Uvjetna konvergencija redova

Perković, Damjan

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:576234

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Uvjetna konvergencija redova

Perković, Damjan

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:576234

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Damjan Perković

UVJETNA KONVERGENCIJA REDOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, studeni 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Redovi se u matematici javljaju kao prirodno poopćenje pojma konačne sume. U toj generalizaciji gube se pojedina svojstva konačnih suma — primjerice, za razliku od konačnih suma, promjenom poretka članova reda može se u nekim slučajevima promijeniti i suma reda. U ovom radu proći ćemo kroz različita svojstva redova, prvo realnih brojeva, a kasnije i redova vektora u Banachovim prostorima. Naglasak će biti upravo na uvjetno konvergentnim redovima, koji imaju svojstvo da se promjenom poretka članova reda može promijeniti i suma reda.

U prvom poglavlju radit ćemo s redovima realnih brojeva te ćemo dokazati Riemannov teorem, koji pokazuje kakve se sume reda mogu dobiti permutiranjem članova uvjetno konvergentnog reda, i Pringsheimov teorem, koji za određenu vrstu permutacija alternirajućeg harmonijskog reda daje karakterizaciju konvergencije u $\overline{\mathbb{R}}$.

U drugom poglavlju bavit ćemo se redovima vektora u Banachovim prostorima. Definirat ćemo pojam domene sume reda te ćemo pokazati u kakvom su odnosu obična, apsolutna i bezuvjetna konvergencija u $\mathbb{R}$, u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima, i u beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Proći ćemo kroz Steinitzov teorem koji će nam dati opis domene sume reda u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Na kraju ćemo pokazati da Steinitzov teorem ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima te na koji ga način možemo "popraviti" kako bi vrijedio u prostorima L_p, gdje je $1 < p < \infty$.

Poglavlje 1

Redovi realnih brojeva

1.1 Osnovni pojmovi

Započinjemo s par osnovnih definicija.

Definicija 1.1.1. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. Nizu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pridružujemo niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiran kao

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Red je uređeni par $((x_k), (s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nizova $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Element x_k zovemo opći član reda, dok je s_k k-ta parcijalna suma reda. Neke od oznaka za red su $\sum x_k$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$, $\sum_{\mathbb{N}} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, ili $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$.

Definicija 1.1.2. Za red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ realnih brojeva kažemo da je *konvergentan* ako je niz $(s_k)_k$ parcijalnih suma reda konvergentan. Ako je red konvergentan, onda broj

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k$$

zovemo sumom reda i označavamo sa

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 \cdots .$$

Red je divergentan ako je niz $(s_k)_k$ divergentan.

Sljedeći teorem nam daje ključno svojstvo konvergentnih redova u $\mathbb{R}$ koje ćemo često koristiti u dokazima.

Teorem 1.1.3 (Nužan uvjet konvergencije reda)**.** *Ako red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira, onda niz* $(x_k)_k$ *konvergira k nuli, tj. vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{konvergira} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Dokaz. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira k broju s, onda vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$

□

Definicija 1.1.4. Za red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in \mathbb{R}$, kažemo da je *apsolutno konvergentan* ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergira.

Definicija 1.1.5. Za red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in \mathbb{R}$, kažemo da je *uvjetno konvergentan* ako konvergira, ali red $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ ne konvergira.

Definicija 1.1.6. *Permutaciju* skupa A definiramo kao bijekciju s A na samog sebe.

Sada navodimo par teorema koji nam pokazuju u kojim slučajevima se mijenjanjem poretka članova reda ne mijenja suma reda.

Teorem 1.1.7. *Pretpostavimo da su svi* x_k *nenegativni realni brojevi te da red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira prema sumi* s*. Tada za proizvoljnu permutaciju* π *skupa prirodnih brojeva red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ *konvergira i njegova suma je jednaka* s*.*

Dokaz. Neka s_j označava j-tu parcijalnu sumu reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$, tj. $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}$. Iz nenegativnosti članova reda lako je vidjeti da vrijedi $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, i $\sup_k s_k \leq s$. Slijedi da niz s_k konvergira prema $\overline{s} \leq s$, tj. da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = \overline{s} \leq s$. U drugu ruku, ako promatramo permutaciju π^{-1} i pripadni red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi^{-1}(\pi(k))}$, istim argumentima kao i prije dolazimo do nejednakosti

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi^{-1}(\pi(k))} \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} \leq \overline{s}.$$

Dakle, slijedi $s = \overline{s}$. □

Teorem 1.1.8. *Neka je* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *apsolutno konvergentan red. Tada red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira, te za svaku permutaciju* π *skupa prirodnih brojeva red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ *konvergira i vrijedi* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$*.*

Dokaz. Za proizvoljan realan broj x definiramo x^+ na način da je $x^+ = x$ ako je $x > 0$, i $x^+ = 0$ u slučaju $x \leq 0$. Na sličan način, definiramo $x^- = x^+ - x$. Promotrimo sada redove $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^-$. To su redovi nenegativnih brojeva te očito konvergiraju jer ih majorizira red $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$. Sada označimo $s^+ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$, $s^- = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^-$. Tada iz teorema 1.1.7 slijedi da za svaku permutaciju π redovi $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}^+$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}^-$ konvergiraju te je $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}^+ = s^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}^- = s^-$. Dakle, konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{\pi(k)}^+ - x_{\pi(k)}^-)$ te je $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = s^+ - s^-$. Početni red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^+ - x_k^-)$ također konvergira te je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s^+ - s^-$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

1.2 Riemannov teorem

Sljedeći teorem je najbitniji rezultat u ovom poglavlju te nam, među ostalim, pokazuje da se mijenjanjem poretka članova uvjetno konvergentnog reda može postići bilo koja suma reda (u $\mathbb{R}$).

Teorem 1.2.1 (Riemann)**.** *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red realnih brojeva. Tada*

1. *za proizvoljan $s \in \mathbb{R}$ moguće je konstruirati permutaciju π takvu da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = s$;*
2. *moguće je konstruirati permutaciju σ takvu da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \infty$.*
3. *za sve L, U takve da je $-\infty \leq L \leq U \leq \infty$ moguće je konstruirati permutaciju π takvu da vrijedi $\liminf_{k\to\infty} s_{\pi(k)} = L$ i $\limsup_{k\to\infty} s_{\pi(k)} = U$, gdje je $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pripadan niz parcijalnih suma reda.*

Dokaz. Za početak particionirat ćemo skup prirodnih brojeva u dva podskupa $A = \{a_1, a_2, ...\}$ i $B = \{b_1, b_2, ...\}$ tako da vrijedi $x_{a_k} \geq 0$ i $x_{b_k} < 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} x_{a_k} < +\infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_{b_k} > -\infty$, tada red $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergira. No, ako je $\sum_{k=1}^{\infty} x_{a_k} = +\infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_{b_k} > -\infty$, ili $\sum_{k=1}^{\infty} x_{a_k} < +\infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_{b_k} = -\infty$, tada red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergira. Kako je pretpostavka teorema da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira, ali ne apsolutno, slijedi da je $\sum_{k=1}^{\infty} x_{a_k} = +\infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} x_{b_k} = -\infty$. Sada ćemo dokazati obje tvrdnje teorema.

1. Pretpostavimo da je $s \geq 0$. Konstruirat ćemo permutaciju π na sljedeći način: $\pi(1) = a_1, \pi(2) = a_2, ..., \pi(j) = a_j$, te nastavljamo na taj način do indeksa $j = j_1$ za koji je parcijalna suma $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}$ prvi put veća od $s : s_k \leq s$ za sve $0 < k < j_1 - 1; s_{j_1} > s$. Sada dodajemo negativne elemente: $\pi(j_1 + 1) = b_1$, $\pi(j_1 + 2) = b_2$, ..., dok parcijalna suma $s_{j_1+j_2}$ ne postane manja

od s. Tada opet dodajemo pozitivne elemente, pa nakon toga opet negativne elemente, itd. Sada ćemo pokazati da ovako permutirani red zaista konvergira prema s. Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergentan red, po teoremu 1.1.3 slijedi da je $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Kako su $(x_{a_k})_k$ i $(x_{b_k})_k$ podnizovi od $(x_k)_k$, slijedi da je i $\lim_{k\to\infty} x_{a_k} = 0$, $\lim_{k\to\infty} x_{b_k} = 0$. Za zadani $\varepsilon > 0$ tada postoje n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $k \geq n_1$ vrijedi $|x_{a_k}| < \varepsilon$ te za sve $k \geq n_2$ vrijedi $|x_{b_k}| < \varepsilon$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ sada dovoljno velik da je $\{x_{a_1}, ..., x_{a_{n_1}}\} \subset \{x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n_0)}\}$ i $\{x_{b_1}, ..., x_{b_{n_2}}\} \subset \{x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n_0)}\}$. Kako su svi preostali članovi originalnog reda koje još trebamo ubaciti u permutaciju po apsolutnoj vrijednosti manji od ε, a dodajemo pozitivne elemente dok parcijalna suma ne postane veća od s, i negativne elemente dok parcijalna suma ne postanje manja od s, sve sljedeće parcijalne sume nalazit će se u intervalu $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$. Slijedi da je s zaista limes niza parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$. Konstrukcija ostaje skoro ista u slučaju $s < 0$ — jedina razlika je što u konstrukciji permutacije počinjemo s negativnim elementima.

2. U ovom slučaju permutaciju ćemo konstruirati na sljedeći način: $\sigma(1) = a_1, \sigma(2) = a_2, ...,$ dok s_{j_1} ne postane veći od $1 - x_{b_1}$. Tada postavimo $\sigma(j_1 + 1) = b_1$. Sada opet dodajemo pozitivne elemente dok s_{j_2} ne postane veći od $2 - x_{b_2}$. Ostatak permutacije dobivamo ponavljanjem ovog postupka. Tada je $s_j > k$, za sve $j > j_k$, pa slijedi $s_j \to +\infty$, te je time dokazan teorem.

