Točke ekstrema nekih geometrijskih izraza vezanih uz trokut

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Kolić

TOČKE EKSTREMA NEKIH GEOMETRIJSKIH IZRAZA VEZANIH UZ TROKUT

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji: majci Jasminki, ocu Mladenu, bratu Petru i sestri Ani, Toniju i svim svojim prijateljima koji su mi pružali podršku kroz sve ove godine studiranja. Hvala na povjerenju u mene.

Sadržaj

Uvod

Za određene geometrijske izraze vezane uz trokut poznato je da svoj minimum ili maksimum, odnosno jednom riječju ekstrem, po svim točkama trokuta bilo unutar ili na njegovom rubu, postižu u posebnim točkama toga trokuta.

Kako bismo mogli proći kroz neke od najpoznatijih slučajeva kada neki geometrijski izrazi vezani uz trokut postižu svoje najmanje odnosno najveće vrijednosti, naprije ćemo u prvom dijelu rada (poglavlje 1) definirati i proučiti određene karakteristične točke koje će biti upravo ekstremi veličina promatranih u ovome radu te reći ponešto o njihovoj povijesti i specifičnim svojstvima.

U drugom dijelu rada (poglavlje 2), koji će nam ujedno predstavljati njegov centralni dio, posvetit ćemo se formuliranju i dokazivanju glavnih teorema vezanih uz geometrijske izraze u trokutu koji svoje najmanje odnosno najveće vrijednosti postižu u karakterističnim točkama navedenim u prvom dijelu rada.

Posljednji dio rada (poglavlje 3) sadržavat će svaki od izraza ilustriran u programu GeoGebra kroz sve potrebne korake provedbe te heuristički postupak kojim bi učenici u nastavi mogli doći do ekstrema geometrijskih izraza u trokutu prije samog pronalaska rigoroznih dokaza.

Poglavlje 1

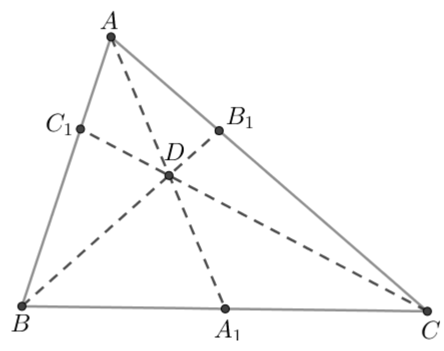
Neke posebne točke trokuta

Točke u kojima će se postizati najmanja, odnosno najveća vrijednost za dane geometrijske izraze provedene u ovom radu su *težište*, *Fermat-Torricellijeva točka* i *Lemoineova točka* pa recimo ponešto o njihovoj povijesti, definicijama i ponekim karakterističnim svojstvima.

Prije samog početka, iskazat ćemo teorem koji će nam pomoći pri mnogim dokazima u radu. Naime, zanima nas što uvijek vrijedi kada su pravci konkurentni, odnosno kada se pravci sijeku u jednoj točki, a to nam upravo govori idući teorem.

Teorem 1.0.1. *(Cevin teorem) Neka su točke A_1, B_1 i C_1 redom na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Tada se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.1: Cevin teorem

Dokaz se može pronaći u Palmanovoj knjizi [1] gdje je detaljno opisan.

1.1 Težište

Sam izraz *težište* je u svijetu poznat i kao *centroid* ili *baricentar* te je kao pojam nastao u mehanici. Nije poznato kada se prvi puta pojavio, ali je vjerojatno da se kod mnogih znanstvenika pojedinačno pojavio s određenim manjim razlikama. Izrecimo za početak definiciju težišnice trokuta.

Neka je dan trokut ABC. Spojnicu nekog vrha danog trokuta sa polovištem njemu nasuprotne stranice nazivamo *težišnicom* ili *medijanom* tog trokuta. Ako polovišta stranica trokuta ABC označimo s A', B' i C' redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, onda postoje tri težišnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ trokuta čije duljine označavamo s $t_a = |AA'|$, $t_b = |BB'|$ i $t_c = |CC'|$.

Teorem 1.1.1. *Težišnice trokuta ABC sijeku se u jednoj točki T.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su točke A', B' i C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Zbog činjenice da su navedene točke upravo polovišta, vrijedi

$$|AC'| = |C'B|, \quad |BA'| = |A'C|, \quad |CB'| = |B'A|.$$

Stoga očito vrijedi i iduća jednakost:

$$|AC'| \cdot |BA'| \cdot |CB'| = |C'B| \cdot |A'C| \cdot |B'A|$$

koju možemo zapisati u obliku:

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Sada primjenom Cevinog teorema (1.0.1) zaključujemo kako se pravci AA', BB' i CC' zaista sijeku u jednoj točki koju označimo s T. Dakle, pravci su konkurentni. □

Time dolazimo do potrebne definicije težišta.

Definicija 1.1.2. *Sjecište težišnica nazivamo* ***težištem*** *trokuta.*

Mnogi znanstvenici su se kroz povijest, kao i dan danas, osvrtali na Arhimedov dokaz postojanja težišta trokuta. Naime, Arhimed je pokazao da se izvjesna točka nalazi u sjecištu težišnica tako što je dokazao da se ona nalazi na svakoj od težišnica. Dakle, time zapravo dolazimo do današnje definicije da se težište nalazi na sjecištu dviju težišnica trokuta, jer ako se težište nalazi na obje težišnice, onda se ono podudara s njihovim sjecištem. Stoga kao zanimljivost navedimo Arhimedov dokaz:

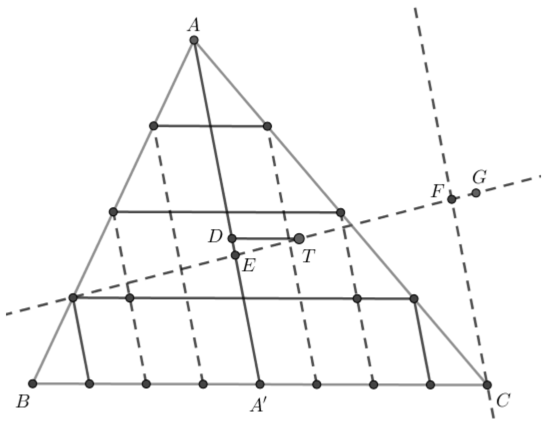
- Pretpostavimo suprotno, odnosno da se težište T (koje on definira kao fizikalni centar mase)ne nalazi na težišnici $\overline{AA'}$ trokuta ABC. Dakle, točka T se nalazi lijevo ili desno od težišnice $\overline{AA'}$. Ako povučemo paralelu s BC kroz točku T, dobivamo točku D na težišnici $\overline{AA'}$ (vidi sliku 1.2).

- Smisao dokaza nalazi se u rastavljanju trokuta ABC na paralelograme i manje trokute na način da prvotno višetruko raspolavljamo $\overline{A'C}$ radeći paralele s $\overline{AA'}$ sve dok $\overline{TD}$ ne bude dulja od širine dobivenih pruga te neka je n broj dijelova $\overline{A'C}$. Na isti način podijelimo i trokut s druge strane od $\overline{AA'}$ te povezivanjem sjecišta navedenih paralela sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dobivamo paralele s $\overline{BC}$ koje sve zajedno upravo tvore navedene paralelograme i manje trokute.

- Arhimed je potom korištenjem svojih prethodno dokazanih tvrdnji, odnosno da se težište paralelograma nalazi u sjecištu dijagonala te zakonom poluge koji kaže kako je težište figure težište težišta njezinih dijelova, pokazao da se težište E unije svih paralelograma nalazi na težišnici $\overline{AA'}$.

- Korištenjem sličnosti svih n "lijevih malih" trokuta s trokutom ABA' i svih n "desnih malih" trokuta s trokutom $AA'C$, površine manjih trokuta se prema površinama trokuta ABA' i $AA'C$ odnose kao $1 : n$. Zbog toga se površina figure koju tvori unija svih manjih trokuta prema površini trokuta ABC odnosi kao $1 : n$, pa se površina figure unije svih paralelograma prema površini trokuta ABC odnosi kao $(n - 1) : n$.

- Neka je F sjecište pravca TE i paralele s AA' kroz točku C. Težište G figure koju tvore unije svih manjih trokuta bi se trebalo nalaziti upravo na pravcu TE, a točka T između E i G jer je ono njihovo težište. Konačno ponovnom primjenom zakona poluge Arhimed je dobio kako se težište figure unije sviju manjih trokuta nalazi izvan trokuta ABC što je nemoguće pa dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom.



Slika 1.2: Arhimedov dokaz težišta trokuta kao sjecišta težišnica

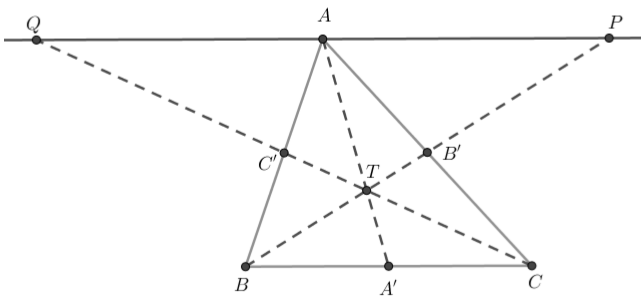
Iako mnogi naslućuju kako je Arhimed otkrio težište trokuta kao sjecište težišnica od Euklida, to nije moguće zbog činjenice da, kada je Arhimed došao u Aleksandriju, Euklida tamo više nije bilo, a također tu tvrdnju ne nalazimo u Euklidovim Elementima. Prva konkretna tvrdnja danog teorema (1.1.1) se pak pojavljaje kod Herona iz Aleksandrije jer se Arhimed na nju više poziva kao nešto s čime je upoznat nego kao konkretan prijedlog. Međutim, pojedini znanstvenici u svojim djelima ipak pripisuju Arhimedu otkriće težišta ravninskih likova, ali i naglašavaju kako se nije dotakao težišta krutih tijela.

Nakon izrečene povijesti vezane uz težište, izrecimo njegova određena svojstva te pojedine teoreme. Jedno od osnovnih svojstava koje naglašava vezu između težišnice i težišta trokuta je idući teorem:

Teorem 1.1.3. *[1] Težište T svaku od težišnica dijeli u omjeru* $2:1$, *odnosno vrijedi*

$$|AT|:|TA'| = |BT|:|TB'| = |CT|:|TC'| \quad = \quad 2:1.$$

Dokaz. Neka su $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ težišnice trokuta ABC. Povucimo vrhom A paralelu sa stranicom $\overline{BC}$. Težišnice $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ sijeku tu paralelu u točkama P i Q. Promotrimo trokute



Slika 1.3: Težište dijeli težišnicu u omjeru

QAC' i $C'BC$ (vidi sliku 1.3). Oni međusobno imaju sve stranice paralelne pa zaključujemo kako su slični po K-K poučku o sličnosti trokuta ($\triangle QAC' \sim \triangle C'BC$), pa vrijedi

$$\frac{|QA|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|C'B|} = 1. \tag{1.1}$$

S druge strane, promatrajući trokute $AB'P$ i BCB' također zbog paralelnosti svih stranica zaključujemo kako su slični po K-K poučku o sličnosti trokuta ($\triangle AB'P \sim \triangle BCB'$) pa vrijedi

$$\frac{|AP|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C|} = 1. \tag{1.2}$$

Iz jednakosti (1.1) i (1.2) možemo uočiti kako je točka A polovište $\overline{PQ}$.
Na koncu promotrimo još trokute PQT i BCT (slika 1.3). Ponovno zbog paralelnosti stranica, čime su im kutovi jednakih veličina, i ti trokuti su slični ($\triangle PQT \sim \triangle BCT$) pa konačno dobivamo

$$\frac{|AT|}{|TA'|} = \frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|PA|}{|BC|} + \frac{|AQ|}{|BC|} \quad = \quad 1 + 1 = 2,$$

odnosno

$$|AT| : |TA'| = 2 : 1.$$

Na analogan način provodimo dokaze i za djelišne omjere preostalih dviju težišnica. □

Nadalje promotrimo potrebno svojstvo težišta trokuta vezano uz njegove udaljenosti do stranica trokuta.

Teorem 1.1.4. *Za udaljenosti d_a, d_b i d_c težišta T trokuta ABC redom od stranica a, b i c vrijedi*

$$a : b : c = \frac{1}{d_a} : \frac{1}{d_b} : \frac{1}{d_c},$$

odnosno

$$a \cdot d_a = b \cdot d_b = c \cdot d_c.$$

Obratno, ako točka P trokuta ABC ima udaljenosti od stranica jednake d'_a, d'_b i d'_c za koje vrijedi

$$a \cdot d'_a = b \cdot d'_b = c \cdot d'_c,$$

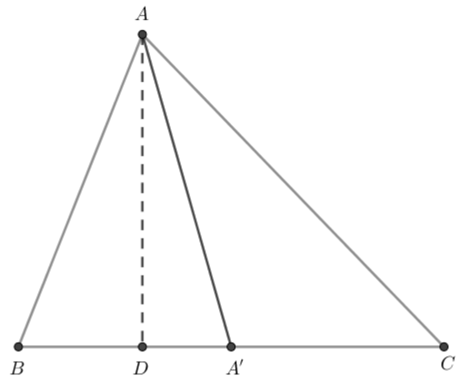
tada je točka P upravo težište trokuta, odnosno mora biti $P = T$.

