2.8. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ stavimo $d_i = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ (1 je na i-tom mjestu). Tada rješenje x_i sustava $x - Ax = d_i$ mora biti pozitivno. Pošto je $x_i = (I - A)^{-1} e_i$ i-ti stupac matrice $(I - A)^{-1}$, slijedi da su svi elementi i-tog stupca te matrice pozitivni za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, tj. $(I - A)^{-1} > 0$.

(*ii*) ⇒ (*i*) Označimo sa c_{ij} element matrice $(I - A)^{-1}$ koji se nalazi u i-tom retku, j-tom stupcu. Ako vrijedi (*ii*), imamo $c_{ij} > 0$. Tada za svaki nenul $d = (d_1, \ldots, d_n) \geq 0$ sustav $Ax + d = x$ ima jedinstveno rješenje $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ovdje je

$$x_i = c_{i1} d_1 + \ldots + c_{in} d_n,$$

gdje je barem jedan sumand pozitivan. Stoga je $x_i > 0$ za svaki i, tj. $x > 0$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Iz teorema 2.2.8 znamo da je $(I - A)^{-1}$ nenegativna ako i samo ako je matrica A produktivna. Prateći dokaz tog teorema, neka je

$$\Psi_s = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^s.$$

Tada je

$$\lim_{s\to\infty} \Psi_s = (I - A)^{-1}.$$

Pošto je niz matrica $(\Psi_s)_s$ neopadajući, imamo

$$\Psi_s \leq (I - A)^{-1} \quad \text{za svaki } s.$$

Kako je $(\Psi_s)_{ii} > 0$, slijedi da su elementi c_{ii} na dijagonali matrice $C = (I - A)^{-1}$ uvijek različiti od 0. Štoviše, svaki element c_{ij} je različit od 0 ako i samo ako je (i, j)-ti element a_{ij}^m matrice A^m različit od 0, za neki $m \geq 1$. Iz leme 2.2.13 slijedi da matrica $(I - A)^{-1}$ ima elemente koji su različiti od 0 ako i samo ako je matrica A ireducibilna. □

2.3 Primjer modela

Kao primjer Leontiefovog otvorenog input-output modela uzeli smo primjer iz [2, str. 584–585].

Primjer 2.3.1. *Pretpostavimo da su u jednom gradu tri glavne industrije: naftno rudarstvo, energetika i željeznički promet. Za vađenje* 1$ *ugljena potrebno je* 0.25$ *električne energije za pogon strojeva i* 0.25$ *prijevoza za transport ugljena. Da bi se proizvelo* 1$ *električne energije, elektrani je potrebno* 0.65$ *ugljena,* 0.05$ *vlastite energije za pogon strojeva i* 0.05$ *prijevoza za transport ugljena. Za* 1$ *prijevoza, željeznica traži* 0.55$ *ugljena za gorivo i* 0.10$ *električne energije. U određenom tjednu naftno rudarstvo prima narudžbu od nekog drugog grada u iznosu od* 50 000$ *ugljena, a elektrana narudžbu od* 25 000$ *električne energije. Koliko svaka od tri industrije mora proizvesti u tom tjednu kako bi se zadovoljila ukupna potražnja za proizvodima?*

Zapišimo prvo pripadnu matricu tehnologije i vektor finalne potražnje

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako bi izbjegli račune s velikim brojevima, pretpostavimo da je vektor finalne potražnje u tisućama dolara.

Rješavamo sustav $Ax + d = x$, tj. $(I - A)x = d$.

Tada je

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1 \end{bmatrix},$$

te njen inverz

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.503 & 1.0775 & 0.9344 \\ 0.4374 & 1.3718 & 0.3777 \\ 0.3976 & 0.338 & 1.2525 \end{bmatrix},$$

pri čemu su elementi matrice zaokruženi na četiri decimale. Matrica $(I - A)^{-1}$ je pozitivna pa prema teoremu 2.2.14, sustav ima pozitivno rješenje x te je ono dano s

$$x = (I - A)^{-1} d = \begin{bmatrix} 102.087 \\ 56.165 \\ 28.330 \end{bmatrix}.$$

Kako bi se zadovoljila ukupna potražnja, razina proizvodnje naftnog rudarstva treba iznositi 102 087 \$, energetike 56 165 \$ i željezničkog prometa 28 330 \$. Pretpostavimo da se finalna potražnja za energijom poveća s 25 000 \$ na 60 000 \$, a da ostale finalne potražnje ostanu iste. Tada pomoću Leontiefove matrice inverza možemo dobiti promjene u razinama proizvodnje.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.503 & 1.0775 & 0.9344 \\ 0.4374 & 1.3718 & 0.3777 \\ 0.3976 & 0.338 & 1.2525 \end{bmatrix}}_{(I-A)^{-1}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{promjena u finalnoj potražnji}} \quad = \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 37.713 \\ 48.013 \\ 11.830 \end{bmatrix}}_{\text{promjena u proizvodnji}}$$

U tom slučaju vidimo da će se razina proizvodnje naftnog rudarstva povećati za 37 713 \$, energetike za 48 013 \$ i željezničkog prometa za 11 830 \$.