3. Slučajevi gdje je $L = U$ su dokazani u 1. i 2. stavci teorema, pa ćemo se ovdje baviti samo slučajevima gdje je $L \neq U$. Traženu permutaciju u ovom slučaju konstruiramo kombinacijom tehnika koje smo koristili u 1. i 2. slučaju, ovisno o L i U:

   - $-\infty < L < U < \infty$: U ovom slučaju konstruiramo permutaciju na sličan način kao u 1. stavci teorema. Pretpostavimo da je $U \geq 0$. Konstruirat ćemo permutaciju π na sljedeći način: $\pi(1) = a_1, \pi(2) = a_2, ..., \pi(j) = a_j$, te nastavljamo na taj način do indeksa $j = j_1$ za koji je parcijalna suma $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}$ prvi put veća od $U : s_k \leq s$ za sve $0 < k < j_1 - 1; s_{j_1} > U$. Sada dodajemo negativne elemente: $\pi(j_1 + 1) = b_1$, $\pi(j_1 + 2) = b_2$, ..., dok parcijalna suma $s_{j_1+j_2}$ ne postane manja od L. Tada opet dodajemo pozitivne elemente, pa nakon toga opet negativne elemente, itd. Na sličan način kao i u 1. stavci teorema pokaže se da su L i U gomilišta niza parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$. Po konstrukciji slijedi da su to upravo limes inferior i limes superior niza parcijalnih suma reda. U slučaju $U < 0$ jedina razlika je što u konstrukciji permutacije počinjemo s negativnim elementima.

- $-\infty < L < U = \infty$: Pretpostavimo da je $L \geq 0$. Definirajmo sada $K = L$. U ovom slučaju permutaciju ćemo konstruirati na sljedeći način: $\pi(1) = a_1, \pi(2) = a_2, ..., \pi(j) = a_j$, te nastavljamo na taj način do indeksa $j = j_1$ za koji je parcijalna suma $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}$ prvi put veća od K : $s_k \leq s$ za sve $0 < k < j_1 - 1; s_{j_1} > K$. Sada dodajemo negativne elemente: $\pi(j_1 + 1) = b_1$, $\pi(j_1 + 2) = b_2$, ..., dok parcijalna suma $s_{j_1+j_2}$ ne postane manja od L. Tada dodajemo pozitivne elemente dok parcijalna suma ne postane veća od $K + 1$, pa onda opet negativne elemente dok parcijalna suma ne postane manja od L. U svakom sljedećem koraku povećavamo K za 1 i ponavljamo ovaj postupak. Slijedi da su L i $+\infty$ gomilišta niza parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ te su po konstrukciji upravo limes inferior i limes superior niza parcijalnih suma reda. U slučaju $L < 0$ jedina razlika je što u konstrukciji permutacije počinjemo s negativnim elementima.
- $-\infty = L < U < \infty$: Konstrukcija permutacije u ovom slučaju jednaka je konstrukciji u prošlom slučaju, osim što cijelu konstrukciju radimo simetrično s obzirom na 0.
- $-\infty = L < U = \infty$: Definirajmo sada $K_1 = 1$, $K_2 = -1$. U ovom slučaju permutaciju ćemo konstruirati na sljedeći način: $\pi(1) = a_1, \pi(2) = a_2, ..., \pi(j) = a_j$, te nastavljamo na taj način do indeksa $j = j_1$ za koji je parcijalna suma $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}$ prvi put veća od K_1 : $s_k \leq s$ za sve $0 < k < j_1 - 1; s_{j_1} > K_1$. Sada dodajemo negativne elemente: $\pi(j_1 + 1) = b_1$, $\pi(j_1 + 2) = b_2$, ..., dok parcijalna suma $s_{j_1+j_2}$ ne postane manja od K_2. Tada dodajemo pozitivne elemente dok parcijalna suma ne postane veća od $K_1 + 1$, pa onda opet negativne elemente dok parcijalna suma ne postane manja od $K_2 - 1$. U svakom sljedećem koraku povećavamo K_1 za 1, smanjujemo K_2 za 1, i ponavljamo ovaj postupak. Slijedi da su $-\infty$ i $+\infty$ gomilišta niza parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ te su upravo limes inferior i limes superior niza parcijalnih suma reda.

$\square$

Korolar 1.2.2. *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red realnih brojeva. Tada je moguće konstruirati permutaciju π takvu da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ ne konvergira u $\overline{\mathbb{R}}$.*

Sada ćemo navesti primjer uvjetno konvergentnog reda. Sljedeći primjer je zgodan, jer za pojedine vrste rearanžmana tog reda postoji karakterizacija konvergencije u $\overline{\mathbb{R}}$, što ćemo i dokazati u teoremu 1.2.5.

Primjer 1.2.3. Alternirajući harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

je uvjetno konvergentan. Red očito nije apsolutno konvergentan, jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Sada ćemo pokazati da red konvergira. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$s_{2m} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right),$$

što pokazuje da je podniz $(s_{2m})_m$ strogo rastući. Nadalje,

$$s_{2m} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-...-\left(\frac{1}{2m-2}-\frac{1}{2m-1}\right)-\frac{1}{2m} < 1,$$

što pokazuje da je niz $(s_{2m})_m$ odozgo ograničen. Prema teoremu o rastućim nizovima, taj niz je konvergentan. Neka je sada $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s \leq 1$. Zbog $s_{2m+1} = s_{2m} + \frac{1}{2m+1}$ imamo $\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = s$, pa i $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, što pokazuje da je red konvergentan.

Napomena 1.2.4. Kažemo da je red *jednostavni rearanžman* alternirajućeg reda ako je rearanžman reda i podnizovi pozitivnih i negativnih članova reda su u istom poretku kao i u originalnom redu. Na primjer, red

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\cdots \tag{1.1}$$

je jednostavni rearanžman alternirajućeg harmonijskog reda, dok red

$$1+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$$

nije. Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jednostavan rearanžman alternirajućeg harmonijskog reda, neka je p_n broj pozitivnih članova u $\{a_1, ..., a_n\}$ i neka je α asimptotska gustoća pozitivnih članova u rearanžmanu reda. Dakle, $\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}$, ukoliko limes postoji. Tada je $\alpha = \frac{1}{2}$ za originalan alternirajući harmonijski red, i $\alpha = \frac{2}{3}$ za rearanžman (1.1).

Teorem 1.2.5 (Pringsheim)**.** *Jednostavni rearanžman alternirajućeg harmonijskog reda konvergira u* $\overline{\mathbb{R}}$ *ako i samo ako* α*, asimptotska gustoća pozitivnih članova rearanžmana, postoji. U tom slučaju je suma rearanžmana asimptotske gustoće* α *jednaka* $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha(1-\alpha)^{-1})$.

Dokaz. Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jednostavni rearanžman alternirajućeg harmonijskog reda. Neka je p_n broj pozitivnih članova u $\{a_1, ..., a_n\}$, i $q_n = n - p_n$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{p_n} (2j-1)^{-1} - \sum_{j=1}^{q_n} (2j)^{-1}.$$

Neka je sada $E_n = (\sum_{k=1}^{n} k^{-1}) - \ln n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Niz $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ je padajući niz pozitivnih brojeva čiji se limes γ naziva Eulerova konstanta. Sada je

$$\sum_{j=1}^{p_n} (2j-1)^{-1} = \sum_{j=1}^{2p_n} j^{-1} - \sum_{j=1}^{p_n} (2j)^{-1} = \ln 2p_n + E_{2p_n} - \frac{1}{2}\ln p_n - \frac{1}{2}E_{p_n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \lim_{n\to\infty} \left[\ln 2p_n - \frac{1}{2}\ln p_n - \frac{1}{2}\ln q_n + E_{2p_n} - \frac{1}{2}E_{p_n} - \frac{1}{2}E_{q_n} \right] \\ &= \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln (p_n q_n^{-1}) + \gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln (\lim_{n\to\infty} p_n q_n^{-1}). \end{aligned}$$

Dakle, red $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergira ako i samo ako posljednji limes, koji je jednak $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha(1-\alpha)^{-1})$, postoji. $\square$

Napomena 1.2.6. Treba razlikovati dva slučaja kada red realnih brojeva divergira:

1. niz parcijalnih suma $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži k $\pm\infty$;
2. ne postoji limes niza parcijalnih suma, tj. red ne konvergira u $\overline{\mathbb{R}}$.

Ubuduće će se za 1. slučaj reći da red ima sumu $\pm\infty$, dok će se za 2. slučaj reći da red divergira.

1.3 Produkt redova

U ovoj cjelini pokazujemo da produkt dva apsolutno konvergentna reda definiran na sljedeći način konvergira k produktu suma danih redova.

Definicija 1.3.1. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi realnih brojeva. Definirajmo niz $(c_n)_n$ sa

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1.2}$$

Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazivamo produktom redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Teorem 1.3.2. *Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira k A i red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ apsolutno konvergira k B, onda red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definiran s (1.2) konvergira k AB.*

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $B_n' = B_n - B$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ i $a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Ako je $a = 0$, onda je $a_n = 0$, $\forall n$, a tada je $A = 0$ i $c_n = 0$, $\forall n$, pa je tvrdnja istinita.
Neka je sada $a > 0$. Za parcijalne sume reda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ imamo:

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 = a_0(B + B_n') + a_1(B + B_{n-1}') + \cdots + a_n(B + B_0'), \end{aligned} \tag{1.3}$$

tj. $C_n = A_nB + C_n'$, gdje je $C_n' = a_0B_n' + a_1B_{n-1}' + \cdots + a_nB_0'$.
Pokažimo da vrijedi $\lim_{n\to\infty} C_n' = 0$. Budući da je $\lim_{n\to\infty} B_n' = \lim_{n\to\infty} (B_n - B) = 0$, postoji $M > 0$ takav da $\forall n$, $|B_n'| \leq M$. Također, za bilo koji $\epsilon > 0$ postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da $(n > p) \Rightarrow (|B_n'| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2a})$. Zbog konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pa za $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2(p+1)M} > 0$ postoji $q \in \mathbb{N}$ $(q \geq p)$ takav da $\forall n$ $(n > q) \Rightarrow (|a_n| < \epsilon_2)$.
Uzmimo sada $n_\epsilon = p + q$. Za $n > n_\epsilon$ imamo:

$$|C_n'| \leq (|B_0'||a_n| + \cdots + |B_p'||a_{n-p}|) + (|B_{p+1}'||a_{n-p-1}| + \cdots + |B_n'||a_0|).$$

Zbog $n - p > q$ vrijedi

$$|C_n'| \leq \epsilon_2(|B_0'| + \cdots + |B_p'|) + \epsilon_1(|a_0| + \cdots + |a_{n-p-1}|) < \epsilon_2(p+1)M + \epsilon_1 a = \epsilon.$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} C_n' = 0$, a odatle $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. □

Napomena 1.3.3. U prethodnom teoremu nije moguće izostaviti uvjet apsolutne konvergencije. Uzmimo za primjer red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}}.$$

Po Leibnizovom kriteriju red konvergira. Kvadrat tog reda ima opći član

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{1\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k(2+n-k)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+n}} \right).$$

Zbog

$$\frac{1}{\sqrt{k(2+n-k)}} \geq \frac{1}{1+n}, \quad \forall k \in \{1, 2, ..., n+1\}$$

imamo $|c_n| \geq 1$, $\forall n$, pa kvadrat polaznog reda ne konvergira.