Dokaz. Za početak, znamo kako težišnica $\overline{AA'}$ prolazi polovištem A' stranice $a = \overline{BC}$. Neka je točka D nožište okomice iz vrha A na stranicu a. Promotrimo trokute ABA' i $AA'C$ na slici 1.4. Uočimo kako je $\overline{AD}$ njihova zajednička visina. Stoga su im površine:

$$P(ABA') = \frac{|BA'| \cdot |AD|}{2},$$
$$P(AA'C) = \frac{|A'C| \cdot |AD|}{2}.$$

Nadalje, kako je A' polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi da je $\overline{BA'} = \overline{A'C}$, pa su stoga površine trokuta ABA' i $AA'C$ jednake. Dakle,

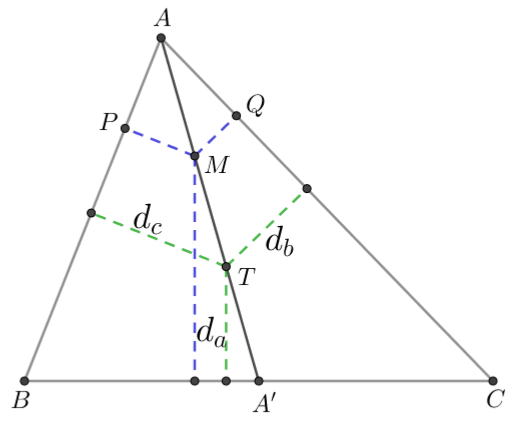
$$P(ABA') = P(AA'C).$$



Slika 1.4: Težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih površina

Sada po volji odaberimo točku M na težišnici $\overline{AA'}$ te iz nje spustimo okomice MP na stranicu $c = \overline{AB}$ i MQ na stranicu $b = \overline{AC}$. Promatrajući trokute ABM i AMC (slika 1.5), vidimo kako imaju zajedničku stranicu $\overline{AM}$ te da su im vrhovi B i C jednako udaljeni od pravca AM čime su im visine na AM jednakih duljina, pa zaključujemo kako su im površine također jednake, odnosno vrijedi

$$P(ABM) = P(AMC).$$



Slika 1.5: Veza udaljenosti težišta od stranica trokuta

Dakle, imamo

$$\frac{|AB| \cdot |MP|}{2} = \frac{|AC| \cdot |MQ|}{2},$$

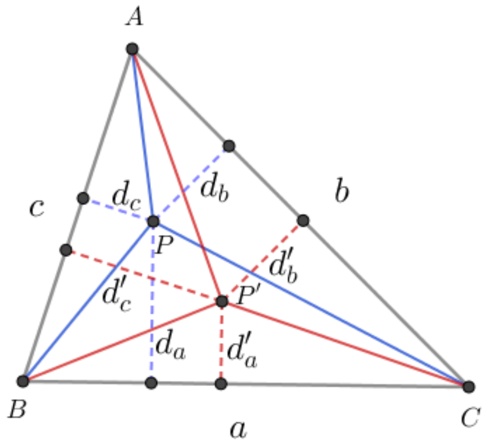
iz čega slijedi
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|MQ|}{|MP|}.$$
Posebno to vrijedi i za težište T, odnosno ako promatramo trokute ABT i ATC, pomoću prethodne jednakosti dobivamo
$$\frac{c}{b} = \frac{d_b}{d_c},$$
to jest
$$c : b = \frac{1}{d_c} : \frac{1}{d_b}.$$
Ako analogni postupak provedemo i s drugim dvjema težišnicama, dobivamo tvrdnju teorema.

Obratna tvrdnja je direktna posljedica sljedeće, općenitije leme. □

Lema 1.1.5. *Neka su P i P' točke trokuta ABC čije udaljenosti od stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ su redom d_a, d_b i d_c, odnosno d'_a, d'_b i d'_c. Ako vrijedi*
$$\frac{d'_a}{d_a} = \frac{d'_b}{d_b} = \frac{d'_c}{d_c},$$
tada mora biti $P = P'$.

Dokaz. Iz formule za površinu trokuta preko baze i visine, odmah slijedi (slika 1.6)
$$\frac{P(BCP')}{P(BCP)} = \frac{P(CAP')}{P(CAP)} = \frac{P(ABP')}{P(ABP)} = k$$
za pozitivnu konstantu k. Sada iz
$$P(ABC) = P(BCP') + P(CAP') + P(ABP') = k \cdot P(BCP) + k \cdot P(CAP) + k \cdot P(ABP),$$
odnosno
$$P(ABC) = k \cdot P(ABC)$$
slijedi kako je $k = 1$. Dakle,
$$P(BCP') = P(BCP), \quad P(CAP') = P(CAP), \quad P(ABP') = P(ABP),$$
što pak implicira
$$d'_a = d_a, \quad d'_b = d_b, \quad d'_c = d_c.$$

Kada se točke P i P' ne bi podudarale, tada bi iz $d'_a = d_a$ slijedilo da je $PP' \parallel BC$, dok bi iz $d'_b = d_b$ slijedilo da je $PP' \parallel CA$. No, to bi naime bila kontradikcija, jer nikoje dvije stranice trokuta nisu paralelne. □



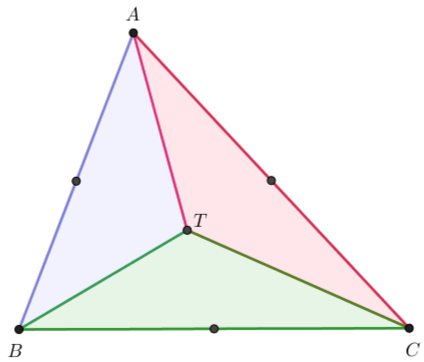
Slika 1.6: Omjeri udaljenosti točaka trokuta do stranica

Sljedeći korolar je posljedica prethodnog teorema 1.1.4 i njime završavamo potrebna svojstva težišta trokuta za ovaj rad.

Korolar 1.1.6. *Težište T dijeli trokut ABC na tri trokuta ABT, BCT i ACT jednakih površina, to jest vrijedi*

$$P(ABT) = P(BCT) = P(ACT).$$

Obratno, težište je jedina točka trokuta ABC sa tim svojstvom.



Slika 1.7: Težište dijeli trokut na trokute jednakih površina

1.2 Fermat-Torricellijeva točka

Iskažimo i dokažimo za početak idući teorem s kojim ćemo dovesti do tražene točke.

Teorem 1.2.1. *Nad svakom stranicom danog trokuta ABC konstruirajmo izvana jednakostranične trokute ABC_1, BCA_1 i ACB_1. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom V_1 i vrijedi $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.*

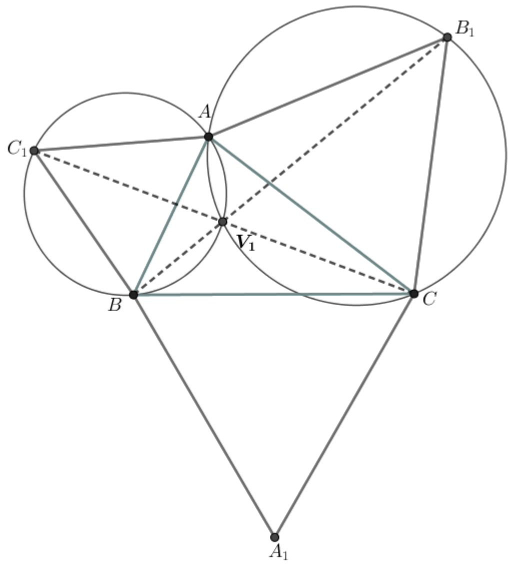
Dokaz. Dokažimo najprije da pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom V_1.

Dakle, neka je dan trokut ABC i njemu na svakoj od stranica izvana konstruirani jednakostranični trokuti ABC_1, BCA_1 i ACB_1. Neka se pravci BB_1 i CC_1 sijeku u točki V_1.

Opišimo jednakostraničnim trokutima ABC_1 i ACB_1 kružnice. Navedene kružnice se osim u točki A, sijeku i u točki V_1. Naime, promatrajući trokute BAB_1 i C_1AC (slika 1.8) vrijedi $|AB| = |AC_1|, |AB_1| = |AC|$ te označimo li $\measuredangle BAC = \alpha$ onda imamo $\measuredangle BAB_1 = \measuredangle C_1AC = \alpha + 60°$. Dakle, dobivamo sukladnost trokuta $BAB_1 \cong C_1AC$ prema S-K-S poučku o sukladnosti pa slijedi

$$\measuredangle V_1BA = \measuredangle V_1C_1A,$$

iz čega zaključujemo kako su oni obodni kutovi nad tetivom $\overline{V_1A}$ pa se točke A, V_1, B i C nalaze na istoj kružnici.



Slika 1.8: Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku se u jednoj točki V_1

Promotrimo četverokute AC_1BV_1 i AV_1CB_1 (slika 1.8). Oni su očito tetivni jer su im opisane kružnice, a s obzirom da za tetivne četverokute vrijedi da im je zbroj mjera nasuprotnih kutova jednak 180°, odnosno suplementarni su, onda kako su kutovi $\measuredangle AC_1B = \measuredangle CB_1A = 60^\circ$ jer su trokuti jednakostranični vrijedi da je

$$\measuredangle BV_1A = \measuredangle AV_1C = 120^\circ.$$

No, stoga je i $\measuredangle CV_1B = 120^\circ$.

Sada, promatrajući četverokut BA_1CV_1, vrijedi da je $\measuredangle CV_1B + \measuredangle BA_1C = 180^\circ$ jer je ponovno $\measuredangle BA_1C = 60^\circ$ zbog toga što pripada jednakostraničnom trokutu pa zaključujemo kako je navedeni četverokut također tetivni (prema obratu poučka o tetivnom četverokutu).

Promotrimo nadalje kutove $\measuredangle AV_1B_1$, $\measuredangle B_1V_1C$ i $\measuredangle CV_1A_1$. Oni su očito obodni kutovi nad stranicama jednakostraničnih trokuta pa dobivamo:

$$\measuredangle AV_1B_1 = \measuredangle B_1V_1C = \measuredangle CV_1A_1 = 60^\circ.$$

Dakle, time dolazimo do zaključka kako navedeni kutovi tvore ispruženi kut iz čega zaključujemo da su točke A, V_1 i A_1 kolinearne, odnosno da pravac AA_1 prolazi točkom V_1.

Dokažimo sada i drugu tvrdnju, odnosno da vrijedi da je $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Promotrimo trokute ABA_1 i BCC_1. Kako je

$$|AB| = |BC_1|$$

i

$$|BA_1| = |BC|$$

te ako označimo da je $\measuredangle V_1BC = \alpha$, onda još vrijedi

$$\measuredangle ABA_1 = \measuredangle C_1BC = \alpha + 60^\circ.$$

Zaključujemo kako su stoga navedeni trokuti sukladni, odnosno $\triangle ABA_1 \cong \triangle BCC_1$ (prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta). Slijedi da je $|AA_1| = |CC_1|$.

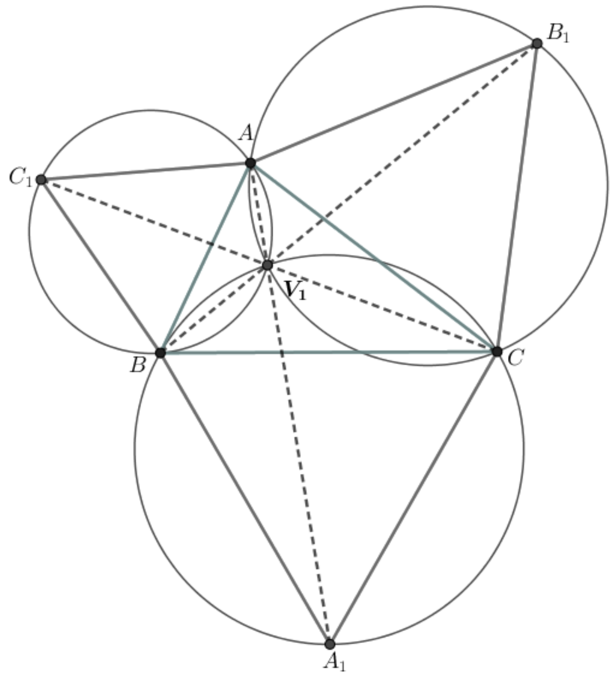
Analogno iz sukladnosti trokuta AA_1C i BCB_1 ($\triangle AA_1C \cong \triangle BCB_1$) dobivamo jednakost $|AA_1| = |BB_1|$ čime smo dokazali teorem. □

Sada definirajmo kakva je to *Fermatova točka*, nazvana prema francuskom matematičaru Pierreu de Fermatu.

Definicija 1.2.2. *Neka su nad stranicama trokuta ABC konstruirani prema van jednakostranični trokuti ABC_1, BCA_1 i ACB_1 i neka se spojnice AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki V_1. Takvu točku V_1 nazivamo* ***Fermatovom točkom****.*

U geometriji, Fermatovu točku neki ponekad zovu i *Torricellijevom točkom* prema talijanskom matematičaru i fizičaru Evangelistu Torricelliju ili također *Fermat-Torricellijevom točkom*. Razlog tome je što je Fermat Torricelliju kao izazov uputio pitanje da dokaže kako je zbroj udaljenosti od vrhova do točke (Fermat-Torricellijeve točke) minimalan. O tome ćemo više reći u idućem poglavlju, međutim važno je naglasiti kako je Torricelli riješio navedeni problem na sličan način kao Fermat, ali je koristio kružnice opisane trokutima ABC_1, BCA_1 i ACB_1 koje se stoga nazivaju *Torricellijevim kružnicama*, dok je njihovo sjecište upravo Fermatova točka V_1. Torricellijeva učenica Viviani objavila je njegovo rješenje problema 1659. godine.

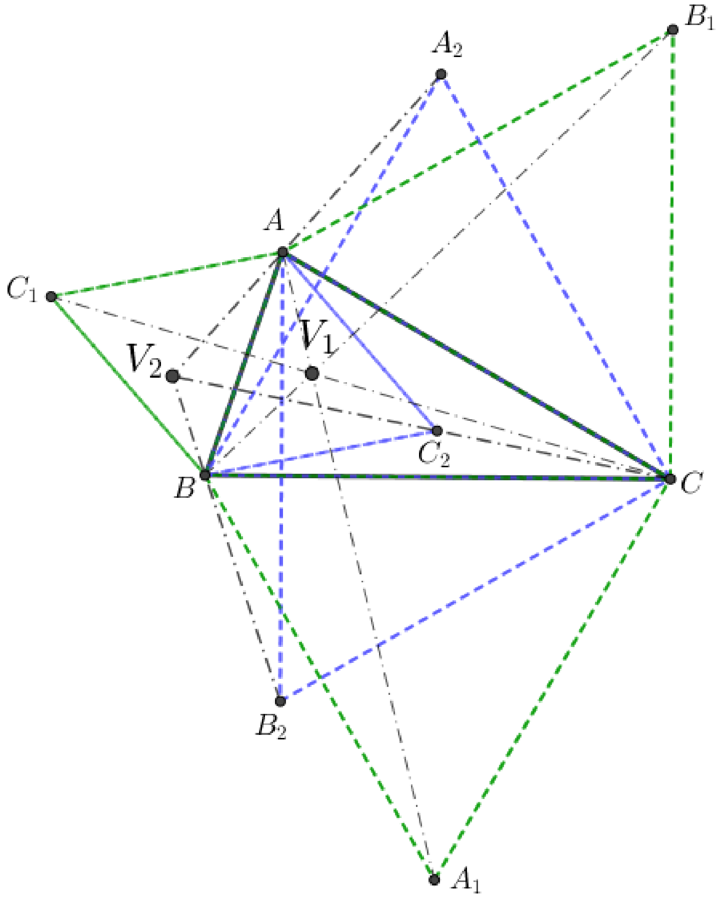
Možemo još napomenuti kako središta opisanih kružnica jednakostraničnim trokutima, odnosno središta takozvanih Torricellijevih kružnica tvore vrhove jednakostraničnog trokuta čiji dokaz se može pronaći u članku iz časopisa MiŠ [2].



