Numerička slika operatora i matrica

Matić, Petar

Numerička slika operatora i matrica

Matić, Petar

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Matić

NUMERIČKA SLIKA OPERATORA I MATRICA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu razvijamo teoriju numeričke slike ograničenih linearnih operatora. Teorija numeričke slike je usko vezana s teorijom normiranih i unitarnih prostora te teorijom linearnih operatora definiranih na takvim prostorima. Kroz povijest su se za numeričku sliku koristili razni termini, kao što su *polje vrijednosti* (koji se koristi u matričnoj analizi), *Wertovorrat* i *Hausdorffova domena*. Nazivi *numerička slika* i *polje vrijednosti* su se koristili češće nego drugi nazivi, ali je na kraju termin *numeričke slike* postao najčešće korišten u matematičkoj zajednici. Stone je 1932. godine u svojoj knjizi *Linear Transformations in Hilbert Space* prvi koristio upravo taj termin. Iako se numerička slika spominjala i koristila kroz većinu 20. stoljeća, Gustafson i Rao su 1997. godine objavili prvu veću knjigu koja je u potpunosti bila posvećena numeričkoj slici i iznošenju fundamentalnih rezultata teorije numeričke slike.

U ranim 1970-im godinama, Bonsall i Duncan su počeli organizirati radionice na kojima su se izmjenjivale ideje te se raspravljalo o raznim problemima povezanima s numeričkom slikom i numeričkim radijusom. Takve radionice su poprilično doprinijele razvoju teorije numeričke slike te se numerička slika više počela koristiti i primjenjivati u raznim područjima znanosti. Johnson i C.K. Li su 1992. godine organizirali radionicu pod nazivom *Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii* (WONRA) i od tada se takve radionice održavaju redovito svake dvije godine u kojima je i dan danas (u trenutku pisanja ovog rada) C.K. Li i dalje jedan od glavnih organizatora.

Osim što se numerička slika koristi u funkcionalnoj analizi, teoriji operatora i matričnoj analizi, numerička slika se koristi i u drugim područjima znanosti. Na primjer, u numeričkoj analizi su neki autori primijenili teoriju numeričke slike na proučavanje konvergencije raznih algoritama. Numerička slika ima i svoju primjenu u kvantnom računanju. Koristi se i u kvantnoj fizici, pogotovo u kvantnoj dinamici. Ovo su samo neki primjeri primjene numeričke slike i njene primjene se i dalje aktivno istražuju.

U ovom radu ćemo govoriti o nekim fundamentalnim rezultatima koji se odnose na numeričku sliku. U Poglavlju 1 ćemo definirati numeričku sliku ograničenih operatora, pokazati neka jednostavna svojstva numeričke slike te pokazati kako izgleda numerička slika nekih operatora na raznim primjerima. U poglavlju 2 pokazujemo svojstvo konveksnosti numeričke slike, dok u Poglavlju 3 proučavamo kako je spektar operatora povezan s njegovom numeričkom slikom. Pokazat ćemo da je spektar sadržan u zatvaraču numeričke slike te ćemo dokazati Hildebrandtov teorem koji povezuje konveksnu ljusku spektra operatora s numeričkim slikama njemu sličnih operatora. U Poglavlju 4 radimo s hermitskim operatorima i proučavamo njihovu numeričku sliku. U Poglavlju 5 uvodimo pojam numeričkog radijusa. Proučavamo kako je numerički radijus povezan s normom operatora i potencijama operatora. Za kraj, u poglavlju 6 proučavamo numeričku sliku normalnih operatora.

Poglavlje 1

Numerička slika

Prije nego krenemo s definiranjem i opisivanjem numeričke slike, potrebno je prisjetiti se pojmova koji su potrebni za razumijevanje numeričke slike te utvrditi oznake. Prisjetimo se prvo kako definiramo normu i skalarni produkt na vektorskim prostorima čija ćemo svojstva cijelo vrijeme koristiti kroz rad.

Definicija 1.0.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*
1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.
Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiran prostor.

Definicija 1.0.2. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*
1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\langle x, x \rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$;
4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in X$;
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X$.
Uređen par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se naziva unitaran prostor.

Uobičajeni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, je dan sa

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

U cijelom radu ćemo s H označavati kompleksan Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, osim ako nije drugačije navedeno. Norma će tada biti definirana kao $\|x\| =$

$\sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$. Često ćemo koristiti Cauchy-Schwarzovu nejednakost koja kaže da u svakom unitarnom prostoru za sve vektore x i y vrijedi

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle .$$

Ako je norma izvedena iz skalarnog produkta, onda Cauchy-Schwarzovu nejednakost možemo zapisati kao

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1.1}$$

Radimo s ograničenim linearnim operatorima nad Hilbertovim prostorom H i skup svih takvih operatora označavamo sa $B(H)$. Prisjetimo se da za linearni operator T kažemo da je ograničen ako je skup

$$\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

ograničen i najmanja takva gornja granica je operatorska norma $\|T\|$ operatora T. Stoga za svaki ograničeni operator $T \in B(H)$ je $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|, \forall x \in H$. Ako je H konačnodimenzionalan, onda su svi linearni operatori na H ograničeni. Operator I nam označava jedinični operator na pripadnom prostoru. Sa T^* označimo hermitski adjungiran operator operatoru T, koji postoji i jedinstven je za sve ograničene operatore na Hilbertovim prostorima. Otvoreni krug sa središtem u točki $z_0 \in \mathbb{C}$ i radijusom $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

dok zatvoreni krug označavamo sa

$$\overline{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Kružnica sa središtem u $z_0 \in \mathbb{C}$ i radijusom $r > 0$ je skup

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Sliku operatora T, tj. skup $\{Tx : x \in H\}$, ćemo označavati sa $\operatorname{Im} T$, a jezgru operatora T, tj. skup $\{x \in H : Tx = 0\}$, ćemo označavati s $\operatorname{Ker} T$. Često ćemo koristiti sljedeći rezultat koji je pokazan u [3] kao Zadatak 1.6.

Propozicija 1.0.3. *Neka je A linearan operator na kompleksnom unitarnom prostoru X takav da je $\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x \in X$. Tada je $A = 0$.*

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definirajmo sada numeričku sliku ograničenog operatora.

Definicija 1.1.1. *Numerička slika operatora $T \in B(H)$ definira se kao skup*

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Navedimo neka osnovna svojstva numeričke slike koja će nam često biti potrebna. Odmah ćemo jednostavno pokazati da ako je numerička slika operatora jedna točka, onda je taj operator jedinični operator pomnožen konstantom, i obratno. Iz toga slijedi da operator mora biti nul-operator ako je njegova numerička slika jednaka skupu koji sadrži samo 0. Numerička slika je invarijantna s obzirom na unitarne transformacije. Za operator $U \in B(H)$ kažemo da je unitaran ako je $U^*U = UU^* = I$.
Spektar operatora $T \in B(H)$, u oznaci $\sigma(T)$, je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje $T - \lambda I$ nije regularan operator. Sa

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : Tx = \lambda x \text{ za neki } x \in H,\ x \neq 0\}$$

označimo točkovni spektar operatora T, odnosno skup svih svojstvenih vrijednosti operatora T. Numerička slika sadrži svojstvene vrijednosti pripadnog operatora, a više riječi o tome kako je cijeli spektar povezan s numeričkom slikom će biti kasnije. Još neka svojstva numeričke slike, koja većinom slijede iz same definicije, su navedena u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.1.2. *Za operator $T \in B(H)$ vrijedi:*
(a) $W(T) = \{\lambda\}, \lambda \in \mathbb{C}$, ako i samo ako je $T = \lambda I$.
(b) $W(T) = W(U^*TU)$ za proizvoljan unitaran operator $U \in B(H)$.
(c) $W(T) \subseteq \overline{K}(0, \|T\|)$.
(d) $W(T) \supseteq \sigma_p(T)$.
(e) $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
(f) $W(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in W(T)\}$.

Dokaz. (a) Neka je $W(T) = \{\lambda\}$. Tada za svaki $x \in H, \|x\| = 1$, vrijedi $\langle Tx, x\rangle = \lambda$, što možemo zapisati kao $\langle Tx, x\rangle = \lambda \langle Ix, x\rangle$, budući je $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1$, a I je jedinični operator. Koristeći svojstva skalarnog produkta, dobivamo da je $\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = 0$ za svaki $x \in H$ za koji je $\|x\| = 1$. Neka je sada $x \in H$ proizvoljan. Tada je $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ pa vrijedi $\frac{1}{\|x\|^2}\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = 0$, odnosno $\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = 0$ za svaki $x \in H$. Iz Propozicije 1.0.3 slijedi da je $T - \lambda I = 0$, odnosno $T = \lambda I$.

Neka je $T = \lambda I$. Iz definicije numeričke slike slijedi

$$\begin{aligned} W(T) &= \{\lambda \langle x, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\lambda : x \in H, \|x\| = 1\} = \{\lambda\} \end{aligned}$$

(b) Neka je $U \in B(H)$ unitaran operator. Budući je U unitaran, U je izometrička bijekcija (vidi [3], Zadatak 1.21), odnosno za svaki $y \in H$ postoji jedinstveni $x \in H$ tako da je

$Ux = y$ i $\|Ux\| = \|y\| = \|x\|$. Zato vrijedi

$$\begin{aligned} W(T) &= \{\langle Ty, y\rangle : y \in H, \|y\| = 1\} \\ &= \{\langle TUx, Ux\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle U^*TUx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} = W(U^*TU). \end{aligned}$$

(c) Neka je $x \in H$ proizvoljan tako da je $\|x\| = 1$. Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti (1.1) slijedi $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\,\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|^2 = \|T\|$. Iz toga slijedi $W(T) \subseteq \overline{K}(0, \|T\|)$.

(d) Neka je $\lambda \in \sigma_p(T)$. To znači da $T - \lambda I$ nije injekcija, odnosno postoji $x \in H, x \neq 0$, takav da je $(T - \lambda I)x = 0$. Ako podijelimo prethodnu jednadžbu s $\|x\|$, i označimo $y = \frac{x}{\|x\|}$, dobijemo $(T - \lambda I)y = 0$, $\|y\| = 1$. Sada slijedi $\langle Ty, y\rangle = \lambda\langle y, y\rangle = \lambda\|y\|^2 = \lambda$, stoga $\lambda \in W(T)$, tj. $\sigma_p(T) \subseteq W(T)$.

(e) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Vrijedi

$$\begin{aligned} W(\alpha T + \beta I) &= \{\langle(\alpha T + \beta I)x, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\alpha\langle Tx, x\rangle + \beta\langle x, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \alpha\{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} + \beta = \alpha W(T) + \beta. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} W(T^*) &= \{\langle T^*x, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle x, Tx\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\overline{\langle Tx, x\rangle} : x \in H, \|x\| = 1\} = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(T)\}. \end{aligned}$$

□

1.2 Razni primjeri

Sada navodimo primjere nekih operatora i tražimo njihove numeričke slike. Od posebnog značaja su nam operatori koji su zadani posebnim oblikom 2×2 matrice. Takvi operatori su nam bitni za dokaz Eliptičkog teorema, a time i za dokaz Toeplitz-Hausdorffovog teorema, o kojima će kasnije biti riječi. Pokazat ćemo da je njihova numerička slika elipsa. Prvo slijedi jednostavan primjer u kojem pokazujemo da je numerička slika (lijevog) unilateralnog šifta na dvodimenzionalnom prostoru jednaka zatvorenom krugu sa središtem u 0 i s radijusom $1/2$, što je elipsa kojoj su fokusi jednaki i taj fokus je u 0.

Primjer 1.2.1. *Definirajmo operator T matricom*

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

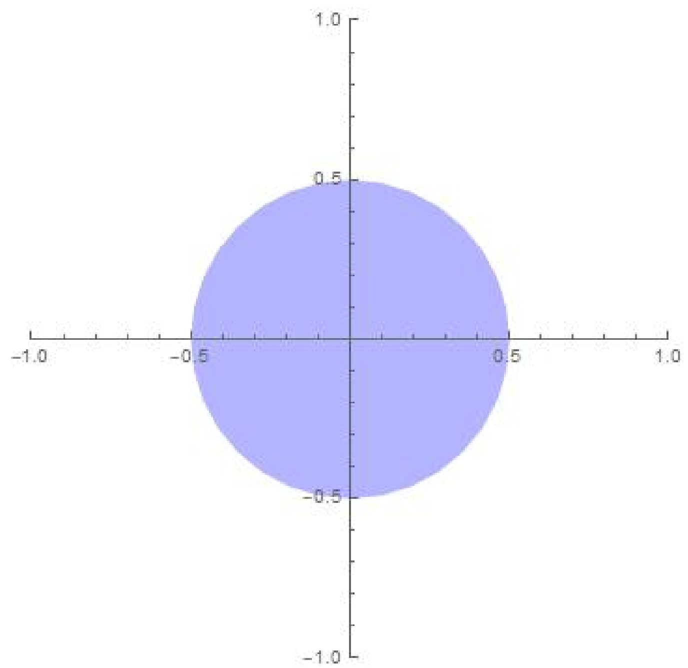
nad $\mathbb{C}^2$ *s uobičajenom normom* $\|(f,g)\| = \sqrt{|f|^2 + |g|^2}$, $(f,g) \in \mathbb{C}^2$. *Ako je* $x = (f,g)$, $\|x\|^2 = |f|^2 + |g|^2 = 1$, *onda vrijedi* $Tx = (g,0)$ *i* $\langle Tx, x\rangle = g\overline{f}$. *Primijetimo da je*

$$|\langle Tx, x\rangle| = |g||f| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) = \frac{1}{2}.$$

Nejednakost slijedi iz:

$$\begin{aligned} (|f| - |g|)^2 &\geq 0 \\ |f|^2 - 2|f||g| + |g|^2 &\geq 0 \\ \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) &\geq |f||g|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dobili smo da je $W(T) \subseteq \left\{z : \ |z| \leq \frac{1}{2}\right\} = \overline{K}(0, \frac{1}{2})$.
Pokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $z \in \overline{K}(0, \frac{1}{2})$ *proizvoljan i zapišimo* $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. *Neka je* $x = (\cos\alpha, e^{i\theta}\sin\alpha)$, *gdje je* $\sin 2\alpha = 2r \leq 1$. *Uočimo da je* $\|x\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$. *Sada imamo* $\langle Tx, x\rangle = e^{i\theta}\sin\alpha\cos\alpha = e^{i\theta}\frac{\sin 2\alpha}{2} = re^{i\theta} = z$, *odnosno dobili smo* $W(T) \supseteq \left\{z : \ |z| \leq \frac{1}{2}\right\}$, *a time i* $W(T) = \left\{z : |z| \leq \frac{1}{2}\right\}$.