Poglavlje 2

Redovi vektora u Banachovim prostorima

2.1 Osnovni pojmovi i svojstva redova vektora

Za početak opet navodimo osnovne definicije i teoreme, ovaj put u Banachovim prostorima.

Definicija 2.1.1. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz elemenata Banachovog prostora X. Nizu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pridružujemo niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiran kao

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Red elemenata Banachovog prostora X je uređeni par $((x_k),(s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nizova $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Sume $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ konačno mnogo elemenata reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nazivaju se parcijalne sume reda.
Kažemo da je red *konvergentan* ako niz parcijalnih suma reda konvergira u normi prostora. Limes parcijalnih suma niza naziva se suma reda, tj. $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Definicija 2.1.2. Ostatak konvergentnog reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ definira se kao vektor $r_n = s - s_n$, tj. ostatak konvergentnog reda je suma reda $x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$. Kako n raste, ostatak konvergentnog reda konvergira u 0. Ponekad se i sam red $x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots$ naziva ostatkom konvergentnog reda.

Segment reda definira se kao suma konačno mnogo uzastopnih članova reda, kao npr. $\sum_{k=m+1}^{n} x_k = s_n - s_m$. Ponekad se i skup $\{x_k\}_{m+1}^{n}$ naziva segmentom reda.

Teorem 2.1.3 (Cauchyjev kriterij konvergencije reda). *Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira ako i samo ako niz pripadnih segmenata reda konvergira u 0, tj. ako i samo ako vrijedi $\lim_{m,n\to\infty} \|\sum_{m+1}^{n} x_k\| = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da red konvergira, tj. da $s_n \to s$ za $n \to \infty$. Tada je

$$\left\|\sum_{m+1}^{n} x_k\right\| = \|s_n - s_m\| \leq \|s_n - s\| + \|s_m - s\| \to 0,$$

tj. Cauchyjev kriterij je zadovoljen.

Sada pretpostavimo da red zadovoljava Cauchyjev kriterij, tj. da $\lim_{m,n\to\infty} \|s_n - s_m\| = 0$. To znači da je niz parcijalnih suma reda Cauchyjev niz. Kako je X potpun prostor, svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira, pa tako i niz parcijalnih suma reda. Slijedi da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira. □

Definicija 2.1.4. Kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *apsolutno konvergentan* ako je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$.

Primijetimo da je, ako uzmemo Banachov prostor $\mathbb{R}$ uz normu $\|x\| = |x|$, za sve $x \in \mathbb{R}$, ova definicija ekvivalentna definiciji apsolutno konvergentnog reda u prvom poglavlju.

Teorem 2.1.5. *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan red. Tada je on i konvergentan.*

Dokaz. Kako je $\sum_{1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, vrijedi $\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = 0$ po Cauchyjevom kriteriju. Po nejednakosti trokuta, $\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$. Dakle, $\lim_{m,n\to\infty} \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| = 0$. Sada po Cauchyjevom kriteriju slijedi da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira. □

2.2 Permutacije redova u Banachovim prostorima

Definicija 2.2.1. Kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *bezuvjetno konvergentan* ako konvergira za svaku permutaciju članova reda.

Definicija 2.2.2. Kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *uvjetno konvergentan* ako konvergira, ali ne bezuvjetno.

Primijetimo da definicija uvjetno konvergentnog reda u Banachovom prostoru X nije jednaka definiciji iz prvog poglavlja u $\mathbb{R}$ (tamo smo uvjetno konvergentan red definirali kao red koji konvergira, ali ne konvergira apsolutno). Pokazat će se da apsolutna konvergencija povlači bezuvjetnu konvergenciju u Banachovim prostorima, pa su time definicije ekvivalentne u $\mathbb{R}$ (jer u $\mathbb{R}$ i bezuvjetna konvergencija implicira apsolutnu). No, pokazat će se i da bezuvjetna konvergencija ne implicira apsolutnu konvergenciju općenito u Banachovim prostorima, pa slijedi da nismo mogli definirati uvjetnu konvergenciju na isti način kao u prvom poglavlju i dobiti isti rezultat (tada bi postojali bezuvjetno konvergentni redovi koji konvergiraju i uvjetno).

Teorem 2.2.3. *Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u Banachovom prostoru X konvergira bezuvjetno, tada sve njegove permutacije imaju istu sumu.*

Dokaz. Dokazat ćemo ovu tvrdnju svođenjem na kontradikciju. Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ i pretpostavimo da za neku permutaciju π suma s' permutiranog reda nije jednaka s. Neka je $f \in X^*$ (X^* je oznaka za skup svih ograničenih linearnih funkcionala na X) ograničen funkcional za koji vrijedi $f(s) \neq f(s')$. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ nije apsolutno konvergentan, jer permutacija π mijenja sumu tog reda. Po Riemannovom teoremu (teorem 1.2.1) postoji permutacija σ takva da red $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\sigma(k)})$ divergira. Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ tada isto divergira, pa je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema da je red bezuvjetno konvergentan. $\square$

Sada navodimo pojam savršene konvergencije, koja će se pokazati ekvivalentnom bezuvjetnoj konvergenciji u Banachovim prostorima.

Definicija 2.2.4. Kažemo da je red $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ u Banachovom prostoru *savršeno konvergentan* ako red $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ konvergira za svaki izbor koeficijenata $\alpha_i = \pm 1$.

Teorem 2.2.5. *Red u Banachovom prostoru konvergira bezuvjetno ako i samo ako konvergira savršeno.*

Dokaz. Pretpostavimo da red $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ nije bezuvjetno konvergentan. To znači da postoji permutirani red $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ koji divergira. Po Cauchyjevom kriteriju slijedi da postoji niz $k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < k_3 < ...$ takav da je

$$\left\| \sum_{i=k_j}^{l_j} x_{\pi(i)} \right\| \geq \delta > 0, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Iz početnog reda uzet ćemo niz segmenata $\Delta_j = \{x_i\}_{m_j}^{n_j}$ $(j = 1, 2, 3, ...)$ takav da svaki od njih sadrži pripadni segment $\Delta_j' = \{x_{\pi(i)}\}_{i=k_j}^{l_j}$ permutiranog reda. Kako bi osigurali da su segmenti Δ_j međusobno disjunktni, po potrebi prelazimo na podniz niza segmenata. Sada za svaki j definiramo u_j kao sumu elemenata iz $\Delta_j^{'}$, i v_j kao sumu elemenata iz $\Delta_j \backslash \Delta_j^{'}$. Kako je

$$\frac{1}{2}(\|u_j + v_j\| + \|u_j - v_j\|) \geq \|u_j\| \geq \delta > 0,$$

slijedi da je ili

$$\|u_j + v_j\| \geq \delta, \tag{2.1}$$

ili

$$\|u_j - v_j\| \geq \delta. \tag{2.2}$$

Traženi izbor koeficijenata takav da $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ divergira biramo na sljedeći način: uzimamo $\alpha_i = +1$ za sve x_i koji se nalaze u $\Delta_j \backslash \Delta_j^{'}$; uzimamo $\alpha_i = +1$ za sve x_i koji se nalaze u nekom $\Delta_j^{'}$, ako (2.1) vrijedi za taj j, i uzimamo $\alpha_i = -1$ ako (2.2) vrijedi, a (2.1) ne vrijedi za taj j; uzimamo $\alpha_i = \pm 1$ na proizvoljan način za sve članove reda koji se ne nalaze niti u jednom segmentu Δ_j. S koeficijentima odabranim na ovaj način slijedi

$$\left\| \sum_{m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \right\| = \|u_j \pm v_j\| \geq \delta > 0.$$

Po Cauchyjevom kriteriju slijedi da red $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ divergira.

Pretpostavimo sada da red $\sum x_i$ nije savršeno konvergentan. To znači da postoji skup koeficijenata $\alpha_i = \pm 1$ takav da red $\sum \alpha_i x_i$ divergira. Po Cauchyjevom kriteriju postoji niz $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots$ takav da

$$\left\| \sum_{m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \right\| \geq \delta > 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Svaki segment $\Delta_j = \{x_i\}_{m_j}^{n_j}$ reda $\sum_1^{\infty} x_n$ sada dijelimo u dva podskupa: $\Delta_j = \Delta_j^+ \cup \Delta_j^-$, gdje je Δ_j^+ skup svih x_i u Δ_j za koje je $\alpha_i = +1$, i Δ_j^- ostatak. Po nejednakosti trokuta slijedi da je

$$\left\| \sum_{i \in \Delta_j^+} x_i \right\| \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{ili} \quad \left\| \sum_{i \in \Delta_j^-} x_i \right\| \geq \frac{\delta}{2}. \tag{2.3}$$

Neka je Δ_j^* onaj od skupova $\Delta_j^{\pm}$ za koji vrijedi (2.3) i neka je Δ^0 skup svih članova reda $\sum x_i$ koji se ne nalaze niti u jednom skupu Δ_j^*. Željenu permutaciju konstruiramo na sljedeći način: prvo u poretku ispisujemo sve članove skupa Δ_1^*, onda jedan član iz Δ^0, pa opet u poretku ispisujemo sve članove iz Δ_2^*, pa opet jedan član iz Δ^0, itd. Po Cauchyjevom kriteriju, divergencija permutiranog reda slijedi iz nejednakosti (2.3). $\square$

Teorem 2.2.6. *Neka je X Banachov prostor. Tada je svaki apsolutno konvergentan red u X i bezuvjetno konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan red u X, A pripadna suma reda i neka je $\varepsilon > 0$. Neka je σ proizvoljna permutacija skupa prirodnih brojeva. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=n_0}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$. Neka je m_0 dovoljno velik da su svi članovi $x_1, ..., x_{n_0-1}$ sadržani u $\{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m_0)}\}$. Tada za sve $m \geq m_0$ vrijedi

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - A \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| \leq \varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljan, slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} = A,$$

pa red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira i bezuvjetno. $\square$

Dokazano je da su pojmovi apsolutne i bezuvjetne konvergencije reda ekvivalentni pojmovi u $\mathbb{R}$ te da općenito u Banachovim prostorima apsolutna konvergencija implicira bezuvjetnu konvergenciju. Sada ćemo pokazati da obrat ne vrijedi općenito u Banachovim prostorima.