Primijetimo da povećanje finalne potražnje za energijom zahtijeva povećanje proizvodnje ugljena i npr. vlakova, makar su njihove finalne potražnje ostale iste. Razlog tome je taj što, da bi povećala proizvodnju, energetika kao industrija mora koristiti više ugljena kao glavni izvor energije i npr. vlakova za transport ugljena, stoga se međusektorska potražnja za tim proizvodima povećava.

Leontiefova inverzna matrica $(I - A)^{-1}$ na lijep način uzima u obzir ovakve neizravne učinke.

Poglavlje 3

Matrične igre

Teorija igara analizira donošenje odluka u konfliktnim situacijama koje uključuju dva ili više sudionika koji nastoje promovirati vlastiti interes, poštujući pravila igre i koristeći različite strategije kako bi sebi osigurali povoljan ishod igre. Cilj je odrediti ponašanje sudionika koje je za njih najpovoljnije, tj. odrediti njihove optimalne strategije.
U ovom poglavlju ćemo prvo definirati osnovne pojmove na kojima se teorija igara zasniva, upoznat ćemo se s matričnim igrama i igrama sa sumom nula s dva igrača, spomenut ćemo temeljni teorem teorije igara (Minimax teorem) te ćemo riješiti par matričnih igara. Primjeri matričnih igara se mogu pronaći u [14, str. 451–458], a s pojmovima i rezultatima koje ćemo upravo navesti imali smo priliku susresti se na kolegiju Teorija igara [10].

3.1 Osnovni pojmovi

Temeljni koncept teorije igara je koncept strategije. Strategija za nekog igrača predstavlja unaprijed definiran skup poteza koji igrač ima na raspolaganju za vrijeme igre, ovisno o mogućoj okolnosti koja se može pojaviti. Osim strategije, jako važan je i koncept korisnosti. Korisnost nekog igrača predstavlja dobitak tog igrača s obzirom na kombinaciju strategija svih igrača u toj igri.

Definicija 3.1.1. *Neka je $N = \{1, \ldots, n\}$ konačan skup igrača.* ***Strateška igra s** n **igrača*** *je uređeni par $G = (A, u)$ koji se sastoji od*

- ***Skupa strateških profila**: Za svaki $i \in N$, neka je $A_i \neq \emptyset$ skup strategija igrača i. Skup $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ nazivamo skupom strateških profila.*

- ***Funkcije korisnosti**: Za svaki $i \in N$, neka je $u_i \colon A \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti igrača i. Funkciju $u = (u_1, \ldots, u_n) \colon A \to \mathbb{R}^n$ nazivamo funkcijom korisnosti.*

Definicija 3.1.2. *Za stratešku igru $G = (A, u)$ kažemo da je* ***konačna*** *ako je skup A_i konačan za sve $i \in N$.*

Promotrimo igru sa samo dva igrača u kojoj je dobitak prvog igrača jednak gubitku drugog i obrnuto. Takva igra je poznata pod nazivom igra sa sumom nula s dva igrača. U nastavku donosimo općenitu definiciju za igru sa sumom nula.

Definicija 3.1.3. ***Igra sa sumom nula*** *je strateška igra $G = (A, (u_1, \ldots, u_n))$ takva da je $u_1 + \ldots + u_n = 0$, tj. za svaki strateški profil $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ vrijedi*

$$u_1(a) + \ldots + u_n(a) = 0.$$

Uočimo da u slučaju igre sa sumom nula s dva igrača, ukoliko nam je poznata funkcija u_1, automatski znamo i funkciju u_2. Zbog toga takve igre često promatramo kao uređene trojke (A_1, A_2, u_1). Primijetimo da dva igrača u ovakvim igrama imaju potpuno suprotne interese, tj. ako je prvom igraču strateški profil (a_1, a_2) bolji od profila (a'_1, a'_2)[1], tada drugi igrač preferira upravo suprotno.

Igru sa sumom nula s dva igrača možemo prikazati u matričnoj formi. Pretpostavimo da prvi igrač ima na raspolaganju m strategija ($|A_1| = m$), a drugi igrač n ($|A_2| = n$). Neka redci odgovaraju strategijama prvog igrača, a stupci strategijama drugog igrača. Dobivamo $m \times n$ matricu korisnosti $U = (u_1(i, j))_{i \in A_1, j \in A_2}$, pri čemu je $u_1(i, j)$ isplata drugog igrača prvom igraču, tj. dobitak prvog igrača ukoliko prvi igrač odabere strategiju i, a drugi strategiju j. Ako je $u_1(i, j)$ negativan, on označava isplatu prvog igrača drugom, tj. dobitak drugog igrača u iznosu $|u_1(i, j)|$.

Definicija 3.1.4. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra sa sumom nula s dva igrača.*

- *Neka je $\underline{\Lambda}\colon A_1 \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja*

  $$\underline{\Lambda}(a_1) = \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2),$$

  odnosno minimalni dobitak prvog igrača u slučaju da odabere strategiju a_1. ***Donja vrijednost*** *$\underline{\lambda}$ igre G je broj*

  $$\underline{\lambda} = \sup_{a_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(a_1),$$

  odnosno dobitak na koji prvi igrač odabirom dobre strategije može računati.

