Maksimalne strukture izračunljivosti

Krmpotić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Krmpotić

MAKSIMALNE STRUKTURE IZRAČUNLJIVOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

Teorija izračunljivosti grana je matematike koja se bavi pronalaskom odgovora na pitanja poput odlučivanja brojevnih problema, pronalaska algoritma koji odlučuje dani problem te određivanja je li neka funkcija izračunljiva ili nije. Pojmovi *algoritam* i *izračunljivo* intuitivno su nam jasni, no za razvoj matematičke teorije potrebno ih je precizno definirati. Želja za formalizacijom navedenih pojmova dovela je do razvoja nekoliko modela računanja kao što su *RAM-stroj, Turingov stroj, λ-račun* i *teorija parcijalno rekurzivnih funkcija*. U konačnici, pokazalo se da su svi navedeni modeli ekvivalentni, odnosno odlučuju iste probleme.

U ovom radu izračunljivost ćemo proučavati iz konteksta *parcijalno rekurzivnih funkcija*, ali ćemo naglasak staviti na *rekurzivne funkcije*, odnosno parcijalno rekurzivne funkcije čija domena je $\mathbb{N}^k$, gdje je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Pojam rekurzivnosti funkcije prirodno proširujemo na funkcije s kodomenom u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Za $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ reći ćemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ reći ćemo da je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, i vrijedi

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Nije sasvim jasno kako bismo definirali pojam rekurzivnosti za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Za početak promislimo kada bismo broj $x \in \mathbb{R}$ htjeli zvati izračunljivim. Znamo da za svaki realan broj x postoji niz racionalnih brojeva (r_i) takav da je

$$x = \lim_{i\to\infty} r_i.$$

Dakle, svaki realan broj možemo aproksimirati nekim nizom racionalnih brojeva, ali za pojam izračunljivosti broja želimo to učiniti efektivno. Za broj $x \in \mathbb{R}$ reći ćemo da je izračunljiv ako postoji rekurzivan niz (kao funkcija) $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takav da je

$$|x - q(n)| < 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada na sličan način definiramo pojam rekurzivne funkcije s vrijednostima u $\mathbb{R}$. Za $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je rekurzivna ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za definiranje izračunljive funkcije $f\colon S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ najprije moramo uvesti pojmove *nizovne izračunljivosti* i *efektivne uniformne neprekidnosti*. Neka je $f\colon S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Za f kažemo da je **nizovno izračunljiva** ako za svaki rekurzivan niz (x_i) u $\mathbb{R}$, $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq S$, vrijedi da je $(f(x_i))$ rekurzivan niz u $\mathbb{R}$. Za f kažemo da je **efektivno uniformno neprekidna** ako postoji rekurzivna funkcija $\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y \in S$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x - y| < 2^{-\delta(k)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-k}.$$

Za f kažemo da je **izračunljiva** ako je nizovno izračunljiva i efektivno uniformno neprekidna. Ovaj rad neće se doticati realnih izračunljivih funkcija, nego će biti ograničen samo na promatranje funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Izračunljivost u metričke prostore možemo uvesti fiksiranjem niza čija slika je gusta, a udaljenost elemenata niza možemo izračunati efektivno. Preciznije, za metrički prostor (X, d) neka je α niz u X takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$, rekurzivna, a skup $\alpha(\mathbb{N})$ gust u (X, d). Tada ćemo za (X, d, α) reći da je *izračunljiv metrički prostor*, a za α da je *efektivan separirajući niz* u (X, d). Drugi način je da uvedemo takozvane *strukture izračunljivosti*. Reći ćemo da je $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d) ako vrijedi:

- $(x_i), (y_i) \in \mathcal{S} \Rightarrow (x_i) \diamond (y_j)$,
- $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}, (y_j) \in \mathcal{S}, (x_i) \preceq (y_j) \Rightarrow (x_i) \in \mathcal{S}$,

pri čemu su $\diamond$ i $\preceq$ relacije definirane s:

- $(x_i) \diamond (y_j) \Leftrightarrow$ funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$, rekurzivna,
- $(x_i) \preceq (y_j) \Leftrightarrow$ postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, y_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}$.

Ovaj rad podijeljen je u tri dijela. U prvom dijelu definirani su pojmovi i iskazane su tvrdnje iz klasične izračunljivosti. Zatim su pojmovi rekurzivnih funkcija u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ definirani i detaljno proučeni budući da čine okosnicu daljnjeg razmatranja.

U drugom dijelu cilj je definirati rekurzivne funkcije u $\mathbb{R}$ i detaljno proučiti svojstva koja zadovoljavaju. Na početku bavimo se rekurzivno prebrojivim skupovima pa tako pokazujemo važne tvrdnje poput *teorema o projekciji* i *Postovog teorema*. Zatim uvodimo pojam i primjere izračunljivog broja, dajemo karakterizaciju izračunljivog broja u vidu rekurzivne funkcije koja računa njegove decimale i konstruiramo primjer neizračunljivog broja koji je limes rekurzivnog niza. Također definiramo *lijevo* i *desno izračunljive brojeve* te dajemo karakterizaciju izračunljivog broja preko lijevo i desno izračunljivih brojeva. Potom uvodimo rekurzivne funkcije u $\mathbb{R}$ te dokazujemo mnoge rezultate vezane uz njih od kojih je jedan od najvažnijih činjenica da je skup $\{ x \mid f(x) > 0 \}$, za f rekurzivnu, rekurzivno prebrojiv.

Treće poglavlje bavi se pojmom izračunljivosti u metričkom prostoru. Najprije definiramo izračunljiv metrički prostor te rezultate i pojmove iz tog potpoglavlja koristimo kao motivaciju za uvođenje struktura izračunljivosti u metričke prostore. Nakon toga definiramo strukture izračunljivosti i separabilne strukture izračunljivosti te dajemo primjere za svaku. Sve dotad definirano i dokazano povezujemo i koristimo u proučavanju maksimalnih struktura izračunljivosti. Dolazimo do važnih rezultata poput činjenice da je svaka struktura izračunljivosti sadržana u nekoj maksimalnoj. Glavni rezultati poglavlja, a i samog rada, su činjenica da je svaka maksimalna struktura izračunljivosti na euklidskom prostoru separabilna i jedinstvenost separabilne strukture izračunljivosti na $[0,1]$.

Zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na pomoći pri odabiru teme te na neograničenom strpljenju i motivaciji. Zahvaljujem i svojim prijateljima i fakultetskim kolegama na godinama zajedničkog rada.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije

1.1 Parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija 1.1.1. *Neka su $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$ kažemo da je **parcijalna**. Ako je $S = \mathbb{N}^k$, tada za f kažemo da je **totalna**.*
*Funkciju $Z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa $Z(x) = 0$ nazivamo **nul-funkcijom**.*
*Funkciju $Sc\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa $Sc(n) = n + 1$ nazivamo **funkcijom sljedbenika**.*
*Neka su $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $k \in \{1, \dots, n\}$. Funkciju $I^n_k\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiranu s $I^n_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$ nazivamo **projekcijom** na $k-$tu koordinatu.*
*Gornje funkcije nazivamo **inicijalnim funkcijama**.*

Definicija 1.1.2. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $G\colon S \subseteq \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, H_1\colon S_1 \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \dots, H_n\colon S_n \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka je $F\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$F(x_1, \dots, x_k) = G\big(H_1(x_1, \dots, x_k), \dots, H_n(x_1, \dots, x_k)\big), \forall (x_1, \dots, x_k) \in T,$$

pri čemu je

$$T = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; \big(H_1(x_1, \dots, x_k), \dots, H_n(x_1, \dots, x_k)\big) \in S \right\}.$$

*Tada za funkciju F kažemo da je definirana **kompozicijom** funkcija G i $H_1, \dots, H_n$.*

Definicija 1.1.3. *Neka su $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $G\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $H\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ totalne funkcije. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} F(0, x_1, \dots, x_k) &= G(x_1, \dots, x_k), \\ F(y + 1, x_1, \dots, x_k) &= H(F(y, x_1, \dots, x_k), y, x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Tada za funkciju F kažemo da je definirana pomoću ***primitivne rekurzije*** *iz funkcija G i H.*

Na prirodan način definiramo da je F dobivena primitivnom rekurzijom iz funkcija G i H u slučaju kada F, G i H nisu totalne funkcije.

Napomena 1.1.4. *Neka su $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f \colon S_1 \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g \colon S_2 \subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ parcijalne funkcije. Ako za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi*

$$\big(x \in S_1 \cap S_2 \wedge f(x) = g(x)\big) \vee \big(x \notin S_1 \wedge x \notin S_2\big),$$

skraćeno ćemo pisati $f(x) \simeq g(x)$.

Definicija 1.1.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je f $(k+1)-$mjesna parcijalna funkcija. Neka je g $k-$mjesna parcijalna funkcija definirana s*

$$\mathcal{D}_g = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; (\exists z \in \mathbb{N})((x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathcal{D}_f, \forall y < z) \wedge f(x_1, \ldots, x_k, z) = 0 \right\}$$
$$g(x_1, \ldots, x_k) := \min \{ z \in \mathbb{N} \mid (x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathcal{D}_f, \forall y < z \wedge f(x_1, \ldots, x_k, z) = 0 \}.$$

Za funkciju g kažemo da je definirana pomoću ***μ-operatora*** *i funkcije f te uvodimo oznaku $g(x) =: \mu y(f(x_1, \ldots, x_k, y) \simeq 0)$.*

Definicija 1.1.6. *Najmanju klasu funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju, primitivnu rekurziju i djelovanje $\mu-$operatora nazivamo klasom* ***parcijalno rekurzivnih funkcija****. Parcijalno rekurzivnu funkciju koja je i totalna nazivamo* ***rekurzivnom funkcijom****.*

Napomena 1.1.7. *Za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo funkciju $N \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $N(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$. Također, za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $C_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $C_n(x) = n$.*
Nadalje, definiramo funkciju modificiranog oduzimanja koja je totalna na skupu $\mathbb{N}^2$ s

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako } x \geq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te funkciju predznaka $sg \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$sg(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}.$$

Dokaz rekurzivnosti navedenih funkcija može se naći u [5].

Propozicija 1.1.8. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te neka je $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definiramo funkciju $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s*

$$\begin{aligned} h(0) &= a, \\ h(x+1) &= g(h(x), x). \end{aligned}$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $H(x,y) = h(x)$, $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s $F(y) = C_a(y) = a$ te $G\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ s $G(x,y,z) = g(x,y)$. Funkcije F i G su očito rekurzivne i vrijedi

$$\begin{aligned} H(0,y) &= h(0) = a = F(y) \\ H(x+1,y) &= h(x+1) = g(h(x),x) = g(H(x,y),x) = G(H(x,y),x,y) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija H je dobivena pomoću primitivne rekurzije iz funkcija F i G iz čega slijedi da je rekurzivna. Iz definicije funkcije H slijedi

$$h(x) = H(x,0) = H(I_1^1(x), Z(x)), \forall x \in \mathbb{N}.$$

Sada slijedi da je h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 1.1.9. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $f+g, f \cdot g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.*

Propozicija 1.1.10. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka je $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka su $g, h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} g(a,x) &= \max\{\, f(i,x) \mid 0 \le i \le a \,\}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \\ h(a,x) &= \min\{\, f(i,x) \mid 0 \le i \le a \,\}, \forall a \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k. \end{aligned}$$

Tada su g i h rekurzivne funkcije.

Dokaz. Definirajmo funkcije $m, M\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, s:

$$\begin{aligned} m(u,v) &= u \dot{-} (u \dot{-} v), \\ M(u,v) &= u + (v \dot{-} u). \end{aligned}$$

Lako se provjeri da je $m(u,v) = \min\{u,v\}$ i $M(u,v) = \max\{u,v\}$. Za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$g(0,x) = \max\{\, f(0,x) \,\} = f(0,x). \tag{1.1}$$

Također,

$$\begin{aligned} g(a+1,x) &= \max\{\, f(0,x),\dots,f(a+1,x)\,\} = \\ &= \max\{\, \max\{\, f(0,x),\dots,f(a,x)\,\}, f(a+1,x)\,\} = \\ &= \max\{\, g(a,x), f(a+1,x)\,\} = \\ &= M(g(a,x), f(a+1,x)), \forall a \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$g(a+1,x) = M(g(a,x), f(a+1,x)), \forall a \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k. \tag{1.2}$$

Definirajmo funkcije $F\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ G\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$F(x) = f(0,x), \tag{1.3}$$

$$G(z,a,x) = M(z, f(a+1,x)). \tag{1.4}$$

Očito je F rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$\begin{aligned} &M(z, f(a+1,x)) = \\ &= M(I_1^{k+2}(z,a,x), f(Sc(I_2^{k+2}(z,a,x)), I_3^{k+2}(z,a,x),\dots,I_{k+2}^{k+2}(z,a,x))). \end{aligned}$$

Vidimo da je funkcija G dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija pa slijedi da je rekurzivna.
Sada iz (1.1) i (1.2) te (1.3) i (1.4) slijedi da je

$$\begin{aligned} g(0,x) &= F(x), \\ g(a+1,x) &= G(g(a,x),a,x). \end{aligned}$$

Dakle, g je dobivena pomoću primitivne rekurzije iz funkcija F i G, a F i G su rekurzivne pa slijedi da je g rekurzivna funkcija.

Analogno se dobije da je h rekurzivna funkcija zamjenom funkcija m i M. $\square$

Korolar 1.1.11. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $G\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $H\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane s*

$$\begin{aligned} G(x) &= \max\{\, f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\,\}, \\ H(x) &= \min\{\, f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\,\}, \end{aligned}$$

također rekurzivne.

Dokaz. Neka su g i h funkcije iz propozicije 1.1.10. Sada vidimo da vrijedi:

$$G(x) = g(\alpha(x), x),$$
$$H(x) = h(\alpha(x), x).$$

Slijedi da su G i H rekurzivne kao kompozicije rekurzivnih funkcija. □

Definicija 1.1.12. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je* ***rekurzivna*** *ako su funkcije $I_i^n \circ f$ rekurzivne za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Propozicija 1.1.13. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $g \circ f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivna.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $l = 1$. Neka su $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Slijedi da je $g \circ f$ kompozicija rekurzivnih funkcija pa je rekurzivna.
Pretpostavimo sada da je $l > 1$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \big(g_1(f(x)), \ldots, g_l(f(x))\big) = \big((g_1 \circ f)(x), \ldots, (g_l \circ f)(x)\big).$$

$g_i \circ f$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, su komponentne funkcije od $g \circ f$ i rekurzivne su prema prethodnom slučaju pa je $g \circ f$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.14. *Neka su $S_1, \ldots, S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka su $F_1, \ldots, F_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $F \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana s*

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ F_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

također rekurzivna.

Propozicija 1.1.15. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $\alpha, \beta \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $g, h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane s*

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 0, & inače \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 1, & inače \end{cases},$$

također rekurzivne.

Propozicija 1.1.16. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $F_1, \ldots, F_m \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije te $S_1, \ldots, S_m$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $x \in S_i$. Tada je funkcija $F \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ definirana s*

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ F_m(x), & x \in S_m \end{cases}$$

također rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ je

$$(I_j^n \circ F)(x) = \begin{cases} (I_j^n \circ F_1)(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ (I_j^n \circ F_m)(x), & x \in S_m \end{cases}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

$I_j^n \circ F$ je za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ rekurzivna funkcija po propoziciji 1.1.14 pa je F također rekurzivna. □

Definicija 1.1.17. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je* ***rekurzivan*** *ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.*

Primjer 1.1.18. *Skup $2\mathbb{N}$ je rekurzivan.*
U [5] je dokazano da je skup $\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a|b\}$ rekurzivan. Budući da vrijedi $\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \chi_\Delta(2, x) = \chi_\Delta(C_2(x), I_1^1(x))$, χ_{2N} je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija, odnosno skup $2\mathbb{N}$ je rekurzivan.

Propozicija 1.1.19. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$ rekurzivni skupovi.*

Korolar 1.1.20. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq g(x)\}$ rekurzivni skupovi.*

Propozicija 1.1.21. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je skup*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x) \right\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ označimo

$$S_i := \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (I_i^n \circ f)(x) = (I_i^n \circ g)(x) \right\}.$$

Prema korolaru 1.1.20, skup S_i je rekurzivan za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Očito je

$$S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i.$$

U [5] je dokazano da je konačan presjek rekurzivnih skupova rekurzivan skup pa slijedi da je skup S rekurzivan. □

Propozicija 1.1.22. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\big(x, f(x)\big) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana s $f(x) = \mu y\big((x, y) \in S\big)$. Iz napomene 1.1.23 slijedi da je funkcija f rekurzivna i očito je $\big(x, f(x)\big) \in S$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. □

Napomena 1.1.23 (Primjena μ-operatora na skup/relaciju)**.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada je funkcija $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana s*

$$f(x) = \min \{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in S\}$$

rekurzivna.

Neka je $g \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ zadana s

$$g(x, y) = \overline{sg}\big(\chi_S(x, y)\big), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall y \in \mathbb{N}.$$

Očito je g rekurzivna i vrijedi

$$f(x) = \mu y(g(x, y) \simeq 0).$$

Dakle, funkcija f je rekurzivna. Za f ćemo uvesti oznaku $f(x) = \mu y\big((x, y) \in S\big)$.

Propozicija 1.1.24. *Neka je $P = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ skup svih prostih brojeva i pretpostavimo da je $p_i < p_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$. Tada je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto p_i$, rekurzivna.*

Dokaz. Iz [5] slijedi da je skup $\Delta = \big\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a|b\big\}$ rekurzivan. Sada za $x \geq 2$ vrijedi

$$\chi_P(x) = \overline{sg}\left(\sum_{i=2}^{x \dot{-} 1} \chi_\Delta(i, x)\right) \cdot sg\,|x \dot{-} 1| \cdot sg(x)$$

pa je P rekurzivan skup. Definirajmo $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$G(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ prost i } y \geq x\}.$$

Neka je

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \text{ prost i } y \geq x\}.$$

Tada je $V = S \cap T$, gdje su

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \text{ prost}\}\ ,\ T = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq x\}.$$

Propozicija 1.37 iz [5] povlači rekurzivnost skupa T. Također, vrijedi

$$\chi_S(x, y) = \chi_P(y) = \chi_P(I_1^2(x, y)), \forall x, y \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi da je χ_S rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa je S rekurzivan skup. Sada slijedi da je V rekurzivan skup kao presjek dva rekurzivna skupa.
Kako je

$$G(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in V\}, \forall x \in \mathbb{N},$$

napomena 1.1.23 povlači rekurzivnost funkcije G.
Definirajmo funkciju $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$\begin{aligned} p(0) &= 2 \\ p(y + 1) &= \min\{q \in P \mid q > p(y)\}. \end{aligned}$$

Neka je $G'\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadana s

$$G'(a, b) := G(a) = G(I_1^2(a, b)), \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

G' je dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija pa je rekurzivna i vrijedi

$$\begin{aligned} p_0 &= p(0) = 2 \\ p_{y+1} &= p(y + 1) = G'(p(y), y) = G(p(y)) = \min\{q \in P \mid q > p(y)\} \end{aligned}$$

Sada iz propozicije 1.1.8 slijedi da je p rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.25. *Neka je $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ skup svih prostih brojeva te neka je $p_i < p_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$. Tada je $E\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s*

$$E(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent kojim } p_i \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

rekurzivna.

Dokaz. Pretpostavimo da su $x, i \in \mathbb{N}, x \geq 1$, te neka je $k = E(x,i)$. Tada $p_i^k \mid x$, ali $p_i^{k+1} \nmid x$. Dakle,

$$k = \min\left\{y \in \mathbb{N} \mid p_i^{y+1} \nmid x\right\},$$

odnosno za $x \geq 1$ je

$$E(x,i) = \min\left\{y \in \mathbb{N} \mid p_i^{y+1} \nmid x\right\}.$$

Definirajmo skup

$$S = \left\{(x,i,y) \in \mathbb{N}^3 \mid p_i^{y+1} \nmid x\right\}.$$

Vidimo da je $\chi_S(x,i,y) = \chi_{\Delta^c}(p_i^{y+1}, x)$, pri čemu je

$$\Delta = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a|b\right\},$$

a u [5] je dokazano da je skup Δ rekurzivan.
Neka je $pot\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$pot(a,b) = a^b, \forall a,b \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da je funkcija *pot* rekurzivna pa iz propozicije 1.1.24 slijedi da je χ_S rekurzivna funkcija, odnosno S je rekurzivan skup. Vrijedi

$$E(x,i) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x,i,y) \in S\}, \forall x \geq 1, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Neka je

$$\begin{aligned} S' &= \{(x,i,y) \in \mathbb{N}^3 \mid p_i^{y+1} \nmid x \vee x = 0\} \\ &= \{(x,i,y) \in \mathbb{N}^3 \mid p_i^{y+1} \nmid x\} \cup \{(x,i,y) \in \mathbb{N}^3 \mid x = 0\}. \end{aligned}$$

S' je unija dva rekurzivna skupa pa je rekurzivan skup. Sada slijedi da je

$$E(x,i) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x,i,y) \in S'\}, \forall x,i \in \mathbb{N}$$

pa je E rekurzivna funkcija. □

Napomena 1.1.26. *Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji surjektivna i rekurzivna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$, $x \mapsto \big(E(x,0), \dots, E(x,n-1)\big)$.*

Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Iz propozicije 1.1.25 slijedi da je funkcija rekurzivna. Ako je $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, za $x = p_0^{a_0} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}}$ vrijedi $x \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$ pa se vidi da je funkcija surjekcija.

1.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Definicija 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Kažemo da je f* ***rekurzivna*** *funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Napomena 1.2.2. *Ako je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, onda je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Obratno, ako je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna, onda je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.*
Kako je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada, budući da je f funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x) = |f(x)| = \left|(-1)^{v(x)} \cdot u(x)\right| = |u(x)| = u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pa je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Ako je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, za u i v definirane s

$$u(x) = f(x),\ v(x) = N(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$$

vrijedi

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x).$$

Funkcija v je rekurzivna prema napomeni 1.1.7 pa je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definiramo funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ s $f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Definirajmo $u\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$u(x) = |g(x) - h(x)|, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $a\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ a(y, z) = |y - z|, \forall y, z \in \mathbb{N}$. Lako se provjeri da je

$$|y - z| = (y \dot{-} z) + (z \dot{-} y), \forall y, z \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi da je a rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$u(x) = a(g(x), h(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Budući da su a, g *i* h rekurzivne funkcije, u je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Definirajmo sada $v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$v(x) = \begin{cases} 0, & g(x) \geq h(x) \\ 1, & \text{inače} \end{cases}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid g(x) \geq h(x)\}$. Skup S je rekurzivan prema korolaru 1.1.20, a u [5] je dokazano da tada slijedi i da je S^{c} rekurzivan skup. Sada slijedi

$$v(x) = \begin{cases} C_0(x), & x \in S \\ C_1(x), & \text{inače} \end{cases}$$

pa je prema propoziciji 1.1.14 i napomeni 1.1.7 v rekurzivna funkcija.
Nadalje, očito je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, f je rekurzivna funkcija. □

Vrijedi i obrat prethodne propozicije.

Propozicija 1.2.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka je* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ *rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije* $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *takve da je* $f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Kako je f rekurzivna, postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Za $v(x)$ paran je

$$f(x) = u(x) = u(x) - 0,$$

a za $v(x)$ neparan je

$$f(x) = -u(x) = 0 - u(x).$$

Definirajmo funkcije $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$g(x) = \begin{cases} u(x), & v(x) \text{ paran} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & v(x) \text{ paran} \\ u(x), & \text{inače} \end{cases}.$$

$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) \in 2\mathbb{N}\}$ je rekurzivan skup, u i $x \mapsto 0$ su rekurzivne funkcije pa slijedi da su g i h rekurzivne funkcije. Također, očito je $f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$. □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su $-f, f+g, f\cdot g, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Za funkcije $-f$, $|f|$ i $f \cdot g$ tvrdnja očito vrijedi.
Dokažimo da je funkcija $f+g$ rekurzivna. Iz propozicije 1.2.4 slijedi da postoje funkcije $h_1, h_2, g_1, g_2\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(x) = h_1(x) - h_2(x), \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
$$g(x) = g_1(x) - g_2(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada lako slijedi

$$(f+g)(x) = (h_1+g_1)(x) - (h_2+g_2)(x).$$

$h_1 + g_1,\ h_2 + g_2$ su rekurzivne kao funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ pa tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.3. □

Propozicija 1.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka su $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $F\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ definirana s*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

također rekurzivna.

Dokaz. Očito je $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \chi_{S_i}(x)$ pa iz napomene 1.2.2 i propozicije 1.2.5 slijedi da je F rekurzivna. □

Propozicija 1.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$ rekurzivni skupovi.*

Dokaz. f je rekurzivna pa po definiciji postoje $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (-1)^{v(x)} \cdot u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0.$$

Dakle,

$$\chi_S(x) = \overline{sg}(u(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je χ_S rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija iz čega slijedi da je S rekurzivan. Nadalje, vrijedi

$$x \in T \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow (-1)^{v(x)} \cdot u(x) > 0 \Leftrightarrow u(x) \neq 0 \text{ i } v(x) \text{ paran},$$

odnosno

$$T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{N}^k \mid v(x) \in 2\mathbb{N}\}$$

iz čega vidimo da je

$$\chi_T(x) = sg(u(x)) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(v(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je T rekurzivan.
Jasno je da je $V = S \cup T$ pa je rekurzivan kao unija dva rekurzivna skupa. [5] □

Korolar 1.2.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq g(x)\}$ rekurzivni skupovi.*

Dokaz. Slijedi direktno iz propozicije 1.2.7 za funkciju $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. □

Propozicija 1.2.9. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $g, h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ definirane s*

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 1, & \textit{inače} \end{cases},$$

također rekurzivne.

Dokaz. Kako je f rekurzivna, iz propozicije 1.2.4 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $f_1, f_2 \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(x,i) = f_1(x,i) - f_2(x,i), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sada vidimo:

$$g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} (f_1(x,i) - f_2(x,i)) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f_1(x,i) - \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f_2(x,i),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ takve da je $\alpha(x) \leq \beta(x)$.

Prema propoziciji 1.1.15 funkcije $x \mapsto \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f_1(x,i)$ i $x \mapsto \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f_2(x,i)$ su rekurzivne kao funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ pa iz propozicije 1.2.3 i propozicije 1.2.6 zaključujemo da je g rekurzivna. S druge strane, budući da je f rekurzivna postoje $u, v\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x,i) = (-1)^{v(x,i)} \cdot u(x,i), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Lako se dobije

$$h(x) = (-1)^{\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,i)} \cdot \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,i)$$

za sve x $\in \mathbb{N}^k$ takve da je $\alpha(x) \leq \beta(x)$ pa iz propozicija 1.1.15 i 1.2.6 zaključujemo da je h rekurzivna. □

Propozicija 1.2.10. *Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Neka su $h, h'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ definirane s*

$$h(x) = \max\{\, f(x), g(x) \,\},\ h'(x) = \min\{\, f(x), g(x) \,\}.$$

Tada su h i h' rekurzivne funkcije.

Dokaz. Vrijedi:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{inače} \end{cases},$$

$$h'(x) = \begin{cases} g(x), & f(x) \geq g(x) \\ f(x), & \text{inače} \end{cases}.$$

Propozicija 1.2.6 i korolar 1.2.8 povlače rekurzivnost funkcija h i h'. □

Propozicija 1.2.11. *Neka su $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ te $\alpha\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ definirane s*

$$g(x) = \max\{f(i,x) \mid 0 \leq i \leq \alpha(x)\}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
$$h(x) = \min\{f(i,x) \mid 0 \leq i \leq \alpha(x)\}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

također rekurzivne funkcije.

Dokaz. Funkcija f je po pretpostavci rekurzivna pa postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(i,x) = (-1)^{v(i,x)} \cdot u(i,x), \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Lako se vidi da je

$$g(x) = \begin{cases} \max\left\{\chi_{2\mathbb{N}}(v(i,x)) \cdot u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, & (\exists i \le \alpha(x))\ v(i,x) \in 2\mathbb{N} \\ (-1) \cdot \min\left\{u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, & \text{inače} \end{cases},$$

Iz propozicija 1.1.10 i 1.2.5 slijedi da su funkcije $g_1, g_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ definirane s

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \max\left\{\chi_{2\mathbb{N}}(v(i,x)) \cdot u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, \\ g_2(x) &= (-1) \cdot \min\left\{u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, \end{aligned}$$

rekurzivne. Neka je

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; (\exists i \in \{0, \dots, \alpha(x)\})\ v(i,x) \in 2\mathbb{N} \right\}.$$

Vrijedi

$$\chi_S(x) = sg\left(\sum_{i=0}^{\alpha(x)} \chi_{2\mathbb{N}}(v(i,x))\right)$$

pa je χ_S rekurzivna, odnosno S je rekurzivan skup. Sada iz propozicije 1.2.6 slijedi da je g rekurzivna.

Nadalje, lako se provjeri da je

$$h(x) = \begin{cases} (-1) \cdot \max\left\{(1 \dot{-} \chi_{2\mathbb{N}}(v(i,x))) \cdot u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, & (\exists i \le \alpha(x))\ v(i,x) \notin 2\mathbb{N}, \\ \min\left\{u(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\right\}, & \text{inače} \end{cases}$$

pa je prema propoziciji 1.2.6 h rekurzivna. □

1.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Definicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija. Kažemo da je f* ***rekurzivna*** *funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, takve da je*

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Napomena 1.3.2. *Iz gornje definicije je jasno da je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivna funkcija $g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ te rekurzivna funkcija $w \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$ t.d. vrijedi*

$$f(x) = \frac{g(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Napomena 1.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ako je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna, onda je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Obratno, ako je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, onda je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.*

Ako je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, onda postoje rekurzivne funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada za $w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiranu s $w(x) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi da je $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, w rekurzivna te

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x) = (-1)^{v(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, f je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.

S druge strane, činjenica da je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ povlači da postoje funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Kako je $f(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N}^k$, vrijedi da je $\frac{u(x)}{w(x)} \in \mathbb{N}$, odnosno

$$\frac{u(x)}{w(x)} = \left\lfloor \frac{u(x)}{w(x)} \right\rfloor.$$

Sada je dovoljno provjeriti da je funkcija $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s

$$h(a,b) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, & b \geq 1 \\ a, & b = 0 \end{cases}$$

rekurzivna. Kako je skup $S \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$ rekurzivan ([5]) i vrijedi

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \sum_{\substack{i=1, \\ ib \leq a}}^{a} 1 = \sum_{i=1}^{a} \chi_S(ib, a),$$

slijedi da je h rekurzivna funkcija, a to povlači da je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije $f + g, f \cdot g, -f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, onda je i funkcija $\frac{1}{f}\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. f i g su rekurzivne pa prema napomeni 1.3.2 postoje rekurzivne funkcije $u_1, u_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ te $w_1, w_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $w_1(x), w_2(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, te

$$f(x) = \frac{u_1(x)}{w_1(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
$$g(x) = \frac{u_2(x)}{w_2(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Vrijedi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{u_1(x)}{w_1(x)} + \frac{u_2(x)}{w_2(x)} = \frac{u_1(x)w_2(x) + u_2(x)w_1(x)}{w_1(x)w_2(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada iz napomena 1.2.2 i 1.3.2 i propozicije 1.2.5 slijedi da je $f+g$ rekurzivna.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{u_1(x)}{w_1(x)} \cdot \frac{u_2(x)}{w_2(x)} = \frac{u_1(x) \cdot u_2(x)}{w_1(x) \cdot w_2(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Propozicija 1.2.5 i napomena 1.3.2 povlače da je $f \cdot g$ rekurzivna.

$$(-f)(x) = -f(x) = \frac{-u_1(x)}{w_1(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je zbog propozicije 1.2.5 funkcija $-f$ rekurzivna.

$$(|f|)(x) = |f(x)| = \left|\frac{u_1(x)}{w_1(x)}\right| = \frac{|u_1(x)|}{w_1(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa je prema propoziciji 1.2.5 funkcija $|f|$ rekurzivna.
Kako je u_1 rekurzivna funkcija, postoje rekurzivne funkcije $v_1, u_1' \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$u_1(x) = (-1)^{v_1(x)} \cdot u_1'(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle,

$$f(x) = (-1)^{v_1(x)} \cdot \frac{u_1'(x)}{w_1(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Također je $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow u_1'(x) \neq 0$ pa vrijedi

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(-1)^{v_1(x)}} \cdot \frac{w_1(x)}{u_1'(x)} = (-1)^{v_1(x)} \cdot \frac{w_1(x)}{u_1'(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dakle, $\frac{1}{f}$ je rekurzivna funkcija. $\square$

Propozicija 1.3.5. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $f \circ g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. f je rekurzivna po pretpostavci pa postoje rekurzivne funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot \frac{u(x)}{w(x)},\ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-1)^{v(g(x))} \cdot \frac{u(g(x))}{w(g(x))}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Prema propoziciji 1.1.13, funkcije $u \circ g, v \circ g, w \circ g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ su rekurzivne i $(w \circ g)(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^n$, pa je $f \circ g$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $\alpha, \beta\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ definirane s*

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x), & \alpha(x) \leq \beta(x) \\ 1, & \textit{inače} \end{cases},$$

rekurzivne.

Dokaz. f je rekurzivna pa postoje rekurzivne funkcije $u\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$, $w\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(i, x) = \frac{u(i, x)}{w(i, x)}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada slijedi

$$\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i,x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{u(i,x)}{w(i,x)} = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{u(i,x) \cdot \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} w(j,x)}{w(i,x)} \right\rfloor}{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} w(j,x)} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} w(j,x)} \cdot \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(i,x) \cdot \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} w(j,x)}{w(i,x)} \right\rfloor .$$

Iz napomene 1.2.2, propozicije 1.2.5, propozicije 1.2.9 i propozicije 1.3.4 slijedi tvrdnja. □

Propozicija 1.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$ rekurzivni skupovi.*

Dokaz. f je rekurzivna pa postoje rekurzivne funkcije $u\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = \frac{u(x)}{w(x)}.$$

Vrijedi

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$$

pa slijedi

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) = 0\}$$

što je rekurzivan skup prema propoziciji 1.2.7. Analogno slijedi da su T i V rekurzivni skupovi. □

Korolar 1.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq g(x)\}$ rekurzivni skupovi.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 1.3.7 za funkciju $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. □

Propozicija 1.3.9. *Neka su* $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *te* $\alpha\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Tada su* $g, h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *definirane s*

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \\ h(x) &= \min\{f(i,x) \mid 0 \le i \le \alpha(x)\}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \end{aligned}$$

također rekurzivne funkcije.