Primjer 2.2.7. Neka je $X = \ell_2$, i neka je $x_k = \left(0, 0, ..., 0, \frac{1}{k}, 0, ...\right)$, gdje se $\frac{1}{k}$ nalazi na k-tom mjestu. Tada za svaku permutaciju članova red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira prema $s = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$, ali ne konvergira apsolutno, jer je $\sum_1^{\infty} \|x_k\| = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Sljedeći teorem pokazuje da su apsolutna i bezuvjetna konvergencija reda ekvivalentni pojmovi u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima.

Teorem 2.2.8. *Neka je X n-dimenzionalan normiran prostor. Tada je svaki bezuvjetno konvergentan red u X i apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Kako su sve norme u konačnodimenzionalnom prostoru ekvivalentne, možemo pretpostaviti da je $X = \ell_1^{(n)}$. Neka sada f_i označava koordinatne projekcije ($i =$

$1, 2, ..., n)$. Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bezuvjetno konvergentan red u X. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} f_i(x_k)$ također konvergira bezuvjetno pa je $\sum_{k=1}^{\infty} |f_i(x_k)| < \infty$ za sve i. Slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x_k)| \right) < \infty,$$

pa red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira apsolutno. □

Ostaje nam pokazati kakav je odnos apsolutne i bezuvjetne konvergencije u beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Iz Teorema 2.2.6 znamo da apsolutna konvergencija reda povlači bezuvjetnu konvergenciju te je u Primjeru 2.2.7 dan primjer bezuvjetno konvergentnog reda u beskonačnodimenzionalnom Banachovom prostoru koji ne konvergira apsolutno. Sada ćemo bez dokaza navesti teorem čija je posljedica da svaki beskonačnodimenzionalan Banachov prostor sadrži bezuvjetno konvergentan red koji nije apsolutno konvergentan.

Teorem 2.2.9 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Neka je X beskonačnodimenzionalan Banachov prostor i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan red pozitivnih brojeva. Tada postoji bezuvjetno konvergentan red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u X čiji članovi zadovoljavaju jednakosti $\|x_k\|^2 = a_k$, $k = 1, 2, ...$.*

Dokaz. Vidi [4]. □

Kako niz brojeva $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ne mora zadovoljavati uvjet $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(a_k)} < \infty$ (a niz brojeva koji ne zadovoljava taj uvjet, ali zadovoljava uvjet u teoremu, postoji — primjer takvog niza je $(\frac{1}{k^2})_{k=1}^{\infty}$), slijedi da svaki beskonačnodimenzionalan Banachov prostor sadrži bezuvjetno konvergentan red koji nije apsolutno konvergentan.

Teorem 2.2.10 (Gelfand)**.** *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u Banachovom prostoru X bezuvjetno konvergentan red. Tada je skup svih suma $s(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, gdje $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prolazi kroz sve moguće kombinacije +1 i -1, kompaktan podskup od X.*

Dokaz. U Banachovom prostoru skup je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i potpuno omeđen. Dakle, moramo pokazati da skup $s(\alpha)$ zadovoljava ta svojstva. Prvo ćemo pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji indeks $n = n(\varepsilon)$ takav da je $\| \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i x_i \| < \varepsilon$ za sve nizove koeficijenata $\alpha_i = \pm 1$. Ako pretpostavimo suprotno, tada postoji $\delta > 0$, niz $n_1 < n_2 < ...$, i niz $(\alpha_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}, j \in \mathbb{N}, \alpha_i^{(j)} = \pm 1$ takav da vrijedi

$$\left\| \sum_{i=n_j}^{\infty} \alpha_i^{(j)} x_i \right\| \geq \delta > 0, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{2.4}$$

Pokazat ćemo da je (2.4) u kontradikciji s bezuvjetnom konvergencijom reda. Prvo odaberimo niz $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}, r_j > n_j$, takav da je

$$\left\|\sum_{i=n_j}^{r_j} \alpha_i^{(j)} x_i\right\| \geq \frac{1}{2}\delta, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{2.5}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_j < n_{j+1}$. Niz koeficijenata α_i' definirat ćemo po sljedećem pravilu: ako i pripada nekom intervalu $[n_j, r_j]$, tada je $\alpha_i' = \alpha_i^{(j)}, (j = 1, 2, ...)$, dok preostale α_i' biramo na proizvoljan način iz skupa $\{\pm 1\}$. Po nejednakosti (2.5) slijedi da red $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' x_i$ divergira, što je u kontradikciji s bezuvjetnom konvergencijom reda $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Dakle, zasad smo pokazali da skup elemenata $s_{n-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i, \quad n = n(\varepsilon), \ \alpha_i = \pm 1$, tvori konačnu ε-mrežu za skup suma oblika $s(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, pa slijedi da je skup $s(\alpha)$ potpuno omeđen. Preostaje nam dokazati da je skup $\{s(\alpha)\}$ zatvoren. Pretpostavimo da za neki niz $\alpha^{(\nu)} = (\alpha_i^{(\nu)})_{i\in\mathbb{N}}, \nu \in \mathbb{N}$, postoji limes

$$\lim_{\nu\to\infty} s(\alpha^{(\nu)}) = s.$$

Trebamo pokazati da postoji niz $\beta = (\beta)_{i\in\mathbb{N}}$ koeficijenata takav da je $s(\beta) = s$. Kako za svaki indeks i brojevi $\alpha_i^{(\nu)}$ mogu imati samo vrijednosti ± 1, niz $(\alpha^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ sadrži podniz koji po koordinatama konvergira prema nekom nizu $(\alpha_i')_{i\in\mathbb{N}}$, kako $\nu \to \infty$. Pokazat ćemo da je upravo to traženi niz.

Iskoristit ćemo oznaku $(\alpha^{(\nu)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ za odabrani podniz. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ odaberimo $n_0 = n(\varepsilon)$ takav da nejednakost

$$\left\|\sum_{i=n_0}^{\infty} \alpha_i x_i\right\| < \varepsilon$$

vrijedi za sve nizove koeficijenata $\alpha_i = \pm 1$ (prethodno je u teoremu dokazano da postoji takav indeks n_0). Sada odaberimo indeks ν_0 takav da za sve $\nu > \nu_0$ jednakost $\alpha_i^{(\nu)} = \alpha_i'$ $(1 \leq i < n_0)$ vrijedi kao posljedica konvergencije po koordinatama. Ako su n_0 i ν_0 odabrani na ovaj način, slijedi da za $\nu > \nu_0$

$$\|s(\alpha^{(\nu)}) - s(\alpha')\| = \left\|\sum_{i=n_0}^{\infty} \alpha_i^{(\nu)} x_i - \sum_{i=n_0}^{\infty} \alpha_i' x_i\right\| < 2\varepsilon.$$

Jer je ε proizvoljan, iz dane nejednakosti dobivamo $\lim_{\nu\to\infty} s(\alpha^{(\nu)}) = s(\alpha')$. Kako je limes podniza jednak limesu početnog niza, slijedi da je skup $\{s(\alpha)\}$ zatvoren, pa i kompaktan. $\square$

Napomena 2.2.11. Za kraj ovog potpoglavlja usporedimo odnose tipova konvergencije u $\mathbb{R}$ i općenito u Banachovim prostorima:

1. u $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd}
\text{apsolutna} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{bezuvjetna} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{obična} &
\end{tikzcd}$$

2. u Banachovom prostoru:

$$\begin{tikzcd}
\text{apsolutna} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{bezuvjetna} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{obična} &
\end{tikzcd}$$

3. u konačnodimenzionalnom Banachovom prostoru:

$$\begin{tikzcd}
\text{apsolutna} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{bezuvjetna} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{obična} &
\end{tikzcd}$$

2.3 Domena sume reda

U ovom potpoglavlju bavit ćemo se redovima u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Za početak nam je potrebna definicija domene sume reda.

Definicija 2.3.1. Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ red u Banachovom prostoru X. *Domena sume reda* definira se kao skup $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k)$ koji se sastoji od svih $x \in X$ takvih da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ konvergira prema x za neku permutaciju $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Cilj ovog potpoglavlja je dati opis domene sume uvjetno konvergentnih redova u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima.

Napomena 2.3.2. Prema Riemannovom teoremu, ako je $X = \mathbb{R}$, tada je $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = \mathbb{R}$ za svaki uvjetno konvergentan red u $\mathbb{R}$. No, ako je dimenzija prostora veća od 1, tada postoje uvjetno konvergentni redovi čije domene suma nisu jednake cijelom prostoru. Na primjer, ako su svi članovi reda kolinearni s nekim vektorom e, tada je za svaku permutaciju reda suma reda također kolinearna s e.

Neka je X konačnodimenzionalan prostor. Za proizvoljan potprostor Y od X lako možemo konstruirati red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u X takav da je $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = Y$. Kako je Y izomorfan s $\mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, dovoljno je konstruirati red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u $\mathbb{R}^n$ takav da je $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = \mathbb{R}^n$. Po Riemannovom teoremu za svaku od n koordinata možemo konstruirati uvjetno konvergentan red članova na toj koordinati (dakle, za i-tu koordinatu j-ti član reda je oblika $(0, ..., 0, a_j, 0, ..., 0)$, gdje se a_j nalazi na i-toj koordinati) čija je domena sume reda cijeli $\mathbb{R}$ na toj koordinati. Sada tih n redova možemo spojiti u jedan red (npr. na način da su prvih n članova novog reda prvi članovi svakog od n redova, pa su sljedećih n članova novog reda drugi članovi svakog od n redova, itd.). Tim postupkom dobivamo novi red čija je domena sume upravo $\mathbb{R}^n$.

Nadalje, za svaki $x_0 \in X$ vrijedi

$$DS\left(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = x_0 + DS\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right),$$

pa slijedi da domena sume reda u konačnodimenzionalnom prostoru može biti proizvoljna linearna mnogostrukost. U ovom poglavlju pokazat ćemo da domena sume reda to i mora biti, tj. ako je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red u konačnodimenzionalnom prostoru, tada domena sume reda može biti samo linearna mnogostrukost čiji je pripadni potprostor dimenzije barem 1.

Za početak nam je potrebna jedna pomoćna lema.