- *Neka je $\overline{\Lambda}\colon A_2 \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja*

  $$\overline{\Lambda}(a_2) = \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2),$$

[1] $u_1(a_1, a_2) > u_1(a'_1, a'_2)$

odnosno maksimalni gubitak drugog igrača u slučaju da odabere strategiju a_2. ***Gornja vrijednost*** $\overline{\lambda}$ *igre G je broj*

$$\overline{\lambda} = \inf_{a_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(a_2),$$

odnosno najveći gubitak koji drugi igrač može iskusiti ukoliko odabere dobru strategiju.

Navedeni nazivi su i opravdani, tj. $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$. Doista,

$$\underline{\Lambda}(a_1) \leq u_1(a_1, a_2) \leq \overline{\Lambda}(a_2),$$

pa tvrdnja slijedi uzimanjem infimuma po $a_2 \in A_2$ i supremuma po $a_1 \in A_1$.
Od posebnog interesa će nam biti igre kod kojih se gornja i donja vrijednost igre podudaraju.

Definicija 3.1.5. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra sa sumom nula s dva igrača. Za G kažemo da je* ***strogo određena*** *ili da ima vrijednost ukoliko se njena gornja i donja vrijednost podudaraju. U tom slučaju ćemo broj $V := \overline{\lambda} = \underline{\lambda}$ nazivati* ***vrijednost*** *igre G.*

Definicija 3.1.6. *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ strogo određena igra s vrijednosti V. Za strategiju $a_1 \in A_1$ reći ćemo da je* ***optimalna strategija prvog igrača*** *ukoliko je $\underline{\Lambda}(a_1) = V$. Analogno, za strategiju $a_2 \in A_2$ reći ćemo da je* ***otpimalna strategija drugog igrača*** *ukoliko je $\overline{\Lambda}(a_2) = V$.*

Ukoliko postoji strateški profil $(a_1^*, a_2^*) \in A$ takav da je

$$u_1(a_1, a_2^*) \leq u_1(a_1^*, a_2^*) \leq u_1(a_1^*, a_2) \quad \text{za sve} \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \tag{3.1}$$

(a_1^*, a_2^*) zovemo sedlasta točka. U matrici korisnosti U, sedlasta točka predstavlja element koji je najmanji u svojem retku i najveći u svojem stupcu.

Propozicija 3.1.7 ([10])**.** *Neka je $G = (A_1, A_2, u_1)$ igra sa sumom nula s dva igrača i sedlastom točkom (a_1^*, a_2^*). Tada je G strogo određena s vrijednosti $u_1(a_1^*, a_2^*)$. Štoviše, a_1^* je optimalna strategija prvog igrača, a a_2^* optimalna strategija drugog igrača.*

Dokaz. Uočimo da je zbog nejednakosti (3.1) i veličina iz definicije 3.1.4

$$u_1(a_1^*, a_2^*) = \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1^*, a_2) = \underline{\Lambda}(a_1^*) \leq \sup_{a_1 \in A_1} \underline{\Lambda}(a_1) = \underline{\lambda}.$$

Analogno dobivamo

$$u_1(a_1^*, a_2^*) = \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2^*) = \overline{\Lambda}(a_2^*) \geq \inf_{a_2 \in A_2} \overline{\Lambda}(a_2) = \overline{\lambda}.$$

Spajanjem ova dva niza nejednakosti dobivamo da je $\underline{\lambda} \geq \overline{\lambda}$. Međutim, otprije već znamo da je i $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$ pa sve nejednakosti moraju u stvari biti jednakosti, odakle slijede sve tvrdnje iz propozicije. □

Sad ćemo reći nešto više o mješovitim proširenjima konačnih igara.

Definicija 3.1.8. *Neka je $G = (A, u)$ konačna strateška igra s n igrača.* ***Mješovito proširenje*** *igre G je igra $E(G) = (S, u)$, pri čemu je za svaki $i \in N$*

- $S_i = \Delta A_i$ ***skup mješovitih strategija*** *igrača i, pri čemu je*

$$\Delta A_i = \{x \in [0,1]^{A_i} : \sum_{a_i \in A_i} x(a_i) = 1\}.$$

  Kao i inače $S = S_1 \times \ldots \times S_n$. Za proizvoljni ***mješoviti strateški profil*** *$s \in S$ i strateški profil $a \in A$, neka je $s(a) = s_1(a_1) \ldots s_n(a_n)$.*

- $u_i \colon S \to \mathbb{R}$ ***proširena funkcija korisnosti*** *igrača i definirana s*

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) s(a).$$

  Tada je $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ***proširena funkcija korisnosti****.*

Za svakog igrača i, mješovite strategije iz S_i doživljavamo kao vjerojatnosne distribucije preko kojih igrač može birati strategije iz A_i. Ukoliko igrač odluči da ne želi na slučajan način birati strategije, već se odluči za neku fiksnu strategiju $a_i \in A_i$, tada njegova mješovita strategija $e_{a_i} \in S$ zadovoljava

$$e_{a_i}(a'_i) = \begin{cases} 1 \text{ , za } a'_i = a_i \\ 0 \text{ , inače.} \end{cases}$$

Strategije e_{a_i} zovemo **čiste strategije**. To su orginalne strategije (iz skupa A_i) shvaćene kao podvrsta mješovitih strategija.