Slika 1.9: Fermat-Torricellijeva točka

Nadalje, za Fermatovu točku, odnosno Fermat-Torricellijevu točku V_1 također kažemo kako je ona *prvi izogonični centar* trokuta ABC. Postoji i drugi izogonični centar trokuta ABC, ali jedina je razlika od prvoga u konstrukciji jednakostraničnih trokuta. Njegova definicija glasi ovako, a navodimo je čisto kao zanimljivost:

Nad svakom stranicom danog trokuta ABC konstruirajmo na unutrašnju stranu jednakostranične trokute ABC_2, BCA_2 i ACB_2. Pravci AA_2, BB_2 i CC_2 prolaze jednom točkom V_2 i vrijedi $|AA_2| = |BB_2| = |CC_2|$. Tada točku V_2 nazivamo *drugim izogoničnim centrom* trokuta ABC.

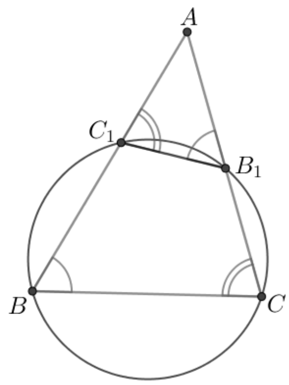


Slika 1.10: Izogonični centri

1.3 Lemoineova točka

Prije same riječi o Lemoineovoj točki, moramo definirati neke druge pojmove. Za početak to su antiparalele (slika 1.11).

Definicija 1.3.1. *Neka je dan trokut ABC te neka su točka B_1 na stranici $\overline{AC}$ i točka C_1 na stranici $\overline{AB}$. Ako za takve točke vrijedi da je $\measuredangle AB_1C_1 = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle ACB$, onda dužinu $\overline{B_1C_1}$ nazivamo* ***antiparalelom*** *stranice $\overline{BC}$ danog trokuta ABC.*



Slika 1.11: Antiparalela

Zbog svojstva jednakosti kutova danog u definiciji, možemo zaključiti kako su sve antiparalele neke od stranica danog trokuta međusobno paralelne. Antiparalele preostalih dviju stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC definiraju se analogno.

Sada, kao što možemo uočiti sa slike 1.11, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 1.3.2. *[1] Ako je $\overline{B_1C_1}$ antiparalela stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC, onda točke B, C, B_1 i C_1 pripadaju istoj kružnici. Vrijedi i obrnuto: bilo koja kružnica koja prolazi točkama B i C siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama C_1 i B_1 takvima da je $\overline{B_1C_1}$ antiparalela.*

Dokaz. Označimo li $\measuredangle AB_1C_1 = \measuredangle ABC = \beta$ i $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle ACB = \gamma$, onda vrijedi:

$$\measuredangle CB_1C_1 = 180^\circ - \beta$$

i

$$\measuredangle B_1C_1B = 180^\circ - \gamma.$$

Stoga, ako promatramo četverokut BCB_1C_1, onda su njegovi nasuprotni kutovi suplementarni pa zaključujemo kako je četverokut BCB_1C_1 tetivni. Zbog dobivene činjenice, danom četverokutu možemo opisati kružnicu te dakle točke B, C, B_1 i C_1 pripadaju jednoj kružnici.

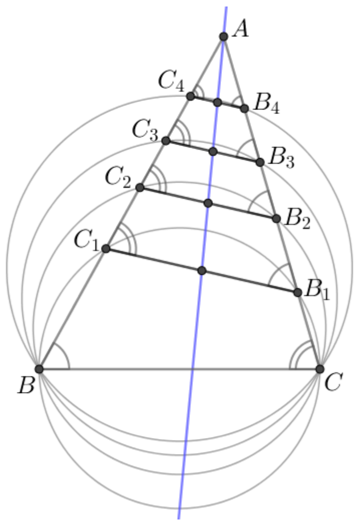
Obratno, ako pretpostavimo da točke B, C, B_1 i C_1 pripadaju jednoj kružnici, onda je četverokut BCB_1C_1 tetivni. Stoga je $\measuredangle CB_1C_1 = 180° - \beta$ pa je $\measuredangle AB_1C_1 = \beta$ iz čega slijedi da je $\overline{B_1C_1}$ antiparalela. □

Teorem 1.3.3. *Polovišta svih antiparalela neke od stranica trokuta ABC leže na jednom pravcu koji prolazi trećim vrhom danog trokuta.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka su B_1C_1 i B_2C_2 dvije antiparalele stranice $\overline{BC}$ (slika 1.12). Tada postoji homotetija s centrom u točki A koja preslikava trokut AB_1C_1 u trokut AB_2C_2. Ta ista homotetija tada nužno preslikava polovište stranice B_1C_1 trokuta AB_1C_1 u polovište stranice B_2C_2 trokuta AB_2C_2. Stoga oba polovišta leže na zraci homotetije, a znamo da svaka zraka homotetije prolazi centrom homotetije, u našem slučaju je to točka A. Istom homotetijom pokažemo i za preostala polovišta antiparalela. Dakle, dobili smo pravac koji prolazi polovištima antiparalela stranice trokuta i prolazi trećim vrhom tog trokuta. □

Dolazimo do idućeg važnog pojma prije definiranja Lemoineove točke.

Definicija 1.3.4. *Pravac na kojemu leže polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta te koji prolazi trećim vrhom tog trokuta nazivamo* ***simedijanom*** *danog trokuta.*



Slika 1.12: Simedijana

Izrecimo kako još dolazimo do simedijane.

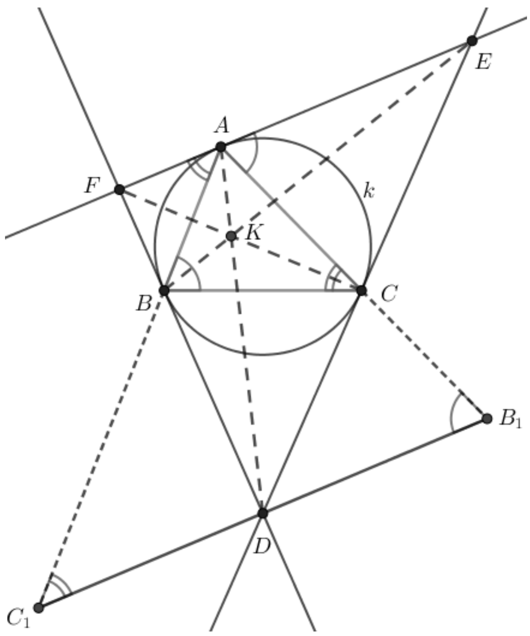
Teorem 1.3.5. *Neka je dan trokut ABC i njemu opisana kružnica k. Neka je točka D sjecište tangenti kružnice k u vrhovima B i C. Tada je pravac AD simedijana trokuta ABC.*

Ako dani postupak iskazan u teoremu ponovimo te odredimo sjecište E tangenti kružnice k u vrhovima A i C te sjecište F tangenti kružnice k u vrhovima A i B, onda zapravo dobivamo tangencijalni trokut DEF, odnosno trokut čije stranice pripadaju tangentama na opisanu kružnicu danog trokuta ABC u njegovim vrhovima.

U idućem teoremu izreći ćemo i dokazati prošireni prethodni teorem 1.3.5 te ujedno i pokazati kako se simedijane nekog trokuta sijeku u jednoj točki što će nas u konačnici dovesti do potrebne Lemoineove točke.

Teorem 1.3.6. *Neka su stranice trokuta DEF tangente opisane kružnice k danog trokuta ABC u njegovim vrhovima. Tada spojnice $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ čine simedijane trokuta ABC i sijeku se u točki K.*

Dokaz. Pokažimo najprije da su pravci AP, BE i CF simedijane trokuta ABC.
Dakle, promatrajmo prvo stranicu $\overline{BC}$. Odredimo njenu antiparalelu $\overline{B_1C_1}$ koja prolazi točkom D (slika 1.13).



Slika 1.13: Simedijane trokuta sijeku se u jednoj točki

Na osnovu teorema 1.3.2 vrijedi kako je antiparalela stranice $\overline{BC}$ koja prolazi vrhom A upravo tangenta kružnice k opisane danom trokutu ABC u vrhu A. Stoga, kako smo odredili drugu antiparalelu $\overline{B_1C_1}$ stranice $\overline{BC}$, a sve antiparalele neke stranice danog trokuta su međusobno paralelne, zaključujemo kako vrijedi da je dakle

$$B_1C_1 \parallel EF.$$

Prema tome, po svojstvu transverzale paralelnih pravaca imamo

$$\measuredangle BC_1D = \measuredangle FAB, \measuredangle DB_1C = \measuredangle EAC.$$

Nadalje, kako je $|FA| = |FB|$ te stoga vrijedi

$$\measuredangle FAB = \measuredangle FBA,$$

a s druge strane imamo vršne kutove

$$\measuredangle FBA = \measuredangle C_1BD,$$

onda konačno imamo jednakost

$$\measuredangle BC_1D = \measuredangle C_1BD,$$

pa slijedi da je

$$|DB| = |DC_1|.$$

Analogno pokazujemo i jednakost $|DC| = |DB_1|$. No, kako znamo da je $|DB| = |DC|$, onda je ujedno i

$$|DC_1| = |DB_1|$$

s čime točka D predstavlja polovište antiparalele $\overline{B_1C_1}$. Dakle, pravac AD prolazi polovištem jedne antiparalele stranice $\overline{BC}$ pa prolazi polovištima i svih ostalih antiparalela stranice $\overline{BC}$ što ga čini simedijanom danog trokuta ABC. Analogno pokažemo i da pravci BE i CF čine simedijane trokuta ABC.

Na koncu, dokažimo da se simedijane trokuta sijeku u jednoj točki, odnosno da su pravci konkurentni.

Promotrimo trokut DEF (slika 1.13). Ako ponovno koristimo svojstvo koje kaže kako je

$$|BD| = |CD|, \quad |CE| = |AE|, \quad |AF| = |BF|,$$

onda očito vrijedi iduća jednakost:

$$|DC| \cdot |EA| \cdot |FB| = |CE| \cdot |AF| \cdot |BD|$$

koju također možemo zapisati u obliku:

$$\frac{|DC|}{|CE|} \cdot \frac{|EA|}{|AF|} \cdot \frac{|FB|}{|BD|} = 1.$$

Sada primjenom Cevinog teorema 1.0.1 zaključujemo kako nam se pravci AD, BE i CF, odnosno simedijane trokuta ABC zaista sijeku u jednoj točki koju smo označili s K. □

Naposljetku možemo definirati traženu točku.

Definicija 1.3.7. *Točka u kojoj se sijeku simedijane danog trokuta ABC nazivamo* ***Lemoineovom točkom****.*

Lemoineova točka dobila je ime prema francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineou koji je dokazao njeno postojanje, dok je njemački matematičar Ernst Wilhelm Grebe objavio članak o toj točki 1847. godine pa je zbog toga u Njemačkoj nazivana i Grebeovom točkom. Kasnije dobiva i treći, najviše prihvaćen naziv, a to je upravo *simedijalna točka* kao sjecište simedijana trokuta. To ime za Lemoineovu točku je široko prihvaćeno, a sam takav naziv joj je dao engleski matematičar Robert Tucker.

Za sam kraj izrecimo teorem vezan uz simedijane i njihovo dijeljenje nasuprotne stranice.

Teorem 1.3.8. *[1] Neka je S točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC. Ako je pravac AS simedijana vrha A trokuta ABC, tada on dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru kvadrata priležećih stranica, odnosno*

$$\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Dokaz. Neka je AS simedijana, a AA' težišnica vrha A.Neka je $\overline{B_1C_1}$ antiparalela stranice $\overline{BC}$, a s P_1 označimo njeno polovište kroz koje prolazi simedijana AS (slika 1.14). Kako su prema definiciji antiparalele 1.3.1 trokuti ABC i AC_1B_1 slični prema K-K poučku o sličnosti, onda vrijedi

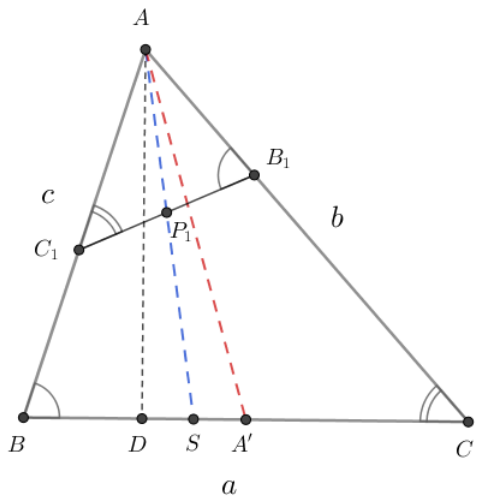
$$|AB| : |BC| = |AB_1| : |B_1C_1|,$$

iz čega slijedi

$$|AB| : |BA'| = |AB_1| : |B_1P_1|$$

što znači kako su i trokuti ABA' i AB_1P_1 slični pa vrijedi

$$\measuredangle BAS = \measuredangle A'AC.$$



Slika 1.14: Sjecište simedijane vrha s nasuprotnom stranicom

Time smo pokazali kako su zapravo težišnica i simedijana trokuta ABC simetrične s obzirom na simetralu $\measuredangle BAC$.

Dakle, promatrajmo trokute ABS i $AA'C$ (slika 1.14). Njihove površine jednake su

$$P(ABS) = \frac{|BS| \cdot |AD|}{2}, \quad P(AA'C) = \frac{|A'C| \cdot |AD|}{2},$$

gdje je $|AD|$ očito njihova zajednička visina. Stoga, omjer njihovih površina možemo izraziti kao

$$\frac{P(ABS)}{P(AA'C)} = \frac{|BS|}{|A'C|}. \tag{1.3}$$

Nadalje, zbog činjenice kako simedijana i težišnica danog trokuta leže simetrično s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta te kako je $\measuredangle BAS = \measuredangle A'AC$, onda površine trokuta ABS i $AA'C$ možemo još primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta zapisati kao

$$P(ABS) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AS| \cdot \sin \measuredangle BAS, \quad P(AA'C) = \frac{1}{2}|AA'| \cdot |AC| \cdot \sin \measuredangle AA'C,$$

iz čega im je omjer jednak

$$\frac{P(ABS)}{P(AA'C)} = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AA'| \cdot |AC|}. \tag{1.4}$$

Izjednačavanjem (1.3) i (1.4) dobivamo jednakost

$$\frac{|BS|}{|A'C|} = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AA'| \cdot |AC|}. \tag{1.5}$$

Na isti način promatrajući trokute ASC i ABA' imamo

$$\frac{P(ASC)}{P(ABA')} = \frac{|SC|}{|A'B|} = \frac{|AS| \cdot |AC|}{|AB| \cdot |AA'|}. \tag{1.6}$$

Dijeljenjem jednakosti (1.5) s jednakošću (1.6) dobivamo

$$\frac{|BS|}{|A'C|} \cdot \frac{|A'B|}{|SC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Međutim, kako je točka A' polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi $|BA'| = |A'C|$, pa stoga iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

□

Poglavlje 2

Ekstremi nekih geometrijskih izraza

U ovom poglavlju promatrat ćemo nekoliko zanimljivih geometrijskih izraza vezanih uz trokut koji će svi ovisiti o varijabilnoj točki P, za koju dozvoljavamo da bude proizvoljna točka ravnine u kojoj se nalazi dani trokut ABC. Naime, zanimat ćemo se kada je dani geometrijski izraz minimalan, tj. najmanji mogući, odnosno maksimalan, tj. najveći mogući. U pojedinim situacijama imat će smisla promatranje samo minimuma ili promatranje samo maksimuma. Međutim, u svakom od slučajeva tvrdnju ćemo potkrijepiti njenim detaljnim dokazom.

2.1 Minimum zbroja kvadrata udaljenosti od vrhova

Točka za koju će se postizati minimum zbroja kvadrata udaljenosti od vrhova danog trokuta je *težište*. Stoga prije samog dokaza te tvrdnje, moramo iskazati svojstvo vezano uz pravac koji prolazi težištem pa prvo izrecimo i dokažimo idući teorem.

Teorem 2.1.1. *[1] Udaljenost težišta T danog trokuta ABC do nekog pravca p ravnine trokuta jednaka je aritmetičkoj sredini udaljenosti vrhova danog trokuta do pravca p. Pritom udaljenosti s jedne strane pravca p imaju pozitivan, a s druge strane negativan predznak.*

Dokaz. Znamo prema teoremu 1.1.3 kako vrijedi

$$|AT| = 2 \cdot |TA'|.$$

Označimo ortogonalne projekcije točaka trokuta na pravac p gdje je T_1 ortogonalna projekcija točke T na pravac, A_1 ortogonalna projekcija točke A i tako dalje (slika 2.1). Označimo s O sjecište AA' s pravcem p. Sada iz sličnosti trokuta AA_1O, TT_1O i $A'A'_1O$ prema K-K poučku o sličnosti trokuta (svi imaju pravi kut i zajednički kut $\measuredangle AOA_1$) dobivamo

$$\frac{|AA_1|}{|TT_1|} = \frac{3|TA'| + |A'O|}{|TA'| + |A'O|}$$

i

$$\frac{|TT_1|}{|A'A_1'|} = \frac{|TA'| + |A'O|}{|A'O|}.$$

Iz druge jednakosti imamo

$$|TT_1| \cdot |A'O| = |A'A_1'| \cdot |TA'| + |A'A_1'| \cdot |A'O|,$$

iz čega slijedi

$$|A'O| = \frac{|A'A_1'| \cdot |TA'|}{|TT_1| - |A'A_1'|}$$

te uvrštavanjem dobivenog $|A'O|$ u prvu jednakost dobivamo

$$\frac{|AA_1|}{|TT_1|} = \frac{3|TA'| + \frac{|A'A_1'| \cdot |TA'|}{|TT_1| - |A'A_1'|}}{|TA'| + \frac{|A'A_1'| \cdot |TA'|}{|TT_1| - |A'A_1'|}},$$

odnosno sređivanjem

$$\frac{|AA_1|}{|TT_1|} = \frac{3|TT_1| - 2|A'A_1'|}{|TT_1|},$$

to jest

$$|AA_1| = 3|TT_1| - 2|A'A_1'|.$$

Dakle, vrijedi

$$3|TT_1| = |AA_1| + 2|A'A_1'|. \tag{2.1}$$

Promotrimo sada četverokut BB_1C_1C (slika 2.1). On je očito trapez jer mu je jedan par nasuprotnih stranica paralelan ($BB_1 \parallel CC_1$). Kako je A' polovište stranice $\overline{BC}$ i $A'A_1' \parallel BB_1 \parallel CC_1$, zaključujemo da je $\overline{A'A_1'}$ srednjica toga trapeza pa vrijedi

$$|A'A_1'| = \frac{|BB_1| \cdot |CC_1|}{2},$$

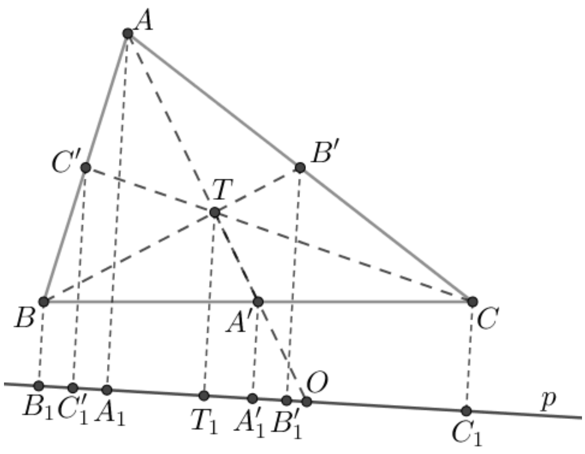
odnosno

$$2|AA_1'| = |BB_1| + |CC_1|. \tag{2.2}$$

Uvrštavanjem (2.2) u (2.1) dobivamo

$$3|TT_1| = |AA_1| + |BB_1| + |CC_1|,$$

čime smo dokazali teorem. Valja napomenuti kako svakako moramo uvažiti predznake udaljenosti točaka A, B i C od pravca p jer ako se jedna od točaka nalazi s druge strane pravca od preostalih točaka, onda se uzima udaljenost s negativnim predznakom. $\square$



Slika 2.1: Udaljenost težišta do pravca

Idući korolar nam dakle govori o spomenutom pravcu kroz težište.

Korolar 2.1.2. *[1] Ako pravac p prolazi težištem T trokuta ABC, onda je zbroj udaljenosti onih dvaju vrhova trokuta koji stoje s jedne strane pravca p jednak udaljenosti trećeg vrha do tog pravca.*

Dokaz. Zaista, prema prethodnom teoremu 2.1.1 nam vrijedi $3|TT_1| = |AA_1|+|BB_1|+|CC_1|$, a kako pravac sada prolazi kroz težište T, onda je udaljenost $|TT_1| = 0$, pa imamo

$$\pm|AA_1| \pm |BB_1| \pm \pm|CC_1| = 0,$$

pri čemu nas znakovi ± podsjećaju da se udaljenosti računaju s predznakom.

Sada, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti kako se točka C nalazi sa suprotne strane pravca p od točaka A i B pa se udaljenost $|CC_1|$ uzima s minus predznakom, odnosno imamo

$$|AA_1| + |BB_1| = |CC_1|.$$

□

Iskažimo i dokažimo glavni teorem o zbroju kvadrata udaljenosti određene točke od vrhova trokuta.

Teorem 2.1.3. *Zbroj kvadrata udaljenosti od vrhova trokuta minimum postiže u težištu i samo u njemu.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i proizvoljna točka P. Neka je točka T težište danog trokuta. S A_1, B_1 i C_1 označimo nožišta okomica spuštenih iz vrhova A, B i C na pravac PT (slika 2.2).

Ako primijenimo kosinusov poučak na trokute ATP, BTP i CTP dobivamo

$$\begin{aligned}
|AP|^2 &= |AT|^2 + |TP|^2 - 2 \cdot |AT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle ATP),\\
|BP|^2 &= |BT|^2 + |TP|^2 - 2 \cdot |BT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle BTP),\\
|CP|^2 &= |CT|^2 + |TP|^2 - 2 \cdot |CT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle CTP).
\end{aligned}$$

Uočimo kako su u drugoj i trećoj jednakosti zadani kutovi tupi, pa upotrebom svojstva kosinusa suplementarnih kutova koji kaže kako je $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$ imamo

$$\begin{aligned}
|AP|^2 &= |AT|^2 + |TP|^2 - 2 \cdot |AT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle ATP),\\
|BP|^2 &= |BT|^2 + |TP|^2 + 2 \cdot |BT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle BTB_1),\\
|CP|^2 &= |CT|^2 + |TP|^2 + 2 \cdot |CT| \cdot |TP| \cdot \cos(\measuredangle CTC_1).
\end{aligned}$$

Promotrimo nadalje te kosinuse kutova. Ako pak primijenimo trigonometriju pravokutnih trokuta AA_1T, BB_1T i CC_1T imamo

$$\begin{aligned}
\cos(\measuredangle ATP) &= \frac{|A_1T|}{|AT|},\\
\cos(\measuredangle BTB_1) &= \frac{B_1T}{BT},\\
\cos(\measuredangle CTC_1) &= \frac{|C_1T|}{CT},
\end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u prethodne jednakosti i skraćivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
|AP|^2 &= |AT|^2 + |TP|^2 - 2 \cdot |TP| \cdot |A_1T|,\\
|BP|^2 &= |BT|^2 + |TP|^2 + 2 \cdot |TP| \cdot |B_1T|,\\
|CP|^2 &= |CT|^2 + |TP|^2 + 2 \cdot |TP| \cdot |C_1T|.
\end{aligned}$$

Konačno zbrajanjem dobivenih triju jednakosti dobijemo

$$\begin{aligned}
&|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2\\
&= |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3 \cdot |TP|^2 - 2 \cdot |TP|(|A_1T| - |B_1T| - |C_1T|). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Uzmimo sada pravac q koji također prolazi težištem i okomit je pravac p. Označimo s A_2, B_2 i C_2 nožišta okomica spuštenih iz A, B i C na pravac q. Kako se točka A nalazi sa suprotne strane pravca q s obzirom na točke B i C (slika 2.2), onda prema prethodnom korolaru 2.1.2 znamo kako je zbroj udaljenosti onih dvaju vrhova s jedne strane pravca jednak udaljenosti trećeg vrha do toga pravca, odnosno

$$|AA_2| = |BB_2| + |CC_2|.$$

S druge strane, kako je pravac q okomit na pravac p, uočimo da je stoga

$$|AA_2| = |A_1T|, \quad |BB_2| = |B_1T|, \quad |CC_2| = |C_1T|,$$

pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

$$|A_1T| - |B_1T| - |C_1T| = 0.$$

Ako se s dobivenim vratimo u (2.3), imamo konačno

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3 \cdot |TP|^2,$$

što je poznato kao Leibnitzov teorem koji točno kaže kako je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta ABC od neke točke P jednak zbroju kvadrata udaljenosti tih vrhova od težišta T trokuta i trostrukog kvadrata udaljenosti točke P od težišta T.

Ako naposljetku zamislimo da je točka P pala u težište T (to jest $P = T$), onda imamo $|TP| = 0$, odnosno u zadnjoj jednakosti dobivamo

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2,$$

dok za bilo koju drugu točku P očito vrijedi

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 > |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2.$$

Time zaključujemo da zaista zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta minimum postiže u težištu tog trokuta. □

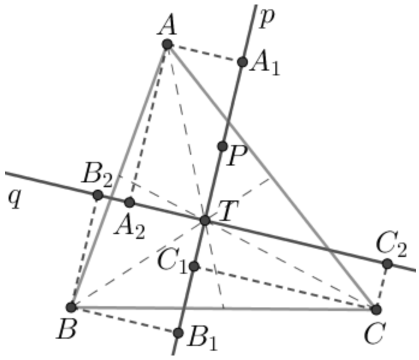
Nadovežimo se još s jednim teoremom kao zanimljivošću vezanom uz zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta od težišta.

Teorem 2.1.4. *[1] Zbroj kvadrata udaljenosti težišta T danog trokuta ABC do vrhova tog trokuta jednak je trećini zbroja kvadrata stranica a, b i c trokuta, odnosno*

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dokaz. Prema teoremu 1.1.3 vrijedi kako težište dijeli težišnicu u omjeru $|AT| : |TA'| = 2 : 1$, pa zaključujemo kako je udaljenost težišta T do vrha danog trokuta ABC jednaka dvije trećine duljine odgovarajuće težišnice. Dakle,

$$|AT| = \frac{2}{3}t_a, \quad |BT| = \frac{2}{3}t_b, \quad |CT| = \frac{2}{3}t_c,$$



Slika 2.2: Za težište zbroj kvadrata udaljenosti do vrhova trokuta je minimalan

gdje su t_a, t_b i t_c odgovarajuće težišnice redom iz vrhova A, B i C.

Stoga primjenom činjenice da su duljine težišnica dane s

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \\ t_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}, \\ t_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}, \end{aligned}$$

čiji dokaz nalazimo u Palmanovoj knjizi [1], imamo

$$\begin{aligned} |AT| &= \frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \\ |BT| &= \frac{2}{3}t_b = \frac{1}{3}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}, \\ |CT| &= \frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem ovih triju jednakosti zaista dobivamo

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 = \frac{1}{9}[2(b^2+c^2)-a^2+2(c^2+a^2)-b^2+2(a^2+b^2)-c^2]$$

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 = \frac{1}{9}(3a^2+3b^2+3c^2)$$

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

□

2.2 Maksimum produkta udaljenosti od stranica

Kako bismo mogli pokazati kada umnožak neka tri realna pozitivna broja poprima najveću vrijednost, odnosno maksimum, dokažimo najprije jedan pomoćni rezultat, odnosno iduću lemu.

Lema 2.2.1. *[1] Umnožak abc tri pozitivna realna broja, $a, b, c > 0$, čija je suma zadana, $a + b + c = k$, poprima najveću vrijednost ako je $a = b = c$.*

Dokaz. Uzmimo pozitivne realne brojeve x, y, z. Promatrajući tvrdnju $(x - y)^2 \geq 0$ dobivamo

$$x^2 + y^2 \geq 2xy. \tag{2.4}$$

U dobivenom izrazu jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y jednaki, odnosno ako su x i y različiti, onda vrijedi nejednakost $x^2 + y^2 > 2xy$. Analogno vrijedi i da je

$$y^2 + z^2 \geq 2yz, \tag{2.5}$$

$$x^2 + z^2 \geq 2xz. \tag{2.6}$$

Zbrojimo li sada dobivene nejednakosti (2.4), (2.6) i (2.6) dobivamo sljedeću nejednakost:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz,$$

odnosno

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz. \tag{2.7}$$

Nadalje promotrimo jednakost

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Sada na temelju (2.7) slijedi da je drugi faktor desne strane gornje jednakosti nenegativan, a s obzirom da je i prvi faktor te strane nenegativan, jer imamo zbroj pozitivnih realnih brojeva, onda je cijela desna strana nenegativna pa stoga i cijeli izraz s lijeve strane dane jednakosti mora biti pozitivan, odnosno mora vrijediti

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Uvrstimo li ovdje supstituciju $x^3 = a, y^3 = b$ i $z^3 = c$, konačno dobivamo

$$abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3,$$

odnosno uvrštavanjem tvrdnje $a + b + c = k$ imamo

$$abc \leq \frac{k^3}{27}. \tag{2.8}$$

Ako kažemo da je $a = b = c$, onda uvrštavanjem u konačnu nejednakost (2.8) dobivamo da nam vrijedi jednakost. Međutim, ako su barem dva od brojeva a, b, c međusobno različita, tada su i barem dva njihova treća korijena, u ovom slučaju realni brojevi x, y, z, međusobno različiti pa imamo strogu nejednakost. Dakle, jednakost se postiže ako i samo ako su a, b i c jednaki i time dokazujemo provedenu tvrdnju. □

Sada na temelju dokazane leme i prethodnog poglavlja možemo dokazati idući glavni teorem.

Teorem 2.2.2. *Među svim točkama unutar danog trokuta produkt udaljenosti od stranica tog trokuta maksimum postiže za težište i samo za njega.*

Dokaz. Neka je točka P bilo koja točka unutrašnjosti trokuta ABC i neka su m_a, m_b i m_c udaljenosti točke P redom do stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ danog trokuta. Označimo s a, b i c redom duljine stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Ako promatramo taj trokut ABC, njegovu površinu možemo izraziti kao zbroj površina trokuta ABP, BCP i ACP (slika 2.3). Dakle, s obzirom da smo s m_a, m_b i m_c naznačili duljine visina iz vrha P navedenih trokuta, njihove površine glase:

$$\begin{aligned} P(ABP) &= \frac{c \cdot m_c}{2}, \\ P(BCP) &= \frac{a \cdot m_a}{2}, \\ P(ACP) &= \frac{b \cdot m_b}{2}. \end{aligned}$$

Stoga je površina trokuta ABC dana s

$$P(ABC) = \frac{am_a + bm_b + cm_c}{2},$$

tj. vrijedi

$$2P(ABC) = am_a + bm_b + cm_c.$$

Osvrnimo se sada na produkt od tri pribrojnika gornje jednakosti koji stoje s njene desne strane, odnosno

$$\Pi = (am_a)(bm_b)(cm_c). \tag{2.9}$$

Prema prethodno dokazanoj lemi 2.2.1, zadani produkt će poprimati najveću vrijednost ako su mu faktori jednaki, odnosno ako je $am_a = bm_b = cm_c$. Naime, to bi onda značilo da su površine trokuta ABP, BCP i ACP također jednake.

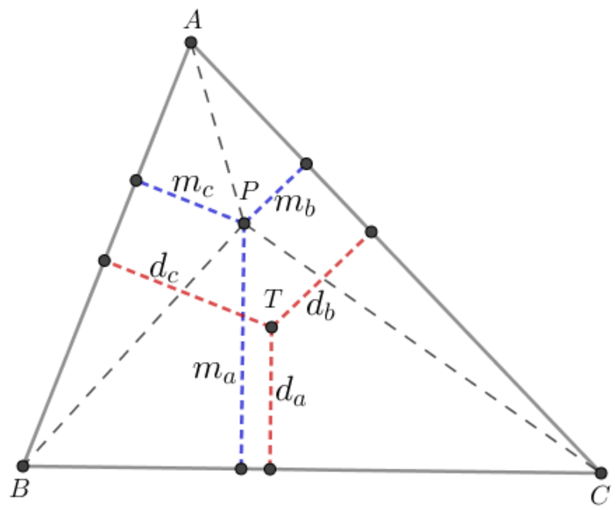
Stoga, prema korolaru 1.1.6, koji kaže da točka koja dijeli trokut na tri manja trokuta jednakih površina upravo jest težište, zaključujemo kako će nam upravo faktori iz (2.9) biti jednaki ako i samo ako točka P bude težište T danog trokuta ABC, to jest onda dani umnožak ima najveću vrijednost.

S druge strane, prema teoremu 1.1.4 za udaljenosti težišta do stranica trokuta koristili smo oznake d_a, d_b i d_c te je vrijedilo $ad_a = bd_b = cd_c$ kao što ovdje i jest slučaj.

Na koncu (2.9) možemo napisati u obliku

$$\Pi = (abc)(d_a d_b d_c),$$

a kako je još i $abc = const$, slijedi tvrdnja teorema da je težište točka unutrašnjosti trokuta za koju produkt udaljenosti do stranica ima maksimalnu vrijednost. □



Slika 2.3: Za težište produkt udaljenosti do stranica trokuta je maksimalan

2.3 Minimum zbroja udaljenosti od vrhova

Prisjetimo se kako smo u prošlom poglavlju napomenuli da je Pierre de Fermat izazvao Evangelista Torricellija s pitanjem da pronađe točku za koju je zbroj njenih udaljenosti do vrhova trokuta minimalan. Naime, kako smo tada rekli, radi se stoga o takozvanoj

Fermatovoj ili *Fermat-Torricellijevoj točki* (definicija 1.2.2) koju također poznajemo kao izogonični centar trokuta te smo ju označili s V_1.

Teorem 2.3.1. *Ako su svi kutovi trokuta manji od* $120°$*, tada zbroj udaljenosti od vrhova svoj minimum postiže u Fermatovoj točki i samo u njoj. Ako je neki kut trokuta veći ili jednak* $120°$*, tada zbroj udaljenosti od vrhova svoj minimum postiže u pripadnom vrhu.*

Prvi dokaz u slučaju kada su svi kutovi trokuta manji od $120°$. Neka je dan trokut ABC kojemu su svi kutovi manji od $120°$. Neka je V_1 Fermatova točka. Konstruirajmo trokut KLM kojemu stranice prolaze vrhovima trokuta ABC i okomite su redom na AV_1, BV_1 i CV_1 (slika 2.4).

Promotrimo kutove konstruiranog trokuta. Prema teoremu 1.2.1 znamo da je $\measuredangle AV_1B = \measuredangle BV_1C = \measuredangle CV_1A = 120°$, a kako četverokuti AV_1BL, BV_1CM i AV_1CK imaju po dva prava kuta, vrijedi

$$\measuredangle ALB = \measuredangle BMC = \measuredangle CKA = 60°,$$

čime je trokut KLM jednakostraničan.

Nadalje, neka je dana točka P trokuta KLM različita od točke V_1 i neka su P_1, P_2 i P_3 nožišta okomica spuštenih iz točke P redom na stranice $\overline{KL}, \overline{LM}$ i $\overline{MK}$ trokuta. Prema *Vivianijevom teoremu* [3] koji glasi: neka je dan jednakostraničan trokut KLM, tada za bilo koju točku P trokuta KLM zbroj udaljenosti točke P od stranica trokuta je jednak visini tog trokuta, zaključujemo kako je upravo zbroj udaljenosti neke točke do stranica jednakostraničnog trokuta konstantan.

Naime, neka su dakle P_1, P_2 i P_3 nožišta okomica spuštenih iz točke P na stranice, neka je h visina te neka je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta KLM. Prikažimo njegovu površinu kao zbroj površina trokuta KLP, LMP i MKP. Imamo:

$$P(KLM) = \frac{a \cdot |PP_1|}{2} + \frac{a \cdot |PP_2|}{2} + \frac{a \cdot |PP_3|}{2},$$

odnosno

$$2P(KLM) = a \cdot |PP_1| + a \cdot |PP_2| + a \cdot |PP_3|. \tag{2.10}$$

Također, površina trokuta KLM je jednaka

$$P(KLM) = \frac{a \cdot h}{2},$$

to jest

$$2P(KLM) = a \cdot h \tag{2.11}$$

pa izjednačavanjem dviju jednakosti (2.10) i (2.11) zaista dobivamo

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| = h.$$

Na temelju tog svojstva da je u jednakostraničnom trokutu zbroj udaljenosti neke točke P do stranica trokuta KLM konstantan, onda to vrijedi i za točku V_1 trokuta KLM, kojoj su točke A, B i C zapravo nožišta okomica na stranice trokuta, odnosno vrijedi

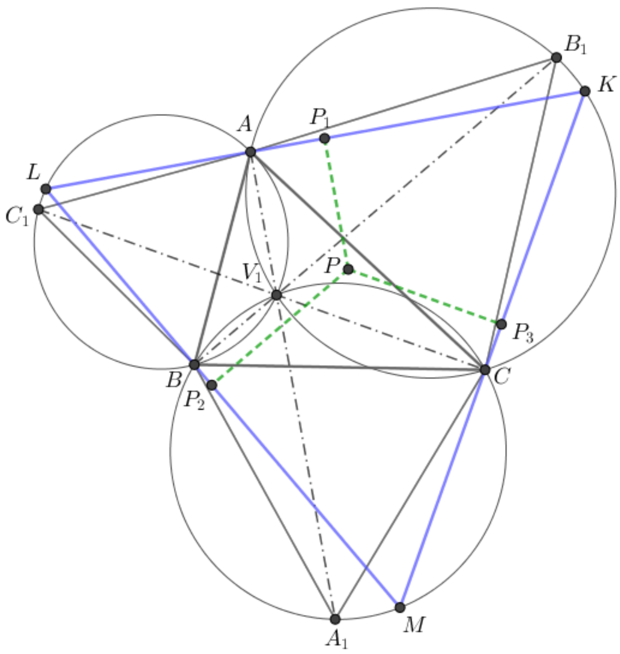
$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| = |V_1A| + |V_1B| + |V_1C|. \tag{2.12}$$

S druge strane je očito kako vrijedi

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq |AP| + |BP| + |CP|, \tag{2.13}$$

gdje imamo jednakost samo ako je $AP \perp KL, BP \perp LM$ i $CP \perp KM$, to jest kada je $P = V_1$.

Dakle, da bi zbroj udaljenosti neke točke P do vrhova danog trokuta bio minimalan, točka P se mora na temelju (2.12) i (2.13) poklopiti s točkom V_1, odnosno Fermatovom točkom. $\square$

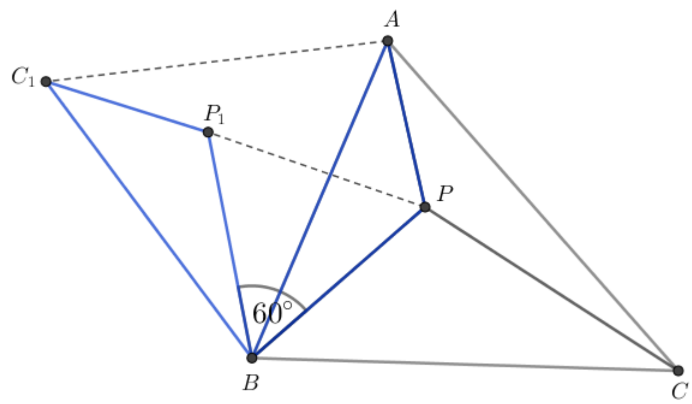


Slika 2.4: Za Fermatovu točku zbroj udaljenosti do vrhova trokuta je minimalan

Kao zanimljivost pokažimo još jedan od mnogih dokaza teorema 2.3.1. U ovom dokazu služit ćemo se rotacijom.

Drugi dokaz u slučaju kada su svi kutovi trokuta manji od $120°$. Neka je dan trokut ABC kojemu su svi kutovi manji od $120°$ i neka je P proizvoljna točka danog trokuta. Spojimo P s vrhovima trokuta A, B i C.

Zarotirajmo trokut ABP oko točke B za $60°$ u pozitivnom smjeru, odnosno smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Neka je tada trokut ABP preslikan u trokut C_1BP_1 (slika 2.4). Promotrimo trokut BPP_1. Naime, rotacijom vrijedi da je $|BP| = |BP_1|$, odnosno trokut



Slika 2.5: Drugi dokaz zbroja udaljenosti od Fermatove točke do vrhova trokuta

BPP_1 je jednakokračan pa je $\measuredangle BPP_1 = \measuredangle PP_1B$, a s druge strane kako je $\measuredangle PBP_1 = 60°$, zaključujemo kako su i druga dva kuta jednake mjere pa je trokut BPP_1 jednakostraničan.

Osvrnimo se sada na zbroj udaljenosti točke P do vrhova danog trokuta ABC. Na temelju rotacije vrijedi

$$|PA| + |PB| + |PC| = |C_1P_1| + |P_1P| + |PC|.$$

Valja napomenuti kako točka C_1 ne ovisi o položaju točke P. Također, vrijedi da je

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq |CC_1|,$$

jer je očito $|C_1P_1| + |P_1P| + |PC| \geq |CC_1|$. Stoga, zbroj $|PA| + |PB| + |PC|$ će postići svoj minimum ako P leži na CC_1. Zbog toga, za takvu točku P mora vrijediti

$$\measuredangle BPC_1 = 60°.$$

Isto bi vrijedilo da je $\measuredangle APC_1 = 60°$ kad bismo rotirali trokut ABP oko točke A za $60°$.

Dakle, zaključujemo kako je

$$\measuredangle APB = 120°,$$

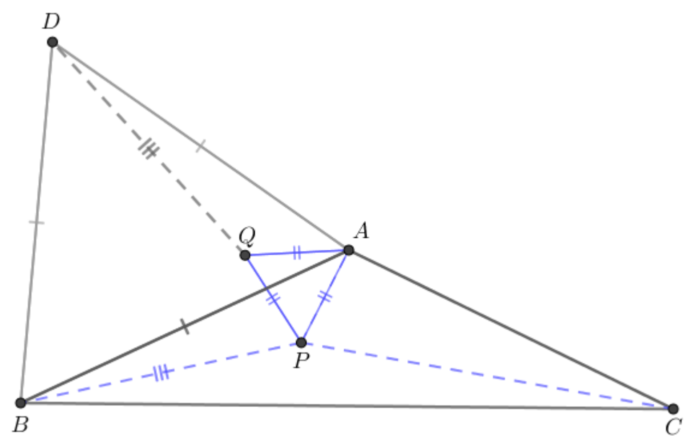
pa su i $\measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$ analognim postupkom. Uočimo još kako je ABC_1 jednakostraničan trokut konstruiran izvana na stranicu $\overline{AB}$ jer je zbog rotacije $|AB| = |BC_1|$ i $\measuredangle ABC_1 = 60°$.

Onda prema teoremu 1.2.1 dobivamo kako se točka P mora poklopiti s Fermatovom točkom V_1 jer ona leži na spojnici CC_1, a na isti način bi pokazali da leži i na AA_1 i BB_1, pa se poklapa s njihovim sjecištem. □

Za kraj dokažimo još teorem za slučaj kada je neki od kutova u trokutu veći ili jednak 120°.

Dokaz u slučaju kada je neki kut trokuta barem 120°. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je kut pri vrhu A veći ili jednak 120°. Konstruirajmo nad stranicom $\overline{AB}$ danog trokuta ABC izvana jednakostraničan trokut ABD. Neka je P proizvoljna točka trokuta ABC različita od A. Neka je točka Q takva da je trokut APQ također jednakostraničan (slika 2.6). Tada je trokut ABP rotacija za 60° u pozitivnom smjeru, odnosno u smjeru kazaljke na satu, trokuta ADQ oko točke A. Stoga su trokuti ABP i ADQ sukladni, odnosno $ABP \cong ADQ$. Nadalje, iz toga slijedi kako je zbroj udaljenosti neke točke P od vrhova trokuta ABC jednaka

$$|AP| + |BP| + |CP| = |CP| + |PQ| + |QD|.$$



Slika 2.6: Zbroj udaljenosti od vrhova trokuta s kutom većim ili jednakim 120°

Primijetimo kako se cijeli trokut ABC nalazi unutar izbočenog kuta $\measuredangle DAC$, odnosno kuta čija mjera je veća od 180°. Kako je točka P ograničena da leži unutar trokuta ABC, očito je (slika 2.6) kako vrijedi

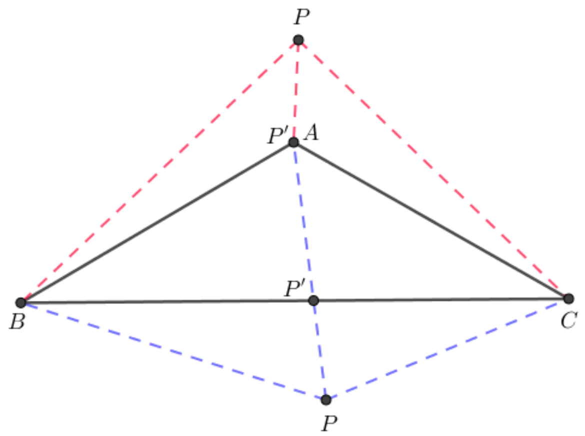
$$|CA| + |AD| < |CP| + |PQ| + |QD|,$$

za svaku točku P trokuta ABC različitu od točke A.

S druge strane, neka je dozvoljeno da se točka P nalazi izvan trokuta ABC. Tada postoji točka P' na rubu trokuta ABC takva da vrijedi

$$|AP'| + |BP'| + |CP'| < |AP| + |BP| + |CP|,$$

vidjeti sliku 2.7 za slučajeve kada dužine $\overline{PA}, \overline{PB}$ i $\overline{PC}$ ne sijeku stranice trokuta ABC, odnosno kada neka od tih dužina siječe stranicu promatranog trokuta.



Slika 2.7: Slučajevi kada se točka P nalazi izvan trokuta ABC

Također, kako je

$$|CA| + |AD| \leq |AP'| + |BP'| + |CP'|,$$

onda zaključujemo kako je

$$|CA| + |AD| < |AP| + |BP| + |CP|$$

za svaku točku P izvan trokuta ABC, pa stoga dana nejednakost vrijedi za svaku točku P u ravnini danog trokuta ABC, bila izvan ili unutar njega.

Dakle, u vrhu A se nalazi minimum zbroja udaljenosti od vrhova trokuta. $\square$

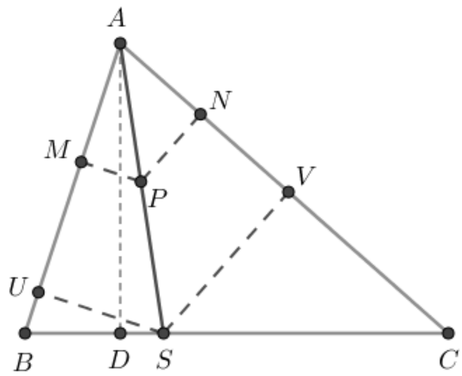
2.4 Minimum zbroja kvadrata udaljenosti do stranica

Točka unutar nekog danog trokuta za koju zbroj kvadrata udaljenosti do stranica tog trokuta poprima najmanju vrijednost je *Lemoineova točka* (definicija 1.3.7). Stoga prije samog glavnog teorema, navedimo vezu između točke na simedijani i njene udaljenosti od stranica trokuta te naposljetku i vezu između Lemoineove točke i njene udaljenosti od stranica danog trokuta.

Teorem 2.4.1. *[1] Ako točka P leži na simedijani vrha A trokuta ABC, tada su njezine udaljenosti $|PM|$ i $|PN|$ redom do stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ proporcionalne tim stranicama, odnosno vrijedi*

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Dokaz. Neka je P točka na simedijani vrha A danog trokuta ABC i neka su M i N nožišta okomica spuštenih iz P na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je točka S sjecište simedijane vrha A sa stranicom $\overline{BC}$. Označimo s U i V nožišta okomica iz točke S na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.



Slika 2.8: Udaljenosti točke simedijane do stranica proporcionalne su tim stranicama

Promotrimo trokute ABS i ASC (slika 2.8) te im odredimo površine koje ćemo zapisati kao omjer. Dakle, imamo

$$\frac{P(ABS)}{P(ASC)} = \frac{|AB| \cdot |SU|}{|AC| \cdot |SV|}.$$

S obzirom da je $\overline{AD}$ zajednička visina tih trokuta, onda omjer njihovih površina možemo zapisati i kao

$$\frac{P(ABS)}{P(ASC)} = \frac{|BS| \cdot |AD|}{|SC| \cdot |AD|} = \frac{|BS|}{|SC|}.$$

Stoga dobivamo kako vrijedi jednakost

$$\frac{|AB| \cdot |SU|}{|AC| \cdot |SV|} = \frac{|BS|}{|SC|}. \tag{2.14}$$

S druge strane, prema teoremu 1.3.8 ako je točka S sjecište simedijane vrha A s nasuprotnom stranicom $\overline{BC}$, onda ona dijeli tu stranicu u omjeru

$$\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \tag{2.15}$$

Dakle, uvrštavajući (2.15) u (2.14) dobivamo jednakost

$$\frac{|AB| \cdot |SU|}{|AC| \cdot |SV|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

odakle slijedi

$$\frac{|SU|}{|SV|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \tag{2.16}$$

Osvrnimo se sada na kutove $\measuredangle BAS$ i $\measuredangle CAS$ trokuta ABS i ASC (slika 2.8). Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|PM|}{|SU|} = \frac{|AP|}{|AS|}$$

i

$$\frac{|PN|}{|SV|} = \frac{|AP|}{|AS|}.$$

Izjednačavanjem dobivenih jednakosti imamo

$$\frac{|PM|}{|SU|} = \frac{|PN|}{|SV|},$$

odnosno

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|SU|}{|SV|}. \tag{2.17}$$

Konačno, izjednačavanjem (2.16) i (2.17) dobivamo tvrdnju teorema da je

$$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

□

Idući teorem smatramo izravnom posljedicom prethodnog teorema 2.4.1 i leme 1.1.5.

Teorem 2.4.2. *Neka su a, b i c redom duljine stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a neka su d_a, d_b i d_c udaljenosti točke K do redom do stranica a, b i c trokuta ABC. Točka K unutar danog trokuta ABC je Lemoineova točka ako i samo ako su joj udaljenosti do stranica proporcionalne pripadnim stranicama tog trokuta, odnosno ako vrijedi*

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

Dokaz. Neka je točka K Lemoineova točka, odnosno točka koja leži na sjecištu simedijana trokuta ABC. Tada prema teoremu 2.4.1, kojim smo pokazali kako su udaljenosti točke koja leži na simedijani do stranica trokuta proporcionalne tim stranicama, vrijedi

$$d_a : d_b = a : b, \quad d_b : d_c = b : c,$$

odnosno zapisano kao produženi omjer je

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

Obratno, pretpostavimo da postoje dvije točke P i P' unutar trokuta ABC, s udaljenostima do stranica jednakim d_a, d_b, d_c i d'_a, d'_b, d'_c koje zadovoljavaju

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c = d'_a : d'_b : d'_c.$$

Odavde je odmah

$$\frac{d'_a}{d_a} = \frac{d'_b}{d_b} = \frac{d'_c}{d_c}$$

pa iz leme 1.1.5 proizlazi da mora biti $P = P'$. □

Sada možemo izreći i dokazati glavni teorem koji određuje ekstrem zbroja kvadrata udaljenosti određene točke trokuta od stranica tog trokuta.

Teorem 2.4.3. *Zbroj kvadrata udaljenosti od stranica trokuta minimum postiže u Lemoineovoj točki i samo u njoj.*

Dokaz. Neka je P točka unutar danog trokuta ABC. Označimo s k_a, k_b i k_c udaljenosti točke P redom do stranica a, b i c danog trokuta ABC gdje je $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$.

Naime, za bilo koje realne brojeve a, b, c, k_a, k_b i k_c vrijedi

$$\begin{aligned}(k_a^2 + k_b^2 + k_c^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ak_a + bk_b + ck_c)^2 \\ = (bk_c - ck_b)^2 + (ck_a - ak_c)^2 + (ak_b - bk_a)^2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Promotrimo lijevu stranu dane jednakosti. Za neki dani trokut ABC je očito da vrijedi kako je zbroj kvadrata duljina njegovih stranica konstantan, odnosno

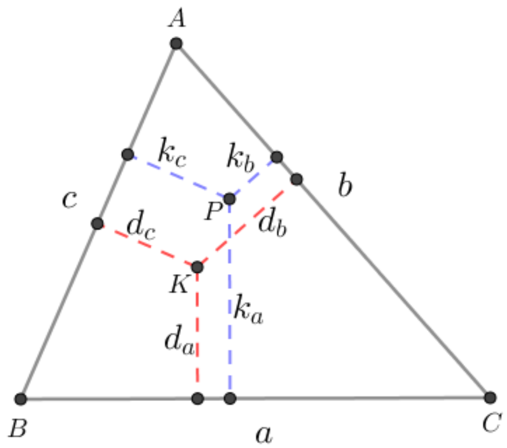
$$a^2 + b^2 + c^2 = const. \tag{2.19}$$

Također, ako promotrimo površinu trokuta ABC, nju možemo rastaviti na površine trokuta ABP, BCP i CAP (slika 2.9), to jest

$$P(ABC) = P(ABP) + P(BCP) + P(CAP) = \frac{a \cdot k_a}{2} + \frac{b \cdot k_b}{2} + \frac{c \cdot k_c}{2}.$$

Dakle, zaključujemo kako je stoga zbroj umnožaka duljina stranica i pripadnih udaljenosti koji nalazimo isto s lijeve strane jednakosti opet konstantan. Zaista imamo

$$ak_a + bk_b + ck_c = 2P(ABC) = const. \tag{2.20}$$



Slika 2.9: Za Lemoineovu točku zbroj kvadrata udaljenosti do stranica trokuta je minimalan

Obzirom da nas zanima kada će zbroj kvadrata udaljenosti $k_a^2 + k_b^2 + k_c^2$ biti minimalan, zbog (2.19) i (2.20) možemo zaključiti kako će se to dogoditi točno onda kada desna strana jednakosti (2.18) bude jednaka nuli, to jest ako vrijedi

$$\begin{aligned} bk_c - ck_b &= 0, \\ ck_a - ak_c &= 0, \\ ak_b - bk_a &= 0. \end{aligned}$$

Odavde odmah slijedi:

$$\frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c},$$
$$\frac{k_a}{a} = \frac{k_c}{c},$$
$$\frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b},$$

što možemo kraće zapisati kao

$$\frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c}.$$

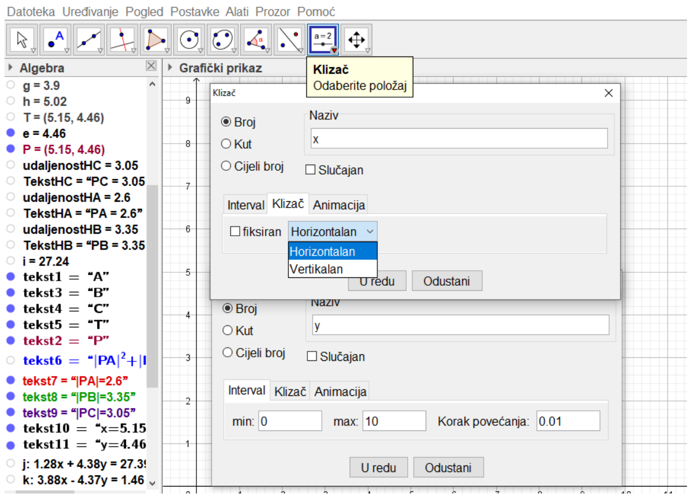
Međutim, prema teoremu 2.4.2 zaključujemo da, ako su udaljenosti točke P do stranica trokuta ABC proporcionalne pripadnim stranicama tog trokuta, onda je time određena Lemoineova točka, pa je $P = K$ Lemoineova točka. □

Poglavlje 3

Heurističko istraživanje u programu GeoGebra

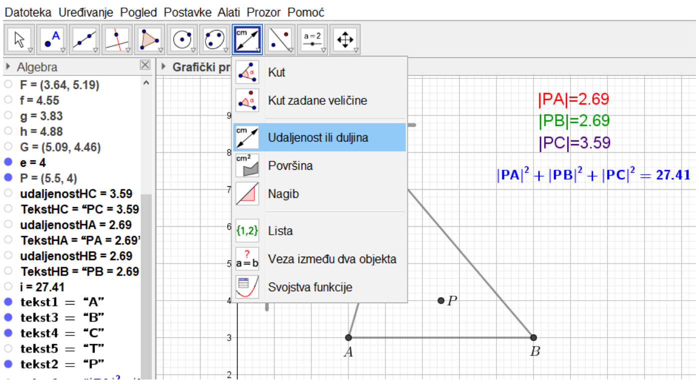
Od tri točke navedene u ovome radu, prva je bila težište, s kojom se učenici upoznaju još u osnovnoj školi kao jednom od četiri klasične karakteristične točke trokuta, uz središte upisane kružnice, središte opisane kružnice i ortocentar. S druge strane, preostale dvije točke, odnosno Fermatova točka i Lemoineova točka, su "posebne" točke trokuta s kojima bi se mogli susresti samo natjecatelji u sustavu srednjoškolskog obrazovanja. Kako bismo učenicima približili razumijevanje i otkrivanje navedenih točki kao ekstrema geometrijskih izraza vezanih uz trokut, od kojih smo neke u ovome radu detaljno iskazali i dokazali, poslužit ćemo se programom GeoGebra [4]. Dakle, prije samog početka, učenici moraju biti upoznati s definicijama i određenim svojstvima težišta, Fermatove točke i Lemoineove točke, što se u ovome radu nalazi u prvome poglavlju. To je nužno kako bi znali prepoznati dane točke u programu GeoGebra, u kojem ćemo provesti svojevrsno istraživanje geometrijskih izraza vezanih uz trokut i njihovih najmanjih, odnosno najvećih vrijednosti.

Promotrimo prvu tvrdnju o zbroju kvadrata udaljenosti od vrhova danog trokuta koji minimum postiže u težištu. Učenicima se može postaviti pitanje u obliku primjera ili zadatka na sljedeći način: "Koja točka P u ravnini danog trokuta ABC postiže najmanji zbroj kvadrata udaljenosti od vrhova tog trokuta?" Dakle, nacrtajmo proizvoljni trokut ABC, na primjer u I. kvadrantu Kartezijevog koordinatnog sustava. Zatim postavljamo mjerače. Naime, mi želimo točku P koja će se pomicati ulijevo ili udesno i gore ili dolje u ravnini danog trokuta. Upravo to nam u programu GeoGebra radi alat *Klizač*. Kao što vidimo na slici 3.1, svaki klizač postavljamo s određenim intervalom. Upravo radi jednostavnosti određivanja intervala klizača, postavili smo dani trokut ABC u I. kvadrant te stoga intervale za pomicanje točke ulijevo i udesno te gore i dolje postavimo prema nacrtanom trokutu i sa što manjim korakom povećanja. Također, na slici 3.1 još vidimo i da bi klizač pomicao točku lijevo/desno i gore/dolje mora biti postavljen horizontalno, odnosno vertikalno. Na taj način napravimo dva klizača te postavimo točku P s Kartezijevim koordinatama dvaju određenih klizača. Pomicanjem vrijednosti klizača, točka P se pomiče u željeni položaj unutar i oko trokuta ABC.



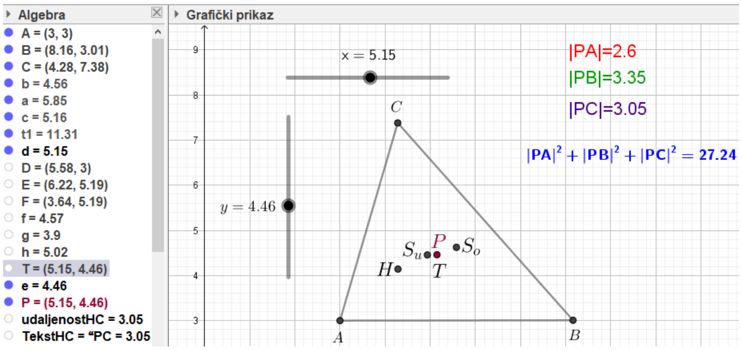
Slika 3.1: GeoGebrin alat "Klizač"

Naposljetku upotrebom GeoGebrinog alata *Udaljenost ili duljina*, kao na slici 3.2, odredimo udaljenosti vrhova trokuta od točke P.



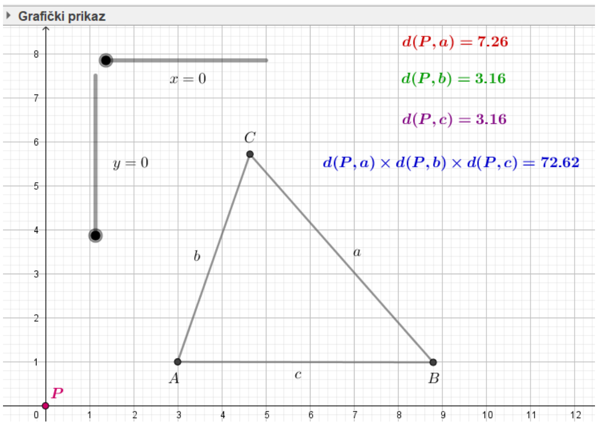
Slika 3.2: GeoGebrin alat "Udaljenost ili duljina"

Istaknimo radi bolje preglednosti te udaljenosti kao i zbroj njihovih kvadrata. Sada pomicanjem točke P mišem dobivamo različite vrijednosti za pojedine udaljenosti od vrhova trokuta, a time i različite vrijednosti zbroja kvadrata tih udaljenosti. Na taj način tražimo gdje se mora nalaziti točka P da bi vrijednost zbroja kvadrata njene udaljenosti od vrhova trokuta ABC bila najmanja. Kada pronađemo to mjesto, ostaje nam se zapitati je li možda ta točka P upala u neku od poznatih točaka ravnine trokuta. Predložimo učenicima da prvo ispitaju njeno preklapanje sa svakom od četiri klasične karakteristične točke trokuta. Svaku od njih nacrtajmo u GeoGebri te pogledajmo imamo li preklapanja (slika 3.3). Zaista, točka P je upala u težište trokuta što možemo iščitati i iz njihovih Kartezijevih koordinata.



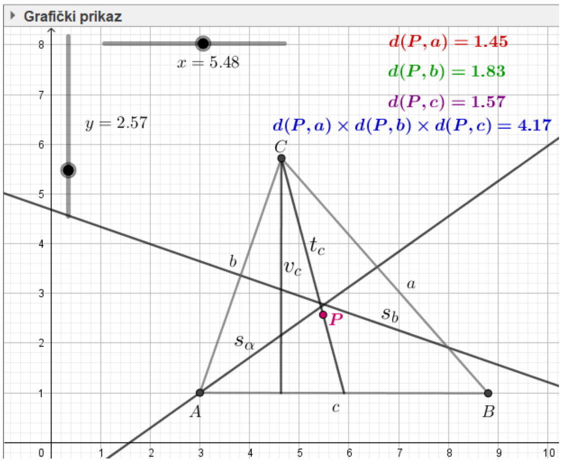
Slika 3.3: Zbroj kvadrata udaljenosti od vrhova trokuta ilustrirano u GeoGebri

Na isti način promotrimo maksimalnu vrijednost produkta udaljenosti od stranica danog trokuta ABC. Ponovno postavljamo pitanje u obliku: "Koja točka P u ravnini trokuta ABC postiže najveći produkt udaljenosti od stranica danog trokuta?"



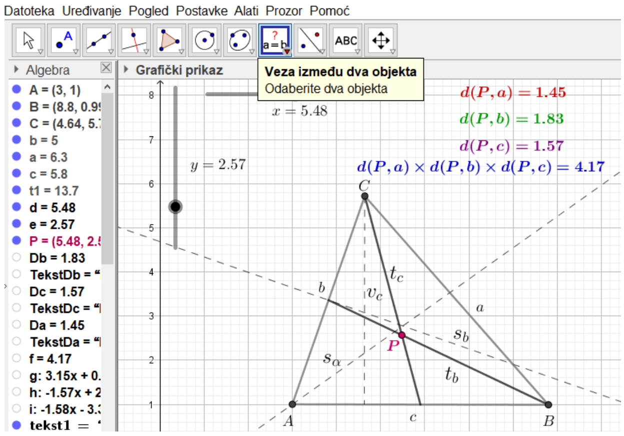
Slika 3.4: Produkt udaljenosti od stranica trokuta ilustrirano u GeoGebri

Postupak u GeoGebri vršimo na isti način kao i u prethodnom primjeru. Dakle, nacrtajmo trokut ABC i pomičnu točku P pomoću klizača. Zatim određivanjem udaljenosti točke P od stranica danog trokuta odredimo i njihov produkt te sve naznačimo radi bolje preglednosti (slika 3.4). Važno je naglasiti učenicima kako najveću vrijednost produkta udaljenosti točke P od stranica trokuta tražimo samo unutar trokuta ABC. Nadalje, pomicanjem točke P tražimo gdje se nalazi ta maksimalna vrijednost. Njenim pronalaskom ponovno se napominje da točku P usporedimo s nekim poznatim točkama trokuta, za početak ponovno s četiri klasične karakteristične točke trokuta. To možemo učiniti i promatranjem da li se točka P možda nalazi na simetrali jedne stranice, simetrali jednoga kuta, jednoj od težišnica ili na jednoj od visina danog trokuta ABC.



Slika 3.5: Određivanje najveće vrijednosti produkta udaljenosti od stranica trokuta u GeoGebri

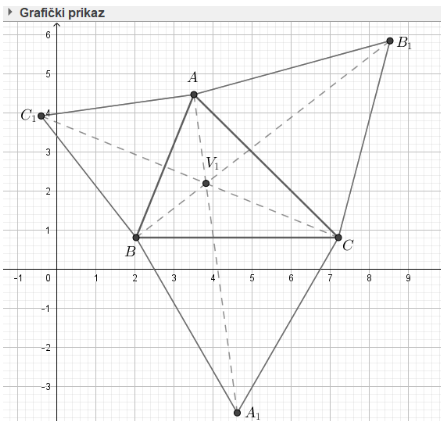
Vidimo kako se točka P u ovome slučaju nalazi na jednoj od težišnica trokuta ABC (slika 3.5). Kako bismo se uvjerili da je stoga točka P upala u težište trokuta, nacrtajmo i drugu težišnicu (slika 3.6). Dakle, ako se točka nalazi na dvije težišnice trokuta, ona je njihovo sjecište, a sjecište težišnica je upravo težište trokuta. Ako se naime, želimo uvjeriti da se točka P zaista nalazi na jednoj od težišnica, u GeoGebri postoji alat *Veza između objekta* (slika 3.6) s kojim to možemo provjeriti. Međutim, kako je u našemu slučaju točka P pomična točka, teško ju je postaviti točno na sam pravac kako bismo se poslužili navedenim alatom, ali dovoljno je u ovome slučaju iz nacrtanoga zaključiti kako je to zaista istina, odnosno da se točka nalazi na težišnicama te potkrijepiti samim dokazom koji se u ovome radu nalazi u drugom poglavlju. Dakle, točka u kojoj se postiže najveća vrijednost produkta udaljenosti od stranica danog trokuta je težište.



Slika 3.6: GeoGebrin alat "Veza između dva objekta"

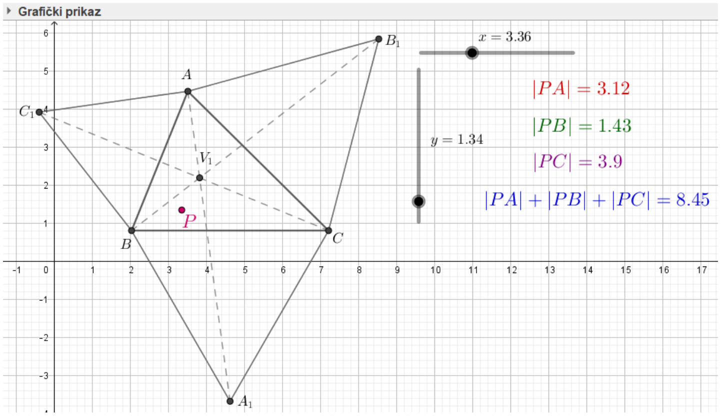
Obzirom da Fermatovu točku i Lemoineovu točku općenito ne susrećemo u nastavnom programu za škole, same ilustracije u GeoGebri vezane uz geometrijske izraze u trokutu i njihove ekstreme ćemo najprije prikazati na obrnuti način od prethodna dva.

Promotrimo prvo zbroj udaljenosti Fermatove točke od vrhova trokuta. Učenicima možemo postaviti pitanje na sljedeći način: "Da li ikakvu posebnu vrijednost u Fermatovoj točki poprima zbroj udaljenosti od vrhova danog trokuta ABC?" Za početak nacrtajmo proizvoljni trokut ABC u programu GeoGebra. Definicija Fermatove točke 1.2.2 kao i njena svojstva su dana u prvom poglavlju te obzirom na navedeno nacrtajmo Fermatovu točku V_1 (slika 3.7).



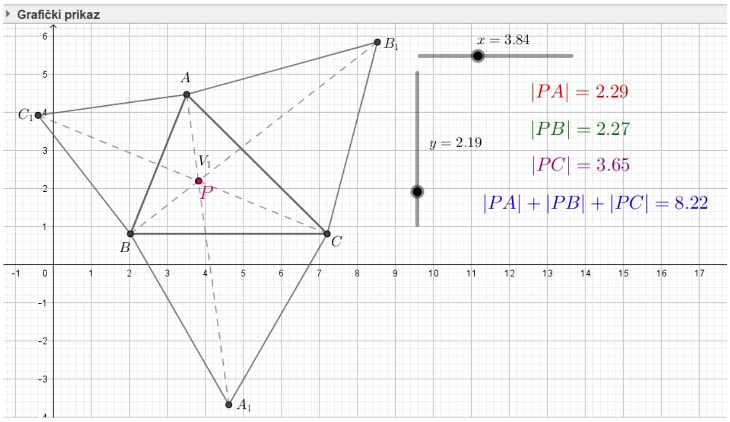
Slika 3.7: Fermatova točka ilustrirana u GeoGebri

Nadalje na isti način kao i u prethodna dva primjera odredimo pomičnu točku P pomoću dvaju klizača uz alat *Klizač*. Zatim alatom *Udaljenost ili duljina* određujemo udaljenosti točke P od pojedinog vrha danog trokuta ABC i naglašavamo ih radi preglednosti. Na isti način naznačimo i zbroj tih udaljenosti. Pomicanjem točke P dobivamo različite vrijednosti koje je potrebno promatrati i uočavati njihov rast i pad, odnosno promjene (slika 3.8).



Slika 3.8: Određivanje vrijednosti zbroja udaljenosti Fermatove točke od vrhova trokuta ilustrirano u GeoGebri

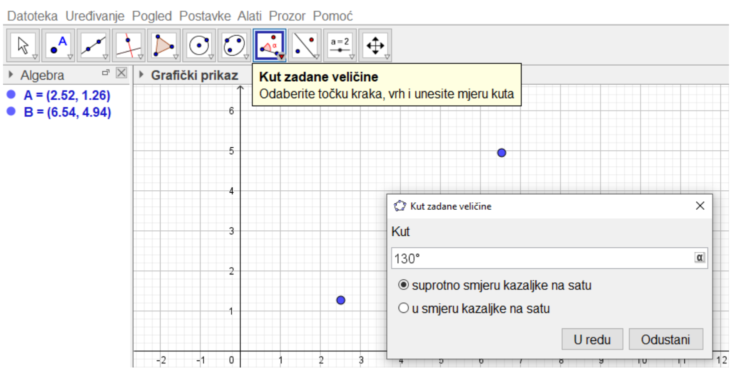
Ako dovedemo točku P u položaj Fermatove točke V_1, uočimo kako u njoj vrijednost zbroja udaljenosti od vrhova trokuta doima najmanjom (slika 3.9).



Slika 3.9: Minimalna vrijednost zbroja udaljenosti Fermatove točke od vrhova trokuta ilustrirana u GeoGebri

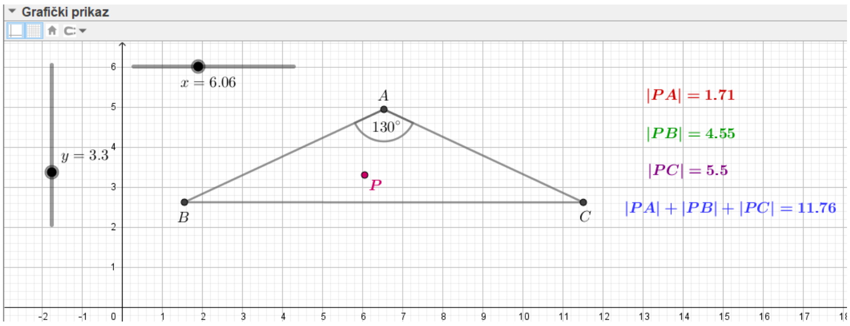
Ako se pak osvrnemo na teorem 2.3.1 iskazan i dokazan u drugom poglavlju, koji u prvoj tvrdnji opisuje kako se minimalna vrijednost zbroja udaljenosti od vrhova trokuta kojemu su svi kutovi manji od 120° postiže u Fermatovoj točki, onda samu ilustraciju u GeoGebri možemo također provesti na način kao i za prve dvije tvrdnje vezane uz ekstreme geometrijskih izraza u trokutu. Međutim, u tom slučaju učenicima jasno moramo naglasiti kako promatramo trokut kojemu su svi kutovi manji od 120°. Nadalje, bilo bi korisno napomenuti učenicima koje točke bi mogle biti promatrane, ali obzirom da imamo mnogo posebnih točaka trokuta, a u ovome radu smo naveli i napravili samo dvije, onda im naglašavamo samo Fermatovu točku i Lemoineovu točku jer su s njima već upoznati. Dakle, ilustracijom tih dviju točaka i traženjem najmanje vrijednosti zbroja udaljenosti od vrhova trokuta uz pomicanje točke P i njenim dovođenjem u te dvije navedene točke, zaista zaključujemo kako se taj minimum, odnosno minimalna vrijednost postiže u Fermatovoj točki.

S druge strane, ako promatramo drugu tvrdnju teorema 2.3.1, odnosno ako je neki kut trokuta veći ili jednak 120°, tada zbroj udaljenosti od vrhova svoj minimum postiže u pripadnom vrhu, taj slučaj lako ilustriramo u GeoGebri. Napominjemo učenicima da odmah nacrtaju trokut s jednim svojim unutrašnjim kutom većim od 120°. Dakle, prvo nacrtamo proizvoljan kut veći od 120° pomoću alata *Kut zadane veličine* (slika 3.10) te na njega nadovežimo ostatak trokuta, odnosno njegove stranice. Na isti način kao i u



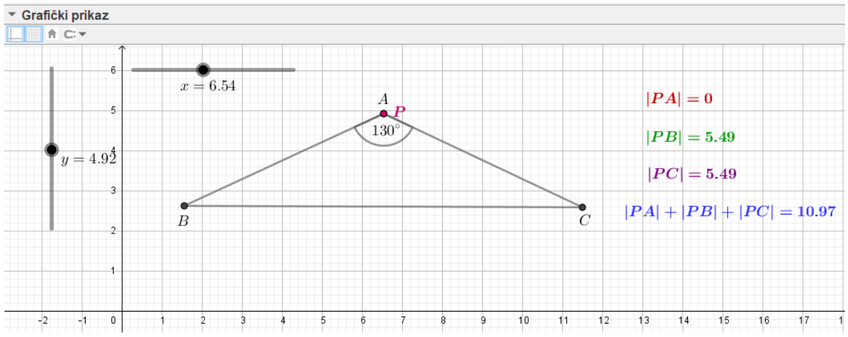
Slika 3.10: GeoGebrin alat “Kut zadane veličine”

prethodnim slučajevima odredimo pomičnu točku P pomoću dva klizača i odredimo joj udaljenosti od vrhova trokuta te ih naznačimo kao i njihovu sumu (slika 3.11).



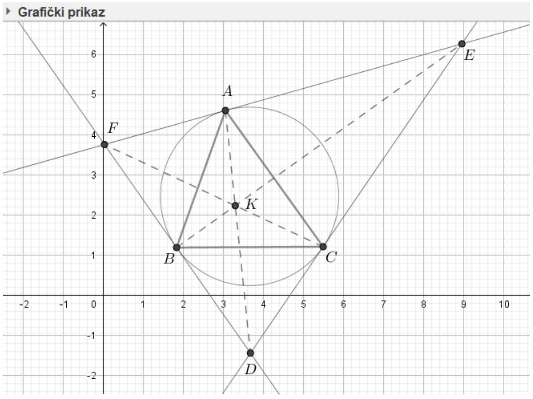
Slika 3.11: Zbroj udaljenosti od vrhova trokuta s kutom većim ili jednakim 120° ilustrirano u GeoGebri

Nadalje, pomicanjem točke P tražimo minimalnu vrijednost zbroja njenih udaljenosti od vrhova trokuta. Ona se upravo nalazi u vrhu A, odnosno vrhu u kojemu se nalazi navedeni kut veći ili jednak 120°, kao što je u tvrdnji teorema i izrečeno (slika 3.12).



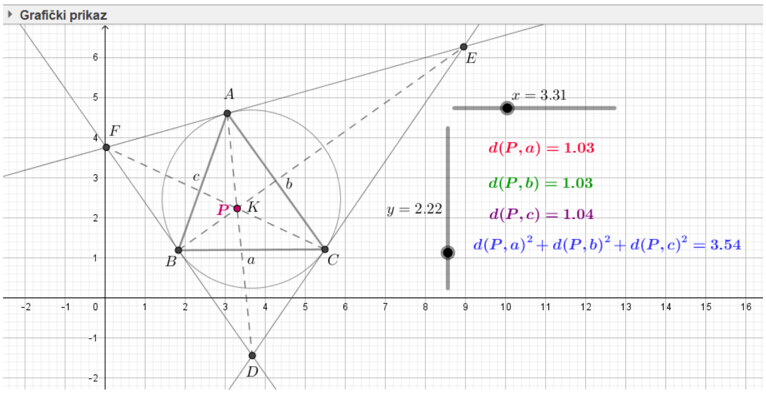
Slika 3.12: Minimum zbroja udaljenosti od vrhova trokuta s kutom većim ili jednakim 120° ilustrirano u GeoGebri

Naposljetku, ilustrirajmo još zbroj kvadrata udaljenosti Lemoineove točke od stranica danog trokuta. Ponovno ćemo najprije promatrati obrnutu tvrdnju od teorema 2.4.3. Dakle, učenicima postavimo pitanje: "Da li ikakvu posebnu vrijednost u Lemoineovoj točki poprima zbroj kvadrata udaljenosti od stranica danog trokuta ABC?" Dakle, nacrtajmo u GeoGebri trokut ABC te njegovu Lemoioneovu prateći njenu definiciju 1.3.7. Kao i u svakom od prethodnih slučajeva, učenici moraju biti upoznati s pojmovima i svojstvima vezanim uz samu točku, koje pronalazimo u prvome poglavlju ovoga rada. Na temelju toga, kako bismo nacrtali Lemoineovu točku, moramo prvo znati odrediti antiparalele svake od stranica, njihove simedijane i potom Lemoineovu točku kao sjecište simedijana. Međutim, radi jednostavnosti ilustracije poslužit ćemo se teoremom 1.3.6. Naime, neka su stranice trokuta DEF tangente opisane kružnice k trokuta ABC u njegovim vrhovima. Tada spojnice $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ čine simedijane trokuta ABC i sijeku se u Lemoineovoj točki K (slika 3.13).



Slika 3.13: Lemoineova točka ilustrirana u GeoGebri

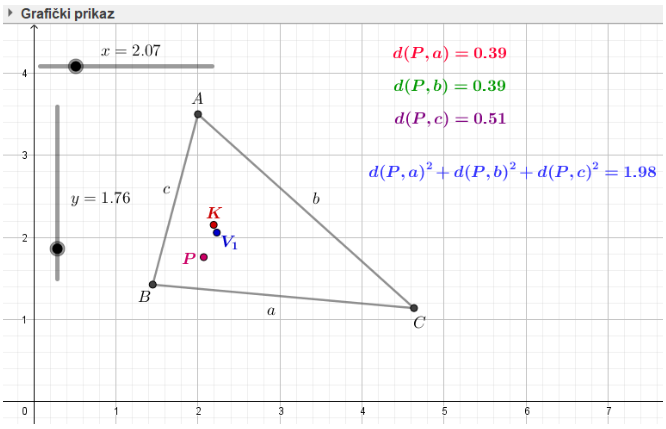
Odredimo pomičnu točku P pomoću dva klizača alatom *Klizač*, udaljenosti te točke od stranica trokuta ABC alatom *Udaljenost ili duljina* te naznačimo njihove vrijednosti. Nadalje, odredimo zbroj kvadrata udaljenosti točke P od stranica trokuta ABC te ju također naznačimo radi boljeg praćenja njenih promjena vrijednosti pomicanjem točke P. Nagla-



Slika 3.14: Minimalna vrijednost zbroja kvadrata udaljenosti Lemoineove točke od stranica trokuta ilustrirano u GeoGebri

simo učenicima kako točku P pomičemo unutar i po rubu danog trokuta te pratimo vrijednosti zbroja kvadrata udaljenosti od stranica trokuta. Ako naposljetku postavimo točku P u položaj Lemoineove točke K, uočit ćemo kako je vrijednost zbroja kvadrata njene udaljenosti od stranica trokuta ABC minimalna u odnosu na sve preostale položaje unutar trokuta i na njegovom rubu (slika 3.14).

Ako pak promatramo teorem 2.4.3, odnosno činjenicu da se minimum zbroja kvadrata udaljenosti od stranica trokuta postiže u Lemoineovoj točki, onda ilustraciju možemo napraviti kao što je bilo navedeno u svim prethodnim ilustracijama danih tvrdnji. Dakle, i za Fermatovu točku i za Lemoineovu točku učenicima postavljamo slična pitanja, odnosno u ovom slučaju je to pitanje: “Koja točka P ravnine trokuta ABC postiže najmanju vrijednost zbroja kvadrata njene udaljenosti od stranica danog trokuta?” Ilustracija u GeoGebri započinje crtanjem proizvoljnog trokuta, određivanjem pomične točke P, njene udaljenosti od stranica trokuta te određivanjem zbroja kvadrata udaljenosti te točke od stranica trokuta i naznačavanjem istoga radi lakšeg praćenja promjena vrijednosti. Ponovno napominjemo kako, obzirom da su u ovome radu od ne tako uobičajenih točki razrađene jedino Fermatova točka i Lemoineova točka, onda ćemo promatrati samo njima okolne točke kao moguće kandidate u kojima se postiže najmanja vrijednost zbroja kvadrata udaljenosti od stranica trokuta ABC (slika 3.15). Promatrajući vrijednosti u navedenim točkama, zaključujemo kako se najmanja nalazi upravo u Lemoineovoj točki.



Slika 3.15: Fermatova i Lemoineova točka kao “kandidati”, ilustrirane u GeoGebri

S druge strane, važno je još naglasiti kako je, i kod određivanja minimalne vrijednosti zbroja udaljenosti od vrhova danog trokuta i kod određivanja minimalne vrijednosti zbroja kvadrata udaljenosti do stranica trokuta, moguće promatrati i četiri klasične karakteristične točke trokuta, no kako bismo si smanjili i olakšali samo istraživanje, učenicima odmah napominjemo da kandidate promatraju u okolinama “posebnih” točaka trokuta, odnosno oko Fermatove točke i oko Lemoineove točke.

Bibliografija

[1] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[2] Uredništvo MiŠ, *Fermatova točka*, 21-12 (2003), 34-34.

[3] Z. Kolar-Begović, V. Ždralović, *Vivianijev teorem*, Osječki matematički list 19 (2019), 31-41.

[4] Programski paket *GeoGebra*, dostupno na `https://www.geogebra.org` (pristupljeno: 1.6.2020.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu promatrali smo neke od najpoznatijih primjera geometrijskih izraza vezanih uz trokut i njihove minimalne, odnosno maksimalne vrijednosti po svim točkama trokuta. U prve dvije tvrdnje rada kao točke ekstrema smo nalazili težište, kao jednu od najučestalijih točaka trokuta, dok su se u preostale dvije tvrdnje ekstremi postizali u ne tako poznatim točkama trokuta što se tiče sustava osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja. Najprije smo svaku od tih točaka, odnosno težište, Fermatovu točku te Lemoineovu točku, definirali i opisali njihova svojstva, dok smo potom svaku od glavnih tvrdnji ovoga rada, odnosno teoreme o ekstremima geometrijskih izraza vezanih uz trokut iskazali i detaljno dokazali. Na kraju smo svaku od tvrdnji ilustrirali u programu GeoGebra i na taj način vizualno potkrijepili prethodne dokaze u svrhu jednostavnijeg razumijevanja i otkrivanja danih tvrdnji za same učenike.

Ključne riječi: trokut, težište, Fermatova točka, Lemoineova točka, ekstremi, geometrijski izrazi vezani uz trokut.

Summary

In this thesis, we have observed some of the best known examples of geometric expressions related to the triangle and their minimum and maximum values over all points of the triangle. In the first two statements of this work the extreme points are found to be the centroid, which is one of the most frequent points of the triangle, while in the remaining two statements the extremes were achieved in not so well known points of the triangle, as far as the primary and secondary education systems are concerned. First, we defined and described each of these points and their properties, i.e., the centroid, the Fermat point and the Lemoine point, and then we stated and proved in detail each of the main statements of this paper, that is the theorems on the extremes of geometric expressions related to a triangle. Finally, we illustrated each of the claims in the GeoGebra program and thus visually enhanced the previous proofs for the purpose of easier understanding and discovery of the given claims by students on their own.

Keywords: triangle, the centroid, the Fermat point, the Lemoine point, extremes, geometric expressions related to the triangle.

Životopis

Rođena sam 27. ožujka 1994. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Prečko upisala sam IX. gimnaziju u Zagrebu, općeg smjera. Preddiplomski sveučilišni studij matematike upisala sam 2014. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, kojeg sam potom završila 2017. godine. Nastavak obrazovanja ostvarujem upisom na Diplomski studij matematike, nastavnički smjer, iste 2017. godine na već spomenutom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.