Lema 2.3.3. *Neka je K poliedar u $\mathbb{R}^n$ zadan skupom linearnih jednadžbi i nejednadžbi:*

$$\begin{cases} f_i(x) = a_i, & i = 1, 2, ..., p, \\ g_j(x) \leq b_j, & j = 1, 2, ..., q, \end{cases} \tag{2.6}$$

gdje su f_i i g_j linearni funkcionali. Neka je x_0 vrh poliedra K i neka je $A = \{j : g_j(x_0) = b_j\}$. Tada A ima barem $n - p$ elemenata.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} f_i(x) = C, & i = 1, 2, ..., p, \\ g_j(x) = 0, & j \in A, \end{cases} \tag{2.7}$$

sadrži manje jednadžbi nego nepoznanica (nepoznanice su koordinate vektora x), pa postoji netrivijalno rješenje sustava x_1. Za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ vektori $x_0 \pm \varepsilon x_1$ pripadaju K, pa smo došli do kontradikcije s pretpostavkom da je x_0 vrh poliedra K. □

Sljedeće leme su ključne u dokazivanju glavnog rezultata ovog potpoglavlja, no koristit će se i u druge svrhe.

Lema 2.3.4 (Lema o zaokruživanju koeficijenata)**.** *Neka je $\{x_i\}_{i=1}^n$ konačan podskup m-dimenzionalnog normiranog prostora, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ n-torka koeficijenata takvih da je $0 \leq \lambda_i \leq 1$, i $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Tada postoje koeficijenti $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = 0$ ili 1 (n-torka zaokruženih koeficijenata) takvi da je*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \right\| \leq \frac{m}{2} \cdot \max_i \|x_i\|. \tag{2.8}$$

Dokaz. Ako je $n \leq m$, stavimo $\theta_i = 0$ za $\lambda_i \leq \frac{1}{2}$ i $\theta_i = 1$ za $\lambda_i > \frac{1}{2}$ pa nejednakost vrijedi. Promotrimo sada slučaj $n > m$. Uvodimo pomoćni prostor $\mathbb{R}^n$ i promatramo poliedar K u $\mathbb{R}^n$ zadan sustavom nejednakosti $0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, ..., n$, i jednakosti $x = \sum_{i=1}^n t_i x_i$, gdje su $\{t_i\}_{i=1}^n$ koordinate vektora poliedra. Kako je K neprazan i ograničen, postoji $T = \{t'_i\}_{i=1}^n$ koji je vrh poliedra. Vektorska jednakost $x = \sum_{i=1}^n t_i x_i$ je sustav skalarnih jednakosti. Tada po lemi 2.3.3 slijedi da je $n - m$ koordinata vrha T jednako 0 ili 1. Sada ćemo postaviti koeficijente θ_i na sljedeći način: ako je $t'_i = 0$ ili $t'_i = 1$, tada je $\theta_i = t'_i$; ako je $0 < t'_i \leq \frac{1}{2}$, tada je $\theta_i = 0$; ako je $\frac{1}{2} < t'_i < 1$, tada je $\theta_i = 1$. Slijedi da je

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i - x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t'_i x_i \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\theta_i - t'_i| \right) \cdot \max_i \|x_i\|.$$

Kako je $n - m$ brojeva $|\theta_i - t'_i|$ jednako 0, dok su ostali manji ili jednaki $\frac{1}{2}$, slijedi da je

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i - x \right\| \leq \frac{m}{2} \cdot \max_i \|x_i\|.$$

□

Lema 2.3.5 (Lema o rearanžmanu)**.** *Neka je $\{x_i\}_{i=1}^n$ konačan skup vektora čija je suma jednaka $\sum_{i=1}^n x_i = x$ u m-dimenzionalnom normiranom prostoru X. Tada se* *elementi skupa mogu permutirati na način da za svaki prirodni broj $k \leq n$ vrijedi*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)} - \frac{k-m}{n} x \right\| \leq m \cdot \max_i \|x_i\|, \tag{2.9}$$

gdje je π pripadna permutacija indeksnog skupa.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su norme vektora x_i ograničene s 1, tj. da vrijedi $\max_i \|x_i\| = 1$. Ako je $n \leq m$, onda nejednakost trivijalno vrijedi za sve permutacije π (korištenjem nejednakosti trokuta i ograničavanjem normi $\|x_{\pi(i)}\|$ i $\|x_i\|$ s $\max_i \|x_i\|$). Promotrimo sada slučaj $n > m$. Indukcijom ćemo konstruirati niz skupova $\{1, 2, ..., n\} = A_n \supset A_{n-1} \supset \cdots \supset A_m$ i brojeva λ_k^i $(k = m, m+1, ..., n; i \in A_k)$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$|A_k| = k; \quad 0 \leq \lambda_k^i \leq 1; \quad \sum_{i \in A_k} \lambda_k^i = k - m; \quad \sum_{i \in A_k} \lambda_k^i x_i = \frac{k-m}{n} x. \tag{2.10}$$

Ako je $k = n$, dovoljno je staviti $A_n = \{1, ..., n\}$ i uzeti sve λ_k^i jednake $\dfrac{n-m}{n}$. Lako je vidjeti da su u ovom slučaju zadovoljena sva tražena svojstva. Pretpostavimo sada da su skup A_{k+1} i pripadni skup koeficijenata $\{\lambda_{k+1}^i\}_{i \in A_{k+1}}$ već konstruirani. Promotrimo set K koji se sastoji od skupova brojeva $\{\mu_i : i \in A_{k+1}\}$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$0 \leq \mu_i \leq 1; \quad \sum_{i \in A_{k+1}} \mu_i = k - m; \quad \sum_{i \in A_{k+1}} \mu_i x_i = \frac{k-m}{n} x. \tag{2.11}$$

Skup K je neprazan (možemo staviti $\mu_i = \dfrac{k-m}{k-m+1} \lambda_{k+1}^i$, za svaki $i \in A_{k+1}$) i tvori konveksan poliedar u prostoru $\mathbb{R}^{k+1}$ vektora $\mu = \{\mu_i : i \in A_{k+1}\}$. Lako je vidjeti da su zadovoljene pretpostavke leme 2.3.3 sa $p = m + 1$ (zadnja tražena vektorska jednakost jednaka je m skalarnih jednakosti) i $q = 2(k+1)$.

Poliedar K je ograničen skup, kako se svi μ_i nalaze u segmentu $[0, 1]$, pa slijedi da K ima vrhove. Neka je $\mu' = \{\mu_i' : i \in A_{k+1}\}$ jedan od vrhova. Po zaključku leme 2.3.3, skup A vrijednosti i takvih da je μ_i jednak 0 ili 1 sadrži barem $(k+1)-(m+1) = k-m$ elemenata.

Pokazat ćemo da je barem jedan od brojeva μ_i' jednak 0. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\mu_i' = 1$ za sve $i \in A$. Tada iz prva dva uvjeta u (2.11) slijedi $|A| = k - m$ te su svi preostali μ_i' $(i \in A_{k+1} \setminus A)$ jednaki 0. No, ako $\mu_i' = 1$ ne vrijedi za neke $i \in A$, tada postoje μ_i' jednaki 0.

Neka je j takav indeks da vrijedi $\mu'_j = 0$, i neka je $A_k = A_{k+1} \setminus \{j\}$ i $\lambda^i_k = \mu'_i$ $(i \in A_k)$. Lako je provjeriti da vrijede svojstva (2.10). Time je konstrukcija gotova, i traženu permutaciju definiramo na sljedeći način: za $i = m+1, ..., n$ neka je $\pi(i)$ jednak indeksu j koji je izbačen iz skupa A_i u konstrukciji skupa A_{i-1}, te neka je ostatak permutacije proizvoljan.

Provjeravamo da konstruirana permutacija zaista zadovoljava nejednakost (2.9). Za $k \leq m$ to je očito. Za $k > m$ iz svojstava (2.10) slijedi

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)} - \frac{k-m}{n}x\right\| &= \left\|\sum_{i\in A_k} x_i - \sum_{i\in A_k}\lambda^i_k x_i\right\| \\ &= \left\|\sum_{i\in A_k}(1-\lambda^i_k)x_i\right\| \leq \sum_{i\in A_k}(1-\lambda^i_k) \\ &= k-(k-m) = m.\end{aligned}$$

□

Napomena 2.3.6. Ako oduzmemo drugi član s lijeve strane nejednakosti (2.9), dobivamo novu nejednakost:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)}\right\| \leq m \cdot \max_i \|x_i\| + (m+1)\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \tag{2.12}$$

Napomena 2.3.7. Prethodna lema često je formulirana na sljedeći način: ako je X konačnodimenzionalan prostor i $\{x_k\}_{k=1}^n$ skup vektora takvih da je $\sum_{k=1}^n x_k = 0$, tada postoji permutacija π prvih n prirodnih brojeva takva da je

$$\max_{j\leq n}\left\|\sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)}\right\| \leq K \cdot \max_i \|x_i\|, \tag{2.13}$$

gdje K ovisi samo o prostoru X.

U ovoj formulaciji lema 2.3.5 se naziva i Steinitzova lema. Infimum $K(X)$ brojeva K koji se mogu supstituirati u desnu stranu nejednadžbe (2.13) naziva se Steinitzova konstanta prostora X.

Pretpostavimo da je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red u Banachovom prostoru X

čija je suma jednaka s. Ograničen funkcional $f \in X^*$ naziva se *funkcional konvergencije* reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ako vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < \infty$. Skup svih funkcionala konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je potprostor $\Gamma \subset X^*$ koji nije nužno zatvoren u slučaju da je X beskonačnodimenzionalan. S Γ_0 ćemo označiti anihilator potprostora Γ:

$$\Gamma_0 = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \Gamma\}.$$

Anihilator Γ_0 je zatvoren potprostor od X. Definiramo skupove

$$P((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \{x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_p} : i_1 < i_2 < \cdots < i_p; p \in \mathbb{N}\},$$
$$Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : 0 \le \lambda_i \le 1, n = 1, 2, ...\}.$$

Elemente skupa $P((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$ zvat ćemo parcijalne sume. Očito je da vrijedi $P((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) \subset Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$ i da je skup $Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$ konveksan. S $\overline{Q}$ ćemo označavati zatvarač skupa $Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$.