Uz ovakvu vjerojatnosnu interpretaciju mješovitih strategija, vrijednost

$$s(a) = s_1(a_1) \ldots s_n(a_n)$$

predstavlja vjerojatnost da će se igrači na slučajan način odlučiti za strateški profil a. Stoga je $u_i(s)$ očekivana korisnost za igrača i, u slučaju da su se igrači odlučili za mješoviti strateški profil s.

Sad možemo definirati matrične igre.

Definicija 3.1.9. ***Matrična igra*** *je mješovito proširenje konačne igre sa sumom nula s dva igrača.*

Primijetimo da je svaka matrična igra ujedno i igra sa sumom nula. Za prozvoljni mješoviti strateški profil s imamo

$$u_1(s) + u_2(s) = \sum_{a \in A} (u_1(a)s(a) + u_2(a)s(a)) = \sum_{a \in A} (u_1(a) + u_2(a))s(a) = 0.$$

Teorem 3.1.10 (Minimax teorem). *Svaka matrična igra je strogo određena.*

Postoje brojni dokazi ovog teorema. Na kolegiju Teorija igara teorem smo dokazali pomoću Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki. Von Neumann [2] je konstruirao dva dokaza: jedan koji se bazira na Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki, a drugi na propoziciji da se nepreklapajući konveksni skupovi u Euklidskom prostoru mogu razdvojiti hiperravninama. Navedeni i ostali dokazi ovog teorema, koji se temelje na algebarskim nejednakostima i svojstvima konveksnih funkcija, se mogu pronaći u [8].

Propozicija 3.1.11 ([10]). *Za matričnu igru s matricom U, te sve mješovite strategije $x \in S_1$ i $y \in S_2$ vrijedi*

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{j \in A_2} x u_{\cdot j} = \min_{j \in A_2} u_1(x, j) \quad i \quad \overline{\Lambda}(y) = \max_{i \in A_1} u_{i \cdot} y^T = \max_{i \in A_1} u_1(i, y). \tag{3.2}$$

Dokaz. Uočimo najprije da je

$$\underline{\Lambda}(x) = \inf_{y \in S_2} u_1(x, y) = \inf_{y \in S_2} xUy^T \leq \min_{j \in A_2} xU(e_j)^T = \min_{j \in A_2} x u_{\cdot j}. \tag{3.3}$$

S druge strane za proizvoljni $y \in S_2$ imamo da je

$$xUy^T = \sum_{k \in A_2} (x u_{\cdot k}) y_k \leq \sum_{k \in A_2} (\min_{j \in A_2} x u_{\cdot j}) y_k = (\min_{j \in A_2} x u_{\cdot j}) \sum_{k \in A_2} y_k = \min_{j \in A_2} x u_{\cdot j},$$

pa uzimanjem infimuma po $y \in S_2$ dobivamo da u (3.3) vrijedi i obratna nejednakost. Druga jednakost iz propozicije dokazuje se analogno. □

[2] John von Neumann (1903.-1957.), američki ekonomist mađarskog podrijetla, uvelike doprinio razvoju teorije igara.

3.2 Primjeri

Pretpostavimo da imamo igru sa sumom nula s dva igrača X i Y. Pritom igrač X ima m mogućih strategija, a igrač Y n. Redci matrice isplate U označavaju strategije igrača X, a stupci igrača Y. Igrač X može odabrati bilo koju mješovitu strategiju $x = (x_1, \ldots, x_m)$, pri čemu x_i označava vjerojatnost da će igrač X odabrati i-ti redak, tj. strategiju i te je $\sum_{i=1}^{m} x_i$=1. Analogno, igrač Y može odabrati bilo koju mješovitu strategiju $y = (y_1, \ldots, y_n)$, pri čemu je y_j vjerojatnost da će igrač Y odabrati j-stupac te je $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. U bilo kojem krugu igre, $x_i y_j$ označava vjerojatnost da će igrač X odabrati strategiju i, a igrač Y strategiju j te je tada isplata igraču X, u_{ij}. Očekivana korisnost igrača X na kraju igre je tada

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i u_{ij} y_j = xUy,$$

tj. u matričnom obliku

$$xUy = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 u_{11} y_1 + \cdots + x_m u_{mn} y_n.$$

Korisnost xUy igrač X želi maksimizirati, a igrač Y minimizirati. Upravo navedeno će nam biti motivacija za rješavanje sljedećih primjera.