Slika 1.1: Numerička slika operatora T iz Primjera 1.2.1

U sljedećem primjeru tražimo numeričku sliku (lijevog) unilateralnog šifta na beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru. Norma takvog operatora iznosi 1 pa prema Propoziciji 1.1.2 (c) je numerička slika sadržana u $\overline{K}(0,1)$. Pokazat ćemo da je numerička slika jednaka skupu $K(0,1)$. Prema tome, numerička slika operatora općenito ne mora biti zatvoren skup.

Primjer 1.2.2. *Neka je S (lijevi) unilateralni šift na Hilbertovom prostoru $l_2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ s normom $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$. Neka je $f = (f_1, f_2, f_3, \dots) \in l_2$, $\|f\| = 1$, proizvoljan. Vrijedi $Sf = (f_2, f_3, \dots)$ i*

$$\langle Sf, f\rangle = f_2\bar{f}_1 + f_3\bar{f}_2 + f_4\bar{f}_3 + \dots$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji prirodni broj za koji je $f_n \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
|\langle Sf, f\rangle| &\leq |f_n||f_{n+1}| + |f_{n+1}||f_{n+2}| + \dots \\
&\leq \frac{1}{2}(|f_n|^2 + 2|f_{n+1}|^2 + 2|f_{n+2}|^2 + \dots) \\
&\leq \frac{1}{2}(2 - |f_n|^2),
\end{aligned}$$

gdje pretposljednja nejednakost slijedi iz (1.2)*. Prema tome je $|\langle Sf, f\rangle| < 1$, odnosno*

$$W(S) \subseteq \{z : |z| < 1\} = K(0,1).$$

Pokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $z \in K(0,1)$ proizvoljan. Zapišimo $z = re^{i\theta}$, gdje je $0 \leq r < 1$ i $0 \leq \theta < 2\pi$. Definirajmo

$$f = \left(\sqrt{1-r^2}, r\sqrt{1-r^2}\, e^{-i\theta}, r^2\sqrt{1-r^2}\, e^{-2i\theta}, \dots\right).$$

Uočimo da je

$$\|f\|^2 = 1 - r^2 + r^2(1-r^2) + r^4(1-r^2) + \dots = 1.$$

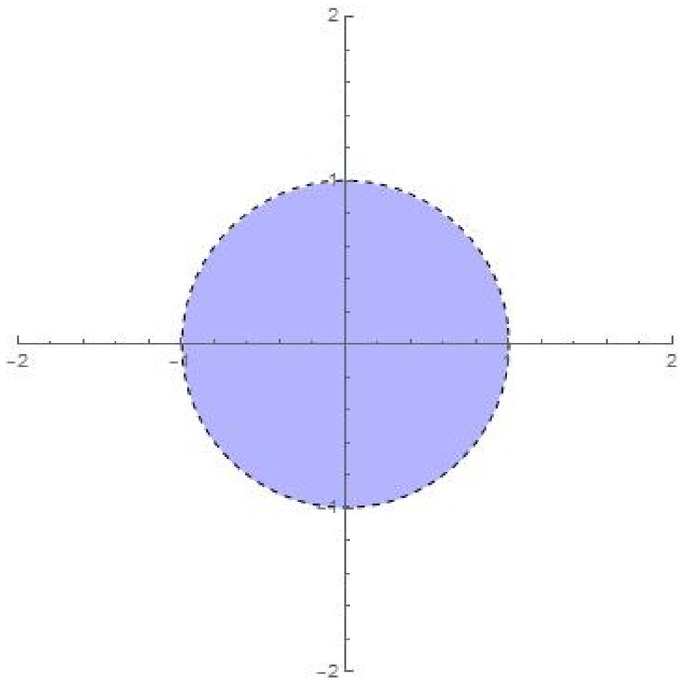
Nadalje,

$$\langle Sf, f\rangle = r(1-r^2)e^{i\theta} + r^3(1-r^2)e^{i\theta} + \dots = re^{i\theta}$$

pa smo dobili i $W(S) \supseteq \{z : |z| < 1\}$, odnosno

$$W(S) = \{z : |z| < 1\}.$$

Vidi sliku 1.2.



Slika 1.2: Numerička slika (lijevog) unilateralnog šifta S na prostoru l_2

Znamo da je svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor izometrički izomorfan s l_2 (vidi [1], Teorem 2.1.9). Takve prostore s apstraktne točke gledišta smatramo jednakima. Time, kada u primjerima radimo s ograničenim operatorima nad prostorom l_2, ekvivalentno nam je da uzmemo proizvoljan separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor.
Sljedeći primjer će nam se pokazati bitnim za dokazivanje jednog od fundamentalnih teorema za numeričku sliku operatora. Radi se o već prije spomenutom posebnom obliku 2×2 matrice.

Primjer 1.2.3. *Neka je $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definiran matricom*

$$A = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C},\ b \neq 0$$

Neka je $z = (f, g) \in \mathbb{C}^2$ proizvoljan jedinični vektor. Koordinate f i g možemo zapisati kao $f = e^{i\alpha} \cos\theta,\ g = e^{i\beta} \sin\theta,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi\rangle\ ,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sada imamo

$$Az = (re^{i\alpha} \cos\theta + be^{i\beta} \sin\theta,\ -re^{i\beta} \sin\theta)$$

i

$$\langle Az, z\rangle = r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + be^{i(\beta-\alpha)} \sin\theta \cos\theta.$$

Označimo realni dio prošle jednakosti s x, a imaginarni s y. Zapišimo b kao

$$b = |b|(\cos\gamma + i\sin\gamma), \quad \gamma = \arg b.$$

Koristeći trigonometrijske formule za zbroj kuteva i dvostruki kut dobivamo

$$\langle Az, z\rangle = r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + be^{i(\beta-\alpha)}\sin\theta\cos\theta = x + iy,$$

$$x = r\cos 2\theta + \frac{|b|}{2}\sin 2\theta\cos(\beta - \alpha + \gamma),$$

$$y = \frac{|b|}{2}\sin(\beta - \alpha + \gamma)\sin 2\theta.$$

Prema tome je

$$(x - r\cos 2\theta)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4}\sin^2 2\theta.$$

Unija ovakvih kružnica po θ čini numeričku sliku operatora A.

Označimo $\phi = 2\theta$. Sada imamo

$$(x - r\cos\phi)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4}\sin^2\phi, \quad \phi \in [0, \pi].$$

Kad raspišemo gornju jednadžbu, dobijemo

$$\left(r^2 + \frac{|b|^2}{4}\right)\cos^2\phi - 2xr\cos\phi + \left(x^2 + y^2 - \frac{|b|^2}{4}\right) = 0.$$

Prema formuli za rješenja kvadratne jednadžbe slijedi

$$\cos\phi = \frac{xr \pm \sqrt{\frac{|b|^2}{4}\left(r^2 + \frac{|b|^2}{4}\right) - \left(\frac{|b|^2}{4}x^2 + y^2\left(r^2 + \frac{|b|^2}{4}\right)\right)}}{r^2 + \frac{|b|^2}{4}}.$$

Budući je $\cos\phi$ *realan broj, izraz pod korijenom mora biti veći ili jednak* 0. *Iz toga slijedi*

$$\frac{x^2}{r^2 + (|b|^2/4)} + \frac{y^2}{(|b|^2/4)} \le 1,$$

što predstavlja elipsu sa središtem u (0, 0), velikom osi duljine $\sqrt{4r^2 + |b|^2}$*, malom osi duljine* $|b|$ *i fokusima* $(r, 0)$ *i* $(-r, 0)$.

Također, znamo da mora vrijediti $-1 \le \cos\phi \le 1$. *Raspisivanjem tih uvjeta dobijemo da mora vrijediti*

$$(x - r)^2 + y^2 \ge 0 \quad i \quad (x + r)^2 + y^2 \ge 0,$$

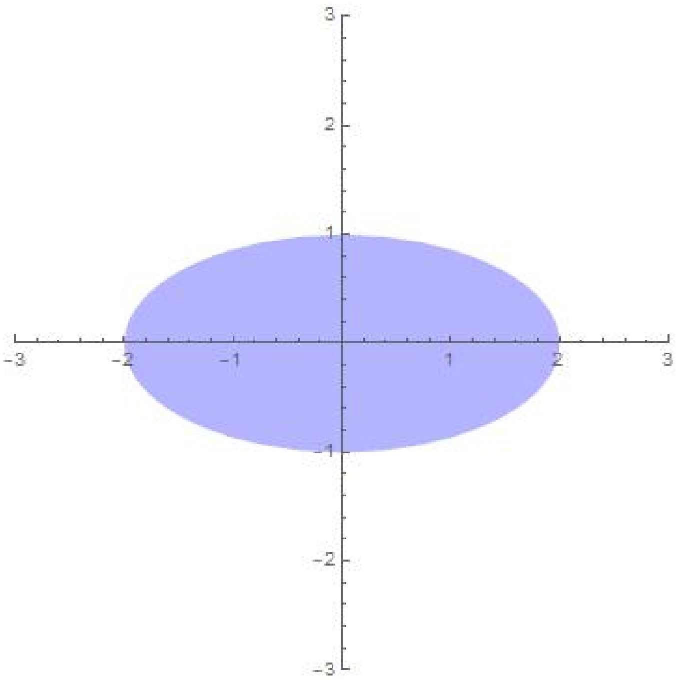
što vrijedi za svaki $x, y \in \mathbb{R}$. Stoga za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ koji se nalaze u dobivenoj elipsi, možemo pronaći $\phi \in [0, \pi]$ za koji točka (x, y) pripada nekoj kružnici koja je dio numeričke slike operatora A. Pokazali smo da vrijedi

$$W(A) = \left\{ x + iy : x, y \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{r^2 + (|b|^2/4)} + \frac{y^2}{(|b|^2/4)} \leq 1 \right\}.$$

Na primjer, za operator

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3}i \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

numerička slika je elipsa prikazana na slici 1.3.



Slika 1.3: Numerička slika 2×2 matrice A iz Primjera 1.2.3

U sljedećem primjeru pokazujemo kako izgleda numerička slika dijagonalnog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru. Svaki element na dijagonali predstavlja jedan vrh numeričke slike koja je upravo jednaka konveksnoj ljusci tih vrhova.

Primjer 1.2.4. *Neka je za $n \in \mathbb{N}$ i neke $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, operator $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dan dijagonalnom matricom*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}.$$

Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ proizvoljan jedinični vektor. Tada je

$$\langle Ax, x\rangle = \langle (a_1x_1, \ldots, a_nx_n), (x_1, \ldots, x_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2,$$

odnosno

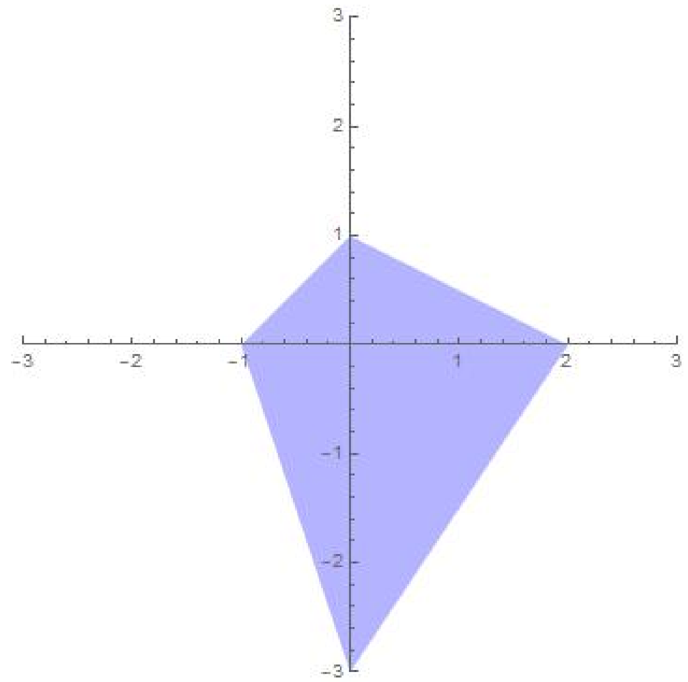
$$W(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

što je upravo konveksna ljuska skupa $\{a_1, \ldots, a_n\}$, tj. $W(A) = \mathrm{conv}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Na primjer, za operator

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & i & & \\ & & -1 & \\ & & & -3i \end{bmatrix},$$

numerička slika je konveksna ljuska na slici 1.4.



Slika 1.4: Konveksna ljuska skupa $\{2, i, -1, -3i\}$

Poglavlje 2

Konveksnost numeričke slike

U prošlom poglavlju smo se upoznali s numeričkom slikom i naveli smo par primjera u kojima smo tražili numeričku sliku raznih operatora. Vidimo da numerička slika može biti različitih oblika: krugovi, elipse, konveksne ljuske točaka, itd. Svaki od tih skupova je očito konveksan skup. To nije slučajno. Naime, to vrijedi općenito za sve ograničene operatore na kompleksnim Hilbertovim prostorima, a to je upravo tvrdnja Toeplitz-Hausdorffovog teorema, jednog od najbitnijih teorema u teoriji numeričke slike. U ovom poglavlju dokazujemo tu tvrdnju. Kako bismo uopće pokazali taj teorem, potreban nam je tzv. Eliptički teorem za operatore definirane na dvodimenzionalnim prostorima u čijem dokazu ćemo se koristiti Primjerom 1.2.3. Sada navodimo Teorem o Schurovoj dekompoziciji (vidi [4], str. 313) koji nam je potreban u dokazu Eliptičkog teorema.