Dokaz. Iz pretpostavke da je f rekurzivna slijedi da postoje rekurzivne funkcije $u\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$, $w\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $w(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{N}^{k+1}$, takve da vrijedi

$$f(i,x) = \frac{u(i,x)}{w(i,x)}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sada vidimo

$$g(x) = \max\left\{ \frac{u(i,x)}{w(i,x)} \,\middle|\, i \in \{0,\dots,\alpha(x)\} \right\} = \max\left\{ \frac{u(i,x)\cdot \left\lfloor \dfrac{\prod_{j=0}^{\alpha(x)} w(j,x)}{w(i,x)} \right\rfloor}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha(x)} w(j,x)} \,\middle|\, i \in \{0,\dots,\alpha(x)\} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{\alpha(x)} w(j,x)} \cdot \max\left\{ u(i,x)\cdot \left\lfloor \frac{\prod_{j=0}^{\alpha(x)} w(j,x)}{w(i,x)} \right\rfloor \,\middle|\, i \in \{0,\dots,\alpha(x)\} \right\}.$$

Sada iz propozicije 1.2.11, napomene 1.3.3 i propozicije 1.3.4 slijedi da je g rekurzivna. Analogno se dokazuje da je h rekurzivna. $\square$

Poglavlje 2

Rekurzivnost u $\mathbb{R}$

2.1 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Kažemo da je S* ***rekurzivno prebrojiv*** *skup ako je $S = \emptyset$ ili postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.*

Propozicija 2.1.2. *Svaki rekurzivan skup je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je očita. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Uzmimo surjekciju $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ danu s

$$h(i) = (E(i,1), \dots, E(i,k)).$$

Funkcija h je rekurzivna jer su joj komponentne funkcije rekurzivne.
Neka je $s_0 = (s_1, \dots, s_k) \in S$. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ s

$$f(i) = \begin{cases} h(i), & h(i) \in S \\ s_0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Neka je

$$T = \{i \in \mathbb{N} \mid h(i) \in S\}.$$

Vrijedi

$$h(i) \in S \Leftrightarrow i \in T$$

odnosno

$$\chi_T(i) = \chi_S(h(i))$$

pa vidimo da je T rekurzivan skup. Iz propozicije 1.1.16 slijedi rekurzivnost funkcije f i očito je $f(\mathbb{N}) = S$ pa je S rekurzivno prebrojiv. $\square$

Propozicija 2.1.3. *Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N})$ beskonačan skup. Tada postoji rekurzivna injekcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi $g(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N})$.*

Dokaz. Neka je $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(n+1) &= \mu y\Big(f(y) \notin \big\{f(0), \dots, f(h(n))\big\}\Big). \end{aligned}$$

Funkcija h je dobro definirana jer je $f(\mathbb{N})$ beskonačan po pretpostavci. Definirajmo funkciju $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$\gamma(a) = \mu y\Big(f(y) \notin \big\{f(0), \dots, f(a)\big\}\Big).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$h(n+1) = \gamma\big(h(n)\big) = \big(\gamma \circ I_1^2\big)\big(h(n), n\big)$$

pa je dovoljno dokazati da je funkcija γ rekurzivna. Neka je

$$\begin{aligned} S &= \big\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid f(m) \notin \{f(0), \dots, f(n)\}\big\} \\ &= \big\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid f(m) \neq f(0), \dots, f(m) \neq f(n)\big\}. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je

$$(n, m) \in S \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \chi_{=}\big(f(m), f(i)\big) = 0$$

pa je

$$\chi_S(n, m) = \overline{sg}\left(\sum_{i=0}^{n} \chi_{=}\big(f(m), f(i)\big)\right).$$

χ_S je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa je skup S rekurzivan. Budući da je

$$\gamma(a) = \mu y\big((a, y) \in S\big), \forall a \in \mathbb{N},$$

slijedi da je funkcija γ rekurzivna pa je rekurzivna i funkcija h jer je dobivena pomoću primitivne rekurzije iz rekurzivnih funkcija.
Definirajmo sada funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$g = f \circ h.$$

Iz definicije funkcije h je jasno da vrijedi

$$f(h(n+1)) \notin \big\{f(0), \dots, f(h(n))\big\}, \forall n \in \mathbb{N},$$

pa je $h(n) < h(n+1)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je jasno da je

$$h(i) < h(j), \forall i < j,$$

pa slijedi da je

$$g(i) = f\big(h(i)\big) \neq f\big(h(j)\big) = g(j), \forall i < j.$$

Dakle, funkcija g je injekcija.

Neka je $m \in g(\mathbb{N})$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m = g(n) = f(h(n))$$

pa je $m \in f(\mathbb{N})$, odnosno $g(\mathbb{N}) \subseteq f(\mathbb{N})$.

Pretpostavimo sada da je $m \in f(\mathbb{N})$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f(n) = m$. Dokažimo da vrijedi

$$\big\{f(i) \mid 0 \leq i \leq h(n)\big\} = \big\{(f \circ h)(i) \mid 0 \leq i \leq n\big\},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Dokaz provodimo indukcijom po n.

Za $n = 0$ je

$$f(0) = f(h(0))$$

pa tvrdnja vrijedi.

Neka je $n > 0$ i pretpostavimo da vrijedi

$$\big\{f(0), f(1), \ldots, f(h(n))\big\} = \big\{f(h(0)), f(h(1)), \ldots, f(h(n))\big\}.$$

Jer je $g = f \circ h$ injekcija, za $i \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi

$$f(h(i)) \neq f(h(n+1)), \tag{2.2}$$

odnosno

$$f(h(n+1)) \notin \big\{f(h(0)), f(h(1)), \ldots, f(h(n))\big\}$$

pa zbog pretpostavke indukcije slijedi

$$f(h(n+1)) \notin \big\{f(0), f(1), \ldots, f(h(n))\big\}.$$

Prema definiciji funkcije h i iz pretpostavke indukcije slijedi da je

$$f(i) \in \big\{f(h(0)), \ldots, f(h(n))\big\}, \forall i < h(n+1).$$

Sada slijedi da je

$$\big\{f(0), f(1), \ldots, f(h(n+1))\big\} = \big\{f(h(0)), f(h(1)), \ldots, f(h(n+1))\big\}$$

pa je tvrdnja (2.1) dokazana.
Sada za svaki $i \in \{0, \ldots, h(n)\}$ vrijedi

$$f(i) \in \{(f \circ h)(i) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

pa je $f(i) \in g(\mathbb{N})$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(k) \in \{f(i) \mid 0 \leq i \leq h(n)\}$$

pa slijedi $m \in g(\mathbb{N})$, odnosno $f(\mathbb{N}) \subseteq g(\mathbb{N})$. □

Iduću propoziciju navodimo bez dokaza, a može ga se naći u [5].

Propozicija 2.1.4. *Postoji rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ koji nije rekurzivan.*

Napomena 2.1.5. *Uočimo da skup iz propozicije 2.1.4 mora biti beskonačan jer bi u suprotnom bio rekurzivan.*

Teorem 2.1.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup ako i samo ako postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je*

$$S = \{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T \}.$$

Dokaz. Može se naći u [1]. □

Korolar 2.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T\}$ i za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji najviše jedan $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in T$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.1.6 postoji rekurzivan skup $T' \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je

$$S = \{ x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T' \}.$$

Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^2$ dan s

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, y) \in T' \wedge ((x, i) \notin T',\ \forall i < y) \right\}.$$

Definirajmo skup $T'' \subseteq \mathbb{N}^2$ s

$$T'' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, i) \notin T',\ \forall i < y \right\}.$$

Lako se provjeri da je karakteristična funkcija skupa T'' dana s

$$\chi_{T''}(x, y) = \overline{sg}\left(\sum_{i=1}^{y} \chi_{T'}(x, i \dot{-} 1) \right), \forall x, y \in \mathbb{N},$$

pa zbog rekurzivnosti skupa T' slijedi da je skup T'' rekurzivan.

Jasno je da vrijedi

$$T = T' \cap T''$$

pa je i skup T rekurzivan skup.

Također, za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji najviše jedan $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in T$. Naime, neka su $x, y \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da vrijedi $(x, y) \in T$. Tada iz definicije skupa T slijedi

$$(x, i) \notin T', \forall i < y,$$

pa je onda jasno i da

$$(x, i) \notin T, \forall i < y.$$

Pretpostavimo sada da postoji $j \in \mathbb{N}$, $j > y$, takav da je $(x, j) \in T$. Tada vrijedi

$$(x, i) \notin T, \forall i < j,$$

pa posebno vrijedi i $(x, y) \notin T$ što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, y je jedinstveni prirodan broj za koji vrijedi $(x, y) \in T$. □

Teorem 2.1.8 (Teorem o projekciji)**.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup te neka je*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N}^n)\ (x, y) \in T \right\}.$$

Tada je skup S rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je $\Pi\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata. Dakle,

$$\Pi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) = (x_1, \ldots, x_k),\ \forall (x_1, \ldots, x_{k+n}) \in \mathbb{N}^{k+n}. \tag{2.3}$$

Očito je funkcija Π rekurzivna. Također, iz definicije skupa S je jasno da je

$$S = \Pi(T).$$

Ako je $T = \emptyset$, onda je i $S = \emptyset$ pa je S rekurzivno prebrojiv.
Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Kako je T rekurzivno prebrojiv, postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je

$$f(\mathbb{N}) = T.$$

Sada imamo

$$S = \Pi(T) = \Pi(f(\mathbb{N})) = (\Pi \circ f)(\mathbb{N}),$$

a funkcija $\Pi \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ je rekurzivna kao kompozicija dvije rekurzivne funkcije pa slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. □

Teorem 2.1.9 (Postov teorem)**.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Tada je skup S rekurzivan ako i samo ako su skupovi S i S^c rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je S rekurzivan, onda je rekurzivan i skup S^c pa iz propozicije 2.1.2 slijedi da su S i S^c rekurzivno prebrojivi.

Pretpostavimo da su skupovi S i S^c rekurzivno prebrojivi. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je

$$f(\mathbb{N}) = S \text{ i } g(\mathbb{N}) = S^c.$$

Neka su

$$T = \left\{ (x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N},\ x = f(i) \right\},$$
$$V = \left\{ (x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N},\ x = g(i) \right\}.$$

Iz propozicije 1.1.21 slijedi da su skupovi T i V rekurzivni pa je i skup $T \cup V$ rekurzivan kao unija dva rekurzivna skupa. Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$h(x) = \mu i((x,i) \in T \cup V),\ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Prema napomeni 1.1.23, funkcija h je rekurzivna pa je i funkcija $f \circ h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^k$ prema propoziciji 1.1.13. Također, vidimo da za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow x = f(h(x))$$

pa je skup S rekurzivan. □

Propozicija 2.1.10. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je*

$$(x, f(x)) \in S, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Može se promaći u [2]. □

2.2 Izračunljivi brojevi

Definicija 2.2.1. *Za $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiv broj** ako postoji rekurzivna funkcija $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$|x - q(n)| < 2^{-n}.$$

Primjer 2.2.2. *e je izračunljiv broj.*
Definiramo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, *s*

$$f(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto i!$ *rekurzivna, prema propoziciji 1.3.4 slijedi da je funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i, k) \mapsto \dfrac{1}{i!}$ *rekurzivna pa je prema propoziciji 1.3.6 f rekurzivna funkcija. U [4] je dokazano*

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{n!}, \ \forall m > n \geq 1,$$

pa vrijedi

$$|e - f(k+1)| = \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{i!} < \frac{1}{(k+1)!} \leq 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, za $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *defniranu s* $G = f \circ Sc$ *jasno je da je rekurzivna funkcija i vrijedi*

$$G(k) = f(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$$

pa je

$$|e - G(k)| < 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno e je izračunljiv broj.

Napomena 2.2.3. *Neka su* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *i* $r \in \mathbb{Q}$ *te neka je* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana s* $f(x) = r, \forall x \in \mathbb{N}^k$. *Tada je f rekurzivna.*

$$r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{N}, b \neq 0, \ t.d \ r = (-1)^c \frac{a}{b}$$

Konstantne funkcije su rekurzivne (dokaz se može naći u [5]) pa je f rekurzivna.
Uočimo da iz ovoga slijedi da je svaki racionalan broj izračunljiv.

Napomena 2.2.4. *Za svaki* $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, *postoje jedinstveni brojevi* $b \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}$ *takvi da je decimalni zapis broja x dan s*

$$x = b + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

i ne postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $a_i = 9, \forall i \geq i_0$.

Propozicija 2.2.5. *Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, te neka je $x = b.a_1a_2\ldots$ decimalni zapis broja x. Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$F(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Tada je x izračunljiv broj.

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da je

$$x = b + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F(i)}{10^i}.$$

Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s

$$f(k) = b + \sum_{i=1}^{k} G(i,k), \forall k \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$G(i,k) = \frac{F(i)}{10^i}, \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

G je očito rekurzivna funkcija pa ja prema propoziciji 1.3.6 rekurzivna i funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto \sum_{i=1}^{k} G(i,k)$. Tako je f rekurzivna kao zbroj konstante i rekurzivne funkcije. Sada slijedi

$$\begin{aligned}|x - f(k)| &= \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{F(i)}{10^i}\right| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{F(i)}{10^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{9}{10^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{k+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^k} = 10^{-k} \leq 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

pa je x izračunljiv broj. □

Primjer 2.2.6. *$\sqrt{2}$ je izračunljiv broj.*

Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, s

$$g(n) = \mu y\big(2 \cdot 10^{2n} < (y+1)^2\big), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je

$$S = \big\{(n,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2 \cdot 10^{2n} < (y+1)^2\big\}.$$

Iz korolara 1.2.8 slijedi da je S rekurzivan skup. Vrijedi $g(n) = \mu y\big((n,y) \in S\big)$ *pa je prema napomeni 1.1.23 g rekurzivna funkcija.*

Zapišimo $\sqrt{2}$ *u decimalnom zapisu, odnosno* $\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
& a_0.a_1a_2\dots a_n < \sqrt{2} < a_0.a_1a_2\dots a_n + 10^{-n} \\
\Leftrightarrow\ & a_0a_1a_2\dots a_n < \sqrt{2}\cdot 10^n < a_0a_1a_2\dots a_n + 1 \\
\Leftrightarrow\ & (a_0a_1a_2\dots a_n)^2 < 2\cdot 10^{2n} < (a_0a_1a_2\dots a_n + 1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (a_0a_1a_2\dots a_n) = \mu y\big(2\cdot 10^{2n} < (y+1)^2\big) \\
\Leftrightarrow\ & a_0\dots a_n = g(n) \\
\Leftrightarrow\ & a_n = ost(g(n), 10),
\end{aligned}$$

gdje je $ost\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija koja uređenom paru* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *pridružuje ostatak pri dijeljenju a s b. Kako je*

$$ost(a,b) = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b,$$

slijedi da je ost rekurzivna funkcija pa je i funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto ost(g(n),10) = a_n$, *rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Sada iz propozicije 2.2.5 slijedi da je* $\sqrt{2}$ *izračunljiv broj.*

Lema 2.2.7. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Neka je* $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$D(y) = d(y, \mathbb{Z}) = inf\{d(y,z) \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Tada za sve $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$|x-y| < D(y) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor.$$

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i pretpostavimo da vrijedi $|x-y| < D(y)$. Tada je

$$x \in \langle y - D(y), y + D(y) \rangle\,. \tag{2.4}$$

$\lfloor y \rfloor = i$, za neki $i \in \mathbb{Z}$ pa je $y \in [i, i+1\rangle$. Iz definicije funkcje D slijedi

$$\langle y - D(y), y + D(y) \rangle \subseteq [i, i+1\rangle\,. \tag{2.5}$$

Sada iz (2.4) i (2.5) vidimo da vrijedi $x \in [i, i+1\rangle$, odnosno $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$. □

Lema 2.2.8. *Neka je* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija te neka je* $a \in \mathbb{N}$. *Pretpostavimo da je* $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija takva da je* $g(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{N}\backslash\{a\}$. *Tada je funkcija g rekurzivna.*

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da je

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{N} \backslash \{a\} \\ g(a), & \text{inače} \end{cases}.$$

Vrijedi

$$\chi_{\{a\}}(x) = \overline{sg}\left(|x-a|\right), \forall x \in \mathbb{N}$$

iz čega slijedi da je $\{a\}$ rekurzivan skup, a tada je i skup $\mathbb{N} \backslash \{a\}$ rekurzivan pa iz propozicije 1.1.14 slijedi da je funkcija g rekurzivna. □

Sada se može dokazati da vrijedi i obrat propozicije 2.2.5.

Teorem 2.2.9. *Neka je $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, te neka je $x = b.a_1a_2\ldots$ njegov decimalni zapis. Pretpostavimo da je x izračunljiv broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(n) = a_n$ za svaki $n \geq 1$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} &x \cdot 10^n = ba_1a_2\ldots a_n.a_{n+1}\ldots \\ \Leftrightarrow\ &ba_1a_2\ldots a_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor,\ \forall n \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ &a_n = ost\big(\lfloor x \cdot 10^n \rfloor, 10\big),\ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Dovoljno je dokazati da je $n \mapsto ost\big(\lfloor x \cdot 10^n \rfloor, 10\big)$ rekurzivna funkcija, a za to je dovoljno pokazati da je funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = \lfloor x \cdot n \rfloor$, rekurzivna.

Promotrimo prvo slučaj kada je $x \in \mathbb{Q}$.
Tada je $x = \dfrac{p}{q}$ za neke $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, pa je

$$g(n) = \left\lfloor \frac{p \cdot n}{q} \right\rfloor = h(pn, q),$$

gdje je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$h(a,b) = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

Kako su funkcije $n \mapsto pn$ i $q \mapsto q$ rekurzivne, g je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa slijedi tvrdnja teorema.