Primjer 3.2.1. *Pretpostavimo da u igri sudjeluju dva igrača, igrač X te igrač Y. Igrači podižu jednu ili obje ruke istovremeno. Ukoliko oba igrača donesu istu odluku, igrač Y dobiva* 10$ *. Ako su im odluke različite, igrač X dobiva* 10$ *, ukoliko je podignuo jednu ruku, a* 20$ *ukoliko je podignuo obje. Odredimo optimalne strategije igrača X i Y te vrijednost igre.*

Matrica korisnosti je sljedeća :

$$\begin{array}{l} \\ \text{(J)edna ruka igrača X} \\ \text{(D)vije ruke igrača X} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(J)edna ruka igrača Y} & \text{(D)vije ruke igrača Y} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \qquad -10 \qquad & \qquad\qquad 10 \qquad\qquad \\ \qquad 20 \qquad & \qquad\qquad -10 \qquad\qquad \end{pmatrix} \end{array}$$

Pretpostavimo da igrač X bira strategije iz skupa A_1, a igrač Y iz skupa A_2. Tada je $A_1 = A_2 = \{J, D\}$, pri čemu J označava da je igrač podignuo jednu ruku, a D obje ruke. Skup strateških profila je tada $A = \{(J, J), (J, D), (D, J), (D, D)\}$.

Pripadna funkcija korisnosti igrača X je funkcija $u_1 \colon A \to \mathbb{R}$, pri čemu je $u_1(J, J) =$

-10, $u_1(J,D) = 10$, $u_1(D,J) = 20$ i $u_1(D,D) = -10$. Budući da se radi o igri sa sumom nula s dva igrača, čim znamo funkciju korisnosti prvog igrača, znamo i funkciju korisnosti drugog igrača.

Ako se igrač X svaki put odluči za istu strategiju (npr. svaki put podigne jednu ruku), igrač Y će ga kopirati i pobijediti. Slično, igrač Y se ne može uvijek držati iste strategije, inače će igrač X odigrati suprotno i pobijediti. Stoga, oba igrača moraju koristiti mješovite strategije te izbor strategije u svakom krugu igre mora biti neovisan o prijašnjem izboru. Ukoliko postoji neki obrazac po kojem igrač igra, protivnik to lako može iskoristiti. Čak i strategija „ostani uvijek uz istu strategiju dok ne izgubiš" može rezultirati porazom. Nakon nekoliko krugova igre, protivnik bi točno znao što očekivati.

Pretpostavimo da u mješovitoj strategiji igrač X podigne jednu ruku s vjerojatnosti x_1 i obje ruke s vjerojatnosti $x_2 = 1 - x_1$. U svakom krugu igre ova odluka je slučajna. Analogno, igrač Y odabire strategije s vjerojatnostima y_1 i $y_2 = 1 - y_1$. Tada je $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in [0,1]\}$, skup mješovitih strategija igrača X, a $S_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in [0,1]\}$ igrača Y, a $S = S_1 \times S_2$ skup mješovitih strateških profila.

Vidjeli smo da nijedna vjerojatnost ne smije biti 0 ili 1 jer se u tom slučaju protivnik prilagodi i pobijedi.

Iz propozicije 3.1.11 slijedi

$$\begin{aligned}
\underline{\Lambda}(x) &= \min_{j \in A_2} x u_{\cdot j} \\
&= \min\{-10x_1 + 20x_2, 10x_1 - 10x_2\} \\
&= 10 \cdot \min\{-x_1 + 2(1 - x_1), x_1 - (1 - x_1)\} \\
&= 10 \cdot \min\{2 - 3x_1, 2x_1 - 1\}.
\end{aligned}$$

Dakle, donja vrijednost igre je $\underline{\lambda} = 10 \cdot \max\min\{2 - 3x_1, 2x_1 - 1\}$. Uočimo da se pravci s jednadžbama $y = 2 - 3x$ i $y = 2x - 1$ sijeku u točki $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$, a $\frac{3}{5} \in [0,1]$, pa je prema tome optimalna strategija igrača X, $x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, a donja vrijednost igre 2.

Pronađimo sada optimalnu strategiju igrača Y. Ponovno, koristeći propoziciju 3.1.11 dobivamo

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}(y) &= \max_{i \in A_1} u_{i\cdot} y^T \\
&= \max\{-10y_1 + 10y_2, 20y_1 - 10y_2\} \\
&= 10 \cdot \max\{-y_1 + (1 - y_1), 2y_1 - (1 - y_1)\} \\
&= 10 \cdot \max\{1 - 2y_1, 3y_1 - 1\}
\end{aligned}$$

Gornja vrijednost igre je $\overline{\lambda} = 10 \cdot \min\max\{1 - 2y_1, 3y_1 - 1\}$. Pravci s jednadžbama $y = 1 - 2x$ i $y = 3x - 1$ se sijeku u točki $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, a $\frac{2}{5} \in [0,1]$, pa je prema tome optimalna strategija

igrača Y, $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, a gornja vrijednost igre 2.
Budući da se gornja i donja vrijednost igre podudaraju, prema definiciji 3.1.5 igra je strogo određena te je vrijednost igre $V = \overline{\lambda} = \underline{\lambda} = 2$.