Lema 2.3.8. *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red u Banachovom prostoru X. Ako je $x \in \overline{Q}$, tada je $x + \Gamma_0 \subset Q$.*

Dokaz. Neka je $f \in X^* \setminus \Gamma$ proizvoljan linearni funkcional. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ konvergira i ima sumu jednaku $f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k)$, ali ne konvergira apsolutno, jer je $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| = \infty$ (f se ne nalazi u skupu svih funkcionala konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$). Iz toga slijedi da se među parcijalnim sumama reda $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ nalaze proizvoljno velike sume "u oba smjera" (zbog uvjetne konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$, komentirano je u dokazu Riemannovog teorema da je suma svih pozitivnih članova reda jednaka $+\infty$, dok je suma svih negativnih članova reda jednaka $-\infty$):

$$\sup\{f(y) : y \in P((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\} = +\infty;$$
$$\inf\{f(y) : y \in P((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\} = -\infty.$$

Kako je $Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) \supset P((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$, slijedi da je i

$$\sup\{f(y) : y \in Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\} = +\infty. \tag{2.14}$$

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da postoje $x \in \overline{Q}$ i $z \in \Gamma_0$ takvi da je $x + z \notin \overline{Q}$. Tada kao posljedica Hahn-Banachovog teorema postoji linearni funkcional $f \in X^*$ takav da vrijedi

$$\sup\{f(y) : y \in \overline{Q}\} < f(x + z).$$

Ako je $f \in \Gamma$, zadnja nejednakost ne vrijedi, jer je tada $f(z) = 0$ pa je $f(x) = f(x+z)$. No, ako je $f \notin \Gamma$, zadnja nejednakost opet ne vrijedi, jer po (2.14) imamo

$$\sup\{f(y) : y \in \overline{Q}\} = +\infty.$$

Došli smo do kontradikcije pa je time lema dokazana. □

Napomena 2.3.9. Neka je S' proizvoljan konačan podskup članova reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ i y proizvoljan element prostora X. Zaključak prethodne leme je jednak ako umjesto $\overline{Q}((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$ uzmemo $y + \overline{Q}((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \setminus S')$.

Sljedeći teorem je glavni rezultat u ovom potpoglavlju te daje opis domene sume uvjetno konvergentnog reda u konačnodimenzionalnom Banachovom prostoru.

Teorem 2.3.10 (Steinitz)**.** *Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergentan red u m-dimenzionalnom Banachovom prostoru E te neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$. Tada je domena sume reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ linearna mnogostrukost $s + \Gamma_0$, gdje je Γ_0 anihilator skupa funkcionala konvergencije Γ, tj. $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = s + \Gamma_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan red. Tada je on i bezuvjetno konvergentan, pa je domena sume reda jednaka $\{s\}$. Kako za apsolutno konvergentan red anihilator skupa svih funkcionala konvergencije Γ_0 sadrži samo nulu, teorem vrijedi u ovom slučaju. Neka je sada $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uvjetno konvergentan red. Neka je $f \in X^*$ funkcional konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Tada je po definiciji $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ apsolutno konvergentan red. Tada za svaku permutaciju π konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ implicira

$$f(\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = f(s).$$

Dakle, $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) - s \subset \operatorname{Ker} f$. Kako zadnja inkluzija vrijedi za sve $f \in \Gamma$, slijedi da je $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) - s \subset \Gamma_0$. Dakle, $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) \subset s + \Gamma_0$. Dokaz obrnute inkluzije $DS(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) \supset s + \Gamma_0$ je kompliciraniji i sastojat će se od 2 dijela. Prvo ćemo dokazati da za svaki $s' \in s + \Gamma_0$ postoje permutacija π_0 početnog reda i niz indeksa $n_1 < n_2 < \cdots$ takvi da je

$$\lim_{j\to\infty} \left\| s' - \sum_{k=1}^{n_j} x_{\pi_0(k)} \right\| = 0,$$

tj. da samo određen niz parcijalnih suma permutiranog reda konvergira prema s'. Nakon toga ćemo konstruirati "popravljenu" permutaciju π takvu da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ zaista konvergira prema s'.

Promotrimo prvo skup $\overline{Q}$. On sadrži s, pa po lemi 2.3.8 sadrži i s' ($s' \in s + \Gamma_0 \subset \overline{Q}$). Neka je $\varepsilon_n \to 0$ zadan niz. Neka je s' aproksimiran elementom $q_1 \in Q((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$:

$$\|s' - q_1\| = \|s' - \sum_i \lambda_i x_i\| < \varepsilon_1.$$

Neka je sada q_1 aproksimiran elementom $p_1 \in P((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$, pa po lemi 2.3.4. (Lema o zaokruživanju koeficijenata) slijedi

$$\|q_1 - p_1\| = \left\| q_1 - \sum_i \theta_i x_i \right\| \leq m \cdot \max_{i\geq 1} \|x_i\|,$$

gdje je $m = \dim E$ i svi θ_i su jednaki 0 ili 1. Sada ćemo iz zadnje sume u skup izdvojiti sve x_i čiji su pripadni θ_i jednaki 1 i dodati x_1 u skup (ako se već ne nalazi u njemu). Dobiveni skup označit ćemo sa S_1, a sumu članova skupa sa s_1. Tada je

$$\|s' - s_1\| \leq \varepsilon_1 + m \cdot \max_{i\geq 1} \|x_i\| + \|x_1\|.$$

Promotrimo sada skup $s_1 + \overline{Q}((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \setminus S_1)$. On sadrži s, pa po napomeni 2.3.9 slijedi da je $s' \in \overline{Q}((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \setminus S_1)$. Neka je $s' - s_1$ aproksimiran elementom $q_2 \in \overline{Q}((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \setminus S_1)$:

$$\|s' - s_1 - q_2\| = \left\| s' - s_1 - \sum_i \lambda_i x_i \right\| \leq \varepsilon_2.$$

Sada neka je q_2 aproksimiran elementom $p_2 \in P((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \setminus S_1)$:

$$\|q_2 - p_2\| = \left\| q_2 - \sum_i \theta_i x_i \right\| \leq m \cdot \max_{i\geq 2} \|x_i\|,$$

gdje su θ_i jednaki 0 ili 1. Sada u skup S_1 dodajemo sve x_i iz prethodne sume čiji su pripadni θ_i jednaki 1 i dodati x_2 u skup (ako se već ne nalazi u njemu). Dobiveni skup označit ćemo sa S_2, a sumu članova skupa sa s_2. Slijedi da je

$$\|s' - s_2\| \leq \varepsilon_2 + m \cdot \max_{i\geq 2} \|x_i\| + \|x_2\|.$$

Nastavljajući ovu konstrukciju dobivamo niz konačnih skupova

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \cdots ; \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Ako zapišemo u poretku elemente skupova

$$S_1, S_2 \setminus S_1, S_3 \setminus S_2, S_4 \setminus S_3, ...,$$

po dobivenim aproksimacijama slijedi da je ovo dobra konstrukcija traženog poretka članova reda.

Sada nastavljamo na drugi dio dokaza. Imamo red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ čiji niz članova reda konvergira u 0 (jer je početni red konvergentan) i čiji niz parcijalnih suma konvergira u s':

$$\lim_{j\to\infty} \left\| s' - \sum_{k=1}^{n_j} x_k \right\| = 0, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Iz prethodne jednakosti slijedi da je i

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{n_j+1}^{n_{j+1}} x_k \right\| = 0.$$

Sada na svakom skupu $\{x_k\}_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}$ primijenjujemo lemu 2.3.5 (Lema o rearanžmanu) u obliku iz napomene 2.3.6. i označavamo s π dobivenu permutaciju skupa svih prirodnih brojeva. Tada je $\sum_{k=1}^{n_j} x_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{n_j} x_k, \quad j = 1, 2, ...$, te za proizvoljan $l \in [n_j + 1, n_{j+1}]$ vrijedi

$$\left\| \sum_{k=n_j+1}^{l} x_{\pi(k)} \right\| \leq m \cdot \max_{n_j < k \leq n_{j+1}} \|x_k\| + (m+1) \left\| \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} x_i \right\| .$$

Neka je r proizvoljan prirodni broj, $r > n_1$, te neka je j takav da je $n_j < r \leq n_{j+1}$. Tada je

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{r} x_{\pi(k)} - s' \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_j} x_{\pi(k)} - s' \right\| + \left\| \sum_{k=n_j+1}^{r} x_{\pi(k)} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_j} x_k - s' \right\| + m \cdot \max_{k > n_j} \|x_k\| + (m+1) \left\| \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} x_i \right\| . \end{aligned}$$

Slijedi da je $\lim_{r\to\infty} \| \sum_{k=1}^{r} x_{\pi(k)} - s' \| = 0$. Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ konvergira i suma reda je jednaka s'. Time je teorem dokazan. □

Napomena 2.3.11. Iz Steinitzovog teorema slijedi da domena sume uvjetno konvergentnog reda u konačnodimenzionalnom prostoru ne može biti jednočlan skup.

Napomena 2.3.12. Kao primjer primjene leme 2.3.5 (Lema o rearanžmanu) prezentirat ćemo aproksimativno rješenje "problema m alatnih strojeva". Na m alatnih strojeva potrebno je obraditi skup od n komada. Svaki komad prvo je obrađen na prvom alatnom stroju; zatim na drugom, pa na trećem, i tako dalje; svaki alatni stroj obrađuje komade u istom poretku. Obrađivanje komada i $(1 \leq i \leq n)$ na alatnom stroju j $(1 \leq j \leq m)$ počinje nakon što je komad i obrađen na alatnom stroju $j-1$, i komad $i-1$ obrađen na alatnom stroju j. Skup svih komada treba preurediti na način da je potpuno vrijeme obrađivanja T minimalno $(T = T^*)$. Vremena potrebna za obrađivanje su poznata: t_{ij} je vrijeme obrađivanja komada i na alatnom stroju j.

Sada ćemo pokazati da je ukupno vrijeme obrađivanja za dani poredak skupa komada jednako

$$T = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} t_{i1} + \sum_{i=n_1}^{n_2} t_{i2} + \cdots + \sum_{i=n_m-1}^{n_m} t_{im} \right\}, \tag{2.15}$$

gdje se maksimum postiže preko svih mogućih skupova indeksa

$$1 = n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{m-1} \leq n_m = n.$$

Neka je (V, E) usmjeren težinski graf čiji je skup vrhova jednak $V = \{(i,j) : i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}\}$, a skup bridova jednak $E = \{((i,j), (i, j{+}1) : i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m-1\}\} \cup \{((i,j), (i+1, j)) : i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{1, ..., m\}\}$. Težina svakog brida jednaka je t_{ij}, gdje je (i,j) početni vrh brida. Vrhovi (i,j) ovako definiranog grafa prestavljaju obrađivanja komada i na stroju j, dok bridovi označuju što je potrebno da bi se počeo obrađivati komad i na stroju j (za to je potrebno da se obradi komad $i-1$ na stroju j i komad i na stroju $j-1$). Sada vidimo da je ukupno vrijeme obrađivanja zapravo duljina najduljeg puta od vrha $(1,1)$ do vrha (n,m) + t_{nm} (tj. vrijeme od početka obrađivanja prvog komada na prvom stroju do početka obrađivanja zadnjeg komada na zadnjem stroju - ne smijemo zaboraviti dodati i t_{nm}, jer nas zanima vrijeme do kraja obrađivanja zadnjeg komada na zadnjem stroju). Nazovimo sada bridove koji povezuju (i,j) i $(i{+}1, j)$ crvenim bridovima, i bridove koji povezuju (i,j) i $(i, j+1)$ zelenim bridovima, za sve (i,j). Sada možemo primijetiti kako nam formula (2.15) zaista daje duljinu najduljeg puta (kako se u svakom vrhu od $(1,1)$ do (n,m) možemo odabrati kretati zelenim ili crvenim bridom, indeksi $n_1, ..., n_{m-1}$ nam govore u kojim koracima smo odabrali kretati se zelenim bridom na grafu — kako uzimamo maksimum po svim mogućim skupovima indeksa, time dobivamo upravo duljinu najduljeg puta, tj. ukupno vrijeme obrađivanja).