Pretpostavimo sada $x \notin \mathbb{Q}$.
Budući da je x izračunljiv broj, postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - f(k)| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Jer je f rekurzivna, postoje rekurzivne funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ w(k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, takve da je

$$f(k) = (-1)^{v(k)} \cdot \frac{u(k)}{w(k)},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\big| |x| - |f(k)| \big| \leq |x - f(k)|, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi

$$\left| x - \frac{u(k)}{w(k)} \right| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, neka je $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Lako se provjeri da vrijedi

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Neka je D funkcija iz leme 2.2.7. Tada za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$D\left(\frac{i}{j+1}\right) = \min\left\{\frac{i}{j+1} - \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor + 1 - \frac{i}{j+1}\right\}.$$

Definirajmo funkciju $D'\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ s

$$D'(i, j) = \min\left\{\frac{i}{j+1} - \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor + 1 - \frac{i}{j+1}\right\}, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i, j) \mapsto \dfrac{i}{j+1}$, i $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, j) \mapsto \left\lfloor \dfrac{i}{j} \right\rfloor$, su rekurzivne pa iz propozicije 1.3.4 slijedi da su rekurzivne i funkcije $F, G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definirane s

$$\begin{aligned}
F(i, j) &= \frac{i}{j+1} - \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor, \forall i, j \in \mathbb{N}, \\
G(i, j) &= \left\lfloor \frac{i}{j+1} \right\rfloor + 1 - \frac{i}{j+1}, \forall i, j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Sada iz korolara 1.3.8 lako slijedi da je i funkcija $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definirana s

$$H(i, j) = \begin{cases} F(i, j), & F(i, j) \leq G(i, j) \\ G(i, j), & \text{inače} \end{cases}$$

rekurzivna. Očito je

$$D'(i, j) = H(i, j), \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,$$

pa je funkcija D' rekurzivna. Također,

$$D'(i,j) = D\left(\frac{i}{j+1}\right), \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Iz nejednakosti (2.6) direktno slijedi da je funkcija D neprekidna. Fiksirajmo sada $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\left| x - \frac{u(k)}{w(k)} \right| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| nx - \frac{n \cdot u(k)}{w(k)} \right| < n \cdot 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n \cdot u(k)}{w(k)} = nx$$

pa zbog neprekidnosti funkcije D vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} D\left(\frac{n \cdot u(k)}{w(k)}\right) = D(nx). \tag{2.7}$$

Kako je $D(nx) > 0$ postoji $k' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$D\left(\frac{n \cdot u(k)}{w(k)}\right) > 0, \forall k \geq k'.$$

Jer vrijedi $n \cdot 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n \cdot 2^{-k_0} < D\left(\frac{n \cdot u(k_0)}{w(k_0)}\right),$$

a iz toga slijedi da je

$$\left| nx - \frac{n \cdot u(k_0)}{w(k_0)} \right| < D\left(\frac{n \cdot u(k_0)}{w(k_0)}\right).$$

Sada iz leme 2.2.7 dobivamo da je

$$\lfloor nx \rfloor = \left\lfloor \frac{n \cdot u(k_0)}{w(k_0)} \right\rfloor.$$

Neka je

$$S = \left\{ (n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot 2^{-k} < D'\big(n \cdot u(k), w(k) \dot{-} 1\big) + \overline{sg}(n) \right\}.$$

Funkcija $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ dana s

$$h(n,k) = \big(n \cdot u(k), w(k) \dot{-} 1\big), \forall n,k \in \mathbb{N},$$

je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da je S rekurzivan skup.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, k) \in S$ pa prema propoziciji 1.1.22 postoji rekurzivna funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(n, \varphi(n)) \in S, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $n \geq 1$ fiksiran. Vrijedi

$$\begin{aligned}(n, \varphi(n)) \in S &\Leftrightarrow n \cdot 2^{-\varphi(n)} < D'\big(n \cdot u(\varphi(n)), w(\varphi(n)) \dot{-} 1\big)\\ &\Leftrightarrow n \cdot 2^{-\varphi(n)} < D\left(\frac{n \cdot u(\varphi(n))}{w(\varphi(n))}\right).\end{aligned}$$

Sada slijedi da je

$$\lfloor nx \rfloor = \left\lfloor \frac{n \cdot u(\varphi(n))}{w(\varphi(n))} \right\rfloor, \ \forall n \geq 1,$$

pa je

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n \cdot u(\varphi(n))}{w(\varphi(n))} \right\rfloor, \ \forall n \geq 1.$$

Prema lemi 2.2.8 g je rekurzivna funkcija pa je time teorem dokazan. □

Napomena 2.2.10. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ te neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija takva da $|x - f(k)| < \dfrac{1}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$. Tada je x izračunljiv broj.*

Definirajmo $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$g(k) = 2^k.$$

Jasno je da je g rekurzivna funkcija pa je i funkcija $f \circ g$ rekurzivna i vrijedi

$$|x - (f \circ g)(k)| < \frac{1}{2^k + 1} < \frac{1}{2^k} = 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je x izračunljiv broj.

Iduće pitanje koje si postavljamo je mora li realan broj x biti izračunljiv ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi $f(k) \xrightarrow{k\to\infty} x$? Sljedeći primjer pokazuje da to ne vrijedi nužno.

Primjer 2.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan. Definirajmo realan broj*

$$x = \chi_S(0).\chi_S(1)\chi_S(2)\ldots\chi_S(n)\ldots$$

Uočimo najprije da x nije izračunljiv broj. Kada bi bio izračunljiv, prema teoremu 2.2.9 postojala bi rekurzivna funkcija $g' \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$g'(n) = \chi_S(n), \forall n \geq 1,$$

a onda bi iz leme 2.2.8 slijedilo da je χ_S rekurzivna funkcija što je u kontradikciji s pretpostavkom da S nije rekurzivan.

Dokažimo sada da postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$f(n) < f(n+1), \forall n \in \mathbb{N}, \text{ } i \text{ } x = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

S je rekurzivno prebrojiv, a nije rekurzivan pa je S beskonačan. Iz propozicije 2.1.3 slijedi da postoji rekurzivna injekcija $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$S = \{g(0), g(1), g(2), \dots\} = g(\mathbb{N}).$$

Definirajmo funkciju $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s

$$f(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{10^{g(i)}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.6 lako slijedi da je f rekurzivna funkcija. Također, očito je f rastuća i

$$f(k) \leq x, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Još preostaje dokazati da je $\lim_{n \to \infty} f(n) = x$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te

$$\gamma_n \coloneqq \chi_S(0).\chi_S(1) \dots \chi_S(n).$$

Za svaki $i \in S$ postoji $N_i \in \mathbb{N}$ takav da je $i = g(N_i)$. Zato za svaki $j \in \{0, \dots, n\} \cap S$ postoji $N_j \in \mathbb{N}$, $j = g(N_j)$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $N_i \leq m$, $\forall i \in \{0, \dots, n\} \cap S$. Imamo

$$f(m) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{10^{g(i)}}.$$

Uočimo da je

$$\gamma_n = \sum_{j \in \{0,\dots,n\} \cap S} \frac{1}{10^j} = \sum_{j \in \{0,\dots,n\} \cap S} \frac{1}{10^{g(N_j)}}.$$

Dakle,

$$\gamma_n \leq f(m).$$

Sada vidimo da je

$$\gamma_n \leq \lim_{m\to\infty} f(m) \leq x$$

pa zbog $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ *vrijedi*

$$x \leq \lim_{m\to\infty} f(m) \leq x$$

iz čega slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = x.$$

Sada imamo da je f *rekurzivna,* $\lim_{n\to\infty} f(n) = x$*, ali* x *nije izračunljiv.*

Definicija 2.2.12. *1.* $x \in \mathbb{R}$ *je* ***lijevo izračunljiv*** *ako postoji rastuća rekurzivna funkcija* $q_L : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *takva da*

$$\lim_{k\to\infty} q_L(k) = x.$$

2. $x \in \mathbb{R}$ *je* ***desno izračunljiv*** *ako postoji padajuća rekurzivna funkcija* $q_R : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *takva da*

$$\lim_{k\to\infty} q_R(k) = x.$$

Propozicija 2.2.13. *Broj* $x \in \mathbb{R}$ *je izračunljiv ako i samo ako je lijevo i desno izračunljiv.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - q(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$q(k) - 2^{-k} < x < q(k) + 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo funkciju $q_L : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s

$$q_L(k) = q(k) - 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Očito je q_L rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija, $\lim_{k\to\infty} q_L(k) = x$ te vrijedi

$$q_L(k) < x, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Uočimo i da je

$$|x - q_L(k)| < 2^{-k+1}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Neka je sada $q_L' : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$q_L'(k) = \max\left\{q_L(i) \mid 0 \leq i \leq k\right\}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definirana s

$$f(i,k) = q_L(i),\ \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$f(i,k) = (q_L \circ I_1^2)(i,k),\ \forall i,k \in \mathbb{N},$$

pa je f rekurzivna funkcija. Sada vrijedi

$$q'_L(k) = \max\left\{f(i,k) \mid 0 \leq i \leq k\right\},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je q'_L rekurzivna prema propoziciji 1.3.9.
Također, q'_L je očito rastuća funkcija. Dokažimo još da je

$$\lim_{k\to\infty} q'_L(k) = x.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2^{-n_0+1} < \varepsilon.$$

Iz (2.8) i (2.9) slijedi da je

$$q_L(n_0) \in \left\langle x - 2^{-n_0+1}, x\right\rangle \subseteq \langle x-\varepsilon, x\rangle,$$

a iz definicije funkcije q'_L slijedi

$$q'_L(k) \geq q_L(k),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kako je q'_L rastuća, slijedi

$$q'_L(n) \geq q_L(n_0),\ \forall n \geq n_0,$$

pa je

$$q'_L(n) > x - \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

S druge strane, jasno je da je

$$q'_L(k) < x < x + \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi

$$|x - q'_L(n)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} q'_L(k) = x$$

pa dobivamo da je x lijevo izračunljiv.
Analogno se pokaže da je x desno izračunljiv ako se definiraju funkcije $q_R, q'_R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s

$$q_R(k) = q(k) + 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$
$$q'_R(k) = \min\left\{q_R(i) \mid 0 \leq i \leq k\right\},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Obratno, pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ lijevo i desno izračunljiv. Tada postoje rekurzivne funkcije $q_L, q_R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, takve da je q_L rastuća, q_R padajuća i vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} q_L(k) = \lim_{k\to\infty} q_R(k) = x.$$

Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$h(k) = \mu y\left(|q_R(y) - q_L(y)| < 2^{-k}\right), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je

$$S = \left\{(k, y) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, |q_R(y) - q_L(y)| < 2^{-k}\right\}.$$

Iz propozicija 1.3.4 i 1.3.5 slijedi da su funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ zadane s $(k, y) \mapsto |q_R(y) - q_L(y)|$ i $(k, y) \mapsto 2^{-k}$ rekurzivne pa iz korolara 1.3.8 slijedi da je skup S rekurzivan.
Sada je

$$h(k) = \mu y\left(|q_R(y) - q_L(y)| < 2^{-k}\right) = \mu y((k, y) \in S), \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je funkcija h rekurzivna prema napomeni 1.1.23.
Neka je $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$q(k) \coloneqq \frac{q_R(h(k)) + q_L(h(k))}{2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicija 1.3.4 i 1.3.5 slijedi da je q rekurzivna funkcija.
Neka je sada $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$q(k) = \frac{q_R(h(k)) + q_L(h(k))}{2}$$

i vrijedi

$$|q_R(h(k)) - q_L(h(k))| < 2^{-k}$$

pa imamo da je

$$q(k) \in \left[q_L(h(k)), q_R(h(k))\right].$$

Kako je

$$q_L(h(k)) \leq x \leq q_R(h(k)),$$

slijedi da je
$$x \in [q_L(h(k)), q_R(h(k))] .$$
Sada slijedi
$$|x - q(k)| \leq q_R(h(k)) - q_L(h(k)) = |q_R(h(k)) - q_L(h(k))| < 2^{-k}.$$
Dakle,
$$|x - q(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}$$
pa je x izračunljiv broj. □

2.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Definicija 2.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Za funkciju f kažemo da je **rekurzivna** ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je*
$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}, \ \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
*Funkciju F zovemo **rekurzivnom aproksimacijom** funkcije f.*

Propozicija 2.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj. Tada je funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ definirana s*
$$f(x) = a, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
rekurzivna.

Dokaz. Budući da je a izračunljiv broj, postoji rekurzivna funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je
$$|a - g(i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}.$$
Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s
$$F(x, i) = g(i), \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je funkcija F rekurzivna. Vrijedi
$$|f(x) - F(x, i)| = |a - g(i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
pa je funkcija f rekurzivna. □

Propozicija 2.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Tada je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ fiksiran. Definirajmo funkciju $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s

$$G(i) = F(x,i), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je G rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$|f(x) - G(i)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa je $f(x)$ izračunljiv broj. □

Napomena 2.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna. Tada je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*

f je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ pa postoje rekurzivne funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \frac{u(x)}{w(x)}, \ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s

$$F(x,i) = f(x), \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Neka je $G\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana s

$$G(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = (x_1, \ldots, x_k), \ \forall (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}.$$

Funkcija G je rekurzivna prema definiciji 1.1.12 i propoziciji 1.1.13.
Očito je $F = f \circ G$ pa je F rekurzivna prema propoziciji 1.3.5. Također vrijedi

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

iz čega slijedi da je funkcija f rekurzivna i F je rekurzivna aproksimacija od f.

Propozicija 2.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka su $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da vrijedi*

$$|f(x) - F(x,i)| \leq M(x) \cdot 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je funkcija f rekurzivna.

Dokaz. Definirajmo funkciju $G\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ s

$$G(x,i) = F(x, M(x) + i), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je G rekurzivna funkcija. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x) - G(x,i)| &= |f(x) - F(x, M(x) + i)| \leq \\ \leq M(x) \cdot 2^{-(M(x)+i)} &= \frac{M(x)}{2^{M(x)}} \cdot 2^{-i} < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

pa je funkcija f rekurzivna. □

Lema 2.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija i pretpostavimo da vrijedi*

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $G\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije F. Tada je

$$|F(x,i) - G(x,i,j)| < 2^{-j}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x) - G(x,i,i)| &\leq |f(x) - F(x,i)| + |F(x,i) - G(x,i,i)| < \\ &< 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 1.3.5 funkcija $(x,i) \mapsto G(x,i,i)$ je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ pa iz propozicije 2.3.5 slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Lema 2.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$|f(x)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. f je rekurzivna po pretpostavci pa postoje rekurzivne funkcije $u, v, w\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \frac{u(x)}{w(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Definirajmo funkciju $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$M(x) = u(x) + 1, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz napomene 1.1.7 i propozicije 1.1.9 slijedi da je M rekurzivna funkcija.
Sada imamo

$$|f(x)| = \frac{u(x)}{w(x)} \leq u(x) < u(x) + 1 = M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

pa slijedi tvrdnja. □

Lema 2.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$|f(x)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Neka je $G\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija zadana s

$$G(x) = |F(x,0)|\,, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Iz propozicija 1.3.4 i 1.3.5 lako slijedi da je funkcija G rekurzivna, a prema propoziciji 1.3.4 je rekurzivna i funkcija $G'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ definirana s

$$G'(x) = G(x) + 1.$$

Prema lemi 2.3.7 postoji rekurzivna funkcija $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$G(x) + 1 = |G(x) + 1| = |G'(x)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Vrijedi

$$|f(x)| - |F(x,i)| \leq |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa je

$$|f(x)| < |F(x,i)| + 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Posebno vrijedi

$$|f(x)| < |F(x,0)| + 1 = G(x) + 1 = M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

□

Lema 2.3.9. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Tada postoji rekurzivna funkcija $M\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$|F(x,i)| < M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. f je rekurzivna pa prema lemi 2.3.8 postoji rekurzivna funkcija $M' \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je
$$|f(x)| < M'(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
Definirajmo funkciju $M \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s
$$M(x) = M'(x) + 1, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
Vrijedi
$$|F(x,i)| - |f(x)| \le |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i} \le 1, \ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$
pa slijedi
$$|F(x,i)| < |f(x)| + 1 < M'(x) + 1 = M(x), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
□

Propozicija 2.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su $f + g, f \cdot g, -f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Neka su F i G rekurzivne aproksimacije funkcija f i g redom. Tada je
$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \ \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
$$|g(x) - G(x,i)| < 2^{-i}, \ \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Slijedi da je
$$|f(x) + g(x) - (F(x,i) + G(x,i))| \le |f(x) - F(x,i)| + |g(x) - G(x,i)| <$$
$$< 2 \cdot 2^{-i}, \ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sada iz propozicija 1.3.4 i 2.3.5 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija.
Također vidimo da je
$$|f(x)g(x) - F(x,i)G(x,i)| \le |g(x)|\,|f(x) - F(x,i)| + |F(x,i)|\,|g(x) - G(x,i)| <$$
$$< (|g(x)| + |F(x,i)|) \cdot 2^{-i}, \ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Iz lema 2.3.8 i 2.3.9 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $M_1, M_2 \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi
$$|g(x)| < M_1(x), \ \forall x \in \mathbb{N}^k,$$
$$|F(x,i)| < M_2(x), \ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sada dobivamo
$$|f(x)g(x) - F(x,i)G(x,i)| < (M_1(x) + M_2(x)) \cdot 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa iz propozicija 1.1.9, 1.3.4 i 2.3.5 slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.
Nadalje, vidimo da vrijedi

$$|-f(x) + F(x,i)| = |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i},\ \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa pomoću propozicije 1.3.4 slijedi da je $-f$ rekurzivna funkcija.
Isto tako, vrijedi

$$||f(x)| - |F(x,i)|| \leq |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa iz propozicije 1.3.4 slijedi da je funkcija $|f|$ rekurzivna. □

Propozicija 2.3.11. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Neka je* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija i pretpostavimo da je* $f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{N}^k$. *Tada je funkcija* $\dfrac{1}{f}\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna.*

Dokaz. Kako je $0 < |f(x)|, \forall x \in \mathbb{N}^k$, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$4 \cdot 2^{-i} < |f(x)|, \forall x \in \mathbb{N}^k. \tag{2.10}$$

Budući da je

$$||f(x)| - |F(x,i)|| \leq |f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N},$$

slijedi da je

$$|F(x,i)| \in \left\langle |f(x)| - 2^{-i}, |f(x)| + 2^{-i} \right\rangle, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Iz (2.10) slijedi

$$3 \cdot 2^{-i} < |f(x)| - 2^{-i}, \tag{2.12}$$

pa iz (2.11) dobivamo

$$(\forall x \in \mathbb{N}^k)(\exists i \in \mathbb{N})\ 3 \cdot 2^{-i} < |F(x,i)|. \tag{2.13}$$

Pretpostavimo da za neke $x \in \mathbb{N}^k, i_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$3 \cdot 2^{-i_0} < |F(x,i_0)|. \tag{2.14}$$

Kako vrijedi

$$|f(x)| \in \left\langle |F(x,i_0)| - 2^{-i_0}, |F(x,i_0)| + 2^{-i_0} \right\rangle,$$

iz (2.14) slijedi da je

$$2 \cdot 2^{-i_0} < |f(x)|.$$

Uzmimo $i \geq i_0$. Tada je

$$2^{-i_0} + 2^{-i} \leq 2 \cdot 2^{-i_0} < |f(x)|$$

iz čega dobivamo
$$2^{-i_0} < |f(x)| - 2^{-i}$$
pa iz (2.11) slijedi
$$2^{-i_0} < |F(x,i)|\,,\ \forall i \geq i_0.$$
Neka je
$$S = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid 3 \cdot 2^{-i} < |F(x,i)|\}.$$
Iz propozicije 1.3.4 lako dobivamo da su funkcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ zadane s $(x,i) \mapsto 3 \cdot 2^{-i}$, $(x,i) \mapsto |F(x,i)|$ rekurzivne pa iz korolara 1.3.8 slijedi da je S rekurzivan skup. Zbog (2.13), prema propoziciji 1.1.22 postoji rekurzivna funkcija $\varphi \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je
$$(x, \varphi(x)) \in S, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
Dakle, vrijedi
$$3 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |F(x, \varphi(x))|\,, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$
pa iz (2.11) slijedi
$$2 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |f(x)|\,, \forall x \in \mathbb{N}^k. \tag{2.15}$$
Zatim iz (2.15) i (2.11) dobivamo
$$2^{-\varphi(x)} < |F(x, i + \varphi(x))|\,, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$
Sada zbog (2.15) i (2.16) vrijedi
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, i+\varphi(x))}\right| = \left|\frac{F(x, i+\varphi(x)) - f(x)}{f(x)F(x, i+\varphi(x))}\right| < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$
Konačno, iz propozicija 1.3.4 i 2.3.5 slijedi da je $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija. □

Korolar 2.3.12. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi. Tada su brojevi $-a, |a|\,, a+b, a \cdot b$ izračunljivi. Nadalje, ako je $a \neq 0$, onda je $\frac{1}{a}$ izračunljiv broj.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicija 2.3.2, 2.3.10, 2.3.11 i 2.3.3. □

Propozicija 2.3.13. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija $f \circ g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $F \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f. Vrijedi
$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Neka je $y \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$|f(g(y)) - F(g(y), i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $N^{n+1} \to \mathbb{Q}$ definirana s $(y, i) \mapsto F(g(y), i)$ je rekurzivna prema propoziciji 1.3.5 pa dobivamo da je $f \circ g$ rekurzivna funkcija. □

Primjer 2.3.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan. Prema korolaru 2.1.7 postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je*

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N})\ (x, y) \in T\}$$

i za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji najviše jedan $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in T$. Definirajmo funkciju $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ s

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^{y} \frac{\chi_T(x, i)}{10^i}, \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.6 lako slijedi da je funkcija F rekurzivna.
Neka je $x \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo $x \notin S$. Tada za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x, y) \notin T$ pa je

$$F(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo sada da je $x \in S$. Tada postoji jedinstveni $y_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y_0) \in T$. Zato za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin S \ \vee\ y < y_0 \\ \dfrac{1}{10^{y_0}}, & y \geq y_0 \end{cases}.$$

Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin S \\ \dfrac{1}{10^{y_0}}, & \text{inače, gdje je } y_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, y_0) \in T \end{cases}.$$

Primijetimo da je

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} = \mathbb{N} \backslash S$$

i taj skup nije rekurzivan jer bi u suprotnom i skup $(\mathbb{N} \backslash S)^c = S$ bio rekurzivan što je kontradikcija s pretpostavkom.
Neka je $x \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo prvo $x \notin S$. Tada je

$$|f(x) - F(x, y)| = 0 < 2^{-y}, \forall y \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo sada $x \in S$. Tada postoji jedinstveni $y_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y_0) \in T$.
Za $y < y_0$ vrijedi

$$|f(x) - F(x,y)| = \left| \frac{1}{10^{y_0}} - 0 \right| = \frac{1}{10^{y_0}} < \frac{1}{2^{y_0}} < 2^{-y}.$$

Za $y \geq y_0$ vrijedi

$$|f(x) - F(x,y)| = \left| \frac{1}{10^{y_0}} - \frac{1}{10^{y_0}} \right| = 0 < 2^{-y}.$$

Dakle,

$$|f(x) - F(x,y)| < 2^{-y}, \forall x, y \in \mathbb{N},$$

odnosno funkcija f je rekurzivna.
Time smo pronašli primjer rekurzivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ za koju skup

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} \tag{2.17}$$

nije rekurzivan. Uočimo i da je

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) > 0\} = S \tag{2.18}$$

što također nije rekurzivan skup.

Možemo primijetiti i da, iako je $f(N) \subseteq \mathbb{Q}$, f nije rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ jer bi u suprotnom skupovi (2.17) i (2.18) bili rekurzivni prema propoziciji 1.3.7.

Propozicija 2.3.15. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0 \right\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije f, odnosno

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ F(x,i) > 2^{-i}. \tag{2.19}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$.
Pretpostavimo da je $f(x) > 0$ i da je $F(x,i) \leq 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{i\to\infty} F(x,i) \leq \lim_{i\to\infty} 2^{-i} \Leftrightarrow f(x) \leq 0,$$

a to je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle

$$(\exists i \in \mathbb{N})\ F(x,i) > 2^{-i}.$$

Pretpostavimo sada da za neki $i_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F(x,i_0) > 2^{-i_0}.$$

Vrijedi

$$f(x) \in \left\langle F(x,i) - 2^{-i}, F(x,i) + 2^{-i} \right\rangle, \forall i \in \mathbb{N},$$

pa posebno vrijedi i

$$f(x) \in \left\langle F(x,i_0) - 2^{-i_0}, F(x,i_0) + 2^{-i_0} \right\rangle.$$

Sada imamo

$$f(x) > F(x,i_0) - 2^{-i_0} > 0.$$

Dakle, vrijedi (2.19). Neka je

$$T = \left\{ (x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}, F(x,i) > 2^{-i} \right\}.$$

Iz korolara 1.3.8 slijedi da je T rekurzivan skup. Zbog (2.19) očito vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ (x,i) \in T$$

pa iz teorema 2.1.8 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Primjer 2.3.16. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojiv skup koji nije rekurzivan te neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana kao u primjeru 2.3.14. U primjeru 2.3.14 je pokazano da vrijedi $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}$ i da je*

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) > 0\} = S$$

pa je

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\} = S^{\mathrm{c}}.$$

Sada vidimo da skup $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$ nije rekurzivno prebrojiv jer bi u suprotnom, prema teoremu 2.1.9, skup S bio rekurzivan.

Napomena 2.3.17. *Za rekurzivnu funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}^k$, funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ zadana s $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ rekurzivna. Dokaz se može pronaći u [2].*

Poglavlje 3

Strukture izračunljivosti

3.1 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 3.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\alpha\colon \mathbb{N} \to X$ niz gust u (X,d) takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ dana s*

$$(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$$

*rekurzivna. Uređenu trojku (X, d, α) zovemo **izračunljivim metričkim prostorom**. Za niz α kažemo da je **efektivan separirajući niz** u (X, d).*

Definicija 3.1.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definicija 3.1.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da je **izračunljiv niz** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Napomena 3.1.4. *Ako je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), onda je x_i izračunljiva točka u (X, d, α) za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

Neka je $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija za koju vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$f(k) = F(i, k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Očito je funkcija f rekurzivna i vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{f(k)}) = d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je x_i izračunljiva točka u (X, d, α).

Primjer 3.1.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s*

$$\alpha(i) = (-1)^{E(i,2)} \cdot \frac{E(i,0)}{E(i,1)+1}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Očito je α rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Nadalje, vrijedi $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ pa je α gust niz u $(\mathbb{R}, d)$. Budući da je

$$d(a,b) = |a-b|, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s

$$(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j), \forall i, j \in \mathbb{N},$$

je rekurzivna prema propozicijama 2.3.10 i 2.3.13. Sada vidimo da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor.

Primjer 3.1.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana s*

$$\alpha(i) = \left((-1)^{E(i,2)}\frac{E(i,0)}{E(i,1)+1}, (-1)^{E(i,5)}\frac{E(i,3)}{E(i,4)+1}, \ldots, (-1)^{E(i,3n-1)}\frac{E(i,3n-3)}{E(i,3n-2)+1}\right).$$

Očito je α rekurzivna funkcija i vrijedi $\alpha(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}^n$. Neka je $y \in \mathbb{Q}^n$. Tada postoje $y_0, y_1, \ldots, y_{3n-1} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$y = \left((-1)^{y_2}\frac{y_0}{y_1+1}, (-1)^{y_5}\frac{y_3}{y_4+1}, \ldots, (-1)^{y_{3n-1}}\frac{y_{3n-3}}{y_{3n-2}+1}\right).$$

Neka je $i = p_0^{y_0} \cdot p_1^{y_1} \cdots p_{3n-1}^{y_{3n-1}}$. Vidimo da je

$$\alpha(i) = y$$

pa slijedi da je $\mathbb{Q}^n \subseteq \alpha(\mathbb{N})$. Dakle, $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}^n$ pa je α gust niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Vrijedi

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = \sqrt{(\alpha_i^1 - \alpha_j^1)^2 + \cdots + (\alpha_i^n - \alpha_j^n)^2}, \forall i, j \in \mathbb{N},$$

Iz činjenice da je α rekurzivna funkcija, propozicija 2.3.10 i 2.3.13 te napomene 2.3.17 slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$$

rekurzivna. Dakle, $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Napomena 3.1.7. *Izračunljivi metrički prostor definiran u primjeru 3.1.6 još ćemo zvati i* ***n-dimenzionalnim izračunljivim euklidskim prostorom***.

Propozicija 3.1.8. *Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor te neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je x izračunljiv broj ako i samo ako je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$\left|x - \alpha_{f(k)}\right| = d(x, \alpha_{f(k)}), \forall k \in \mathbb{N}.$$

i $\alpha \circ f$ je rekurzivna prema propoziciji 2.3.13 pa slijedi da je x izračunljiv broj.

Pretpostavimo sada da je x izračunljiv broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|x - q(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ niz definiran u primjeru 3.1.5. Neka je

$$S = \left\{ (k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid q(k) = \alpha_j \right\}.$$

Iz propozicije 1.3.5 i korolara 1.3.8 slijedi da je S rekurzivan skup. Također, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in S$ pa prema propoziciji 1.1.22 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, f(k)) \in S, \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$q(k) = \alpha_{f(k)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\left|x - \alpha_{f(k)}\right| = |x - q(k)| < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. □

Propozicija 3.1.9. *Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor te $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$. Tada je x rekurzivan kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ako i samo ako je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

d je euklidska metrika na $\mathbb{R}$ pa vrijedi

$$\left|x_i - \alpha_{F(i,k)}\right| = d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je funkcija $\alpha \circ F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna pa je $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.

Pretpostavimo sada da je $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Neka je $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija funkcije x, odnosno vrijedi

$$|x_i - G(i,k)| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo skup

$$S = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid G(i,k) = \alpha_j \right\}.$$

Za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in S$ pa postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i,k,f(i,k)) \in S, \forall (i,k) \in \mathbb{N}^2,$$

odnosno

$$G(i,k) = \alpha_{f(i,k)}, \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\left|x_i - \alpha_{f(i,k)}\right| = |x_i - G(i,k)| < 2^{-k}, \forall i,k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. □

Propozicija 3.1.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka su $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tada su $x_1, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi ako i samo ako je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$\sqrt{(x_1 - \alpha^1_{f(k)})^2 + \ldots + (x_n - \alpha^n_{f(k)})^2} < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$\left|x_i - \alpha^i_{f(k)}\right| \leq \sqrt{(x_1 - \alpha^1_{f(k)})^2 + \ldots + (x_n - \alpha^n_{f(k)})^2}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \in \mathbb{N},$$

dobivamo da je

$$\left|x_i - \alpha^i_{f(k)}\right| < 2^{-k}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

α je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ pa je funkcija $\alpha^i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je $\alpha^i \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ iz čega slijedi da je x_i izračunljiv broj za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pretpostavimo sada da su $x_1, \dots, x_n$ izračunljivi brojevi. Tada postoje rekurzivne funkcije $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takve da je

$$|x_i - f_i(k)| < 2^{-k}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$g(k) = k + n.$$

Funkcija g je očito rekurzivna pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da je funkcija $f_i \circ g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Vrijedi

$$|x_i - (f_i \circ g)(k)| = |x_i - f_i(k+n)| < 2^{-(k+n)}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je

$$S = \left\{ (k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid ((f_1 \circ g)(k), \dots, (f_n \circ g)(k)) = \alpha_j \right\}$$

Zbog korolara 1.3.8, skup S je rekurzivan kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. Također, u primjeru 3.1.6 je pokazano da je funkcija α surjekcija pa za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in S$. Sada iz propozicije 1.1.22 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, f(k)) \in S, \forall k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$((f_1 \circ g)(k), \dots, (f_n \circ g)(k)) = \alpha_{f(k)}, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa je

$$(f_i \circ g)(k) = \alpha^i_{f(k)}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\left| x_i - \alpha^i_{f(k)} \right| < 2^{-(k+n)}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi

$$(x_i - \alpha^i_{f(k)})^2 < 2^{-2(k+n)}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je

$$n \cdot 2^{-2n} < 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

imamo

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha^i_{f(k)})^2 < n \cdot 2^{-2(k+n)} < 2^{-2k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sada je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha^i_{f(k)})^2} < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

iz čega slijedi da je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. □

Propozicija 3.1.11. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Neka je* $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ *izračunljiv euklidski prostor i neka je* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *niz u* $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. *Tada su nizovi* $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ *rekurzivni kao funkcije* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *ako i samo ako je* (x_i) *izračunljiv niz u* $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$\sqrt{(x_i^1 - \alpha^1_{F(i,k)})^2 + \cdots + (x_i^n - \alpha^n_{F(i,k)})^2} < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi da je

$$\left|x_i^1 - \alpha^1_{F(i,k)}\right|, \dots, \left|x_i^n - \alpha^n_{F(i,k)}\right| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 1.3.5 slijedi da je funkcija $\alpha^j \circ F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ pa su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ rekurzivni kao funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da su nizovi $(x_i^1), \dots, (x_i^n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada postoje rekurzivne funkcije $G_1, \dots, G_n \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$\left|x_i^1 - G_1(i,k)\right|, \dots, \left|x_i^n - G_n(i,k)\right| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $H \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s

$$H(i,k) = (i, k+n), \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

H je očito rekurzivna pa je prema propoziciji 1.3.5 i funkcija $G_l \circ H \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna za svaki $l \in \{1, \dots, n\}$. Sada imamo

$$\left|x_i^l - (G_l \circ H)(i,k)\right| = \left|x_i^l - G_l(i, k+n)\right| < 2^{-(k+n)}, \forall i, k \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1, \dots, n\}.$$

Neka je

$$S = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid ((G_1 \circ H)(i,k), \dots, (G_n \circ H)(i,k)) = \alpha_j \right\}.$$

Iz korolara 1.3.8 slijedi da je S rekurzivan kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. Također, budući da je α surjekcija, za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in S$ pa prema propoziciji 1.1.22 postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, k, F(i,k)) \in S, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$((G_1 \circ H)(i,k), \dots, (G_n \circ H)(i,k)) = \alpha_{F(i,k)}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Dakle,
$$(G_l \circ H)(i,k) = \alpha^l_{F(i,k)}, \forall i,k \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1,\ldots,n\}$$
pa imamo
$$\left|x^l_i - \alpha^l_{F(i,k)}\right| < 2^{-(k+n)}, \forall i,k \in \mathbb{N}, \forall l \in \{1,\ldots,n\},$$
što daje
$$\sum_{l=1}^{n}(x^l_i - \alpha^l_{F(i,k)})^2 < n \cdot 2^{-2(k+n)} < 2^{-2k}, \forall i,k \in \mathbb{N}.$$
Sada slijedi
$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) = \sqrt{\sum_{l=1}^{n}(x^l_i - \alpha^l_{F(i,k)})^2} < 2^{-k}, \forall i,k \in \mathbb{N},$$
pa je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. □

Definicija 3.1.12. *Neka su α i β efektivni separirajući nizovi u metričkom prostoru (X,d). Kažemo da su α i β* ***ekvivalentni*** *ako je α izračunljiv niz u (X,d,β) i to označavamo s $\alpha \sim \beta$.*

Lema 3.1.13. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka su $a, a', b, b' \in X$. Tada vrijedi*
$$|d(a,b) - d(a',b')| \leq d(a,a') + d(b',b).$$

Dokaz. Nejednakost trokuta daje da vrijedi
$$d(a,b) \leq d(a,a') + d(a',b') + d(b',b)$$
iz čega slijedi
$$d(a,b) - d(a',b') \leq d(a,a') + d(b',b)$$
pa dobivamo
$$|d(a,b) - d(a',b')| \leq d(a,a') + d(b',b).$$
□

Propozicija 3.1.14. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te neka su $(x_i), (y_j)$ izračunljivi nizovi u (X,d,α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ dana s*
$$(i,j) \mapsto d(x_i, y_j), \forall i,j \in \mathbb{N},$$
rekurzivna.

Dokaz. Kako su $(x_i), (y_j)$ izračunljivi u (X, d, α), postoje rekurzivne funkcije $F, G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-(k+1)}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$
$$d(y_i, \alpha_{G(i,k)}) < 2^{-(k+1)}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Iz leme 3.1.13 slijedi

$$\left|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)})\right| \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) + d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2^{-k}, \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkciju $\gamma\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

γ je rekurzivna jer je α efektivan separirajući niz u (X, d). Neka je $H\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s

$$H(i, j, k) = (F(i, k), G(j, k)).$$

Iz propozicije 1.1.13 slijedi da je H rekurzivna funkcija. Definirajmo funkciju $\Gamma\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ s

$$\Gamma = \gamma \circ H.$$

Funkcija Γ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija i vrijedi

$$\Gamma(i, j, k) = \gamma(H(i, j, k)) = \gamma(F(i, k), G(j, k)) = d(\alpha_{F(i,k)}, \alpha_{G(j,k)}), \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Sada iz leme 2.3.6 slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.1.15. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α, β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da je $\alpha \sim \beta$. Tada je $\beta \sim \alpha$.*

Dokaz. Neka je

$$\Omega = \left\{ (i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k} \right\}.$$

Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f(i, j) = d(\beta_i, \alpha_j).$$

Budući da su α i β izračunljivi nizovi u (X, d, β), iz propozicije 3.1.14 slijedi da je f rekurzivna funkcija. Sada iz napomene 2.3.4 te propozicija 2.3.10 i 2.3.15 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Kako su α i β gusti nizovi u (X, d, β), za svaki $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da je

$$(i, k, j) \in \Omega.$$

Sada iz propozicije 2.1.10 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, k, F(i, k)) \in \Omega, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi $\beta \sim \alpha$. $\square$

Propozicija 3.1.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α, β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da je $\alpha \sim \beta$. Neka je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α). Tada je niz (x_i) izračunljiv u (X, d, β).*

Dokaz. (x_i) je izračunljiv u (X, d, α) pa postoji rekurzivna funkcija $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je $\alpha \sim \beta$, α je izračunljiv u (X, d, β) pa postoji rekurzivna funkcija $G: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(\alpha_i, \beta_{G(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi

$$d(\alpha_{F(i,k)}, \beta_{G(F(i,k),k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$d(x_i, \beta_{G(F(i,k+1),k+1)}) \leq d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) + d(\alpha_{F(i,k+1)}, \beta_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadana s

$$(i, k) \mapsto G(F(i, k + 1), k + 1)$$

je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa je (x_i) izračunljiv u (X, d, β). $\square$

Korolar 3.1.17. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su α, β, γ efektivni separirajući nizovi u (X, d). Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \sim \beta$ i $\beta \sim \gamma$. Tada vrijedi $\alpha \sim \gamma$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz propozicije 3.1.16. $\square$

Napomena 3.1.18. *Očito vrijedi $\alpha \sim \alpha$ pa iz propozicije 3.1.15 i korolara 3.1.17 slijedi da je $\sim$ relacija ekvivalencije.*

Propozicija 3.1.19. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α). Pretpostavimo da je (y_i) niz u X za koji postoji rekurzivna funkcija $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa svojstvom*

$$d(y_i, x_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je (y_i) izračunljiv niz u (X, d, α).

Dokaz. Budući da je (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α), postoji rekurzivna funkcija $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$d(x_i, \alpha_{G(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi

$$d(y_i, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) \leq d(y_i, x_{F(i,k+1)}) + d(x_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(F(i,k+1),k+1)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadana s

$$(i, k) \mapsto G(F(i, k+1), k+1)$$

je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa je (y_i) izračunljiv u (X, d, α). □

Napomena 3.1.20. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $(x_i), (y_i)$ nizovi u X.*

(1) Ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$, rekurzivna, pišemo $(x_i) \diamond (y_j)$.

(2) Ako postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, y_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}$, pišemo $(x_i) \preceq (y_j)$.

3.2 Strukture izračunljivosti

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{N}}, \mathcal{S} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da vrijedi:*

(i) ako su $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$, onda je $(x_i) \diamond (y_j)$;

(ii) ako su $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}, (y_j) \in \mathcal{S}$ i vrijedi $(x_i) \preceq (y_j)$, onda je $(x_i) \in \mathcal{S}$.

Tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je ***struktura izračunljivosti*** *na (X, d).*

Napomena 3.2.2. *(1) Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. S $\mathcal{S}_\alpha$ označavamo skup svih izračunljivih nizova u (X, d, α). Iz propozicija 3.1.14 i 3.1.16 slijedi da je $\mathcal{S}_\alpha$ struktura izračunljivosti na (X, d).*

(2) Neka su (X, d) metrički prostor i α, β efektivni separirajući nizovi u (X, d) takvi da je $\alpha \sim \beta$. Onda je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta$. Iz propozicije 3.1.16 slijedi $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$, a obrat slijedi zbog simetričnosti relacije $\sim$.

(3) Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, onda je (X, d) separabilan.

Primjer 3.2.3. *Neka je X neprebrojiv skup i neka je d diskretna metrika na X. Tada je svaki podskup od X otvoren i zatvoren u X pa je X jedini gust skup u (X, d). Kako X nije prebrojiv, slijedi da X nije separabilan pa iz napomene 3.2.2 slijedi da ne postoji niz α u X takav da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.*

Primjer 3.2.4. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ neizračunljiv broj. Neka je $X = \{0, x\}$, a d euklidska metrika na X. Pretpostavimo da postoji efektivan separirajući niz α u (X, d). Budući da je α gust u (X, d) slijedi da je $\alpha(\mathbb{N}) = X$ pa postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $\alpha_i = 0$ i $\alpha_j = x$. Sada dobivamo*

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i - \alpha_j| = |x|$$

pa je prema propoziciji 2.3.3 $|x|$ izračunljiv broj, a to je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, ne postoji efektivan separirajući niz u (X, d).

Primjer 3.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $a \in X$. Neka je*

$$\mathcal{S} = \{ (a, a, a, \dots) \} .$$

Za $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$ očito vrijedi $(x_i) \diamond (y_j)$.

Neka su $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}, (y_j) \in \mathcal{S}$ i pretpostavimo da vrijedi $(x_i) \preceq (y_j)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, y_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Slijedi da je

$$x_i = a, \forall i \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$(x_i) = (a, a, a, \dots) \in \mathcal{S}.$$

Dakle, $\mathcal{S}$ je struktura izračunljivosti na (X, d).

Napomena 3.2.6. *Uočimo da, ako X iz primjera 3.2.5 ima barem dvije točke, onda $\mathcal{S}$ nije oblika $\mathcal{S}_\alpha$ niti za jedan niz α. U suprotnom bi vrijedilo $\alpha \in \mathcal{S}$, odnosno $\alpha = (a, a, a, \dots)$, a to nije gust skup u (X, d).*

Definicija 3.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Za $\mathcal{S}$ kažemo da je* **separabilna** *struktura izračunljivosti ako postoji efektivan separirajući niz α u (X, d) takav da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$.*

Propozicija 3.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X, d). Tada je $\mathcal{S}$ separabilna ako i samo ako postoji niz $\alpha \in \mathcal{S}$ koji je gust u (X, d).*

Dokaz. Ako je $\mathcal{S}$ separabilna, onda postoji efektivan separirajući niz α takav da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$. Očito je α gust niz u (X,d) i $\alpha \in \mathcal{S}$.

Pretpostavimo da postoji niz $\alpha \in \mathcal{S}$ koji je gust u (X,d). Uočimo najprije da vrijedi

$$\alpha \diamond \alpha$$

pa je α efektivan separirajući niz. Dokažimo da vrijedi

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha.$$

Neka je $(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha$. Tada vrijedi

$$(x_i) \preceq \alpha.$$

Kako je $\alpha \in \mathcal{S}$, a $\mathcal{S}$ je struktura izračunljivosti, vrijedi

$$(x_i) \in \mathcal{S}.$$

Dakle, $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}$.

Neka je sada $(x_i) \in \mathcal{S}$. Budući da je $\alpha \in \mathcal{S}$, vrijedi

$$(x_i) \diamond \alpha. \tag{3.1}$$

Neka je

$$\Omega = \left\{ (i,k,j) \in \mathbb{N}^3 \mid d(x_i,\alpha_j) < 2^{-k} \right\}.$$

Iz (3.1), napomene 2.3.4 te propozicija 2.3.10 i 2.3.15 slijedi da je skup Ω rekurzivno prebrojiv. Također, budući da je α gust u (X,d), za svaki $(i,k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i,k,j) \in \Omega$. Sada iz propozicije 2.1.10 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i,k,F(i,k)) \in \Omega,$$

odnosno

$$d(x_i,\alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i,k \in \mathbb{N}.$$

Dobivamo da vrijedi

$$(x_i) \preceq \alpha$$

pa slijedi

$$(x_i) \in \mathcal{S}_\alpha,$$

odnosno $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_\alpha$. Dakle, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$ pa je $\mathcal{S}$ separabilna. □

Definicija 3.2.9. *Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na (X,d). Za $a \in X$ kažemo da je **izračunljiva točka u (X,d) s obzirom na $\mathcal{S}$** ako postoje niz $(x_i) \in \mathcal{S}$ i rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvi da vrijedi*

$$d(a,x_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Skup svih izračunljivih točaka s obzirom na $\mathcal{S}$ označavamo s $\mathcal{S}^0$.

Propozicija 3.2.10. *Neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d) i neka je $a \in X$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) a je izračunljiva točka u (X, d) s obzirom na $\mathcal{S}$;

(2) postoje $(x_i) \in \mathcal{S}$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_i = a$;

(3) $(a, a, a, \dots) \in \mathcal{S}$.

Dokaz. $(3 \Rightarrow 2)$ Očito.

$(2 \Rightarrow 1)$ Pretpostavimo da postoje $(x_i) \in \mathcal{S}$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_i = a$. Definirajmo funkciju $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$f(k) = i, \forall k \in \mathbb{N}.$$

f je očito rekurzivna i vrijedi

$$d(a, x_{f(k)}) = d(a, x_i) = d(a, a) = 0 < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi da je a izračunljiva točka u (X, d) s obzirom na $\mathcal{S}$.

$(1 \Rightarrow 3)$ Pretpostavimo da je a izračunljiva točka u (X, d) s obzirom na $\mathcal{S}$. Tada postoje $(x_i) \in \mathcal{S}$ i rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(a, x_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Neka je $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$F(i, k) = f(k), \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

F je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Neka je $(y_j) = (a, a, a, \dots)$ niz u X. Vrijedi

$$d(y_j, x_{F(j,k)}) = d(a, x_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall j, k \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi

$$(y_j) \preceq (x_i).$$

Budući da je $(x_i) \in \mathcal{S}$, a $\mathcal{S}$ je struktura izračunljivosti, imamo

$$(a, a, a, \dots) = (y_j) \in \mathcal{S}.$$

□

3.3 Maksimalne strukture izračunljivosti

Definicija 3.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za strukturu izračunljivosti $\mathcal{S}$ na (X, d) kažemo da je* ***maksimalna*** *struktura izračunljivosti ako ne postoji struktura izračunljivosti $\mathcal{S}'$ na (X, d) takva da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ i $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$.*

Propozicija 3.3.2. *Neka je $\mathcal{S}$ separabilna struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d). Tada je $\mathcal{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d).*

Dokaz. Neka je α efektivan separirajući niz u (X, d) za koji je

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha.$$

Pretpostavimo da postoji struktura izračunljivosti $\mathcal{T}$ na (X, d) takva da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Znamo da je $\alpha \in \mathcal{S}$ pa je i $\alpha \in \mathcal{T}$. Budući da je α gust niz u (X, d), prema propoziciji 3.2.8 slijedi da je $\mathcal{T}$ separabilna i iz dokaza te propozicije se vidi da je

$$\mathcal{T} = \mathcal{S}_\alpha.$$

Dakle,

$$\mathcal{T} = \mathcal{S}$$

pa je $\mathcal{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d). □

Propozicija 3.3.3. *Neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d). Tada postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathcal{M}$ na (X, d) takva da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$.*

Dokaz. Neka je

$$T = \left\{ \mathcal{T} \subseteq X^{\mathbb{N}} \mid \mathcal{T} \text{ je struktura izračunljivosti na } (X, d) \text{ i } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \right\}$$

i neka je $\subseteq$ parcijalni uređaj na T, odnosno $(T, \subseteq)$ je parcijalno uređen skup.
$\mathcal{S} \in T$ pa slijedi

$$T \neq \emptyset.$$

Neka je $L \neq \emptyset$ lanac u T.

Neka su

$$(x_i), (y_j) \in \bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L}.$$

Tada postoje $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in L$ takvi da je

$$(x_i) \in \mathcal{L}_1 \wedge (y_j) \in \mathcal{L}_2.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Tada vrijedi

$$(x_i), (y_j) \in \mathcal{L}_2$$

pa, budući da je $\mathcal{L}_2$ struktura izračunljivosti na (X, d), slijedi

$$(x_i) \diamond (y_j).$$

Pretpostavimo sada da su $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}$ i $(y_j) \in \bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L}$ takvi da vrijedi

$$(x_i) \preceq (y_j).$$

Postoji $\mathcal{L} \in L$ takav da je $(y_j) \in \mathcal{L}$, a $\mathcal{L}$ je struktura izračunljivosti na (X, d) pa slijedi

$$(x_i) \in \mathcal{L} \subseteq \bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L}.$$

Dakle, $\bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L}$ je struktura izračunljivosti na (X, d). Također, za svaki $\mathcal{L} \in L$ vrijedi

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$$

pa slijedi

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L}.$$

Sada dobivamo da je

$$\bigcup_{\mathcal{L} \in L} \mathcal{L} \in T$$

pa iz Zornove leme slijedi da skup T ima maksimalni element $\mathcal{M}$. Jasno je da vrijedi

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}.$$

Pretpostavimo da $\mathcal{M}$ nije maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d). Tada postoji struktura izračunljivosti $\mathcal{N}$ na (X, d) takva da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ i $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$. Slijedi da je $\mathcal{N} \in T$, a to je kontradikcija s činjenicom da je $\mathcal{M}$ maksimalni element skupa T. Dakle, $\mathcal{M}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d). □

Napomena 3.3.4. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ i α niz definiran u primjeru 3.1.6. Tada za*

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_i) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \mid (x_i) \text{ izračunljiv niz u } (\mathbb{R}^n, d) \right\}$$

vrijedi $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\alpha$.

Definicija 3.3.5. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Ako je $k = 0$ ili je $k \geq 1$ i vektori $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ su linearno nezavisni, onda za $a_0, a_1, \ldots, a_k$ kažemo da je* ***geometrijski nezavisan konačan niz*** *točaka u $\mathbb{R}^n$.*

Propozicija 3.3.6. *Neka je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d). Tada vrijedi:*

(1) Ako su $a, b \in \mathcal{S}^0$, onda je $d(a, b)$ izračunljiv broj.

(2) Ako su $a \in \mathcal{S}^0, (x_i) \in \mathcal{S}$, onda je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(a, x_i)$, rekurzivna.

Dokaz. (2) Neka su $a \in \mathcal{S}^0, (x_i) \in \mathcal{S}$. Iz propozicije 3.2.10 slijedi da je

$$(a, a, a, \ldots) \in \mathcal{S}$$

pa je funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$F(i, j) = d(a, x_j)$$

rekurzivna. Sada iz propozicije 2.3.13 slijedi da je rekurzivna i funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(i) = F(0, i) = d(a, x_i).$$

(1) Neka su $a, b \in \mathcal{S}^0$. Prema propoziciji 3.2.10 vrijedi

$$(b, b, b, \ldots) \in \mathcal{S}.$$

Sada iz (1) slijedi da je funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(i) = d(a, b)$$

rekurzivna pa je prema propoziciji 2.3.3 $d(a, b)$ izračunljiv broj. □

Lema 3.3.7. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisan konačan niz točaka u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da su $a_0, \ldots, a_n$ izračunljive točke u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji matrica $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ čiji su koeficijenti izračunljivi brojevi takva da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, vrijedi*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d^2(x, a_1) - d^2(x, a_0) \\ d^2(x, a_2) - d^2(x, a_0) \\ \vdots \\ d^2(x, a_n) - d^2(x, a_0) \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Neka je $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Označimo

$$r_i = d(x, a_i), \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Vrijedi

$$r_i^2 = \langle x, a_i \rangle, \forall i \in \{0, \dots, n\},$$

pa slijedi

$$r_i^2 - r_0^2 = \langle x, a_i \rangle - \langle x, a_0 \rangle = \langle x, a_i - a_0 \rangle, \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Neka je

$$B = \begin{bmatrix} a_1 - a_0 \\ a_2 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_0 \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Iz propozicije 3.1.10 slijedi da su koeficijenti matrice B izračunljivi brojevi. Nadalje, $a_0, \dots, a_n$ je geometrijski nezavisan niz, odnosno vektori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ su linearno nezavisni, pa slijedi da je matrica B regularna. Vrijedi

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_0 \\ a_2 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^2 - r_0^2 \\ r_2^2 - r_0^2 \\ \vdots \\ r_n^2 - r_0^2 \end{bmatrix}.$$

Neka je $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$,

$$A = B^{-1}.$$

Koeficijenti matrice A su dobiveni operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja iz koeficijenata matrice B pa su prema korolaru 2.3.12 izračunljivi brojevi. Također, vrijedi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_1^2 - r_0^2 \\ r_2^2 - r_0^2 \\ \vdots \\ r_n^2 - r_0^2 \end{bmatrix}.$$

□

Napomena 3.3.8. *Neka je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor. $\mathcal{S}_\alpha$ zvat ćemo* ***kanonskom*** *strukturom izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Propozicija 3.3.9. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisan konačan niz točaka u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da su $a_0, \dots, a_n$ izračunljive točke u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, da je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$ te da su $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{M}^0$. Tada je $\mathcal{M}$ kanonska struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. Neka je $(x_i) \in \mathcal{M}, x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n), \forall i \in \mathbb{N}$, i neka je $\mathcal{K}$ kanonska struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Prema lemi 3.3.7 postoji $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ s izračunljivim koeficijentima takva da vrijedi

$$\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d^2(x_i, a_1) - d^2(x_i, a_0) \\ d^2(x_i, a_2) - d^2(x_i, a_0) \\ \vdots \\ d^2(x_i, a_n) - d^2(x_i, a_0) \end{bmatrix}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo nizove $(y_i^1), \dots, (y_i^n)$ u $\mathbb{R}$ s

$$\begin{aligned} y_i^1 &= d^2(x_i, a_1) - d^2(x_i, a_0), \forall i \in \mathbb{N}, \\ y_i^2 &= d^2(x_i, a_2) - d^2(x_i, a_0), \forall i \in \mathbb{N}, \\ &\vdots \\ y_i^n &= d^2(x_i, a_n) - d^2(x_i, a_0), \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Budući da je $a_j \in \mathcal{M}^0$ za svaki $j \in \{0, \dots, n\}$ i $(x_i) \in \mathcal{M}$, iz propozicije 3.3.6 slijedi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dana s

$$i \mapsto d(x_i, a_j)$$

rekurzivna za svaki $j \in \{0, \dots, n\}$. Sada iz propozicije 2.3.10 slijedi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$i \mapsto d^2(x_i, a_j)$$

rekurzivna za svaki $j \in \{0, \dots, n\}$ pa su posljedično nizovi $(y_i^1), \dots, (y_i^n)$ rekurzivne funkcije. Sada imamo

$$\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \\ \vdots \\ y_i^n \end{bmatrix}$$

pa vrijedi

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot y_i^j, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Kako su koeficijenti matrice A izračunljivi brojevi i funkcije $(y_i^1), \dots, (y_i^n)$ su rekurzivne, iz propozicija 2.3.2 i 2.3.10 slijedi da su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ rekurzivne funkcije. Sada iz propozicije 3.1.11 slijedi da je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, odnosno

$$(x_i) \in \mathcal{K}.$$

Sada imamo da je

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}.$$

Budući da je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, vrijedi

$$\mathcal{M} = \mathcal{K}.$$

□

Definicija 3.3.10. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $a_0, \dots, a_k$ u X kažemo da je* ***efektivan konačan niz*** *ako je $d(a_i, a_j)$ izračunljiv broj za sve $i, j \in \{0, \dots, k\}$.*

Napomena 3.3.11. *Primijetimo da, ako je $\mathcal{S}$ struktura izračunljivosti na metričkom prostoru (X, d) i $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{S}^0$, je onda $a_0, \dots, a_k$ efektivan konačan niz.*

Obratno, pretpostavimo da je $a_0, \dots, a_k$ efektivan konačan niz u (X, d). Tada postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathcal{M}$ na (X, d) takva da su $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{M}^0$. Neka je

$$\mathcal{S} = \{\, (a_0, a_0, \dots), (a_1, a_1, \dots), \dots, (a_k, a_k, \dots) \,\}\,.$$

Neka su $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}$. Tada postoje $r, s \in \{0, \dots, k\}$ takvi da je

$$(x_i) = (a_r, a_r, \dots),$$
$$(y_j) = (a_s, a_s, \dots).$$

Kako je $a_0, \dots, a_k$ efektivan konačan niz, iz propozicije 2.3.2 slijedi da vrijedi

$$(x_i) \diamond (y_j).$$

Neka su sada $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}$ i $(y_j) \in \mathcal{S}$ takvi da je $(x_i) \preceq (y_j)$. Postoji $r \in \{0, \dots, k\}$ takav da je

$$(y_j) = (a_r, a_r, \dots).$$

Slijedi da je

$$d(x_i, a_r) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

pa dobivamo

$$(x_i) = (y_j) \in \mathcal{S}.$$

Dakle, $\mathcal{S}$ je struktura izračunljivosti na (X, d) pa prema propoziciji 3.3.3 postoji maksimalna struktura izračunljivosti $\mathcal{M}$ na (X, d) takva da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ i vrijedi $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{M}^0$.

Propozicija 3.3.12. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i neka je $a_0, \dots, a_n$ efektivan konačan geometrijski nezavisan niz u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji surjektivna izometrija $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da su $f(a_0), \dots, f(a_n)$ geometrijski nezavisne izračunljive točke u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. $a_0, \dots, a_n$ je geometrijski nezavisan niz pa je skup $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ linearno nezavisan. Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije dobivamo ortonormiranu bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ od $\mathbb{R}^n$ takvu da je

$$[\{a_1 - a_0, \dots, a_j - a_0\}] = [\{e_1, \dots, e_j\}], \forall j \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.2}$$

Neka su $g, h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preslikavanja definirana s

$$g(x) = x - a_0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
$$h(t_1 e_1 + \dots + t_n e_n) = (t_1, \dots, t_n), \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Lako se dokaže da su preslikavanja g i h izometrije pa slijedi da je i preslikavanje $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dano s

$$f = h \circ g$$

izometrija.
Neka je $y \in \mathbb{R}^n$. Tada je $y = (t_1, \dots, t_n)$ za neke $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Neka je

$$x = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n + a_0.$$

Vrijedi

$$f(x) = h(g(x)) = h(x - a_0) = h(t_1 e_1 + \dots + t_n e_n) = (t_1, \dots, t_n) = y$$

pa slijedi da je f surjekcija.

Očito je $f(a_0) = 0$ i pokažimo da vrijedi

$$f(a_k) \in \{ (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0) \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \neq 0 \}, \forall k \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.3}$$

Neka je $k \in \{1, \dots, n\}$. Tada je

$$f(a_k) = h(a_k - a_0) = h(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$$

za neke $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Kada bi bilo $t_k = 0$, slijedilo bi da je

$$a_k - a_0 \in [\{e_1, \dots, e_{k-1}\}],$$

a to je nemoguće zbog (3.2) i činjenice da je skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za $\mathbb{R}^n$. Dakle, $t_k \neq 0$ pa vrijedi (3.3).

Pokažimo sada da je $f(a_k)$ izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ za svaki $k \in \{0, \dots, n\}$.
$f(a_0) = 0$ pa je prema propoziciji 3.1.10 $f(a_0)$ izračunljiva točka.
Za svaki $k \in \{1, \dots, n\}$ je

$$f(a_k) = \left(b_1^k, \dots, b_k^k, 0, \dots, 0\right)$$

za neke $b_1^k, \dots, b_k^k \in \mathbb{R}$.
Neka je $k \in \{1, \dots, n\}$ i pretpostavimo da su $f(a_1), \dots, f(a_{k-1})$ izračunljive točke. Za $l \in \{0, \dots, k-1\}$ neka je

$$r_l = d(f(a_k), f(a_l)).$$

f je izometrija, a $a_0, \dots, a_n$ je efektivan niz pa slijedi da je r_l izračunljiv broj za svaki $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \left(b_1^k\right)^2 + \cdots + \left(b_k^k\right)^2, \\ r_1^2 &= \left(b_1^k - b_1^1\right)^2 + \left(b_2^k\right)^2 + \cdots + \left(b_k^k\right)^2, \\ &\vdots \\ r_{k-1}^2 &= \left(b_1^k - b_1^{k-1}\right)^2 + \cdots + \left(b_{k-1}^k - b_{k-1}^{k-1}\right)^2 + \left(b_k^k\right)^2. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$r_1^2 - r_0^2 = \left(b_1^k - b_1^1\right)^2 - \left(b_1^k\right)^2 = -2b_1^k b_1^1 + \left(b_1^1\right)^2$$

pa je

$$b_1^k = -\frac{1}{2b_1^1}\left(r_1^2 - r_0^2 - \left(b_1^1\right)^2\right).$$

Iz propozicije 3.1.10 i korolara 2.3.12 dobivamo da je b_1^k izračunljiv broj.
Induktivno oduzimanjem dobivenih jednakosti slijedi da je b_l^k izračunljiv broj za svaki $l \in \{1, \dots, k-1\}$. Nadalje, imamo

$$\left(b_k^k\right)^2 = r_{k-1}^2 - \left(b_1^k - b_1^{k-1}\right)^2 - \cdots - \left(b_{k-1}^k - b_{k-1}^{k-1}\right)^2$$

pa iz propozicije 3.1.10 i korolara 2.3.12 slijedi da je $(b_k^k)^2$ izračunljiv broj, a onda iz propozicija 2.3.2, 2.3.3 i napomene 2.3.17 slijedi da je b_k^k izračunljiv broj.
Sada imamo da su $b_1^k, \dots, b_k^k$ izračunljivi brojevi pa iz propozicije 3.1.10 slijedi da je $f(a_k)$ izračunljiva točka.
Dakle, $f(a_k)$ je izračunljiva točka za svaki $k \in \{0, \dots, n\}$.

Pokažimo još i da je $f(a_0), \dots, f(a_n)$ geometrijski nezavisan niz. Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha_1 \left(f(a_1) - f(a_0)\right) + \cdots + \alpha_n \left(f(a_n) - f(a_0)\right) = 0.$$

$f(a_0) = 0$ pa imamo

$$\alpha_1 f(a_1) + \cdots + \alpha_n f(a_n) = 0.$$

Za svaki $k \in \{1, \dots, n\}$ je $f(a_k) = \left(b_1^k, \dots, b_k^k, 0, \dots, 0\right), b_1^k, \dots, b_k^k \in \mathbb{R}, b_k^k \neq 0$, pa slijedi

$$\alpha_1 \left(b_1^1, 0, \dots, 0\right) + \cdots + \alpha_n \left(b_1^n, \dots, b_n^n\right) = 0,$$

a to vrijedi samo za

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Slijedi da je $f(a_0), \ldots, f(a_n)$ geometrijski nezavisan konačan niz. $\square$

Propozicija 3.3.13. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $a_0, \ldots, a_n$ izračunljive točke u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ i pretpostavimo da je $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisan konačan niz. Neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $(d(x_i, a_k))_{i\in\mathbb{N}}$ rekurzivan niz realnih brojeva za svaki $k \in \{0, \ldots, n\}$. Tada je (x_i) izračunljiv niz u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.*

Dokaz. Prema lemi 3.3.7 postoji matrica $A = [a_{ij}] \in M_{n\times x}(\mathbb{R})$ s izračunljivim koeficijentima takva da za svaki $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d^2(x, a_1) - d^2(x, a_0) \\ \vdots \\ d^2(x, a_n) - d^2(x, a_0) \end{bmatrix}.$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{bmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d^2(x_i, a_1) - d^2(x_i, a_0) \\ \vdots \\ d^2(x_i, a_n) - d^2(x_i, a_0) \end{bmatrix}$$

pa dobivamo da je

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \left(d^2(x_i, a_j) - d^2(x_i, a_0)\right), \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svaki od nizova $(x_i^1), \ldots, (x_i^n)$ je dobiven kao zbroj rekurzivnih nizova pomnoženih izračunljivim brojevima pa su, prema propozicijama 2.3.2 i 2.3.10, rekurzivne funkcije. Sada iz propozicije 3.1.11 slijedi da je (x_i) izračunljiv niz. $\square$

Primjer 3.3.14. *Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i $x, y \in X$ takve da je $d(x, y)$ izračunljiv broj, ne mora nužno vrijediti da su x, y izračunljive.*

Neka je $(\mathbb{R}^2, d, \alpha)$ dvodimenzionalni izračunljivi euklidski prostori neka je $a_0 = (0, 0)$. Neka je $x \in \langle 0, 1\rangle$ neizračunljiv broj i definirajmo

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Vrijedi

$$d((x, y), a_0) = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

što je izračunljiv broj, ali (x, y) nije izračunljiva točka zbog propozicije 3.1.10.

Definicija 3.3.15. *Neka je $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka je $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisan niz točaka u $\mathbb{R}^N$. Neka je*

$$\mathcal{P} = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_0) \;\middle|\; t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Za $\mathcal{P}$ kažemo da je ***ravnina*** *u $\mathbb{R}^N$ razapeta točkama $a_0, \ldots, a_n$.*

Lema 3.3.16. *Neka je $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $\mathcal{P}$ ravnina u $\mathbb{R}^N$ razapeta točkama $a_0, \ldots, a_n$. Tada je*

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \;\middle|\; t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Dokaz. Označimo

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \;\middle|\; t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} =: \mathcal{P}'.$$

Neka je $v \in \mathcal{P}$. Tada postoje $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_0).$$

Slijedi da je

$$v = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i\right) a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i a_i.$$

Definiramo

$$t_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Vrijedi

$$v = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,$$

odnosno

$$v \in \mathcal{P}'.$$

Pretpostavimo sada da je $v \in \mathcal{P}'$. Tada postoje $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Imamo da je

$$t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i$$

pa slijedi

$$v = t_0 a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i a_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i\right) a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0).$$

Dakle,

$$v \in \mathcal{P}.$$

□

Napomena 3.3.17. *Uočimo da za $x \notin \mathcal{P}$ slijedi da su $a_0, a_1, \dots, a_n, x$ geometrijski nezavisne točke.*

Pretpostavimo suprotno, odnosno da je skup $\{ a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0, x - a_0 \}$ linearno zavisan. Tada postoje $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x - a_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0)$$

pa slijedi da je

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0)$$

što povlači da je $x \in \mathcal{P}$, a to je kontradikcija s pretpostavkom.

Lema 3.3.18. *Neka je $N \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i neka je $\mathcal{P}$ ravnina u $\mathbb{R}^N$ razapeta s $a_0, \dots, a_n$. Pretpostavimo da je $n < N$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{P}$ takav da je*

$$d(x, a_0) = 1 \ \text{ i } \ d(x, z) = \sqrt{1 + d(a_0, z)^2}, \forall z \in \mathcal{P}.$$

Dokaz. Neka je

$$V = [\{ a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \}].$$

Očito je

$$\mathcal{P} = a_0 + V.$$

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije daje da postoji ortonormirana baza

$$(e) = \{ e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_N \}$$

takva da je
$$V = [\{ e_1, \ldots, e_n \}] .$$
Neka je $x = e_N + a_0$. Tada je
$$e_N = x - a_0 \notin V$$
pa slijedi
$$x \notin \mathcal{P}.$$
Vrijedi
$$d(x, a_0) = \|x - a_0\| = \|e_N\| = 1.$$
Neka je $z \in \mathcal{P}$. Tada je
$$z = a_0 + v,$$
gdje je
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V,$$
za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Imamo
$$d(z, a_0) = \|z - a_0\| = \|v\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$$
pa slijedi
$$d(x, z) = \|e_N - v\| = \left\| e_N - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| = \sqrt{1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2} = \sqrt{1 + d(z, a_0)^2}.$$
□

Lema 3.3.19. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$, pri čemu je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada postoje geometrijski nezavisne točke $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ za koje vrijedi*
$$a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{M}^0.$$

Dokaz. Neka je
$$m = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{postoji geometrijski nezavisan niz točaka } a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{M}^0 \right\}.$$
Pretpostavimo da je $m < n$. Neka su $a_0, \ldots, a_m \in \mathcal{M}^0$ geometrijski nezavisne točke. Neka je $\mathcal{P}$ ravnina razapeta s $a_0, \ldots, a_m$. Vrijedi
$$\mathcal{M}^0 \subseteq \mathcal{P}. \tag{3.4}$$

Kada ne bi vrijedilo $\mathcal{M}^0 \subseteq \mathcal{P}$, postojala bi točka $x \in \mathcal{M}^0 \backslash \mathcal{P}$ pa bi prema napomeni 3.3.17 slijedilo da je $a_0, \dots, a_m, x$ geometrijski nezavisan niz, a to je kontradikcija s definicijom broja m.
Iz leme 3.3.18 slijedi da postoji $w \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{P}$ takva da je

$$d(w, a_0) = 1 \text{ i } d(w, z) = \sqrt{1 + d(a_0, z)^2}, \forall z \in \mathcal{P}.$$

Neka je

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{ (w, w, w, \dots) \}.$$

Neka su $(x_i) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, $(y_j) \in \mathcal{N}$ takvi da vrijedi $(x_i) \preceq (y_j)$. Ako je $(y_j) \in \mathcal{M}$, slijedi da je

$$(x_i) \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$$

jer je $\mathcal{M}$ struktura izračunljivosti.
Ako je $(y_j) = (w, w, w, \dots)$, onda iz $(x_i) \preceq (y_j)$ slijedi da je

$$(x_i) = (w, w, w, \dots) \in \mathcal{N}.$$

Neka su $(x_i), (y_i) \in \mathcal{N}$. Slučajevi $(x_i), (y_j) \in \mathcal{M}$ i $(x_i) = (y_j) = (w, w, w, \dots)$ trivijalno slijede $(x_i) \diamond (y_j)$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $(x_i) \in \mathcal{M}$, $(y_j) = (w, w, w, \dots)$. Zbog (3.4) za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i, y_j) = d(x_i, w) = \sqrt{1 + d(x_i, a_0)^2}.$$

Iz propozicije 3.2.10 slijedi da je $(a_0, a_0, a_0, \dots) \in \mathcal{M}$ pa je funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$F(i, j) = d(x_i, a_0)$$

rekurzivna. Sada iz propozicije 2.3.10 i napomene 2.3.17 slijedi da je funkcija $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$G(i, j) = d(x_i, y_j)$$

rekurzivna, odnosno vrijedi

$$(x_i) \diamond (y_j).$$

Sada dobivamo da je $\mathcal{N}$ struktura izračunljivosti i vrijedi

$$\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N},$$

a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti pa je

$$m = n.$$

$\square$

Propozicija 3.3.20. *Neka su $(X,d),(Y,d')$ metrički prostori i neka je $f\colon X\to Y$ surjektivna izometrija. Za $\mathcal{S}\subseteq X^{\mathbb{N}}$ definiramo*

$$f(\mathcal{S})=\{\,(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}\mid (x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}\,\}.$$

Tada vrijedi:

(1) $\mathcal{S}$ je struktura izračunljivosti na (X,d) ako i samo ako je $f(\mathcal{S})$ struktura izračunljivosti na (Y,d').

(2) $\mathcal{S}$ je separabilna struktura izračunljivosti na (X,d) ako i samo ako je $f(\mathcal{S})$ separabilna struktura izračunljivosti na (Y,d').

(3) $\mathcal{S}$ je maksimalna struktura izračunljivosti na (X,d) ako i samo ako je $f(\mathcal{S})$ maksimalna struktura izračunljivosti na (Y,d').

Dokaz. (1) Neka su $(x_i),(y_j)\in X^{\mathbb{N}}$. Vrijedi

$$d(x_i,y_j)=d'(f(x_i),f(y_j)),\forall i,j\in\mathbb{N},$$

pa vrijedi

$$(x_i)\diamond(y_j)\Leftrightarrow(f(x_i))\diamond(f(y_j)).$$

Također, za rekurzivnu funkciju $F\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_i,y_{F(i,k)})<2^{-k}\Leftrightarrow d'(f(x_i),f(y_{F(i,k)}))<2^{-k},\forall i,k\in\mathbb{N}.$$

Sada tvrdnja očito slijedi.

(2) Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ separabilna. Tada postoji efektivan separirajući niz α u (X,d) takav da je

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_\alpha=\left\{\,(x_i)\in X^{\mathbb{N}}\;\middle|\;(x_i)\preceq\alpha\,\right\}.$$

Neka je $(y_i)\in f(\mathcal{S})$. Tada postoji $(x_i)\in\mathcal{S}$ takav da je $(y_i)=(f(x_i))$. Neka je $F\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ rekurzivna funkcija za koju je

$$d(x_i,\alpha_{F(i,k)})<2^{-k},\forall i,k\in\mathbb{N}.$$

f je izometrija pa slijedi

$$d'(f(x_i),f(\alpha_{F(i,k)}))<2^{-k},\forall i,k\in\mathbb{N},$$

odnosno

$$(f(x_i))\preceq(f(\alpha_j)).$$

Iz činjenica da je f izometrija i da je α efektivan separirajući niz u (X, d) lako slijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d'(f(\alpha_i), f(\alpha_j))$, rekurzivna.
Neka je $z \in Y$ i neka je $r > 0$. f je surjekcija pa postoji $w \in X$ takav da je $f(w) = z$. Budući da je α gust u (X, d), postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_i \in K_d(w, r)$. Vrijedi

$$d'(z, f(\alpha_i)) = d'(f(w), f(\alpha_i)) = d(w, \alpha_i) < r$$

pa je $f(\alpha_i) \in K_{d'}(z, r)$. Dakle, $(f(\alpha))$ je gust u (Y, d') što povlači da je efektivan separirajući niz u (Y, d') pa slijedi da je $f(\mathcal{S})$ separabilna. Obrat se dokazuje analogno.

(3) Neka je $\mathcal{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d). Pretpostavimo da $f(\mathcal{S})$ nije maksimalna, odnosno postoji struktura izračunljivosti $\mathcal{T}$ na (Y, d') takva da je

$$f(\mathcal{S}) \subsetneq \mathcal{T}.$$

Neka je

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \left\{ (z_i) \in X^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (f(z_i)) \in \mathcal{T} \backslash f(\mathcal{S}) \right\}.$$

Neka su $(x_i), (y_j) \in \mathcal{S}'$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(x_i) \in \mathcal{S}$ i $(y_j) \in \{ (z_i) \in X^{\mathbb{N}} \mid (f(z_i)) \in \mathcal{T} \backslash f(\mathcal{S}) \}$. Tada imamo

$$d(x_i, y_j) = d'(f(x_i), f(y_j)), \forall i, j \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Budući da vrijedi $(f(x_i)) \in f(\mathcal{S}) \subsetneq \mathcal{T}$, $(f(y_j)) \in \mathcal{T}$, a $\mathcal{T}$ je struktura izračunljivosti, imamo

$$(f(x_i)) \diamond f((y_j)),$$

a zbog (3.5) to je ekvivalentno s

$$(x_i) \diamond (y_j).$$

Neka su $(x_i) \in X^{\mathbb{N}}, (y_j) \in \mathcal{S}'$ takvi da je $(x_i) \preceq (y_j)$. $(y_j) \in \mathcal{S}$ daje $(x_i) \in \mathcal{S}$ pa pretpostavimo da je $(y_j) \in \{ (z_i) \in X^{\mathbb{N}} \mid (f(z_i)) \in \mathcal{T} \backslash f(\mathcal{S}) \}$. Neka je $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija za koju je

$$d(x_i, y_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi

$$d'(f(x_i), f(y_{F(i,k)})) = d(x_i, y_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Imamo $(f(y_j)) \in \mathcal{T} \backslash f(\mathcal{S})$ pa slijedi

$$f(x_i) \in \mathcal{T}$$

pa očito vrijedi

$$(x_i) \in \mathcal{S}'.$$

Sada vidimo da je $\mathcal{S}'$ struktura izračunljivosti na (X, d) i vrijedi $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathcal{S}$ maksimalna struktura izračunljivosti na (X, d) pa je $f(\mathcal{S})$ maksimalna struktura izračunljivosti na (Y, d'). Obrat se dokazuje analogno. $\square$

Teorem 3.3.21. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Svaka maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$ je separabilna.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$. Tada prema lemi 3.3.19 postoji geometrijski nezavisan konačan niz $a_0, \ldots, a_n$ u $\mathbb{R}^n$ takav da je

$$a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{M}^0.$$

Zatim iz propozicije 3.3.6 slijedi da je $a_0, \ldots, a_n$ efektivan niz pa prema propoziciji 3.3.12 postoji surjektivna izometrija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da su $f(a_0), \ldots, f(a_n)$ geometrijski nezavisne izračunljive točke u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Jasno je da vrijedi

$$f(a_0), \ldots, f(a_n) \in (f(\mathcal{M}))^0,$$

a iz propozicije 3.3.20 slijedi da je $f(\mathcal{M})$ maksimalna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Sada iz propozicije 3.3.9 slijedi da je $f(\mathcal{M})$ kanonska struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}^n, d)$ pa je $f(\mathcal{M})$ separabilna, a onda je prema propoziciji 3.3.20 separabilna i $\mathcal{M}$. □

Napomena 3.3.22. *Uočimo da neizračunljiv broj može biti izračunljiva točka. Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$ i neka je $a \in [0, 1]$ neizračunljiv broj. Znamo da je tada $\{ (a, a, a, \ldots) \}$ struktura izračunljivosti na $([0, 1], d)$ pa iz propozicije 3.3.3 slijedi da postoji $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $([0, 1], d)$ takva da je $\{ (a, a, a, \ldots) \} \subseteq \mathcal{M}$. Sada imamo da je $a \in \mathcal{M}^0$.*

Primjer 3.3.23. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$. Neka je $\alpha\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$ definiran s*

$$\alpha_i = \frac{E(i, 0)}{E(i, 0) + E(i, 1) + 1}.$$

$\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap [0, 1\rangle$ pa imamo da je α gust u $([0, 1], d)$. Očito je $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna pa imamo $\alpha \diamond \alpha$ u $(\mathbb{R}, d)$, a onda i u $([0, 1], d)$. Sada vidimo da je α efektivan separirajući niz u $([0, 1], d)$ pa je $\mathcal{S}_\alpha$ separabilna struktura izračunljivosti na $([0, 1], d)$.

Primjer 3.3.24. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ i neka je $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dan s*

$$\alpha_i = (-1)^{E(i,2)} \frac{E(i, 0)}{E(i, 1) + 1}.$$

Lako se vidi da je α efektivan separirajući niz u $(\mathbb{R}, d)$. Neka je $\gamma > 0$ neizračunljiv broj. Definirajmo $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s

$$\beta_i = \alpha_i + \gamma.$$

Očito je β gust u $(\mathbb{R}, d)$ i vrijedi

$$d(\beta_i, \beta_j) = d(\alpha_i + \gamma, \alpha_j + \gamma) = d(\alpha_i, \alpha_j), \forall i, j \in \mathbb{N},$$

pa je β efektivan separirajući niz u $(\mathbb{R}, d)$ pa je $\mathcal{S}_\beta$ separabilna struktura izračunljivosti na $(\mathbb{R}, d)$.

Uočimo da α i β nisu ekvivalentni. Kada bi bili ekvivalentni, postojala bi rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(\alpha_i, \beta_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Tada bi vrijedilo

$$\left|\beta_{F(i,k)} - \alpha_i\right| = \left|\gamma + \alpha_{F(i,k)} - \alpha_i\right| < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

pa bi funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadana s $i \mapsto \gamma$ bila rekurzivna, a onda bi prema propoziciji 2.3.3 γ bio izračunljiv broj.

Dakle, $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ su separabilne strukture izračunljivosti na $(\mathbb{R}, d)$, ali $\mathcal{S}_\alpha \neq \mathcal{S}_\beta$.

Lema 3.3.25. *Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$ i neka je β efektivan separirajući niz u $([0,1], d)$. Pretpostavimo da je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\beta_{i_0} < \frac{1}{4}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$d(\beta_i, \beta_j) > 1 - 2^{-k} \;\; i \;\; d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}.$$

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(\beta_i, 0) < 2^{-(k+2)},$$
$$d(\beta_j, 1) < 2^{-(k+2)}.$$

Vrijedi

$$d(\beta_i, \beta_j) \leq d(0, 1) = 1$$

pa imamo

$$d(\beta_i, \beta_j) = 1 - d(0, \beta_i) - d(1, \beta_j) > 1 - 2 \cdot 2^{-(k+2)} > 1 - 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 1 - 2^{-k}.$$

Nadalje

$$d(\beta_i, 0) < 2^{-(k+2)} \leq 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

pa imamo $\beta_{i_0}, \beta_i \in \left[0, \frac{1}{4}\right\rangle$ što daje

$$d(\beta_i, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}.$$

□

Lema 3.3.26. *Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$ i neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\beta_{i_0} < \dfrac{1}{4}$. Pretpostavimo da su $x, y \in [0,1]$ i da je $k \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$d(x,y) > 1 - 2^{-k} \ \ i \ \ d(x,\beta_{i_0}) < \frac{1}{4}.$$

Tada vrijedi

$$d(x,0) < 2^{-k}.$$

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi za $k = 0$ pa pretpostavimo da je $k \geq 1$.
Pretpostavimo da vrijedi

$$d(x,0) \geq 2^{-k}.$$

Tada je $x \in \left[2^{-k}, 1\right]$.

Ako je $y \in \left[2^{-k}, 1\right]$, onda vrijedi $d(x,y) \leq 1 - 2^{-k}$, a to je kontradikcija s pretpostavkom.

Pretpostavimo da je $y \in \left[0, 2^{-k}\right\rangle$. Tada je $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$ jer je $\beta_{i_0} < \frac{1}{4}$ i $d(x,\beta_{i_0}) < \frac{1}{4}$. Vrijedi $x, y < \frac{1}{2}$ pa slijedi

$$d(x,y) < \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Iz pretpostavke i činjenice da je $k \geq 1$ slijedi

$$d(x,y) > \frac{1}{2},$$

a to je u kontradikciji s (3.6).

Slijedi da vrijedi

$$d(x,0) < 2^{-k}.$$

□

Teorem 3.3.27. *Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$. Tada postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti na $([0,1], d)$.*

Dokaz. Neka je α niz iz primjera 3.3.23. U primjeru smo dokazali egzistenciju pa preostaje dokazati jedinstvenost.

Pretpostavimo da je β efektivan separirajući niz u $([0,1], d)$. Fiksirajmo $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\beta_{i_0} < \frac{1}{4}.$$

Neka je

$$\Omega = \left\{ (k,i,j) \in \mathbb{N}^3 \;\middle|\; d(\beta_i,\beta_j) > 1 - 2^{-k}, d(\beta_i,\beta_{i_0}) < \frac{1}{4} \right\}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$, je rekurzivna pa iz propozicije 2.3.15 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv kao presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa. Iz leme 3.3.25 slijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takav da je

$$(k, i, j) \in \Omega$$

pa iz propozicije 2.1.10 slijedi da postoje rekurzivne funkcije $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(k, f(k), g(k)) \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, vrijedi

$$d(\beta_{f(k)}, \beta_{g(k)}) > 1 - 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$
$$d(\beta_{f(k)}, \beta_{i_0}) < \frac{1}{4}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sada iz leme 3.3.26 slijedi da je

$$d(\beta_{f(k)}, 0) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

pa slijedi $0 \in \mathcal{S}_\beta^0$. Sada iz propozicije 3.3.6 slijedi da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(\beta_i, 0)$, rekurzivna pa je i funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto \beta_i$, rekurzivna.

Sada je prema propozicijama 2.3.10 i 2.3.13 rekurzivna i funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s

$$|\beta_j - \alpha_i| = d(\alpha_i, \beta_j)$$

pa imamo

$$\beta \diamond \alpha.$$

Neka je

$$\Omega' = \left\{ (i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \;\middle|\; d(\beta_i, \alpha_j) < 2^{-k} \right\}.$$

Iz propozicije 2.3.15 slijedi da je Ω' rekurzivno prebrojiv skup, a zbog gustoće niza α imamo da za svaki $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, k, j) \in \Omega'$. Iz propozicije 2.1.10 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(\beta_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N},$$

odnosno vrijedi $\beta \sim \alpha$.
Sada vidimo da na $([0, 1], d)$ postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti. □

Propozicija 3.3.28. *Neka je α efektivan separirajući niz u metričkom prostoru (X, d) te neka je $x \in X$. Onda je $x \in \mathcal{S}_\alpha^0$ ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{S}_\alpha^0$. Tada je prema propoziciji 3.2.10 $(x, x, x, \dots) \in \mathcal{S}_\alpha$, odnosno $(x, x, x, \dots) \leq \alpha$. Dakle, postoji rekurzivna funkcija $F \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}, \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$f(k) = F(0, k).$$

f je očito rekurzivna i vrijedi

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Obrat očito vrijedi. □

Primjer 3.3.29. *Neka je $a \in [0, 1]$ neizračunljiv broj te neka je $\mathcal{M}$ maksimalna struktura izračunljivosti na $([0, 1], d)$ takva da je $a \in \mathcal{M}^0$, pri čemu je d euklidska metrika na $[0, 1]$. Tada $\mathcal{M}$ nije separabilna.*

Pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ separabilna. Onda po teoremu 3.3.27 vrijedi $\mathcal{M} = \mathcal{S}_\alpha$, gdje je α niz iz primjera 3.3.23. Vrijedi $a \in \mathcal{S}_\alpha^0$ pa iz propozicije 3.3.28 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je α rekurzivna funkcija, slijedi da je a izračunljiv broj, a to je kontradikcija s pretpostavkom. Slijedi da $\mathcal{M}$ nije separabilna.

Bibliografija

[1] V. Čačić, *Komputonomikon*, skripta, 2020.

[2] Z. Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*, doktorska disertacija, 2010.

[3] Z. Iljazović i L. Validžić, *Maximal Computability Structures*, The Bulletin of Symbolic Logic **22** (2016), br. 4, 445–468.

[4] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1992.

[5] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, 2009.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijeljen je u tri poglavlja. U prvom poglavlju govorimo o klasičnoj izračunljivosti i generaliziranju pojma rekurzivne funkcije na funkcije s vrijednostima u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

U drugom poglavlju govorimo o rekurzivno prebrojivim skupovima, izračunljivim brojevima i rekurzivnim funkcijama s kodomenom $\mathbb{R}$. Dajemo karakterizacije izračunljivih brojeva i primjer neizračunljivog broja koji je limes rekurzivnog niza. Nadalje, definiramo rekurzivne funkcije s vrijednostima u $\mathbb{R}$ i generaliziramo tvrdnje iz prvog poglavlja, ali i dajemo protuprimjere za tvrdnje koje ne vrijede proširenjem kodomene. Tako pokazujemo da skup nultočaka rekurzivne funkcije s vrijednostima u $\mathbb{R}$ ne mora biti rekurzivan, niti rekurzivno prebrojiv.

U trećem poglavlju govorimo o pojmu izračunljivosti u metričkim prostorima. Dajemo definiciju i primjere izračunljivih metričkih prostora te rezultate koji će biti osnova za uvođenje struktura izračunljivosti na metričke prostore. Zatim proučavamo strukture izračunljivosti i dajemo definicije separabilnih i maksimalnih struktura izračunljivosti. Dokazujemo da je svaka struktura izračunljivosti sadržana u nekoj maksimalnoj te da su maksimalne strukture izračunljivosti na euklidskom prostoru separabilne. Nadalje, pokazujemo da na $[0, 1]$ postoji jedinstvena separabilna struktura izračunljivosti.

Summary

This thesis is divided into three chapters. In the first chapter we talk about classical computability theory and generalizing the definition of a recursive function to functions with values in $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$.

In the second chapter we talk about recursively enumerable sets, computable numbers and recursive functions with the codomain $\mathbb{R}$. We give two characterizations of computable numbers and an example of a non-computable number which is a limit of a recursive sequence. Furthermore, we define recursive functions with values in $\mathbb{R}$ and generalize results from the first chapter, but also give counterexamples for claims that do not hold by expanding the codomain. That way we show that the set of roots of a recursive function with values in $\mathbb{R}$ is not necessarily recursive, or even recursively enumerable.

In the third chapter we talk about computability in metric spaces. We give the definition and examples of computable metric spaces with results that will serve as a motivation for introducing computability structures on metric spaces. Then we study computability structures and give definitions of separable and maximal computability structures. We prove that every computability structure is a subset of some maximal computability structure and also that every maximal computability structure on Euclidean space is separable. Moreover, we prove that there exists a unique separable computability structure on $[0, 1]$.

Životopis

Rođena sam 19. ožujka 1996. godine u Virovitici gdje pohađam Osnovnu školu "Vladimir Nazor", a zatim opći smjer Gimnazije Petra Preradovića, Virovitica. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisujem preddiplomski sveučilišni studij *Matematika*. Zatim na istom odsjeku upisujem i diplomski sveučilišni studij *Računarstvo i matematika*.