Primjer 3.2.2. *Pretpostavimo da igrači X i Y biraju brojeve iz skupa* $\{1, \ldots, n\}$. *Ukoliko odaberu isti broj, igrač X dobiva 1\$, a ukoliko odaberu različite brojeve nitko ništa ne dobiva. Odredimo optimalne strategije igrača X i igrača Y te vrijednost igre.*

Primijetimo da je matrica korisnosti U upravo jedinična $n \times n$ matrica.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Neka su $A_1 = A_2 = \{1, \ldots, n\}$ skupovi strategija igrača X i Y redom, pri čemu navedeni brojevi upravo označavaju brojeve koji će igrači odabrati. Slijedi da je

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{j \in A_2} x u_{\cdot j} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

te

$$\underline{\lambda} = \max_{\substack{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \in [0,1]}} \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Ako je za neki x, $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ jednak x_i, to znači da je $x_k \geq x_i \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, a tada je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n \cdot x_i$, tj. $x_i \leq \frac{1}{n}$. Prema tome

$$\underline{\lambda} = \max \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq \frac{1}{n}.$$

S druge strane, za $x = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ je $\underline{\Lambda}\left(\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ pa je

$$\underline{\lambda} = \max \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geq \frac{1}{n}.$$

Napokon, zaključujemo da je donja vrijednost igre $\underline{\lambda} = \frac{1}{n}$. Analogno se dobije da je gornja vrijednost igre $\overline{\lambda} = \frac{1}{n}$ pa je prema definiciji 3.1.5 vrijednost igre $V = \overline{\lambda} = \underline{\lambda} = \frac{1}{n}$.
Ako je x optimalna strategija igrača X, onda je $\underline{\Lambda}(x) = \frac{1}{n}$, tj. $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \frac{1}{n}$.
Slijedi

$$x_i \geq \frac{1}{n}, \quad \forall i \in 1, \ldots, n.$$

Iz toga slijedi

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n \cdot \frac{1}{n},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$.
Stoga je optimalna strategija igrača X, $x^* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Analogno dobijemo da je optimalna strategija igrača Y, $y^* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

U ovom primjeru smo vidjeli da pomoću simetrične matrice korisnosti $U = I$ nismo dobili fer igru. Ukoliko je matrica korisnosti antisimetrična, tj. $U^T = -U$ dobivamo potpuno fer igru. U takvoj igri ukoliko igrač X odabere strategiju i, a igrač Y strategiju j, igrač X dobiva iznos u_{ij}, a ukoliko igrač X odabere strategiju j, a igrač Y strategiju i, igrač Y dobiva isti iznos, jer $u_{ji} = -u_{ij}$.
Optimalne strategije u potpuno fer igri moraju biti jednake za igrača X i Y, a očekivana korisnost $x^* U y^*$ mora iznositi 0. Vrijednost igre je također 0. U sljedećem primjeru, igra će biti fer.

Primjer 3.2.3. *Igrači X i Y odabiru broj iz skupa* $\{1, 2, 3\}$. *Igrač koji odabere manji broj osvaja* 1$. *Ako odaberu isti broj, nitko ništa ne dobiva. Odredimo optimalne strategije igrača X i Y te vrijednost igre.*

Matrica korisnosti je sljedeća:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Igrač } Y \text{ bira 1} & \text{Igrač } Y \text{ bira 2} & \text{Igrač } Y \text{ bira 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Igrač } X \text{ bira 1} \\ \text{Igrač } X \text{ bira 2} \\ \text{Igrač } X \text{ bira 3} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Neka su A_1=A_2 = $\{1, 2, 3\}$ skupovi strategija igrača X i Y redom, pri čemu navedeni brojevi označavaju upravo brojeve koji će igrači odabrati. Neka je u_1 funkcija korisnosti prvog igrača.

Primijetimo da je $u_{11} = 0$ sedlasta točka, stoga prema propoziciji 3.1.7 igra je strogo određena s vrijednosti $V = u_1(1, 1) = 0$ te je optimalna strategija igrača X, $x^* = (1, 0, 0)$ i igrača Y, $y^* = (1, 0, 0)$, tj. oba igrača odabiru broj 1 svaki put. Dakle, igra je fer.

Poglavlje 4

Zaključak

U ovom diplomskom radu obradili smo Leontiefov otvoreni model input-output analize te smo pokazali neke primjene linearne algebre u teoriji igara.

Input-output analiza se temelji na kvantitativnoj međuovisnosti pojedinih sektora na koje je proizvodni sustav privrede podijeljen. Pritom svaki sektor u proizvodnji svojih proizvoda koristi proizvode ostalih sektora pa čak i svoje proizvode. Zatim svoje novonastale proizvode isporučuje drugim sektorima, ali i finalnim potrošačima kako bi zadovoljio njihove zahtjeve. Odnose između sektora možemo na jednostavan način prikazati pomoću input-output tablica. Prilikom određivanja razine proizvodnje koji bi svaki sektor trebao imati kako bi se zadovoljila ukupna potražnja za njihovim proizvodima, pomaže nam Leontiefov otvoreni input-output model.

Leontiefov otvoreni input-output model smo definirali kao proizvodni sustav $Ax + d = x$, pri čemu je A kvadratna matrica tehničkih koeficijenata, x vektor proizvodnje i d vektor finalne potražnje. U takvom proizvodnom sustavu svaki sektor proizvodi samo jednu vrstu proizvoda jednom proizvodnom tehnologijom te proizvodnja svakog proizvoda zahtijeva upotrebu barem jednog drugog proizvoda kao inputa. Također, ukupna proizvodnja svakog sektora je veća od količine proizvodnje koja se koristi kao input u proizvodnim procesima sektora, odnosno matrica tehničkih koeficijenata A je produktivna. Dokazali smo da takav model ima rješenje i da je to rješenje jedinstveno. Također, naveli smo i uvjete za dobivanje ekonomski značajnog rješenja, tj. dokazali smo da Leontiefov otvoreni input-output model $Ax + d = x$ ima pozitivno rješenje ako i samo ako je Leontiefova inverzna matrica $(I - A)^{-1}$ pozitivna, što je ekvivalentno s tim da je matrica tehničkih koeficijenata A produktivna i ireducibilna.

Vidjeli smo da su pretpostavke koje Leontiefov otvoreni model mora zadovoljavati nerealne. U stvarnosti postoje proizvodne tehnologije koje proizvode više vrsta proizvoda, npr. rafinerija nafte. Zbog pretpostavke konstantnosti tehničkih koeficijenata, prevladavaju konstantni prinosi na opseg proizvodnje, no u stvarnosti postoje industrije u kojima prevladavaju padajući i/ili rastući prinosi. Također, zbog nemogućnosti supstitucije inputa, ne postoji tehnološki napredak u budućnosti jer će tehnološki uvjeti ostati nepromjenjivi. Glavna prednost otvorenog input-output modela, pa tako i same input-output analize, je što se mogu analizirati izravni i neizravni učinci promjena u bilo kojem sektoru na druge sektore privrede. Primjerice, pomoću Leontiefove inverzne matrice se jednostavno mogu dobiti promjene u razinama proizvodnje svakog sektora ukoliko se promijeni finalna potražnja za proizvodima jednog sektora.

Drugi dio diplomskog rada posvetili smo teoriji igara. Teoriju igara možemo definirati kao matematičku disciplinu koja se bavi konfliktnim situacijama između dva ili više sudionika i pritom želi odrediti ponašanje sudionika koje je za njih najpovoljnije, tj. želi odrediti njihove optimalne strategije. Na početku smo definirali osnovne pojmove na kojima se teorija igara zasniva te se upoznali s matričnim igrama i igrama sa sumom nula s dva igrača. Za kraj smo riješili i par primjera matričnih igara.

I u ekonomoji i u teoriji igara veliku ulogu ima linearna algebra. Leontiefov otvoreni input-output model se temelji na rješavanju sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Pritom je proizvodni sustav privrede podijeljen na n sektora te svaka jednadžba prikazuje raspodjelu proizvodnje sektora na intermedijarnu i finalnu uporabu gospodarstva. Kako bi dobili razinu proizvodnje koju svaki sektor treba ostvariti kako bi se zadovoljila ukupna potražnja za proizvodima, potrebno je riješiti taj sustav. Stoga nam tu pomaže znanje iz linearne algebre, posebno poznavanje matrica. U teoriji igara nam matrice također pomažu prilikom rješavanja igara, od samog matričnog zapisa igre pa sve do određivanja vrijednosti igre.

Cilj ovog diplomskog rada je bio pokazati koliko je linearna algebra važna te koliko se ona primjenjuje u matematičkim disciplinama, poput teorije igara, te prirodnim i društvenim zanostima, poput ekonomije.

Bibliografija

[1] F. Aleskerov, H. Ersel i D. Piontkovski, *Linear algebra for economists*, Springer Science & Business Media, 2011.

[2] H. Anton i C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*, John Wiley & Sons, 2013.

[3] A. Berman i R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, 1994.

[4] Z. Drmač, *Numerička matematika*, skripta, PMF–MO, 2010., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~drmac/na001.pdf`, (pristupljeno: listopad 2020.).

[5] Hrvatska enciklopedija, *input-output analiza*, `https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=27524`, (pristupljeno: listopad 2020.).

[6] D. Hawkins i H. A. Simon, *Note: some conditions of macroeconomic stability*, Econometrica, Journal of the Econometric Society (1949), 245–248.

[7] Lj. Jurčić, *Razvitak input-output analize u Hrvatskoj*, Ekonomski pregled **51** (2000), br. 11-12, 1313–1333.

[8] S. Karlin, *Matrix games, programming and mathematical economics*, Pergamon Press, 1959.

[9] D. Mikulić, *Osnove input-output analize s primjenom na hrvatsko gospodarstvo*, (2018).

[10] R. Mrazović, *Teorija igara*, skripta, PMF–MO, 2019., `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/tigara/files/tigara-predavanja.pdf`, (pristupljeno: listopad 2020.).

[11] M. Relja, *INPUT–OUTPUT ANALIZA*, istraživački rad, Financijski klub, Zagreb, 2010.

[12] M. Sedlar, *Leontiefov ekonomski model*, završni rad, Varaždin: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike, 2019., `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:211:891294`, (pristupljeno: listopad 2020.).

[13] J. Skolka et al., *Homogeneity of Price Development Within Commodity Groups and By Demand Components*, Teh. izv., WIFO, 1986.

[14] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Brooks Cole/Cengage Learning, 2007.

[15] A. Takayama, *Mathematical economics*, Cambridge university press, 1985.

[16] Wikipedia, *Fiziokratizam*, `https://hr.wikipedia.org/wiki/Fiziokratizam`, (pristupljeno: listopad 2020.).

Sažetak

Linearna algebra se primjenjuje u mnogim matematičkim disciplinama te prirodnim i društvenim znanostima. U ovom radu želimo pokazati neke primjene linearne algebre u ekonomiji i teoriji igara. U ekonomiji veliki značaj ima input-output analiza. Analiza se temelji na pretpostavci da se proizvodni sustav privrede jedne zemlje može podijeliti na određeni broj međusobno povezanih proizvodnih sektora. Pritom svaki sektor u proizvodnji svojih proizvoda koristi proizvode ostalih sektora ili čak svoje proizvode. Osim što svaki sektor isporučuje svoje proizvode ostalim proizvodnim sektorima, isporučuje ih i finalnim potrošačima. Stoga ukupna razina proizvodnje određenog sektora ovisi o zahtjevima ostalih proizvodnih sektora i finalnih potrošača za njegovim proizvodima. Nabave i isporuke proizvoda između sektora prikazujemo input-output tablicama. Pitanje koje se postavlja je koju razinu proizvodnje svaki od sektora mora imati kako bi se zadovoljila ukupna potražnja za njihovim proizvodima. Odgovor na to pitanje nam daje Leontiefov input-output model. U proteklom razdoblju razvile su se tri osnovne verzije input-output modela: otvoreni statički model, zatvoreni statički model i dinamički model. U ovom radu naglasak je na otvorenom statičkom input-output modelu. Osim što smo detaljnije objasnili metodu input-output analize, u prvom poglavlju opisali smo ukratko i povijesni razvoj same analize. Autor koji je najviše pridonio njenom razvoju je Wassily Leontief. U drugom poglavlju smo predstavili Leontiefov otvoreni input-output model i naveli pretpostavke koje mora zadovoljavati. Model se temelji na rješavanju sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica, stoga ovdje veliku ulogu ima linearna algebra i poznavanje matrica. Dokazali smo teoreme koji nam pod određenim uvjetima garantiraju egzistenciju i jedinstvenost nenegativnog rješenja modela i egzistenciju ekonomski značajnog rješenja. Na kraju poglavlja dali smo i primjer Leontiefovog otvorenog input-output modela. U trećem poglavlju smo pokazali primjene linearne algebre u teoriji igara. Naslasak je na matričnim igrama te smo, prije samih primjera matričnih igara, definirali osnovne pojmove na kojima se teorija igara temelji.

Summary

Linear algebra is used in many mathematical disciplines and in natural and social sciences. In this thesis we want to show some applications of linear algebra in economics and game theory. Input-output analysis is of great importance in economics. It is based on assumption that the production system of the economy can be divided into certain number of interrelated production sectors. Each sector in a production of its products uses products of other sectors or even of its own sector. Besides giving the products to other sectors, each sector gives its products to final consumers. Therefore, the total level of production of a particular sector depends on the requirements of other production sectors and final consumers for its products. The interdependence between sectors is shown in input-output table. The question is what level of production each of the sectors must have in order to meet the total demand for their products. The answer is given by Leontief's input-output model. In the past period, three basic versions of the input-output model have been developed: the open static model, the closed static model, and the dynamic model. In this thesis, the focus is on the open static input-output model. Besides explaining the method of input-output analysis, in the first chapter we have briefly described the historical development of the analysis. The author who contributed the most to its development is Wassily Leontief. In the second chapter, we have presented Leontief's open input-output model and have given the assumptions which model must satisfy. The model is based on solving a system of n linear equations with n unknowns, so linear algebra and knowledge of matrices play an important role here. We have proved theorems that guarantee the existence and uniqueness of a non-negative model solution and the existence of an economically meaningful solution under certain conditions. At the end of the chapter, we have given the example of Leontief's open input-output model. In the third chapter, we have shown the applications of linear algebra in game theory. The focus is on matrix games and before the examples of matrix games, we have defined the fundamental concepts on which game theory is based.

Životopis

Rođena sam 19. prosinca 1994. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Ljube Babića u Jastrebarskom upisala sam 2001. te završila 2009. godine. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na mnogim matematičkim natjecanjima. 2009. godine upisala sam IV. gimnaziju u Zagrebu. Jezičnu gimnaziju sam završila 2013. godine s nagradom za odličan uspjeh na kraju srednjoškolskog obrazovanja. Potom sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji sam završila 2018. godine. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.