Iz jednakosti (2.15) slijedi donja granica za T:

$$\max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \leq T. \tag{2.16}$$

Kako lijeva strana jednakosti (2.16) ne uzima u obzir poredak komada, ta jednakost daje i donju granicu minimalnog vremena obrađivanja T^*.

Sada uvodimo m-dimenzionalan normiran prostor E_1, gdje je norma vektora $x = \{t_1, ..., t_m\}$ jednaka

$$\|x\| = \max_{1\le j\le m} |t_j|.$$

Drugim riječima, $E = \ell_\infty^{(m)}$. Svaki komad je reprezentiran vektorom $x_i = \{t_{i1}, ..., t_{im}\}$.

Teorem 2.3.13. *Skup $\{x_i\}_{i=1}^n$ komada može se permutirati na način da ukupno vrijeme obrađivanja $T(\pi)$ zadovoljava nejednakost*

$$T(\pi) \le \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + (2m^2+m-1)\cdot \max_{1\le i\le n}\|x_i\|. \tag{2.17}$$

Dokaz. Traženu permutaciju dobivamo iz leme 2.3.5 (Lema o rearanžmanu). Kako bismo pojednostavili računanje pretpostavit ćemo da je permutacija π identiteta ($\pi(1) = 1, ..., \pi(n) = n$). Koristeći nejednakost (2.9) dobivamo da

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=h}^k x_i - \frac{k-h+1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=1}^{h-1} x_i - \frac{k-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{h-1-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| \\
&= \left\|\left(\sum_{i=1}^k x_i - \frac{k-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{h-1} x_i - \frac{h-1-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| \\
&\le \left\|\sum_{i=1}^k x_i - \frac{k-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{h-1} x_i - \frac{h-1-m}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| \\
&\le 2m\cdot \max_{1\le i\le n}\|x_i\|
\end{aligned}$$

vrijedi za sve $1 \le h \le k \le n$. Slijedi da je

$$\left\|\sum_{i=h}^k x_i\right\| \le \frac{k-h+1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + 2m\cdot\max_i \|x_i\|. \tag{2.18}$$

Sada svaki član u jednakosti (2.15) možemo ograničiti prema (2.18):

$$\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} t_{ij} \le \left\|\sum_{i=n_{j-1}}^{n_j} x_i\right\| \le \frac{n_j - n_{j-1}+1}{n}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| + 2m\cdot\max_i\|x_i\|.$$

Zbrajanjem suma po svim j dobivamo traženu aproksimaciju:

$$\begin{aligned} T(\pi) &\leq \frac{n-1+m}{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + 2m^2 \cdot \max_i \|x_i\| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + (2m^2+m-1)\max_i \|x_i\|. \end{aligned}$$

Uspoređujući (2.16) i (2.17) dobivamo donju i gornju granicu:

$$\max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \leq T^* \leq T \leq \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} t_{ij} + (2m^2+m-1)\max_{ij} t_{ij}.$$

Primijetimo i da greška dobivena zamjenom minimalnog vremena obrađivanja T^* s $T(\pi)$ ne ovisi o broju dijelova, tj.

$$T(\pi) - T^* \leq (2m^2+m-1)\max_{ij} t_{ij}.$$

□

2.4 Uvjetna konvergencija u beskonačnodimenzionalnim prostorima

U prošlom potpoglavlju pokazali smo kakvog su oblika domene sume uvjetno konvergentnih redova u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima te kao posljedica Steinitzovog teorema slijedi da domena sume u tom slučaju ne može biti jednočlan skup. Steinitzov teorem ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnom slučaju te sljedeći primjer to pokazuje — konstruirat ćemo uvjetno konvergentan red u beskonačnodimenzionalnom prostoru čija je domena sume točka.

Primjer 2.4.1. Primjer takvog reda konstruirat ćemo u Hilbertovom prostoru ℓ_2. Neka je $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ kanonska ortonormirana baza. Promotrimo red

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 \cdots - \frac{1}{8}e_4 \cdots.$$

To je konvergentan red čija je suma jednaka e_1. Dani red ne konvergira bezuvjetno, jer red

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \cdots$$

divergira (red ne konvergira savršeno, a po teoremu 2.2.5 savršena i bezuvjetna konvergencija su ekvivalentne u Banachovom prostoru). Domena sume ovog reda se sastoji samo od točke e_1, kako projekcija ovog reda na proizvoljnu koordinatnu os sadrži samo konačno mnogo ne-nul članova, a konačna suma se ne može promijeniti promjenom poretka članova.

2.5 Uvjetno konvergentni redovi u prostorima L_p

U prošlom potpoglavlju pokazali smo da Steinitzov teorem ne vrijedi općenito u beskonačnodimenzionalnim prostorima. No, pokazat će se da uvođenjem dodatnih uvjeta Steinitzov teorem vrijedi i u prostorima L_p, gdje je $1 < p < \infty$. Za početak ćemo definirati prostore L_p.

Definicija 2.5.1. *Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ izmjeriv prostor i $1 \leq p < \infty$. Prostor $L_p(X)$ sastoji se od klasa ekvivalencije izmjerivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ takvih da je*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

gdje su izmjerive funkcije ekvivalentne ukoliko su μ-g.s. jednake. L_p-norma od $f \in L_p(X)$ definira se kao

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Sada ćemo dokazati dvije pomoćne leme.

Lema 2.5.2. *Sljedeće nejednakosti vrijede za sve $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$|a+b|^p \leq |a|^p + p \cdot b \cdot |a|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} a + A_p \cdot |b|^p \tag{2.19}$$

za $1 < p \leq 2$, i

$$|a+b|^p \leq |a|^p + p \cdot b \cdot |a|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} a + A_p(|b|^p + |a|^{p-2}|b|^2) \tag{2.20}$$

za $2 < p < \infty$, gdje A_p ovisi samo o p.

Dokaz. Dokazat ćemo drugu nejednakost (prva se dokazuje analogno). Kako obje nejednakosti očito vrijede za sve $A_p \geq 1$ u slučaju $a = 0$ ili $b = 0$, možemo pretpostaviti da $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Podijelimo obje strane druge nejednakosti s $|a|^p$, i označimo $\beta = \dfrac{b}{a}$:

$$|1+\beta|^p \leq 1 + p\beta \operatorname{sign} a + A_p(|\beta|^p + |\beta|^2).$$

Slijedi da je

$$\frac{|1+\beta|^p - 1 - p\beta \operatorname{sign} a}{|\beta|^p + |\beta|^2} \leq A_p.$$

Kako je funkcija na lijevoj strani nejednakosti dobro definirana i neprekidna na cijeloj realnoj osi (osim u 0, ali ima konačne limese u 0) te ima konačne limese za $\beta \to \pm\infty$, ona ima konačan supremum koji označavamo kao A_p. $\square$

Lema 2.5.3. *Za sve $x = x(t)$ i $y = y(t)$ u L_p vrijedi*

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + F_x(y) + A_p\|y\|^p \tag{2.21}$$

za $1 < p \leq 2$, i

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + F_x(y) + A_p(\|y\|^p + \|x\|^{p-2}\|y\|^2) \tag{2.22}$$

za $1 < p < \infty$, gdje je linearan funkcional F_x definiran s

$$F_x(y) = \int_0^1 |x(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} x(t) \cdot y(t) dt.$$

Dokaz. Zamjenom a i b s $x(t)$ i $y(t)$ u nejednakosti (2.19) i integrirajući po t dobivamo nejednakost (2.21). Ako isto napravimo s nejednakosti (2.20) dobivamo da za $2 < p < \infty$ vrijedi

$$\|x+y\|^p < \|x\|^p + F_x(y) + A_p(\|y\|^p + \int_0^1 |x(t)|^{p-2} \cdot |y(t)|^2 dt).$$

Zadnji član može se aproksimirati pomoću Holderove nejednakosti s eksponentima $s = \frac{p}{p-2}$ i $s' = \frac{p}{2}$ (zadovoljen je uvjet $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{p-2}{p} + \frac{2}{p} = 1$):

$$\int_0^1 |x(t)|^{p-2} \cdot |y(t)|^2 dt \leq \left[\int_0^1 |x(t)|^{(p-2)s} dt\right]^{1/s} \cdot \left[\int_0^1 |y(t)|^{2s'} dt\right]^{1/s'} = \|x\|^{p-2} \cdot \|y\|^2.$$

Korištenjem zadnje nejednakosti u predzadnjoj slijedi nejednakost (2.22). $\square$

Sljedeće dvije leme su analogoni lema 2.3.4 i 2.3.5 u konačnodimenzionalnom slučaju.

Lema 2.5.4 (Lema o zaokruživanju koeficijenata u L_p)**.** *Neka je $\{x_i\}_{i=1}^n$ konačan podskup od L_p, $1 < p < \infty$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ skup koeficijenata, gdje je $0 \leq \lambda_i \leq 1$, i $x = \sum_{i=1}^n x_i$. Tada postoji skup koeficijenata $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, gdje su θ_i jednaki 0 ili 1, takav da je*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \right\| \leq C_p \left[\sum_{i=1}^n \|x_i\|^r\right]^{1/r}, \tag{2.23}$$

gdje je $r = \min\{2, p\}$, i koeficijent C_p ovisi samo o p.