Teorem 2.0.1. *(Schur) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ za neki proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od T u proizvoljnom poretku. Tada postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i gornjetrokutasta matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, takve da je*

$$T = UAU^*, \quad a_{ii} = \lambda_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Teorem o Schurovoj dekompoziciji nam govori da je proizvoljna kvadratna matrica unitarno slična nekoj gornjetrokutastoj matrici, a prisjetimo se da je prema Propoziciji 1.1.2 (b) numerička slika invarijantna s obzirom na unitarne transformacije.

2.1 Eliptički teorem

U ovom dijelu proučavamo detaljno kako može izgledati numerička slika linearnih operatora na dvodimenzionalnom Hilbertovom prostoru, odnosno numerička slika 2×2 matrica. Pokazat ćemo da je numerička slika takvih operatora elipsa s fokusima u svojstvenim vrijednostima, koja može biti degenerirana, i to u smislu da može biti samo jedna točka ili segment s krajnjim točkama u svojstvenim vrijednostima. U Propoziciji 1.1.2 (a) smo pokazali da ako je numerička slika jednaka skupu koji sadrži samo jednu točku, onda taj operator mora biti jedinični operator pomnožen konstantom, i obratno. Ako elipsa nije degenerirana i svojstvene vrijednosti su jednake, tada se i fokusi elipse poklapaju pa je numerička slika tada krug, što je bio slučaj u Primjeru 1.2.1.

Teorem 2.1.1. *(Eliptički teorem) Neka je T linearni operator definiran na dvodimenzionalnom unitarnom prostoru. Tada je $W(T)$ elipsa (moguće degenerirana) s fokusima u svojstvenim vrijednostima od T.*

Dokaz. Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti od T. Prema Teoremu o Schurovoj dekompoziciji, postoji unitarna matrica U i gornjetrokutasta matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, takvi da je

$$T = UAU^*, \quad a_{11} = \lambda_1,\ a_{22} = \lambda_2,\ a_{12} \in \mathbb{C}.$$

Budući je $W(T)$ invarijantan s obzirom na unitarne transformacije prema Propoziciji 1.1.2 (b), vrijedi $W(T) = W(A)$, što znači da je dovoljno promatrati gornjetrokutaste matrice. Neka je zato

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, onda je

$$T - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema Primjeru 1.2.3, ako uvrstimo $r = 0$, dobijemo

$$W(T - \lambda I) = \left\{ x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \le \frac{|b|^2}{4} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| \le \frac{|b|}{2} \right\},$$

odnosno $W(T)$ je zatvoren krug sa središtem u λ radijusa $\frac{|b|}{2}$ (elipsa s jednakim fokusima). Ako je $b = 0$ u ovom slučaju, onda je $W(T)$ jednak skupu $\{\lambda\}$.
Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $b = 0$, imamo

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Ako je $x = (f, g) \in \mathbb{C}^2$, $||x||^2 = |f|^2 + |g|^2 = 1$, onda je

$$\langle Tx, x \rangle = \lambda_1 |f|^2 + \lambda_2 |g|^2 = t\lambda_1 + (1 - t)\lambda_2,$$

gdje je $t = |f|^2$. Prema tome je $W(T)$ skup konveksnih kombinacija točaka λ_1 i λ_2, tj. $W(T)$ je segment koji povezuje λ_1 i λ_2 (degenerirana elipsa).
Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $b \neq 0$, imamo

$$T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & b \\ 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \end{bmatrix}$$

pa možemo pisati

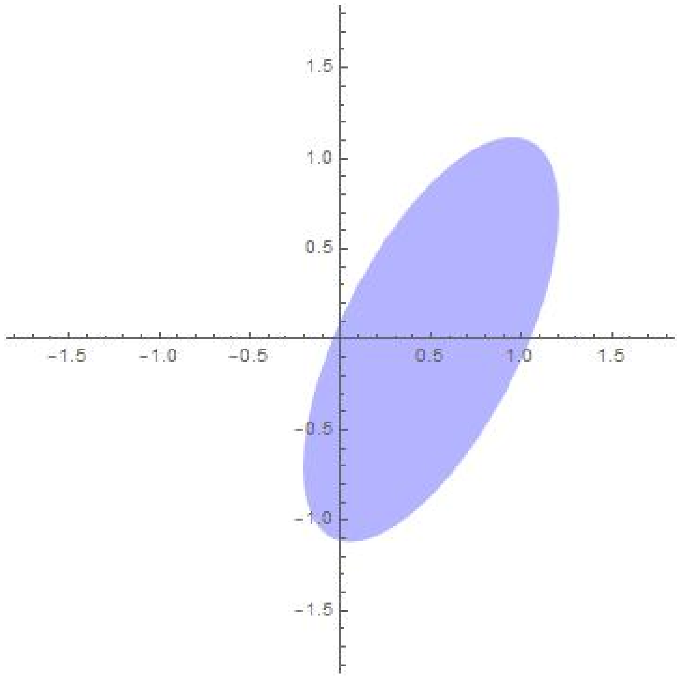
$$e^{-i\theta}\left(T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I\right) = \begin{bmatrix} r & be^{-i\theta} \\ 0 & -r \end{bmatrix} =: B,$$

gdje je $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Prema Primjeru 1.2.3, $W(B)$ je elipsa sa središtem u 0, malom osi duljine $|b|$ i fokusima r i $-r$. Slijedi da je $W(T - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} I)$ elipsa s fokusima u $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$ i $\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$, ali je zakrenuta za kut θ, odnosno velika os elipse zatvara kut veličine θ s realnom osi. Napokon slijedi da je $W(T)$ elipsa s kutem θ i fokusima u λ_1 i λ_2. $\square$

Primjer 2.1.2. *Za operator*

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

numerička slika je elipsa s fokusima u $1 + i$ *i* $-i$*. Vidi sliku 2.1.*



Slika 2.1: Numerička slika 2×2 matrice A iz Primjera 2.1.2

Zadržimo oznake kao u dokazu prošlog teorema. U slučaju kada elipsa nije degenerirana, odnosno kada je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $b \neq 0$, matricu operatora smo sveli na oblik matrice kao u primjeru 1.2.3 koristeći translaciju (oduzimanje operatora $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}I$ od operatora T) i rotaciju (množenje sa $e^{-i\theta}$) te označili novodobiveni operator sa B. Za operator

$$A = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C},\ b \neq 0,$$

smo pokazali da je mala os duljine $|b|$, velika os duljine $\sqrt{4r^2 + |b|^2}$, a linearni ekscentricitet duljine r. Budući smo koristili translaciju i rotaciju, dimenzije elipse za operator B i operator T su identične. Zato znamo da je duljina male osi elipse operatora T također $|b|$, duljina linearnog ekscentriciteta iznosi $\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{2}$, a duljina velike osi je onda $\sqrt{|\lambda_1 - \lambda_2|^2 + |b|^2}$. Izrazimo sada te duljine koristeći se samo svojstvenim vrijednostima i pripadnim jediničnim svojstvenim vektorima.
Neka je opet

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}, b \neq 0,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, svojstvene vrijednosti operatora T. Lako se vidi da je za λ_1 pripadni svojstveni vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pronađimo sada jedinični svojstveni vektor za λ_2. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, takvi da je

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \tag{2.1}$$

i

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

iz čega dobivamo jednadžbu

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 + bx_2 = 0. \tag{2.2}$$

Rješavanjem sustava (2.1) i (2.2) dobivamo

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{|b|}\right)^2}},$$

$$x_2 = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{b} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{|b|}\right)^2}}.$$

Označimo dobivene svojstvene vektore tako da je $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $f_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Slijedi

$$\gamma := \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{|b|}{\sqrt{|b|^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2}}, \tag{2.3}$$

što je upravo omjer duljina male osi i velike osi (uočimo da je $\gamma < 1$). Koristeći svojstvo elipse koje povezuje linearni ekscentricitet s velikom i malom poluosi (u oznakama redom e, a, b) formulom $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, dobivamo

$$\sqrt{1 - \gamma^2} = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{a},$$

gdje smo s a označili duljinu velike osi. Zato je duljina velike osi

$$a = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\sqrt{1 - \gamma^2}},$$

a duljina male osi je γa.
Vidimo da duljine osi ovise o tome koliko se razlikuju dvije svojstvene vrijednosti te o kutu između pripadnih svojstvenih vektora. Smanjivanjem kuta između svojstvenih vektora se povećava γ, a time i duljina velike i male osi. Za linearne operatore A i B na H kažemo da su slični ako postoji regularan operator X na H, takav da je $B = XAX^{-1}$. Slične matrice imaju jednake svojstvene vrijednosti, ali se mijenjaju pripadni svojstveni vektori pa transformacijama sličnosti nad operatorom možemo mijenjati kut između svojstvenih vektora, a time i veličinu numeričke slike. Pokažimo to na jednostavnom primjeru.

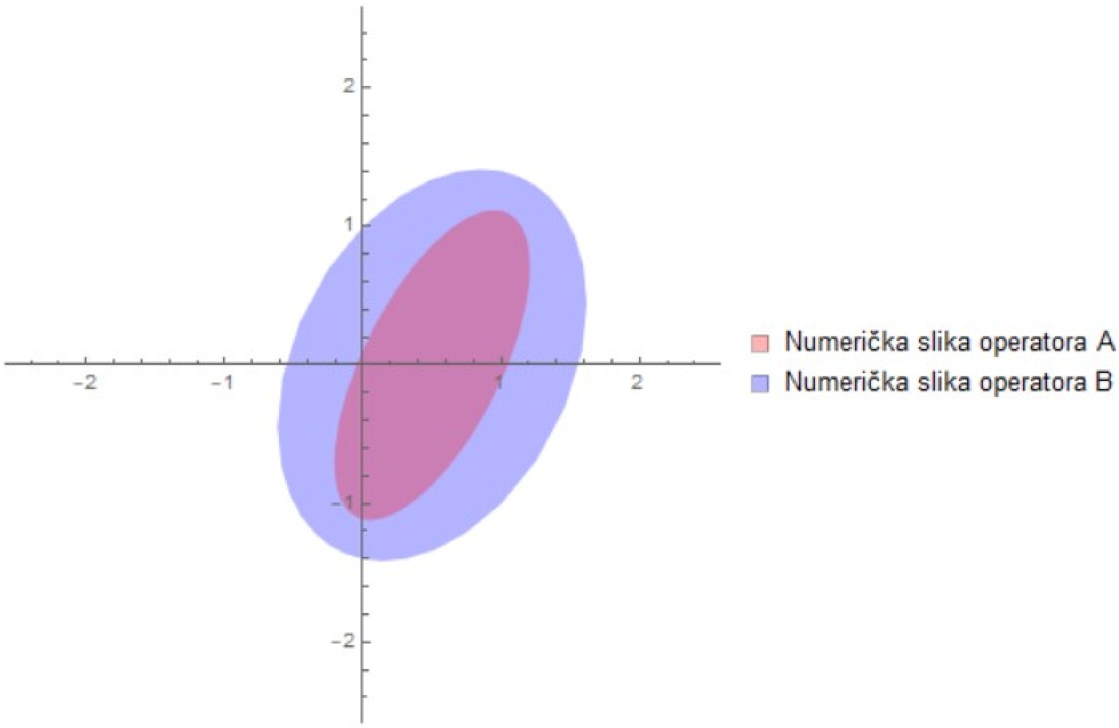
Primjer 2.1.3. *Neka je A operator dan matricom kao u Primjeru 2.1.2,*

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Neka je $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Tada je*

$$B := XAX^{-1} = \begin{bmatrix} 1+i & -2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

matrica slična matrici A. Operatori A i B imaju fokuse u $1 + i$ *i* $-i$. *Prema formuli* (2.3), *kut između svojstvenih vektora operatora A iznosi* $\gamma_A = \frac{\sqrt{6}}{6}$, *a za operator B taj kut iznosi* $\gamma_B = \frac{2}{3}$. *Na sljedećoj slici su dane njihove numeričke slike.*



Slika 2.2: Numerička slika operatora A i njemu sličnog operatora B iz Primjera 2.1.3

2.2 Toeplitz-Hausdorffov teorem

U nastavku ćemo dokazati Toeplitz-Hausdorffov teorem koji kaže da je numerička slika ograničenih operatora na kompleksnim Hilbertovim prostorima konveksan skup, ali prije toga uvedimo pojam kompresije operatora.

Definicija 2.2.1. *Kompresija operatora $T \in B(H)$ na zatvoren potprostor M od H je operator $PT|_M : M \to M$, gdje je P ortogonalni projektor na M.*

Sada dokazujemo lemu koja nam je potrebna za dokazivanje Toeplitz-Hausdorffovog teorema i koja će nam omogućiti da koristimo Eliptički teorem u dokazu.

Lema 2.2.2. *Numerička slika od $T \in B(H)$ sadrži numeričku sliku svake kompresije operatora T, tj. $W(PT|_M) \subseteq W(T)$ za svaki zatvoren potprostor M od H.*

Dokaz. Neka je M proizvoljan zatvoren potprostor od H i P ortogonalni projektor na M. Neka je $\alpha \in W(PT|_M)$. Tada postoji $x \in M$, $\|x\| = 1$, takav da je $\alpha = \langle PTx, x\rangle$. Budući je

P ortogonalni projektor na M, vrijedi $P = P^2 = P^*$ i $Px = x$. Sada vrijedi $\alpha = \langle Tx, P^*x\rangle = \langle Tx, Px\rangle = \langle Tx, x\rangle$, odnosno $\alpha \in W(T)$. □

Sada dokazujemo Toeplitz-Hausdorffov teorem. Za skup vektora S, označimo sa span$S$ skup svih linearnih kombinacija vektora iz S.

Teorem 2.2.3. *(Toeplitz-Hausdorff). Numerička slika svakog operatora $T \in B(H)$ je konveksan skup.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in W(T)$ proizvoljni, $\alpha = \langle Tf, f\rangle$ i $\beta = \langle Tg, g\rangle$, gdje je $\|f\| = \|g\| = 1$. Kako bismo pokazali da je $W(T)$ konveksan skup, potrebno je pokazati da $W(T)$ sadrži segment između α i β. Neka je $V = \text{span}\{f, g\}$. Budući je V zatvoren potprostor, postoji ortogonalni projektor P prostora H na V tako da je $Pf = f$ i $Pg = g$. Budući da za ortogonalni projektor vrijedi $P = P^2 = P^*$, za kompresiju $PT|_V$ na V vrijedi

$$\langle PTf, f\rangle = \langle Tf, Pf\rangle = \langle Tf, f\rangle = \alpha$$

i

$$\langle PTg, g\rangle = \langle Tg, Pg\rangle = \langle Tg, g\rangle = \beta.$$

Prema Eliptičkom teoremu 2.1.1, $W(PT|_V)$ je elipsa (možda degenerirana), a budući da sadrži α i β, sadrži i segment koji povezuje α i β, jer je elipsa konveksan skup. Prema Lemi 2.2.2, vrijedi $W(PT|_V) \subseteq W(T)$, stoga $W(T)$ sadrži segment koji povezuje α i β, čime je tvrdnja dokazana. □

Uočimo da je ključno u dokazu ovog teorema bilo gledati kompresije operatora T i to je bilo dovoljno gledati kompresije operatora na dvodimenzionalne prostore, bez obzira na dimenziju Hilbertovog prostora H na kojem je operator T definiran. Time se Eliptički teorem u dokazu ovog teorema pokazao vrlo bitnim. Numeričku sliku operatora $W(T)$ stoga možemo gledati kao uniju svih njegovih dvodimezionalnih restrikcija numeričke slike koje su (možda degenerirane) elipse.

Poglavlje 3

Spektar i numerička slika

3.1 Spektralna inkluzija

U ovom poglavlju istražujemo vezu između spektra operatora i njegove numeričke slike. Spektar operatora $T \in B(H)$ je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje $T - \lambda I$ nije regularan. U Propoziciji 1.1.2 (d) smo pokazali da je $\sigma_p(T) \subseteq W(T)$, odnosno da numerička slika operatora sadrži sve njegove svojstvene vrijednosti. Želimo pokazati da je i cijeli spektar operatora sadržan u njegovoj numeričkoj slici, točnije u zatvaraču numeričke slike. Za spektar znamo da je zatvoren skup, a numerička slika općenito ne mora biti zatvoren skup. Npr. u primjeru 1.2.2, za (lijevi) unilateralni šift na Hilbertovom prostoru l_2 smo pokazali da je numerička slika jednaka $K(0,1)$, a spektar istog operatora je skup $\overline{K}(0,1)$ (vidi [1], Primjer 7.2.3). Stoga je jasno da spektar ne mora biti sadržan u numeričkoj slici.
Prisjetimo se da za svaki polinom p i za svaki $T \in B(H)$ vrijedi

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{3.1}$$

Ovdje p može biti i preslikavanje definirano s $p(x) = x^{-1}$, u slučaju da je T regularan operator (vidi [1], Propozicija 7.1.16).
Za operator $T \in B(H)$ kažemo da je odozdo ograničen ako postoji $m > 0$ takav da je $\|Tx\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in H$. Znamo da ako je operator odozdo ograničen, onda je taj operator injektivan i njegova slika je zatvoren skup.
Prisjetimo se Teorema o inverznom preslikavanju (vidi [1], Teorem 6.1.3).

Teorem 3.1.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in B(X, Y)$ bijekcija. Tada je i A^{-1} ograničen operator.*

Ako je $\lambda \in \sigma(T)$, onda $T - \lambda I$ nije regularan, što je prema gornjem teoremu ekvivalentno s tim da nije bijektivan. Operator $T - \lambda I$ tada ili nije odozdo ograničen, ili je odozdo ograničen, ali nije surjektivan. Uvjet da T nije odozdo ograničen je ekvivalentan uvjetu da postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ takav da je $\|x_n\| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ i $\|Tx_n\| \to 0$ (vidi [3], Zadatak 2.10). Ove definicije i svojstva su nam potrebni za dokazivanje sljedećeg teorema koji povezuje spektar s numeričkom slikom.

Teorem 3.1.2. *Spektar operatora $T \in B(H)$ je sadržan u zatvaraču njegove numeričke slike.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(T)$ proizvoljan. Pokažimo da je tada $\lambda \in \overline{W(T)}$. Iz (3.1) slijedi da je $0 \in \sigma(T) - \lambda = \sigma(T - \lambda I)$ pa je potrebno pokazati da je $0 \in \overline{W(T - \lambda I)}$, jer će iz toga onda slijediti, prema Propoziciji 1.1.2 (e), da je $\lambda \in \overline{W(T)}$. Zaključujemo da je dovoljno pokazati da ako je $0 \in \sigma(T)$, onda je $0 \in \overline{W(T)}$. Neka je zato $0 \in \sigma(T)$. To znači da T nije regularan operator. Kao što smo komentirali prije ovog teorema, tada ili T nije odozdo ograničen ili je odozdo ograničen, ali nije surjektivan.
Ako T nije odozdo ograničen, onda postoji niz $(x_n)_n \subseteq H$ takav da je $\|x_n\| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, i $\|Tx_n\| \to 0$. Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti (1.1) slijedi $\langle Tx_n, x_n\rangle \leq \|Tx_n\|$, a prema tome

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0.$$

Budući je $\overline{W(T)}$ zatvoren skup, a $(\langle Tx_n, x_n\rangle)_n$ je niz u $W(T)$, slijedi da je $0 \in \overline{W(T)}$.
Ako je T odozdo ograničen i nije surjektivan, onda je $\operatorname{Im} T$ zatvoren skup i $\operatorname{Im} T \neq H$. Tada $\{0\} \neq (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$. To znači da postoji $x \in H$, $x \neq 0$, takav da je $T^*x = 0$, a time je i $0 \in W(T^*)$. Prema propoziciji 1.1.2 (f), slijedi da je $0 \in W(T)$. □

Napomena 3.1.3. *Kontinuirani spektar operatora $T \in B(H)$ je skup*

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}, \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H, \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H\right\}.$$

Uvjet $\operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H$ *u kontinuiranom spektru $\sigma_c(T)$ ekvivalentan je uvjetu da $T - \lambda I$ nije odozdo ograničen (vidi [1], Napomena 7.2.2).*
Neka je $\lambda \in \sigma(T)$ takav da ne pripada numeričkoj slici $W(T)$. Pokažimo da tada λ mora biti sadržan u kontinuiranom spektru $\sigma_c(T)$.
Pretpostavimo da postoji $x \in H$, $x \neq 0$, takav da je $(T - \lambda I)x = 0$. Tada je $0 \in W(T - \lambda I)$, *odnosno $\lambda \in W(T)$, što nije moguće jer $\lambda \notin W(T)$. Zato je* $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$.
Pokažimo sada da je $\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H$. *Ekvivalentno je pokazati da je* $\operatorname{Ker}[(T - \lambda I)^*] = \{0\}$.
Ako pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $x \in \operatorname{Ker}[(T - \lambda I)^*]$ takav da je $x \neq 0$, onda isto kao gore (koristeći još Propoziciju 1.1.2 (f)) dobivamo da je $\lambda \in W(T)$, što je kontradikcija s $\lambda \notin W(T)$.
Budući da $\lambda \notin W(T)$, prema dokazu Teorema 3.1.2 zaključujemo da $T - \lambda I$ nije odozdo ograničen ili je surjektivan. Kada bi $T - \lambda I$ bio surjektivan, onda bi $T - \lambda I$ bio bijektivan, a time i regularan. Zato $T - \lambda I$ nije odozdo ograničen.
Dobili smo da je $\lambda \in \sigma_c(T)$. Dakle, ako je $\lambda \in \sigma(T) \setminus W(T)$, onda se λ mora nalaziti u kontinuiranom spektru. U sljedećem poglavlju ćemo pokazati na primjeru da obrat općenito ne vrijedi.

Koristeći prethodni teorem, za spektar zbroja dva proizvoljna operatora A i B možemo uočiti da vrijedi

$$\sigma(A+B) \subseteq \overline{W(A+B)} \subseteq \overline{W(A)} + \overline{W(B)},$$

gdje posljednja inkluzija slijedi iz $\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \in W(A) + W(B)$.

Primijetimo da je $\text{conv}(\sigma(T))$ također sadržan u $\overline{W(T)}$, jer je $\overline{W(T)}$ konveksan skup prema Toeplitz-Hausdorffovom teoremu. Znamo da slični operatori imaju jednake spektre. Neka je $V \in B(H)$ proizvoljan regularan operator. Tada je

$$\text{conv}(\sigma(T)) = \text{conv}(\sigma(VTV^{-1})) \subseteq \overline{W(VTV^{-1})}.$$

Ako napravimo presjek po svim regularnim operatorima na H, dobivamo

$$\text{conv}(\sigma(T)) \subseteq \bigcap \left\{ \overline{W(VTV^{-1})} : V \in B(H) \text{ je regularan operator} \right\}.$$

U sljedećoj točki ćemo pokazati da ovdje zapravo vrijedi jednakost, što je tvrdnja Hildebrandtovog teorema.
Uočimo da, iako smo pokazali da je $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$, $\overline{W(T)}$ može biti puno veći od spektra $\sigma(T)$. Slijedi jedan jednostavan primjer koji nam to pokazuje.

Primjer 3.1.4. *Neka je $S_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ operator dan matricom*

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tj. S_2 je (desni) unilateralni šift na dvodimenzionalnom prostoru. Ako je $f = (f_1, f_2)$, $\|f\| = 1$, onda imamo $S_2 f = (0, f_1)$, $\langle S_2 f, f\rangle = f_1 \overline{f_2}$. Gotovo identično kao u Primjeru 1.2.1, dobivamo $W(S_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \frac{1}{2}\} = \overline{K}(0, \frac{1}{2})$.

Znamo da nultočke karakterističnog polinoma $k_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ operatora T čine njegov spektar. Vrijedi $k_{S_2}(\lambda) = \lambda^2$, pa je prema tome $\sigma(S_2) = \{0\}$.

Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora l_2 (za svaki $n \in \mathbb{N}$, e_n ima 1 na n-tom mjestu, dok su ostalo 0) i neka je $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva takav da je $\sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definirajmo operator D na l_2 sa $De_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$ (uočimo da je D dobro definiran ograničen operator). Kaže se da je D dijagonalan operator s dijagonalom $(\lambda_n)_n$. Spektar dijagonalnog operatora D je jednak skupu

$$\sigma(D) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}},$$

gdje je

$$\sigma_p(D) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{i} \quad \sigma_c(D) = \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$$

(vidi [1], Primjer 7.2.4). Navedimo još jedan primjer koji nam pokazuje da spektar ne mora biti sadržan u numeričkoj slici.

Primjer 3.1.5. *Definirajmo dijagonalan operator D na Hilbertovom prostoru l_2 sa $De_n = \frac{1}{n}e_n$, gdje je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za l_2. Pronađimo točku koja je sadržana u spektru od D, ali se ne nalazi u njegovoj numeričkoj slici.*
Neka je $f = (f_1, f_2, f_3, \dots) \in l_2$ proizvoljan takav da je $\|f_2\| = 1$. Tada je

$$\begin{aligned}\langle Df, f\rangle &= f_1\overline{f_1} + \frac{1}{2}f_2\overline{f_2} + \frac{1}{3}f_3\overline{f_3} + \dots\\ &= |f_1|^2 + \frac{1}{2}|f_2|^2 + \frac{1}{3}|f_3|^2 + \dots\\ &\leq |f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 + \dots\\ &= 1.\end{aligned}$$

Jasno je $\langle Df, f\rangle \in \mathbb{R}$ i $\langle Df, f\rangle > 0$, jer postoji barem jedan $n \in \mathbb{N}$ za koji je $f_n \neq 0$. Zato je $W(D) \subseteq \langle 0, 1]$.
Pokažimo da je $0 \in \sigma(D)$. Spektar operatora D je jednak skupu $\overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$. Zbog $0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, vrijedi $0 \in \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}} = \sigma(D)$. Pokazali smo da je $W(D) \subseteq \langle 0, 1]$, stoga sigurno $\sigma(D) \nsubseteq W(D)$, jer se 0 ne nalazi u numeričkoj slici operatora D.

3.2 Hildebrandtov teorem

Nakon što smo pokazali da je spektar sadržan u zatvaraču numeričke slike, pokazali smo da je konveksna ljuska spektra operatora $T \in B(H)$ sadržana u presjeku svih zatvarača numeričkih slika operatora koji su slični operatoru T. Hildebrandtov teorem nam govori da vrijedi i obratna inkluzija, odnosno da su ta dva skupa jednaka. Za dokaz Hildebrandtovog teorema nam je potreban Rotin teorem kojeg ćemo dokazati u nastavku.
Za Hilbertov prostor H neka je $l^2(H)$ normirani prostor svih nizova s elementima u H za koje je $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|^2} < \infty$, $\forall x = (x_n)_n \subseteq H$, gdje je $\|\cdot\|$ norma na H, a sa $\|\cdot\|_2$ smo označili normu na $l^2(H)$. Definiramo (lijevi) unilateralni šift B na prostoru $l^2(H)$:

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(H).$$

Lako se vidi da je B ograničen linearni operator norme 1. Za $T \in B(H)$ definiramo spektralni radijus operatora T kao broj

$$\nu(T) := \inf\left\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Za spektralni radijus vrijedi

$$\nu(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \forall T \in B(H), \tag{3.2}$$

i

$$\nu(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}, \quad \forall T \in B(H), \tag{3.3}$$

iz čega je jasno $\sigma(T) \subseteq \overline{K}(0, \nu(T))$ i $\sigma(T) \cap S(0, \nu(T)) \neq 0$, $\forall T \in B(H)$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ je

$$\nu(\alpha T) = |\alpha|\nu(T), \quad \forall T \in B(H). \tag{3.4}$$

Rotin teorem nam govori da su svi ograničeni operatori sa spektralnim radijusom manjim od 1 slični (lijevom) unilateralnom šiftu B na nekom potprostoru od $l^2(H)$.
Za ograničeni operator $A : X \to Y$, gdje su X i Y normirani prostori, kažemo da je izomorfizam prostora X i Y ako je bijektivan. Ako je A izomorfizam potpunih prostora, Teorem o inverznom preslikavanju 3.1.1 nam osigurava da je taj operator regularan. Za dokaz nam je potrebna još jedna propozicija koja je dokazana u [1] kao Propozicija 1.2.11.

Propozicija 3.2.1. *Ako je Y potprostor potpunog normiranog prostora, onda je i $\overline{Y}$ potpun.*

Za zatvoren potprostor M Hilbertovog prostora H kažemo da je invarijantan s obzirom na $A \in B(H)$ (A-invarijantan) ako je $AM \subseteq M$. Dokažimo sada Rotin teorem.

Teorem 3.2.2. *(Rotin teorem) Neka je $T \in B(H)$ i neka je $\sigma(T) \subseteq K(0, 1)$. Tada postoji B-invarijantan potprostor M i izomorfizam $W : H \to M$ tako da je $T = W^{-1}BW$, tj. T je sličan operatoru B na potprostoru M.*

Dokaz. Iz pretpostavke i (3.3) slijedi $\nu(T) < 1$ pa prema formuli (3.2) je $\lim_{n\to\infty}(\|T^n\|^2)^{\frac{1}{n}} = \nu(T)^2 < 1$. Prema Cauchyjevom kriteriju za konvergenciju reda realnih brojeva je $m := \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|^2 < \infty$. Definirajmo preslikavanje $W : H \to H^{\mathbb{N}}$ sa

$$Wx = (x, Tx, T^2x, \ldots), \quad \forall x \in H.$$

W je očito injektivan linearan operator. Slika od W je sadržana u $l^2(H)$. Zaista,

$$\|Wx\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n x\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|^2 = m\|x\|^2 < \infty, \quad \forall x \in H.$$

Iz gornjeg je jasno da je $W : H \to l^2(H)$ ograničen operator. Neka je $x \in H$ proizvoljan. Tada je

$$BWx = (Tx, T^2x, T^3x, \ldots) = WTx, \tag{3.5}$$

tj. $BW = WT$ na H. Jasno je $\|Wx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in H$, odnosno W je odozdo ograničen. Prema tome je $M := \operatorname{Im} W$ zatvoren potprostor od $l^2(H)$ i $W : H \to M$ je izomorfizam. Iz Propozicije 3.2.1 slijedi da je M potpun pa prema Teoremu o inverznom preslikavanju 3.1.1 je W regularan operator.

Neka je $y \in M$ proizvoljan. Tada postoji jedinstveni $x \in H$ takav da je $Wx = y$. Koristeći (3.5) dobivamo

$$By = BWx = WTx \in M,$$

odnosno M je B-invarijantan. Budući je W regularan i vrijedi $BW = WT$, možemo pisati $T = W^{-1}BW$, što znači da je T sličan operatoru B na potprostoru M. □

Zbog $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, $\forall T \in B(H)$, je spektralni radijus $\nu(T) \leq \|T\|$, $\forall T \in B(H)$. Budući je spektar operatora invarijantan s obzirom na sličnost, po formuli (3.3) zaključujemo da je i spektralni radijus invarijantan s obzirom na sličnost. Prema tome je

$$\nu(T) \leq \inf\left\{\|VTV^{-1}\| : V \in B(H) \text{ je regularan operator}\right\}.$$

Sljedeći korolar nam govori da ovdje zapravo vrijedi jednakost.

Korolar 3.2.3. *Ako je $T \in B(H)$, onda je*

$$\nu(T) = \inf\left\{\|VTV^{-1}\| : V \in B(H) \textit{ je regularan operator}\right\}.$$

Dokaz. Jednu nejednakost smo već pokazali. Potrebno je još pokazati da vrijedi

$$\nu(T) \geq \inf\left\{\|VTV^{-1}\| : V \in B(H) \text{ je regularan operator}\right\}.$$

Kako bismo mogli koristiti Rotin teorem, treba nam operator spektralnog radijusa manjeg od 1. Za svaki $\varepsilon > 0$ definiramo operator $T_\varepsilon := (\nu(T) + \varepsilon)^{-1}T$. Vrijedi

$$\nu(T_\varepsilon) = \nu\left[(\nu(T) + \varepsilon)^{-1}T\right] \overset{(3.4)}{=} \frac{\nu(T)}{\nu(T) + \varepsilon} < 1$$

pa za svaki $\varepsilon > 0$ možemo primijeniti Rotin teorem 3.2.2 na operator T_ε. Fiksirajmo sada neki $\varepsilon > 0$. Prema Rotinom teoremu postoji B-invarijantan potprostor M od $l^2(H)$ i izomorfizam $W : H \to M$ tako da je $B|_M = WT_\varepsilon W^{-1}$. Sada je

$$(\nu(T) + \varepsilon)^{-1}\|WTW^{-1}\| = \|WT_\varepsilon W^{-1}\| = \|B|_M\| \leq 1,$$

odnosno $\|WTW^{-1}\| \leq \nu(T) + \varepsilon$. Budući je W izomorfizam prostora H i M, dimenzije tih prostora su jednake pa možemo W promatrati kao izomorfizam od H, tj. W promatramo kao preslikavanje $W : H \to H$. Sada imamo

$$\inf\left\{\|VTV^{-1}\| : V \in B(H) \text{ je regularan operator}\right\} \leq \|WTW^{-1}\| \leq \nu(T) + \varepsilon.$$

Kako ovo vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, dobili smo

$$\nu(T) \geq \inf\left\{\|VTV^{-1}\| : V \in B(H) \text{ je regularan operator}\right\},$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Sada smo u mogućnosti dokazati Hildebrandtov teorem.

Teorem 3.2.4. *(Hildebrandtov teorem) Ako je $T \in B(H)$, onda je*

$$\operatorname{conv}(\sigma(T)) = \bigcap \left\{ \overline{W(VTV^{-1})} : V \in B(H) \textit{ je regularan operator} \right\}.$$

Dokaz. Nakon Teorema 3.1.2 smo pokazali jednu inkluziju. Pokažimo sada da je

$$\operatorname{conv}(\sigma(T)) \supseteq \bigcap \left\{ \overline{W(VTV^{-1})} : V \in B(H) \text{ je regularan operator} \right\}.$$

Pretpostavimo da $\lambda \notin \operatorname{conv}(\sigma(T))$. Tada trebamo dokazati da

$$\lambda \notin \bigcap \left\{ \overline{W(VTV^{-1})} : V \in B(H) \text{ je regularan operator} \right\},$$

odnosno da postoji regularan operator $V \in B(H)$ takav da $\lambda \notin \overline{W(VTV^{-1})}$. Budući je $\operatorname{conv}(\sigma(T))$ kompaktan skup, postoje $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je $\operatorname{conv}(\sigma(T)) \subseteq K(z, r)$, ali $\lambda \notin \overline{K}(z, r)$. Koristeći formulu (3.1) i Propoziciju 1.1.2 (e) možemo bez smanjenja općenitosti prepostaviti da je $z = 0$ i $r = 1$. Time je $v(T) < 1$ pa prema Korolaru 3.2.3 možemo naći regularan operator $V \in B(H)$ takav da je $\|VTV^{-1}\| < 1$. Zato je

$$\overline{W(VTV^{-1})} \subseteq \overline{K}(0, \|VTV^{-1}\|) \subseteq K(0, 1),$$

a time i $\lambda \notin \overline{W(VTV^{-1})}$. $\square$

Poglavlje 4

Hermitski operatori i numerička slika

Za ograničen operator T na Hilbertovom prostoru kažemo da je hermitski ako je $T = T^*$. Za hermitske operatore je poznato da im je spektar realan i da je sadržan u nekom segmentu. Tu činjenicu sada dokazujemo koristeći numeričku sliku hermitskog operatora. Pokazat će se da je, za razliku od primjera 3.1.4, rub spektra hermitskog operatora sadržan u rubu zatvarača njegove numeričke slike, odnosno da je zatvarač numeričke slike najmanji konveksni skup koji sadrži spektar hermitskog operatora.

Teorem 4.0.1. *Operator $T \in B(H)$ je hermitski ako i samo ako je $W(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je T hermitski, onda je za svaki $f \in H$, $\langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \overline{\langle Tf, f\rangle}$ pa je $W(T)$ realan.
Obratno, neka je $\langle Tf, f\rangle$ realan za svaki $f \in H$, $\|f\| = 1$. Tada je jasno da je $\langle Tf, f\rangle$ realan i za svaki $f \in H$. Sada imamo

$$0 = \langle Tf, f\rangle - \langle f, Tf\rangle = \langle (T - T^*)f, f\rangle, \quad \forall f \in H.$$

Zato je $T - T^* = 0$, odnosno $T = T^*$, prema Propoziciji 1.0.3. □

Prije smo pokazali kako je numerička slika svakog ograničenog operatora ograničen i konveksan skup. Prema prošlom teoremu, numerička slika hermitskog operatora je podskup od $\mathbb{R}$. Prema tome, numerička slika hermitskog operatora mora biti ograničen interval. Zato postoje $m, M \in \mathbb{R}$, takvi da je $\overline{W(T)} = [m, M]$, gdje je $T \in B(H)$ hermitski operator. Prema Propoziciji 1.1.2 (c) vrijedi da je $\overline{W(T)} \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$. Sljedeći teorem nam govori da zatvarač numeričke slike hermitskog operatora postiže granicu tog intervala (s bar jedne strane).

Teorem 4.0.2. *Neka je $T \in B(H)$ hermitski i $\overline{W(T)} = [m, M] \subseteq \mathbb{R}$. Tada je $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.*

Dokaz. Neka je $w(T) := \max\{|m|, |M|\}$. Tada za prozvoljni realan broj $\lambda \neq 0$ i $x \in H$, $x \notin \operatorname{Ker} T$, imamo

$$\begin{aligned}
4\|Tx\|^2 = 4\langle Tx, Tx\rangle &= \left(\lambda^2 \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle + \left\langle T^2x, x\right\rangle + \lambda^{-2}\left\langle T^2x, Tx\right\rangle\right) \\
&- \left(\lambda^2 \langle Tx, x\rangle - \langle Tx, Tx\rangle - \left\langle T^2x, x\right\rangle + \lambda^{-2}\left\langle T^2x, Tx\right\rangle\right) \\
&= \left\langle \lambda Tx + \lambda^{-1}T^2x, \lambda x + \lambda^{-1}Tx\right\rangle - \left\langle \lambda Tx - \lambda^{-1}T^2x, \lambda x - \lambda^{-1}Tx\right\rangle \\
&= \|\lambda x + \lambda^{-1}Tx\|^2 \left\langle T\frac{\lambda x + \lambda^{-1}Tx}{\|\lambda x + \lambda^{-1}Tx\|}, \frac{\lambda x + \lambda^{-1}Tx}{\|\lambda x + \lambda^{-1}Tx\|}\right\rangle \\
&- \|\lambda x - \lambda^{-1}Tx\|^2 \left\langle T\frac{\lambda x - \lambda^{-1}Tx}{\|\lambda x - \lambda^{-1}Tx\|}, \frac{\lambda x - \lambda^{-1}Tx}{\|\lambda x - \lambda^{-1}Tx\|}\right\rangle \\
&\leq w(T)\left[\|\lambda x + \lambda^{-1}Tx\|^2 + \|\lambda x - \lambda^{-1}Tx\|^2\right] \\
&= w(T)\left[2\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda^{-2}\|Tx\|^2\right].
\end{aligned}$$

Uvrstimo $\lambda^2 = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$. Tada je

$$4\|Tx\|^2 \leq 2w(T)[\|Tx\| \cdot \|x\| + \|Tx\| \cdot \|x\|] = 4w(T) \cdot \|Tx\| \cdot \|x\|,$$

odnosno $\|Tx\| \leq w(T)\|x\|$. Dobili smo da je $\|T\| \leq w(T)$.

Pokažimo i obratnu nejednakost. Neka je $(x_n)_n \subseteq H$, $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tako da je $\lim_{n\to\infty} |\langle Tx_n, x_n\rangle| = w(T)$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost (1.1) dobivamo

$$w(T) = \lim_{n\to\infty} |\langle Tx_n, x_n\rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|\,\|x_n\| \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \|T\|.$$

Vrijedi $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$. □

Sada pokazujemo da su rubovi numeričke slike hermitskog operatora također dio njegovog spektra. Za dokaz nam je potreban pojam pozitivno semidefinitnog operatora. Za operator $A \in B(H)$ kažemo da je pozitivno semidefinitan i pišemo $A \geq 0$ ako je A hermitski i ako vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$. Teorem o kvadratnom korijenu (vidi [1], Teorem 5.5.3) nam kaže da za pozitivno semidefinitan operator $A \in B(H)$ postoji jedinstven operator $B \in B(H)$ takav da je $B \geq 0$ i $B^2 = A$.

Teorem 4.0.3. *Neka je $T \in B(H)$ hermitski i neka je $\overline{W(T)} = [m, M]$. Tada je $m, M \in \sigma(T)$.*

Dokaz. Budući je $m \in \overline{W(T)}$, postoji niz $(f_n)_n \subseteq H$ jediničnih vektora tako da $\langle Tf_n, f_n\rangle \to m$. Očito je operator $T - mI$ hermitski. Pokažimo da je $\langle (T - mI)x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H$. Vrijedi

$$\|x\|^2 \left\langle (T - mI)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \|x\|^2 \left(\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle - m\right),$$

a budući je $\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \in [m, M]$, vrijedi $\langle (T - mI)x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Dobili smo da je operator $T - mI$ pozitivno semidefinitan pa prema Teoremu o kvadratnom korijenu, postoji jedinstveni pozitivno semidefinitan operator $(T - mI)^{\frac{1}{2}} \in B(H)$. Sada imamo

$$|\langle (T - mI)f_n, f_n\rangle| = \left|\left\langle (T - mI)^{\frac{1}{2}} f_n, (T - mI)^{\frac{1}{2}} f_n\right\rangle\right| = \|(T - mI)^{\frac{1}{2}} f_n\|^2 \to 0.$$

Slijedi

$$\|(T - mI)f_n\| = \|(T - mI)^{\frac{1}{2}}(T - mI)^{\frac{1}{2}} f_n\| \leq \|(T - mI)^{\frac{1}{2}}\| \, \|(T - mI)^{\frac{1}{2}} f_n\|$$

Kada pustimo $n \to \infty$, dobivamo $\|(T - mI)f_n\| \to 0$. Time operator $T - mI$ nije odozdo ograničen, a prema tome nije ni regularan. Zato je $m \in \sigma(T)$.

Promotrimo sada operator $-T$. Vrijedi $\overline{W(-T)} = [-M, -m]$ pa prema upravo dokazanome imamo $-M \in \sigma(-T) = -\sigma(T)$, tj. $M \in \sigma(T)$. □

Pokažimo sada na primjeru dijagonalnog operatora da točka iz kontinuiranog spektra može pripadati numeričkoj slici tog operatora, odnosno da u Napomeni 3.1.3 ne vrijedi obrat.

Primjer 4.0.4. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$ takav da je $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n \in \langle 0, 1\rangle \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\forall n \geq 3$ i $\frac{1}{2} \in \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Definirajmo operator D na l_2 sa $De_n = a_n e_n$, gdje je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za l_2. Uočimo da je D hermitski operator.*
Znamo da je spektar operatora D jednak skupu $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$ koji je sadržan u segmentu $[0, 1]$ i da je $\frac{1}{2} \in \sigma_c(D)$. Numerička slika operatora D (točnije zatvarač njegove numeričke slike) je oblika $\overline{W(D)} = [m, M]$ za neke $m, M \in \mathbb{R}$. Prema Teoremu 4.0.3 se m i M moraju nalaziti u $\sigma(D)$, a budući je spektar $\sigma(D)$ sadržan u $\overline{W(D)}$, mora biti $\overline{W(D)} = [0, 1]$. Točke 0 i 1 se nalaze u $\sigma_p(D)$ pa iz Propozicije 1.0.3 (d) slijedi da je $W(D) = [0, 1]$. Prema tome se $\frac{1}{2}$, koja je sadržana u kontinuiranom spektru $\sigma_c(D)$, nalazi u numeričkoj slici $W(D)$.

Poglavlje 5

Numerički radijus

5.1 Numerički radijus i norma operatora

U ovoj točki izučavamo numerički radijus ograničenih operatora na Hilbertovim prostorima. Prvo definirajmo numerički radijus.

Definicija 5.1.1. *Numerički radijus $w(T)$ operatora $T \in B(H)$ dan je s*

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

Primijetimo da za svaki $x \in H$ vrijedi

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq w(T)\|x\|^2. \tag{5.1}$$

Numerički radijus i njegovu oznaku smo već koristili u dokazu Teorema 4.0.2. S $w(T)$ smo označili $\max\{|m|, |M|\}$, što je upravo supremum apsolutnih vrijednosti elemenata njegove numeričke slike (imali smo da je $\overline{W(T)} = [m, M]$). U tom dokazu smo zapravo pokazali da je numerički radijus hermitskog operatora jednak normi tog operatora.
Promatramo kako je numerički radijus povezan s normom pripadnog operatora. Ovisno o tome u kojem su odnosu numerički radijus i norma operatora, možemo nešto zaključiti o tom operatoru. U prošlom poglavlju smo govorili o vezi između spektra i numeričke slike operatora. Prirodno je za očekivati da iz numeričkog radijusa operatora možemo nešto zaključiti o spektru istog operatora.

Primjer 5.1.2. *U primjeru 1.2.2 smo pokazali da je numerička slika za (lijevi) unilateralni šift S na Hilbertovom prostoru l_2 jednaka $W(S) = \{z : |z| < 1\}$. Iz definicije slijedi $w(S) = 1$.*

Napomena 5.1.3. *Numerički radijus je, u smislu preslikavanja $w : B(H) \to \mathbb{R}$, norma na $B(H)$. Pokažimo da zadovoljava potrebna svojstva norme:*

1. $w(T) \geq 0$, *$\forall T \in B(H)$;*
2. *Ako je $w(T) = 0$, onda je $W(T) = \{0\}$, tj. $\langle Tx, x\rangle = 0$, $\forall x \in H$. Zato je $T = 0$. Ako je $T = 0$, onda je $W(T) = 0$, a time i $w(T) = 0$.*
3. *Neka su $\alpha \in \mathbb{C}$ i $T \in B(H)$ proizvoljni. Tada je*

$$\begin{aligned} w(\alpha T) &= \sup\{|\langle \alpha T x, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{|\langle T x, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} = |\alpha| w(T). \end{aligned}$$

4. *Neka su $A, B \in B(H)$. Vrijedi*

$$\begin{aligned} w(A + B) &= \sup\{|\langle (A + B)x, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{|\langle Ax, x\rangle| + |\langle Bx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} + \sup\{|\langle Bx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= w(A) + w(B). \end{aligned}$$

Za norme $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$, koje su definirane na istom vektorskom prostoru X, kažemo da su ekvivalentne ako postoje $m, M > 0$ takvi da vrijedi

$$m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a, \quad \forall x \in X.$$

Pokažimo da je norma $w(\cdot)$ ekvivalentna operatorskoj normi.

Teorem 5.1.4. *Za svaki $T \in B(H)$ je $w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in W(T)$ proizvoljan. Tada postoji $x \in H$, $\|x\| = 1$, takav da je $\lambda = \langle Tx, x\rangle$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost (1.1) dobivamo

$$|\lambda| = |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|.$$

Time smo dobili da je $w(T) \leq \|T\|$.

Kako bismo pokazali obratnu nejednakost, koristimo polarizacijsku formulu

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y\rangle = {} & \langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle \\ & + i\langle T(x + iy), x + iy\rangle - i\langle T(x - iy), x - iy\rangle. \end{aligned}$$

Koristeći (5.1) dobivamo

$$\begin{aligned} 4|\langle Tx, y\rangle| &\leq w(T)\left[\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2\right] \\ &= 4w(T)\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \end{aligned}$$

Za $x, y \in H$, za koje je $\|x\|, \|y\| \leq 1$, imamo

$$4|\langle Tx, y\rangle| \leq 8w(T).$$

Budući da vrijedi $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \ x, y \in H, \ \|x\|, \|y\| \leq 1\}$ (vidi [1], Lema 2.2.10), slijedi

$$\|T\| \leq 2w(T).$$

□

Promotrimo sada slučajeve kada se u Teoremu 5.1.4 postiže jednakost s jedne strane. U sljedeća dva teorema pretpostavljamo da je numerički radijus jednak normi operatora. Tada možemo nešto zaključiti o spektru operatora, točnije o spektralnom radijusu i navodimo nužan uvjet kada točka iz numeričke slike pripada točkovnom spektru operatora.

Teorem 5.1.5. *Neka je $T \in B(H)$. Ako je $w(T) = \|T\|$, onda je $\nu(T) = \|T\|$.*

Dokaz. Neka je $w(T) = \|T\|$ i neka je $\lambda \in \overline{W(T)}$, $|\lambda| = w(T) = \|T\|$. Tada postoji niz $(f_n)_n \subseteq H$ jediničnih vektora takav da $\langle Tf_n, f_n\rangle \to \lambda$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost (1.1) dobivamo

$$|\langle Tf_n, f_n\rangle| \leq \|Tf_n\| \, \|f_n\| \leq \|T\| = |\lambda|$$

pa kada pustimo $n \to \infty$ imamo $\|Tf_n\| \to |\lambda|$. Sada je

$$\|(T - \lambda I)f_n\|^2 = \|Tf_n\|^2 - \bar{\lambda}\langle Tf_n, f_n\rangle - \lambda\langle f_n, Tf_n\rangle + |\lambda|^2\|f_n\|^2$$

pa kada pustimo $n \to \infty$ dobivamo $\|(T - \lambda I)f_n\|^2 \to 0$. Prema tome, operator $T - \lambda I$ nije odozdo ograničen što znači da nije regularan pa je $\lambda \in \sigma(T)$. Budući je $\nu(T) \leq \|T\|$ i $|\lambda| = \|T\|$, vrijedi $\nu(T) = \|T\|$. □

Znamo da je za svaki $T \in B(H)$ numerička slika $W(T)$ sadržana u $\overline{K}(0, \|T\|)$. Pretpostavimo da $W(T)$ postiže rub tog skupa, odnosno

$$S(0, \|T\|) \cap W(T) \neq \emptyset,$$

gdje je $S(0, \|T\|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \|T\|\}$. Tada je jasno $w(T) = \|T\|$ pa je prema prethodnom teoremu $\nu(T) = \|T\|$. To znači da sigurno postoji točka $\lambda \in \sigma(T)$ za koju je $|\lambda| = \|T\|$. Sljedeći teorem nam govori da svaka točka koja pripada numeričkoj slici i nalazi se u $S(0, \|T\|)$, mora pripadati točkovnom spektru operatora T.

Teorem 5.1.6. *Neka je $T \in B(H)$. Ako je $\lambda \in W(T)$ i $|\lambda| = \|T\|$, onda je $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Dokaz. Neka je $\lambda = \langle Tf, f\rangle$, $\|f\| = 1$. Tada je, koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost (1.1),

$$\|T\| = |\lambda| = |\langle Tf, f\rangle| \leq \|Tf\| \cdot \|f\| \leq \|T\|.$$

Sada imamo $|\langle Tf, f\rangle| = \|Tf\| \cdot \|f\|$. U Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti se postiže jednakost ako i samo ako su vektori linearno zavisni. Zato postoji $\mu \in \mathbb{C}$ tako da je $Tf = \mu f$. Uočimo da je

$$\lambda = \langle Tf, f\rangle = \langle \mu f, f\rangle = \mu,$$

što znači da je $Tf = \lambda f$, odnosno $\lambda \in \sigma_p(T)$. $\square$

Promotrimo sada slučaj kada je numerički radijus dvostruko manji od norme pripadnog operatora. Sljedeći teorem nam daje uvjet pod kojim vrijedi ta jednakost.

Teorem 5.1.7. *Neka je $T \in B(H)$. Ako je $\operatorname{Im} T \perp \operatorname{Im} T^*$, onda je $w(T) = \frac{1}{2}\|T\|$.*

Dokaz. Neka je $f \in H$, $\|f\| = 1$. Vrijedi $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T^*}$ pa možemo pisati $f = f_1 + f_2$, gdje je $f_1 \in \operatorname{Ker} T$, $f_2 \in \overline{\operatorname{Im} T^*}$ i $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$. Budući je $Tf_1 = 0$ i $\langle Tf_2, f_2 \rangle = 0$ zbog pretpostavke, imamo

$$\langle Tf, f \rangle = \langle T(f_1 + f_2), f_1 + f_2 \rangle = \langle Tf_2, f_1 \rangle .$$

Zato je, koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost (1.1) i nejednakost (1.2),

$$|\langle Tf_2, f_1 \rangle| \leq \|T\| \, \|f_2\| \, \|f_1\| \leq \frac{\|T\|}{2}[\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2] = \frac{\|T\|}{2}.$$

Iz Teorema 5.1.4 i gornje nejednakosti slijedi

$$w(T) \leq \frac{\|T\|}{2} \leq w(T),$$

tj. $w(T) = \frac{\|T\|}{2}$. $\square$

Primjer 5.1.8. *Neka je S_2 (desni) unilateralni šift na dvodimenzionalnom prostoru. U Primjeru 3.1.4 smo pokazali da je $W(S_2) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \frac{1}{2}\right\}$. Prema tome je $w(S_2) = \frac{1}{2}$. Neka je $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$. Vrijedi*

$$\|S_2 f\|^2 = \|(0, f_1)\|^2 = |f_1|^2 \leq \|f\|^2,$$

stoga je $\|S_2\| \leq 1$. Neka je sada $f = (1, 0)$. Imamo $\|f\| = 1 = \|(0, 1)\| = \|S_2 f\|$. Dobili smo da je $\|S_2\| = 1$ i vidimo da vrijedi $\|T\| = 2w(T)$.
Do istog zaključka smo mogli doći koristeći prošli teorem. S_2^* je (lijevi) unilateralni šift koji je dan matricom

$$S_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slika operatora S_2 je skup

$$\operatorname{Im} S_2 = \{(0, f_1) : f_1 \in \mathbb{C}\},$$

a slika operatora S_2^* je skup

$$\operatorname{Im} S_2^* = \{(f_2, 0) : f_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Jasno je $\operatorname{Im} S_2 \perp \operatorname{Im} S_2^*$ pa prema Teoremu 5.1.7 slijedi $\|T\| = 2w(T)$.

Prema Rotinom teoremu 3.2.2 znamo da za operator $T \in B(H)$ postoji zatvoren potprostor M na kojem je T sličan unilateralnom šiftu ako je spektar operatora T sadržan u jediničnom krugu. Sljedeći teorem nam govori da za neke ograničene operatore T možemo naći dvodimenzionalan potprostor na kojem je operator T upravo jednak unilateralnom šiftu.
Za zatvoren potprostor M Hilbertovog prostora X kažemo da reducira operator $A \in B(X)$ ako je $AM \subseteq M$ i $AM^\perp \subseteq M^\perp$, što je ekvivalentno s tim da je M invarijantan za A i A^*.

Teorem 5.1.9. *Neka je $T \in B(H)$, $T \neq 0$. Ako je $w(T) = \frac{1}{2}\|T\|$ i T postiže svoju normu (tj. postoji $f \in H$, $\|f\| = 1$, takav da je $\|Tf\| = \|T\|$), onda postoji dvodimenzionalni reducirajući potprostor operatora T na kojem je T jednak S_2.*

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju za operatore T za koje je $\|T\| = 1$. Neka je $f_1 \in H$ takav da je $\|T\| = 1 = 2w(T) = \|Tf_1\| = \|f_1\|$ i neka je $f_2 = Tf_1$. Imamo

$$\|f_2\|^2 = \|Tf_1\|^2 = \|f_1\|^2, \tag{5.2}$$

$$\|f_2\|^2 = \langle f_2, f_2 \rangle = \langle f_2, Tf_1 \rangle = \langle T^* f_2, f_1 \rangle . \tag{5.3}$$

Sada vrijedi, budući je $\|T^*\| = \|T\| = 1$,

$$\begin{aligned}
\|T^* f_2 - f_1\|^2 &= \|T^* f_2\|^2 - \langle T^* f_2, f_1 \rangle - \langle f_1, T^* f_2 \rangle + \|f_1\|^2 \\
&\overset{(5.2),(5.3)}{=} \|T^* f_2\|^2 - \|f_1\|^2 \\
&\leq \|T^*\|^2 \|f_2\|^2 - \|f_1\|^2 \\
&= \|f_2\|^2 - \|f_1\|^2 = 0,
\end{aligned}$$

tj. $T^* f_2 = f_1$. Za svaki $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ vrijedi

$$w(T) = |e^{i\theta}| w(T) = w(e^{i\theta} T) = \frac{1}{2}$$

i jasno je $w(T) = w(T^*)$. Iz nejednakosti trokuta slijedi $w(e^{i\theta} T + e^{-i\theta} T^*) \leq 1$. Primijetimo da je $e^{i\theta} T + e^{-i\theta} T^*$ hermitski i zato, prema Teoremu 4.0.2, vrijedi $\|e^{i\theta} T + e^{-i\theta} T^*\| \leq 1$, posebno $\|e^{i\theta} T f_2 + e^{-i\theta} T^* f_2\| \leq 1$. Koristeći $T^* f_2 = f_1$, dobivamo

$$\|e^{i\theta} T f_2 + e^{-i\theta} T^* f_2\|^2 = \|T f_2\|^2 + e^{2i\theta} \langle T f_2, f_1 \rangle + e^{-2i\theta} \langle f_1, T f_2 \rangle + \|f_1\|^2 \leq 1$$

pa je

$$\|T f_2\|^2 \leq -2Re \left[e^{2i\theta} \langle T f_2, f_1 \rangle \right],$$

što vrijedi za svaki $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Zato je $T f_2 = 0$. Slično, koristeći nejednakost

$$\|e^{i\theta} T f_1 + e^{-i\theta} T^* f_1\| \leq 1,$$

dobivamo $T^* f_1 = 0$. Sada imamo

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T f_1 \rangle = \langle T^* f_1, f_1 \rangle = 0,$$

što znači da vektori f_1, f_2 čine ortonormiranu bazu za dvodimenzionalni potprostor $M = \text{span}\{f_1, f_2\}$. Iz $T f_1 = f_2$, $T f_2 = 0$ i $T^* f_1 = 0$, $T^* f_2 = f_1$, zaključujemo da M reducira T i da je matrica od $T|_M$ u bazi $\{f_1, f_2\}$ jednaka

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Općenito, ako je $\|T\| \neq 1$, onda istim ovim postupkom nađemo f_1 i f_2 za operator $\frac{T}{\|T\|}$. Tada za $f_1' = f_1$ i $f_2' = \|T\| f_2$ vrijedi $T f_1' = f_2'$ i $T f_2' = 0$ i $M = \text{span}\{f_1', f_2'\}$ reducira T. □

5.2 Numerički radijus i potencije operatora

Neka je $T \in B(H)$ takav da je $w(T) = 1$. Proučimo potencije operatora T. Zanima nas koja je najmanja konstanta $K \in \mathbb{R}$ za koju vrijedi $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| \leq K\|x\|$, $\forall x \in H$. Ovdje pokazujemo da ta konstanta iznosi $\sqrt{2}$ te čak, ako je $\|x\| = 1$, da tada $\|T^n x\| \to l$, gdje je $l \leq \sqrt{2}$.
Nakon toga ćemo pokazati da ako je $\|T^n x\| = 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i jedinični vektor $x \in H$ (i dalje je $w(T) = 1$), onda se vektor $T^n x$ nalazi u jezgri operatora T, tj. $T^{n+1} x = 0$. Tada možemo reći nešto o normi vektora $T^k x$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Teorem 5.2.1. *Neka je $T \in B(H)$ takav da je $w(T) = 1$ i neka je $x \in H$ takav da je $\|x\| = 1$. Tada je $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = l$, gdje je $0 \leq l \leq \sqrt{2}$. Ako je $l = \sqrt{2}$, onda je $\|T^n x\| = \sqrt{2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i neka su $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ proizvoljni realni brojevi. Budući je $w(T) \leq 1$, za $y = a_0 x + a_1 T x + \ldots + a_n T^n x$ vrijedi $|\langle Ty, y \rangle| \leq \langle y, y \rangle$, tj. raspisano

$$\left| a_0 a_1 \|Tx\|^2 + a_1 a_2 \|T^2 x\|^2 + \ldots + a_{n-1} a_n \|T^n x\|^2 + \sum_{j,k=0:\ j+1\neq k}^{n} a_j a_k \left\langle T^{j+1} x, T^k x \right\rangle \right|$$

$$\leq a_0^2 + a_1^2 \|Tx\|^2 + \ldots + a_n^2 \|T^n x\|^2 + \sum_{j,k=0:\ j\neq k}^{n} a_j a_k \left\langle T^j x, T^k x \right\rangle.$$

Označimo $m_k = \|T^k x\|^2$, za $k = 1, 2, \ldots, n$. Ako zamijenimo T sa $e^{i\theta} T$ i integriramo obje strane po θ na intervalu $[0, 2\pi]$, dobivamo nejednakost

$$m_1 a_0 a_1 + m_2 a_1 a_2 + \ldots + m_n a_{n-1} a_n \leq a_0^2 + m_1 a_1^2 + \ldots + m_n a_n^2, \tag{5.4}$$

jer je za $j \neq k$

$$\left\langle T^j x, T^k x\right\rangle \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-k)} d\theta = 0$$

Neka je

$$D_n := \begin{vmatrix} 1 & -m_1/2 & & & & \\ -m_1/2 & m_1 & -m_2/2 & & 0 & \\ & -m_2/2 & m_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & m_{n-1} & -m_n/2 \\ & & & & -m_n/2 & m_n \end{vmatrix}$$

i stavimo $D_0 := 1$. Primijetimo da je

$$a_0^2 + m_1 a_1^2 + \ldots + m_n a_n^2 - m_1 a_0 a_1 - m_2 a_1 a_2 - \ldots - m_n a_{n-1} a_n$$

kvadratna forma pridružena matrici pod determinantom D_n, a budući je prema (5.4) ta forma nenegativna, slijedi da je D_n determinanta pozitivno semidefinitne matrice, tj. $D_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Laplaceovim razvojem po zadnjem retku dobivamo

$$D_n = m_n D_{n-1} - \frac{1}{4} m_n^2 D_{n-2}. \tag{5.5}$$

Pretpostavimo da je $D_n = 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i neka je k najmanji takav broj za koji je $D_k = 0$. Tada je $D_{k+1} = -\frac{1}{4} m_{k+1}^2 D_{k-1}$. Zbog $D_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, mora vrijediti $m_{k+1} = \|T^{k+1}x\|^2 = 0$, a prema tome $\|T^n x\|^2 \to 0$ kada $n \to \infty$.

Pretpostavimo sada da je $D_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je $m_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Iz nejednakosti

$$\begin{aligned} D_{n-1}^2 - m_n D_{n-1} D_{n-2} + \frac{1}{4} m_n^2 D_{n-2} &= \frac{1}{m_n} D_{n-1}(m_n D_{n-1} - m_n^2 D_{n-2}) + \frac{1}{4} m_n^2 D_{n-2} \\ &\geq \frac{1}{m_n} D_{n-1} D_n + \frac{1}{4} m_n^2 D_{n-2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

slijedi

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{m_n D_{n-1} - \frac{1}{4} m_n^2 D_{n-2}}{D_{n-1}} \leq \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}.$$

Niz $\left(\frac{D_n}{D_{n-1}}\right)_n$ je monoton i ograničen pa postoji $L \geq 0$ tako da $\frac{D_n}{D_{n-1}} \to L$ kada $n \to \infty$. Iz (5.5), prema formuli za rješenja kvadratne jednadžbe, dobivamo

$$m_n = 2\left(\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} \pm \sqrt{\left(\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}\right)^2 - \frac{D_n}{D_{n-1}}\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}}\right), \tag{5.6}$$

iz čega vidimo da $m_n = \|T^n x\|^2 \to 2L$ kada $n \to \infty$. Ako označimo $l = \sqrt{2L}$, onda možemo pisati $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = l$. Također vrijedi

$$L \leq \frac{D_1}{D_0} = -\frac{1}{4}m_1^2 + m_1 = m_1\left(-\frac{1}{4}m_1 + 1\right) \leq 1,$$

tj. $l \leq \sqrt{2}$.
Ako je $l = \sqrt{2}$, onda je $L = 1$ i $\frac{D_n}{D_{n-1}} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, tj. $D_n = D_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Iz (5.5) slijedi

$$-\frac{1}{4}m_n^2 + m_n - 1 = 0,$$

čije je jedino rješenje $m_n = 2$, odnosno $\|T^n x\| = \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, čime je tvrdnja dokazana. □

Teorem 5.2.2. *Neka je $T \in B(H)$ takav da je $w(T) = 1$ i $\|T^n x\| = 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i jedinični vektor $x \in H$. Tada je $\|T^k x\| = \sqrt{2}$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $T^{n+1}x = 0$.*

Dokaz. Koristimo oznake kao u teoremu 5.2.1. Imamo $m_n = 4$. Tada je iz (5.5)

$$D_n = 4(D_{n-1} - D_{n-2}) \geq 0, \tag{5.7}$$

a prema tome je

$$1 \leq \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} \leq \frac{D_{n-2}}{D_{n-3}} \leq \ldots \leq \frac{D_1}{D_0} \leq 1.$$

Zato je $D_{n-1} = \ldots = D_1 = D_0 = 1$ i, prema (5.6), vidimo da vrijedi $m_1 = \ldots = m_{n-1} = 2$, odnosno $\|T^k x\| = \sqrt{2}$ za $k = 1, \ldots, n-1$.
Nadalje, zbog $D_{n-1} = D_{n-2}$ i (5.7), vrijedi $D_n = 0$. Sada zbog

$$D_{n+1} = m_{n+1}D_n - \frac{1}{4}m_{n+1}^2 D_{n-1} \geq 0,$$

slijedi da mora biti $m_{n+1} = 0$, tj. $T^{n+1}x = 0$. □

Sljedeći teorem nam daje nužan uvjet za ograničeni operator da bude ortogonalni projektor.

Teorem 5.2.3. *Ako za $T \in B(H)$ vrijedi $T^2 = T$ i $w(T) \leq 1$, onda je T ortogonalni projektor.*

Dokaz. Zbog $T^2 = T$, vrijedi $Tx = x$ za svaki $x \in \operatorname{Im} T$, a zbog neprekidnosti operatora T, isto vrijedi i na $\overline{\operatorname{Im} T}$. Dovoljno je zato da pokažemo da je $T = 0$ na $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$.
Neka je $x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ proizvoljan i $y = Tx$. Tada za $t > 0$ imamo

$$T(x + ty) = Tx + tTy = y + ty.$$

Prema tome, zbog $x \perp y$, imamo

$$\begin{aligned} \langle T(x + ty), x + ty\rangle &= \langle (1 + t)y, x + ty\rangle \\ &= \langle (1 + t)y, ty\rangle = (1 + t)t\|y\|^2. \end{aligned}$$

Također imamo $\langle T(x + ty), x + ty\rangle \leq \|x + ty\|^2$ jer je $w(T) \leq 1$. Dobili smo da je

$$(1 + t)t\|y\|^2 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2,$$

tj. $t\|y\|^2 \leq \|x\|^2$. Budući je t bio proizvoljan, zaključujemo da je $\|y\| = 0$. Dobili smo da je $T = 0$ na $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$, čime je tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 6

Normalni operatori i numerička slika

Za operator $T \in B(H)$ kažemo da je normalan ako je $TT^* = T^*T$. Primijetimo da su svi hermitski operatori također i normalni. Nakon Teorema 4.0.1 smo pokazali da numerička slika hermitskog operatora mora biti segment u $\mathbb{R}$. Općenito, ako je numerička slika segment (ne nužno u $\mathbb{R}$), možemo nešto zaključiti o tom operatoru. O tome nam govori idući teorem.

Teorem 6.0.1. *Ako je $T \in B(H)$ operator za koji je $W(T)$ segment, onda je T normalan operator.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in W(T)$ proizvoljan i označimo nagib segmenta $W(T)$ sa θ (nagib je ovdje kut koji pravac, kojem segment pripada, zatvara s pozitivnim dijelom realne osi). Tada se $W(e^{-i\theta}[T-\alpha I])$ nalazi na realnoj osi. Prema Teoremu 4.0.1 slijedi da je $e^{-i\theta}[T-\alpha I]$ hermitski, tj. $e^{-i\theta}[T-\alpha I] = e^{i\theta}[T^* - \overline{\alpha} I]$. Budući da sada T možemo izraziti pomoću T^* i I, dobivamo da je $TT^* = T^*T$. $\square$

U Teoremu 4.0.2 smo pokazali da je za hermitske operatore norma operatora jednaka numeričkom radijusu tog operatora, a iz Teorema 4.0.3 možemo zaključiti da je norma operatora jednaka njegovom spektralnom radijusu. Isto vrijedi za sve normalne operatore o čemu nam govori idući teorem.
Za sve normalne operatore $A \in B(H)$ vrijedi $\|A^n\| = \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (vidi [3], Zadatak 1.19).

Teorem 6.0.2. *Ako je $T \in B(H)$ normalan, onda je $\nu(T) = w(T) = \|T\|$.*

Dokaz. Iz Teorema 3.1.2 i Teorema 5.1.4 slijedi da je $\nu(T) \leq w(T) \leq \|T\|$. Prema formuli (3.2) je $\nu(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Znamo da je $\|T^n\| = \|T\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pa je zato $\nu(T) = \|T\|$, a time i $\nu(T) = w(T) = \|T\|$. $\square$

Rezolventni skup operatora $T \in B(H)$ je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje je $T - \lambda I$ regularan operator u $B(H)$. Definirajmo udaljenost točke $z \in \mathbb{C}$ od nekog skupa $A \subseteq \mathbb{C}$ sa

$$d(z, A) := \inf\{|z - \lambda| : \lambda \in A\}.$$

Idući teorem će nam biti potreban u dokazu jednog od glavnih teorema koji povezuje numeričku sliku sa spektrom normalnog operatora.

Teorem 6.0.3. *Neka je $T \in B(H)$ normalan operator i neka je $z \in \rho(T)$. Tada za svaki jedinični vektor $x \in H$ vrijedi*

$$\|(T - zI)x\| \geq d(z, \sigma(T)).$$

Dokaz. Operator $T - zI$ je regularan i normalan. Vrijedi

$$\begin{aligned}(T - zI)^{-1}((T - zI)^{-1})^* &= (T - zI)^{-1}((T - zI)^*)^{-1} = ((T - zI)^*(T - zI))^{-1} \\ &= ((T - zI)(T - zI)^*)^{-1} = ((T - zI)^{-1})^*(T - zI)^{-1},\end{aligned}$$

odnosno $(T - zI)^{-1}$ je normalan. Prema Teoremu 6.0.2 imamo $\|(T - zI)^{-1}\| = \nu((T - zI)^{-1})$, tj.

$$\|(T - zI)^{-1}\| = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma((T - zI)^{-1})\right\}. \tag{6.1}$$

Budući je $T - zI$ regularan operator, vrijedi $\sigma((T - zI)^{-1}) = [\sigma(T - zI)]^{-1}$. Sada jednakost (6.1) glasi

$$\|(T - zI)^{-1}\| = \sup\left\{\frac{1}{|\lambda|} : \lambda \in \sigma(T - zI)\right\}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T - zI)\} &= \inf\{|\lambda| : \lambda + z \in \sigma(T)\} \\ &= \inf\{|\lambda - z| : \lambda \in \sigma(T)\} \\ &= d(z, \sigma(T)).\end{aligned}$$

Zato je sada

$$\|(T - zI)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(T))}.$$

Neka je $x \in H$, $\|x\| = 1$. Tada je

$$1 = \|x\| = \|(T - zI)^{-1}(T - zI)x\| \leq \|(T - zI)^{-1}\| \, \|(T - zI)x\|,$$

a iz toga slijedi

$$d(z, \sigma(T)) = \frac{1}{\|(T - zI)^{-1}\|} \leq \|(T - zI)x\|,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Sljedeći teorem nam daje vrlo bitno svojstvo normalnih operatora što se tiče povezanosti spektra i numeričke slike. Znamo da je zatvarač numeričke slike svakog ograničenog operatora konveksan skup i da sadrži spektar operatora. Zato je i konveksna ljuska spektra operatora sadržana u zatvaraču numeričke slike, tj. $\mathrm{conv}(\sigma(T)) \subseteq \overline{W(T)}$. Kod normalnih operatora vrijedi i obratna inkluzija, odnosno ta dva skupa su jednaka.

Teorem 6.0.4. *Ako je $T \in B(H)$ normalan, onda je $\overline{W(T)} = \mathrm{conv}(\sigma(T))$.*

Dokaz. Otprije znamo da je $\mathrm{conv}(\sigma(T)) \subseteq \overline{W(T)}$. Pokažimo sada obratnu inkluziju.

Skup $\sigma(T)$ je kompaktan, tj. ograničen i zatvoren. Zato je i $\mathrm{conv}(\sigma(T))$ zatvoren. Svaki zatvoren konveksan skup se može prikazati kao presjek zatvorenih poluprostora. Zato je dovoljno pokazati da svaki zatvoreni poluprostor koji sadrži $\sigma(T)$, sadrži i $W(T)$.

Neka je p pravac i P zatvoren poluprostor ograničen tim pravcem tako da je $\sigma(T) \subseteq P$ i $\sigma(T) \cap p \neq \emptyset$. Neka je $\alpha \in \sigma(T) \cap p$. Tada postoji $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je

$$\sigma(e^{i\theta}(T - \alpha I)) \subseteq e^{i\theta}(P - \alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq 0\}.$$

Ako pokažemo tvrdnju za $e^{i\theta}(T - \alpha I)$, odnosno da poluprostor $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq 0\}$ sadrži $W(e^{i\theta}(T - \alpha I))$, onda je, koristeći Propoziciju 1.1.2 (e), $e^{i\theta}(W(T) - \alpha) \subseteq e^{i\theta}(P - \alpha)$, tj. $W(T) \subseteq P$.

Zato, bez smanjenja općenitosti, neka je

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leq 0\} \quad \text{i} \quad \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = 0\} \neq \emptyset.$$

Neka je $a + ib \in W(T)$, $a > 0$ i $x \in H$, $\|x\| = 1$, takav da je $\langle Tx, x\rangle = a + ib$. Tada postoji $y \in H$ tako da su x i y okomiti, tj. $\langle x, y\rangle = 0$ (jer je H Hilbertov prostor i $\{x\}$ je zatvoren skup) i $Tx = (a + ib)x + y$. Neka je $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Tada sigurno $c \notin \sigma(T)$ i iz Teorema 6.0.3 slijedi

$$d(c, \sigma(T)) \leq \|(T - cI)x\|,$$

odnosno

$$c^2 \leq [d(c, \sigma(T))]^2 \leq \|(a - c + ib)x + y\|^2 = (a - c)^2 + b^2 + \|y\|^2.$$

Prema tome, vrijedi $2ac \leq a^2 + b^2 + \|y\|^2$. Znamo da je $a, c > 0$, a budući je c proizvoljan, došli smo do kontradikcije. Vrijedi $\overline{W(T)} \subseteq \mathrm{conv}(\sigma(T))$. □

Koristeći prethodni teorem i Hildebrandtov teorem zaključujemo da za sve normalne operatore $T \in B(H)$ vrijedi

$$\overline{W(T)} = \bigcap \left\{ \overline{W(VTV^{-1})} : V \in B(H) \text{ je regularan operator} \right\}.$$

Numerička slika normalnog operatora je time sadržana u numeričkoj slici svih ograničenih operatora koji su mu slični (točnije u njihovim zatvaračima) i to je najveći skup s tim

svojstvom. Zato, ako je neki operator $T \in B(H)$ sličan nekom normalnom operatoru $N \in B(H)$, onda je desna strana jednakosti u Hildebrandtovom teoremu 3.2.4 jednaka zatvaraču numeričke slike operatora N, tj. $\text{conv}(\sigma(T)) = \overline{W(N)}$.
Za točku z nekog skupa S kažemo da je *ekstremna točka* skupa S ako postoji zatvoren poluprostor P tako da je $S \cap P = \{z\}$. Prethodni teorem nam je rekao da iz spektra možemo odrediti zatvarač numeričke slike normalnog operatora. No, vrijedi i obrat, tj. iz numeričke slike možemo zaključiti nešto o svojstvenim vrijednostima normalnog operatora. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 6.0.5. *Neka je $T \in B(H)$ normalan operator. Ekstremne točke skupa $\overline{W(T)}$ su svojstvene vrijednosti operatora T ako i samo ako je $W(T)$ zatvoren skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $W(T)$ zatvoren. Neka je z ekstremna točka skupa $W(T)$ i neka je p pravac koji definira zatvoren poluprostor P tako da je $W(T) \subseteq P$ i $W(T) \cap p = \{z\}$. Slično kao i u dokazu prošlog teorema možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da je $z = 0$ i $W(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda \geq 0\}$. Neka je $x \in H$, $\|x\| = 1$, takav da je $\langle Tx, x\rangle = z = 0$. Zato je $\langle (T - T^*)x, x\rangle = 0$. Promotrimo operator $\frac{1}{i}(T - T^*)$. Vrijedi $\left[\frac{1}{i}(T - T^*)\right]^* = \frac{1}{i}(T - T^*)$, tj. $\frac{1}{i}(T - T^*)$ je hermitski operator. Neka je $f \in H$ proizvoljan. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{i}(T - T^*)f, f\right\rangle &= \frac{1}{i}\left(\langle Tf, f\rangle - \langle f, Tf\rangle\right) = 2\text{Im}\,\langle Tf, f\rangle \\ &= 2\|f\|^2\text{Im}\left\langle T\frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|}\right\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

jer je $\left\langle T\frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|}\right\rangle \in W(T)$. Dobili smo da je $\frac{1}{i}(T - T^*)$ pozitivno semidefinitan pa postoji pozitivno semidefinitan operator $B \in B(H)$ tako da je $B^2 = \frac{1}{i}(T - T^*)$. Sada je

$$0 = \left\langle \frac{1}{i}(T - T^*)x, x\right\rangle = \left\langle B^2x, x\right\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2$$

pa je $Bx = 0$, odakle slijedi $B^2x = 0$. Konačno,

$$(T - T^*)x = 0.$$

Dobili smo da x pripada skupu $N := \text{Ker}(T - T^*) = \{f \in H : Tf = T^*f\}$, koji je zatvoren. Budući je T normalan, vrijedi

$$T^*Tx = TT^*x = TTx,$$

tj. N je invarijantan za T i $T|_N$ je očito hermitski operator. Jasno je da vrijedi $W(T|_N) \subseteq W(T)$ i prema Teoremu 4.0.1 imamo $W(T|_N) \subseteq \mathbb{R}$. Zato je $W(T|_N) \subseteq W(T) \cap \mathbb{R} = \{0\}$, iz čega slijedi $T|_N = 0$. Budući je $x \in N$, vrijedi $Tx = 0$, što znači da je $0 \in \sigma_p(T)$.

Obrat je istinit za svaki operator $T \in B(H)$. Skup $\overline{W(T)}$ je jednak konveksnoj ljusci ekstremnih točaka skupa $\overline{W(T)}$. Ako pretpostavimo da su te ekstremne točke svojstvene vrijednosti operatora T i koristeći činjenicu da je točkovni spektar operatora sadržan u numeričkoj slici tog operatora dobivamo

$$\overline{W(T)} \subseteq \text{conv}(\sigma_p(T)) \subseteq \text{conv}(W(T)) = W(T),$$

tj. $\overline{W(T)} = W(T)$, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1819-v2.pdf (kolovoz, 2020.).

[2] T. Berić, *Normirani prostori vježbe*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/np-vjezbe-1920-2.pdf (kolovoz, 2020.).

[3] T. Berić, *Operatori na normiranim prostorima vježbe*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/ONP-vjezbe-11.pdf (kolovoz, 2020.).

[4] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations (3rd ed.)*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[5] K. E. Gustafson, D. K. M. Rao, *Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer, New York, 1997.

[6] J. H. Shapiro, *Notes on the numerical range*, dostupno na https://users.math.msu.edu/users/shapiro/Pubvit/Downloads/NumRangeNotes/numrange_notes.pdf (kolovoz 2020.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo razvili osnovnu teoriju numeričke slike i pokazali neka fundamentalna svojstva koja vrijede za numeričku sliku i numerički radijus. Radili smo s ograničenim linearnim operatorima nad kompleksnim Hilbertovim prostorima. Opisali smo numeričku sliku raznih linearnih operatora, posebno za hermitske i normalne operatore. Pokazano je kako su povezani numerička slika i spektar operatora. Promatrali smo što se može zaključiti o numeričkoj slici ako nam je dan linearni operator i, obratno, ako nam je dana numerička slika nekog operatora, pokazali smo što se može zaključiti o tom istom operatoru iz njegove numeričke slike.

Summary

In this thesis, we have developed the basic theory of numerical range and shown some fundamental properties that apply to numerical range and numerical radius. We worked with bounded linear operators over complex Hilbert spaces. We have described the numerical range of various linear operators, especially for self-adjoint and normal operators. It was shown how the numerical range and the spectrum are related. We observed what can be concluded about the numerical range if we are given a linear operator and, conversely, if we are given the numerical range of an operator, we have shown what can be concluded about that same operator from its numerical range.

Životopis

Rođen sam 2. studenog 1996. godine u Zagrebu. Osnovno obrazovanje sam stekao u Osnovnoj školi dr. Ante Starčevića u Zagrebu. U osnovnoj školi sam se ozbiljno zainteresirao za matematiku te sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike i postigao dobre rezultate. Po završetku osnovne škole sam upisao XV. gimnaziju u Zagrebu. Maturirao sam 2015. godine te iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Titulu sveučilišnog prvostupnika sam stekao 2018. godine i na istom fakultetu upisujem diplomski studij Matematička statistika.