Dokaz. Neka je koeficijent θ_1 odabran nasumično (npr. $\theta_1 = 1$). Pretpostavimo da su koeficijenti $\theta_1, ..., \theta_{k-1}$ već odabrani. Uvodimo oznaku

$$s_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i x_i.$$

Koeficijent θ_k je sada određen uvjetom

$$(\lambda_k - \theta_k) F_{s_{k-1}}(x_k) \leq 0 \tag{2.24}$$

(ako je $F_{s_{k-1}}(x_k) = 0$ odabiremo $\theta_k = 1$). Pokazat ćemo da skup $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ koeficijenata konstruiranih indukcijom zadovoljava uvjete leme.

Neka je $2 < p < \infty$. Neka je $x = s_{k-1}$, $y = (\lambda_k - \theta_k)x_k$ u nejednakosti (2.22) i koristimo nejednakost (2.24):

$$\|s_k\|^p \leq \|s_{k-1}\|^p + A_p \|(\lambda_k - \theta_k)x_k\|^2 (\|(\lambda_k - \theta_k)x_k\|^{p-2} + \|s_{k-1}\|^{p-2}).$$

Sada među elementima s_k $(1 \leq k \leq n)$ odaberimo onog s najvećom normom. Neka je to $s_m : \|s_m\| = \max_k \|s_k\|$. Tada je

$$\|(\lambda_k - \theta_k)x_k\| = \|s_k - s_{k-1}\| \leq \|s_k\| + \|s_{k-1}\| \leq 2\|s_m\|.$$

Ako sad iskoristimo zadnju nejednakost u predzadnjoj, dobivamo da je

$$\|s_k\|^p \leq \|s_{k-1}\|^p + A_p \|(\lambda_k - \theta_k)x_k\|^2 \cdot (2^{p-2} + 1) \cdot \|s_m\|^{p-2}. \tag{2.25}$$

Zbrojimo nejednakosti (2.25) po svim k od $k = 2$ do $k = m$. Nakon kraćenja dobivamo da je

$$\|s_m\|^p \leq \|s_1\|^p + A_p (2^{p-2} + 1) \cdot \|s_m\|^{p-2} \cdot \sum_{k=2}^{m} \|(\lambda_k - \theta_k)x_k\|^2.$$

Kako je

$$|\lambda_k - \theta_k| \leq 1, \quad A_p \geq 1, \quad \|s_1\| = \|x_1(\lambda_1 - \theta_1)\| \leq \|s_m\|,$$

slijedi da je

$$\|s_m\|^p \leq A_p (2^{p-2} + 1) \cdot \|s_m\|^{p-2} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Ako prethodnu nejednakost podijelimo s $\|s_m\|^{p-2}$ i uzmemo u obzir nejednakost $\|s_m\| \geq \|s_n\|$, dobivamo traženu nejednakost

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k \right\| \leq C_p \left[\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right]^{1/2}$$

za $2 < p < \infty$. Slučaj $1 \leq p \leq 2$ dokazuje se analogno (umjesto nejednakosti (2.22) u dokazu se koristi nejednakost (2.21)). $\square$

Napomena 2.5.5. U prethodnoj lemi smo dokazali i više nego traženo: koeficijenti θ_i definirani u dokazu zadovoljavaju nejednakost

$$\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\theta_i)x_i\right\|\le C_p\left[\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right]^{1/r},$$

gdje je $r=\min\{2,p\}$.

Lema 2.5.6 (Lema o rearanžmanu vektora u L_p)**.** *Neka je $\{x_i\}_{i=1}^n$ konačan skup vektora u prostoru L_p. Tada se članovi tog skupa mogu permutirati na način da za svaki $k\le n$ vrijedi*

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{\pi(i)}\right\|\le C_p\left[\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right]^{1/r}+D_p\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|,$$

gdje je π dana permutacija indeksnog skupa $\{1,..,n\}$, $r=\min\{2,p\}$, i pozitivni koeficijenti C_p i D_p ovise samo o p.

Dokaz. Neka je $x_0=-\sum_{i=1}^n x_i$ za dani skup $\{x_i\}_{i=1}^n$. Povećani skup $\{x_i\}_{i=0}^n$ zadovoljava uvjet $\sum_{i=0}^n x_i=0$. Sada ćemo promijeniti poredak povećanog skupa. Neka je $\pi(0)=0$. Pretpostavimo da je $\pi(i)$ već definiran za sve $0\le i\le k-1$. Uvodimo oznaku

$$s_{k-1}=\sum_{i=0}^{k-1}x_{\pi(i)}.$$

Kako je suma elemenata s_{k-1} i preostalih članova povećanog skupa jednaka 0, i

$$F_{s_{k-1}}(s_{k-1})=\|s_{k-1}\|^p\ge 0,$$

slijedi da među preostalim članovima $\{x_i\}$ postoji jedan (npr. x_l) za koji linearni funkcional $F_{s_{k-1}}$ poprima nepozitivnu vrijednost: $F_{s_{k-1}}(x_l)\le 0$. Neka je $\pi(k)=l$. Preostaje nam dokazati da permutacija π skupa $\{1,...,n\}$ konstruirana indukcijom zadovoljava uvjet leme.

Iskoristimo sad nejednakosti (2.21) i (2.22). Uzmimo slučaj $2<p<\infty$ (slučaj $1<p\le 2$ dokazuje se analogno, korištenjem nejednakosti (2.21)). Ako uvrstimo $x=s_{k-1}$, $y=x_{\pi(k)}$ u (2.22) i uzmemo u obzir da je $F_{s_{k-1}}(x_{\pi(k)})\le 0$, dobivamo da je

$$\|s_k\|^p\le\|s_{k-1}\|^p+A_p\|x_{\pi(k)}\|^2\left[\|x_{\pi(k)}\|^{p-2}+\|s_{k-1}\|^{p-2}\right].$$

Ako napravimo iste transformacije nejednakosti kao u prethodnoj lemi, dobivamo nejednakost

$$\|s_m\|^2 \leq A_p(2^{p-2}+1) \cdot \sum_{k=0}^{n} \|x_{\pi(k)}\|^2,$$

gdje je $\|s_m\| = \max_k \|s_k\|$. Iz jednakosti $x_0 = -\sum_{i=1}^n x_i$ sada slijedi da je

$$\begin{aligned} \max_j \left\| \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)} - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| &= \|s_m\| \leq \sqrt{A_p(2^{p-2}+1)} \left[\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{A_p(2^{p-2}+1)} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} + \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \right). \end{aligned}$$

Korištenjem nejednakosti

$$\|u - v\| \geq \|u\| - \|v\|$$

na lijevoj strani prethodne nejednakosti dobivamo traženu nejednakost

$$\max_j \left\| \sum_{k=1}^{j} x_{\pi(k)} \right\| \leq C_p \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^r \right]^{1/r} + D_p \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|,$$

gdje je $C_p = \sqrt{A_p(2^{p-2}+1)}$ i $D_p = C_p + 1$. □

Teorem 2.5.7 (Steinitz u L_p)**.** *Neka je $\sum_{k=1}^\infty x_k$ uvjetno konvergentan red u prostoru L_p za $1 < p < \infty$ i neka je s suma reda. Ako vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^r < \infty, \quad r = \min\{2, p\},$$

onda je domena sume reda $\sum_{k=1}^\infty x_k$ linearna mnogostrukost $s + \Gamma_0$, gdje je Γ_0 anihilator skupa $\Gamma \subset (L_p)^*$ funkcionala konvergencije reda $\sum_{k=1}^\infty x_k$.

Dokaz. Dokaz je jednak dokazu Steinitzovog teorema, osim što se umjesto lema 2.3.4 i 2.3.5 koriste leme 2.5.4 i 2.5.6. □

Bibliografija

[1] M. J. Agana, *The classical theory of rearrangements*, dostupno na: https://scholarworks.boisestate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2052&context=td (studeni 2020.)

[2] P. L. Clark, *Honors Calculus*, dostupno na: http://math.uga.edu/~pete/2400full.pdf (studeni 2020.)

[3] C. C. Cowen, K. R. Davidson, R. P. Kaufman, *Rearranging the Alternating Harmonic Series*, Vol. 87, No. 10. (1980), 817–819.

[4] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), 192–197.

[5] B. Guljaš, *Matematička analiza I & II*, skripta, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf (studeni 2020.).

[6] V. M. Kadets, M. I. Kadets, *Rearrangements of Series in Banach Spaces*, American Mathematical Society, Providence, 1991.

[7] A. Pringsheim, *Über die Werthveränderungen bedingt convergienten Reihe und Producte*, Mathematische Annalen, 22 (1883) 455–503.

[8] P. Rosenthal, *The Remarkable Theorem of Levy and Steinitz*, The American Mathematical Monthly, Vol. 94, No. 4 (1987), 342–351.

Sažetak

U ovom radu opisuju se pojedina svojstva uvjetno konvergentnih redova u različitim prostorima. U prvom poglavlju bavimo se redovima realnih brojeva te dokazujemo Riemannov teorem, koji pokazuje na koje se načine može promijeniti suma uvjetno konvergentnog reda u $\mathbb{R}$ mijenjanjem poretka članova reda. U drugom poglavlju bavimo se redovima vektora u Banachovim prostorima. Na početku poglavlja diskutiraju se odnosi obične, apsolutne i bezuvjetne konvergencije u različitim prostorima. Nadalje, definira se domena sume reda te se dokazuje Steinitzov teorem, koji daje opis domene sume uvjetno konvergentnog reda u konačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Na kraju se diskutira slučaj beskonačnodimenzionalnog prostora i pokazuje se da uvođenjem dodatnih uvjeta Steinitzov teorem vrijedi i u prostorima L_p, gdje je $1 < p < \infty$.

Summary

In this paper we describe certain properties of conditionally convergent series in different spaces. In the first chapter we deal with series of real numbers and we prove the Riemann series theorem, which shows the ways in which the sum of a conditionally convergent series can be changed by reordering the terms of the series. In the second chapter we deal with series of vectors in Banach spaces. At the beginning of the chapter we discuss the relations between regular, absolute, and unconditional convergence. Furthermore, we define the domain of sums of a series and prove Steinitz's theorem, which gives a description of the domain of sums of conditionally convergent series in finite-dimensional Banach spaces. In the end we discuss the case of an infinite-dimensional space and we show that, by adding additional conditions to Steinitz's theorem, it holds in spaces L_p, where $1 < p < \infty$.

Životopis

Rođen sam 15.10.1996. u Puli. Nakon završetka osnovne škole upisujem matematički smjer u Gimnaziji Pula. 2015. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te akademske godine 2016./17. držim demonstrature iz Matematičke analize 1 i 2. 2018. godine završavam preddiplomski studij te upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu.