Hallov teorem

Mišerić, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Mišerić

HALLOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliko hvala svim profesorima i asistentima koji su mi tokom ovih godina prenosili znanje i motivirali me da svoje potencijale razvijam u ovom smjeru. Posebno hvala mentoru Slavenu Kožiću na stručnim savjetima i prenesenom znanju tijekom izrade ovog rada. Hvala obitelji i prijateljima koji su mi bili najveća podrška na svakom koraku mojeg obrazovnog puta.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Motivacija i osnovni pojmovi **3**
1.1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova . . . 3
1.2 Kombinatorna motivacija . . . 6

2 Hallov teorem **11**
2.1 Kombinatorna interpretacija teorema . . . 11
2.2 Sparivanje i Hallov teorem . . . 12
2.3 Dokazi Hallovog teorema . . . 15
2.3.1 Dokaz indukcijom . . . 15
2.3.2 Dokaz indukcijom s blokovima . . . 16
2.3.3 Dokaz brisanjem bridova . . . 18
2.3.4 Hallov dokaz . . . 20
2.4 Posljedice teorema . . . 21

3 Ekvivalentni teoremi **27**
3.1 Königov teorem . . . 27
3.2 Birkhoff–von Neumannov teorem . . . 31
3.3 Latinski pravokutnici . . . 34
3.4 Dilworthov teorem . . . 36
3.5 Mengerov teorem . . . 41

Bibliografija **47**

Uvod

Hallov teorem jedan je od centralnih teorema iz područja kombinatorike koji određuje kada se različiti elementi mogu odabrati iz familije konačnih skupova čiji presjeci nisu nužno prazni. Teorem ima nekoliko različitih oblika kojima se može iskazati ovisno o području na koji se primjenjuje. Prvenstveno je Philip Hall[1] 1935. godine dokazao teorem u kontekstu teorije skupova no teorem je kasnije postao vrlo poznat po generalizaciji iz područja teorije grafova. Važnost Hallovog teorema možemo vidjeti kod proučavanja sparivanja u grafu jer nam on daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje potpunog sparivanja u danom grafu. Često se može primijetiti da se govori i o poznatom Hallovom teoremu o braku koji je jedan od specijalnih slučajeva originalnog teorema koji govori o uvjetu za postojanje savršenog sparivanja u grafu.

Kroz ovaj rad pokušat ćemo približiti raznolikost područja u kojima ovaj teorem ima primjenu. Na početku ćemo vidjeti motivaciju koja je dovela do velikog interesa matematičara oko tog teorema. Nadalje, kroz drugo poglavlje ćemo iskazati teorem u kontekstu skupova i teorije grafova te dokazati njihovu ekvivalenciju i dati nekoliko različitih dokaza Hallovog teorema. Na kraju poglavlja vidjet ćemo kako se može generalizirati na beskonačne skupove te nekoliko jednostavnijih posljedica iz raznih područja matematike.

Drugi dio rada bavi se proučavanjem odabranih ekvivalentnih teorema. Zanimljivo je vidjeti da iako činjenice dokazane u Hallovom i ekvivalentnim teoremima djeluju intuitivno, najraniji od dokazanih teorema bio je Mengerov teorem koji je dokazan tek 1927. godine, a sam Hallov teorem dokazan je 1935. godine. U radu ćemo vidjeti da je primjena Mengerovog teorema u teoriji grafova. Teorem kaže da je minimalni broj vršno/bridno disjunktnih putova između dva vrha u grafu jednak broju vrhova/bridova u njihovom minimalnom vršnom/bridnom rezu. Sljedeći od dokazanih teorema je Königov teorem iz 1931. godine koji ima svoju matričnu i grafovsku formulaciju. Grafovska formulacija govori da je broj bridova u maksimalnom sparivanju bipartitnog grafa jednak broju bridova minimalnog vršnog pokrivača dok matrični ekvivalent govori da je rang binarne matrice jednak broju linija potrebnih za pokrivanje svih jedinica u matrici. Nadalje, 1945. je dokazan Birkhoff-Von Neumannov teorem u čijem iskazu stoji da se svaka dvostruko stohastička marica može zapisati kao konveksna kombinacija permutacijskih matrica. Daljnja pri-

[1] P. Hall (1904-1982), engleski matematičar

mjena na matrice može se pronaći u latinskim pravokutnicima. Vidjet ćemo da je pomoću Hallovog teorema dokazano da se svaki latinski pravokutnik može nadopuniti do latinskog kvadrata. Kronološki gledano, posljednje dokazani teorem od onih koje ćemo proučavati u radu bio je Dilworthov teorem koji je dokazan tek 1950. godine. U točki koja će se baviti Dilworthovim teoremom upoznati ćemo se s konačnim parcijalno uređenim skupovima za koje teorem kaže da se mogu zapisati kao particija onoliko lanaca kolika je duljina najvećeg antilanca.

Poglavlje 1

Motivacija i osnovni pojmovi

Mnogi problemi iz stvarnog života mogu se vrlo jednostavno formulirati u probleme iz područja teorije grafova. Primjerice, vrhovi grafa mogu označavati ljude, a bridovi između njih određene odnose. Prirodno je, stoga, i na taj način prikazati motivaciju i osnovnu bit Hallovog teorema. Započet ćemo s definicijama nekih osnovnih pojmova važnih za razumijevanje daljnjeg sadržaja.

1.1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

U ovom poglavlju teorijski dio pratit će definicije pojmova iz skripte [12] i članka [10].

Definicija 1.1.1. ***Graf*** *G je uređen par (V, E), pri čemu je V neprazan skup čije elemente zovemo vrhovi, a E podskup familije svih dvočlanih podskupova od V čije elemente nazivamo bridovi.*

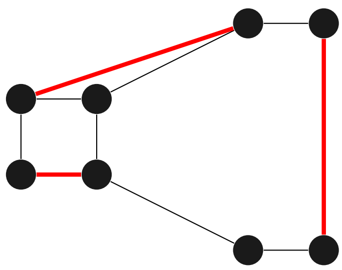
Za dva vrha $u, v \in V$ kažemo da su **susjedni** ako postoji brid koji ih spaja, odnosno ako postoji $e = \{u, v\} \in E$. Kažemo još i da su vrhovi u i v **incidentni** s bridom e te da su u i v krajevi brida e. Primijetimo da iz definicije 1.1.1 slijedi da graf ne sadrži petlje, tj. bridove čiji se krajevi podudaraju. Nadalje, graf ne sadrži niti višestruke bridove. Naravno, definiciju 1.1.1 bismo mogli generalizirati tako da dopustimo da E bude multiskup. U tom slučaju bismo govorili o multigrafu, koji očito može sadržavati višestruke bridove. Međutim, takvi pojmovi nam neće biti potrebni u ovom radu. Ponekad se, kako bi se naglasilo da graf ne sadrži petlje i višestruke bridove, pojam iz definicije 1.1.1 naziva jednostavnim grafom. Također, moguće je promatrati i tzv. usmjerene grafove, kod kojih je skup bridova E definiran kao podskup Kartezijevog produkta $V \times V$. Za njegove bridove kažemo da su usmjereni jer razlikujemo početni i završni vrh.

Šetnja u grafu je niz vrhova $(v_1, v_2 \ldots, v_k)$ pri čemu su v_i i v_{i+1} susjedni za svaki $i = 1, \ldots, k-1$. **Staza** je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti, a **put** je staza u kojoj su svi vrhovi različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg).

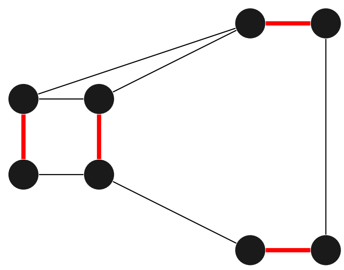
Definicija 1.1.2. *Za zadani graf $G = (V, E)$ podskup $M \subseteq E$ je* ***sparivanje*** *u G ako u M ne postoje dva susjedna brida, odnosno ne postoje dva brida koja su incidentna s istim vrhom. Tada za krajeve svih bridova iz M kažemo da su* ***spareni*** *u M.*

Sparivanje M **zasićuje** vrh $v \in V$ i vrh v je M**-zasićen** ako je neki brid iz M incidentan sa v. Inače kažemo da je v M**-nezasićen**. Ako je svaki vrh $v \in V$ M-zasićen, onda kažemo da je M **savršeno sparivanje**. Sparivanje M je **maksimalno sparivanje** ako u G ne postoji sparivanje M' t.d. je $|M'| > |M|$. M-**alternirajući** put u G je put čiji su bridovi naizmjenično elementi skupa M i $E \setminus M$. M-**uvećavajući** put u G je M-alternirajući put kojem su početak i kraj puta M-nezasićeni vrhovi.

Primjer 1.1.3. *Na slikama 1.1 i 1.2 vidimo isti graf. Crvenom bojom prikazani su bridovi koji se nalaze u sparivanju M i vidimo da se skup M razlikuje za ta dva grafa. Na prvom grafu prikazano je sparivanje koje nije savršeno jer postoje čak dva vrha koja nisu zasićena u M. Na drugom grafu vidimo jedan primjer savršenog sparivanja što je ujedno i maksimalno sparivanje.*



Slika 1.1: Sparivanje

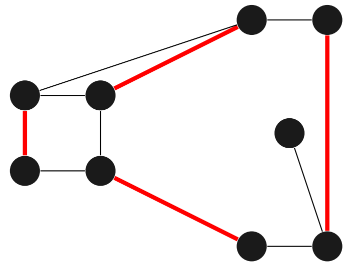


Slika 1.2: Savršeno sparivanje

S druge strane na slici 1.3 vidimo graf koji ima jedan vrh i jedan brid više nego prethodni. U ovom grafu ne postoji savršeno sparivanje stoga je na slici prikazano jedno maksimalno sparivanje gdje vidimo da postoji jedan vrh koji nije zasićen tim sparivanjem.

U nastavku će nam biti posebno važna još jedna vrsta grafova, bipartitni grafovi. Jedan od mogućih načina iskazivanja Hallovog teorema govori upravo o bipartitnim grafovima i sparivanjima u njemu.

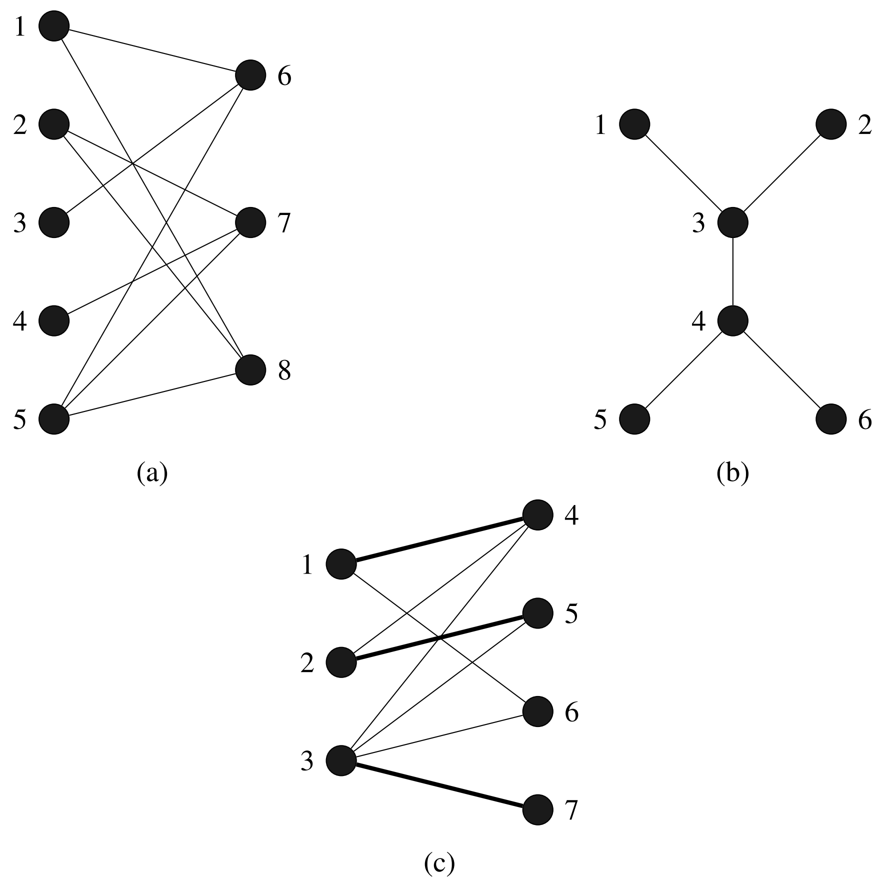
Definicija 1.1.4. *Kažemo da je graf $G = (V, E)$* ***bipartitan*** *ako postoje $A, B \neq \emptyset$ t.d. je $A \cup B = V$ i $A \cap B = \emptyset$ te da za svaki brid $e \in E$, $e = \{a, b\}$ vrijedi $a \in A, b \in B$. Bipartitan graf G s biparticijom (A, B) označava se $G(A, B)$.*



Slika 1.3: Maksimalno sparivanje

Za bipartitni graf $G(A, B)$ kažemo da ima **potpuno sparivanje u** A ako postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz A.

Primjer 1.1.5. *Slijede primjeri bipartitnih grafova.*



Slika 1.4: Primjeri bipartitnih grafova

Na prvom grafu je očito da particiju čine skupovi vrhova $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $B_1 = \{6, 7, 8\}$ *dok su na drugom grafu particije* $A_2 = \{1, 2, 4\}$ *i* $B_2 = \{3, 5, 6\}$*. Particije trećeg grafa čine skupovi* $A_3 = \{1, 2, 3\}$ *i* $B_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ *te možemo vidjeti da je sparivanje* $M = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 7\}\}$ *jedno potupuno sparivanje u* A_3*.*

Često je korisno grafove prikazati i na drugačiji način. Jedan takav je na primjer pomoću matrica povezanosti.

Definicija 1.1.6. *Neka je G proizvoljan graf i neka je* $|V| = n$*.* ***Matrica povezanosti*** *grafa G je kvadratna matrica reda n, u oznaci* $A(G)$ *gdje pojedini elementi* a_{ij} *odgovaraju broju bridova između vrhova* v_i *i* v_j*, tj. broju bridova koji su incidentni i sa* v_i *i sa* v_j*.*

Možemo primijetiti da je kod jednostavnih neusmjerenih grafova matrica povezanosti simetrična te da su njeni elementi iz skupa $\{0, 1\}$. Također, može se vidjeti da su sparivanja u grafu prikazana matricama susjedstva koja sadrži najviše jednu jedinicu u svakom stupcu i svakom retku.

Primjer 1.1.7. *Odredimo matricu povezanosti grafa 1.4a.*

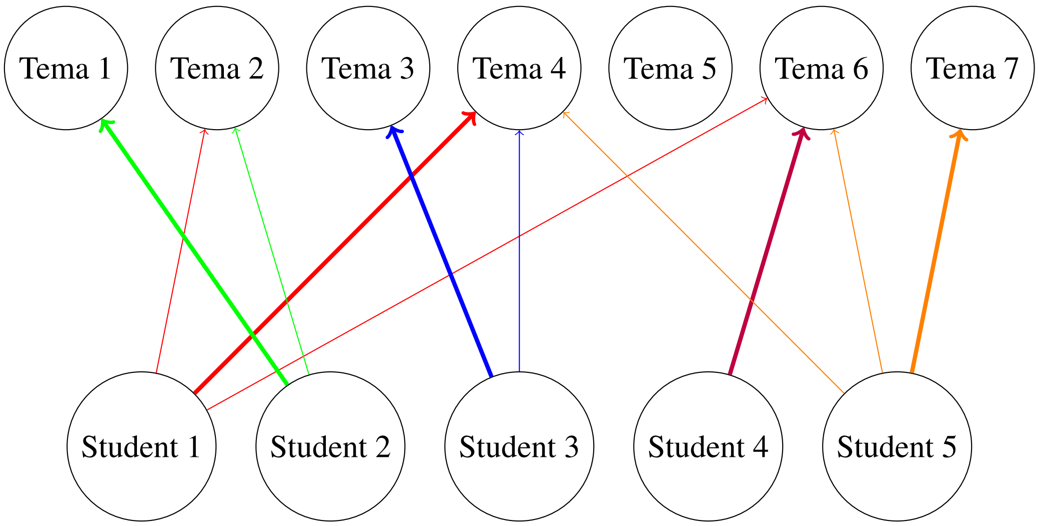
Obzirom da graf ima 8 vrhova, naša matrica povezanosti će biti kvadratna matrica reda 8. Vidmo da iz vrha 1 postoje bridovi prema vrhovima 6 i 8. Stoga će u prvom redu matrice na pozicijama a_{16} *i* a_{18} *biti 1, a na preostalima 0. Dalje istim razmišljanjem popunjavamo matricu.*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Kombinatorna motivacija

Zamislimo slijedeću situaciju: na nekom kolegiju studenti biraju temu seminarskog rada. Profesor nudi niz tema, a svaki student sastavlja popis tema koje su mu zanimljive s ponuđenog popisa. Nakon toga profesor pokušava teme dodijeliti studentima na način da svaki student dobije jedinstvenu temu i da je ta tema jedna od onih koje su mu zanimljive. Može li profesor i ako da pod kojim uvjetima dodijeliti teme za seminar tako da svaki student radi ono što mu je zanimljivo? Pogledajmo sljedeće primjere:

Primjer 1.2.1. *Pretpostavimo da imamo 5 studenata i 7 predloženih tema. Prikažimo grafički jedan njihov mogući izbor. Neka su s jedne strane grafa vrhovi kojima označavamo studente, a s druge strane ponuđene teme. Za svaku temu koju je određeni student stavio na svoj popis dodajemo brid između studenta i teme. Na slici 1.5 možemo vidjeti taj graf.*



Slika 1.5: Grafički prikaz primjera studenata i njihovih želja za seminar

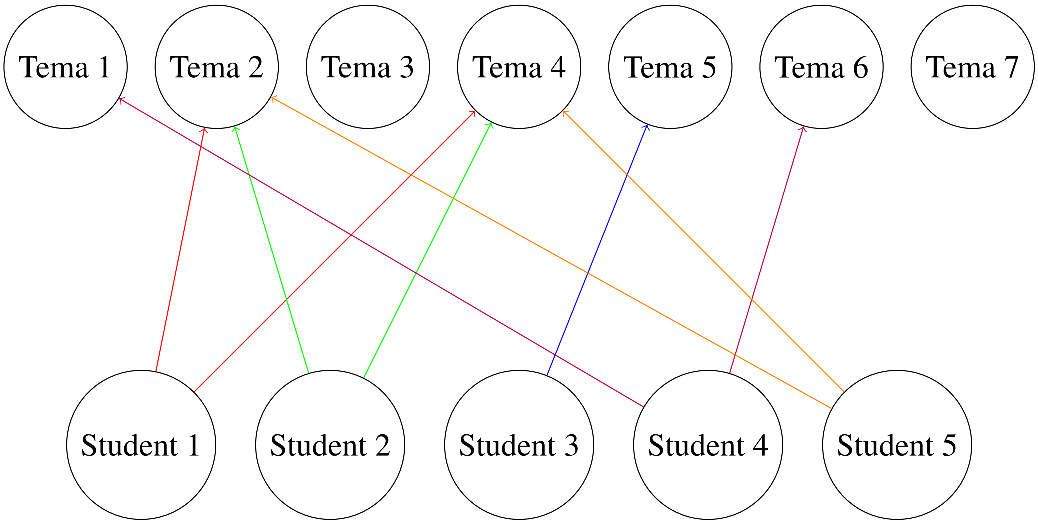
Vidimo da se u primjeru radi o bipartitnom grafu jer nikada nećemo povezati bridom dvije teme ili dva studenta. Pitanje je postoji li sparivanje koje zasićuje sve vrhove koji označavaju studente? U ovom primjeru može se vidjeti da postoji. Jedno takvo sparivanje prikazano je na slici 1.5 podebljanim linijama. No, možemo vidjeti i da nije jedinstveno jer bi primjerice Tema 4 mogla biti dodijeljena Studentu 5, a onda Tema 2 Studentu 1 i ponovno bismo imali teme raspoređene studentima prema njihovim željama.

Pogledajmo sada jedan primjer gdje to nije moguće.

Primjer 1.2.2. *U ovom primjeru također imamo 5 studenta i 7 tema no njihove želje su u ovom slučaju drugačije, a prikazane su grafom na slici 1.6.*

Vidimo da su Student 1, Student 2 i Student 5 na popis stavili jedino Temu 2 i Temu 4. Time nailazimo na problem jer 3 studenta žele 2 iste teme pa je prema Dirichletovom principu nemoguće svakome od njih 3 dati neku od željenih tema, a da svatko ima jedinstvenu temu.

Prethodni primjeri lako se mogu poopćiti i na razne druge probleme. Npr. podjela zadataka na zaposlenike tako da svaki zaposlenik radi onaj posao za koji je stručan itd. Slijede još dva primjera koja dobro ilustriraju probleme čija rješenja dobivamo Hallovim teoremom.



Slika 1.6: Grafički prikaz primjera studenata i njihovih želja za seminar

Primjer 1.2.3. *Imamo špil od 52 igraće karte te ga nasumično podijelimo u 13 skupova po 4 karte. Tada uvijek postoji način da izaberemo 13 karata - sa svakog skupa po jednu, a da izabrane karte čine niz karata od jedinice do asa.*

Primjer 1.2.4 (Putnam Competition 2012 B3)**.** *Kružni turnir sastoji se od $2n$ timova i traje $2n - 1$ dan. Svakog dana igra se n utakmica tako da svaki tim igra jednu utakmicu dnevno i u svakoj utakmici jedan tim pobjeđuje, a jedan gubi. Tijekom turnira svaki tim igra točno jednu utakmicu protiv svakog drugog tima. Jeli moguće svakog dana izabrati jedan od pobjedničkih timova tako da se niti jedan dan ne izabere isti tim?*

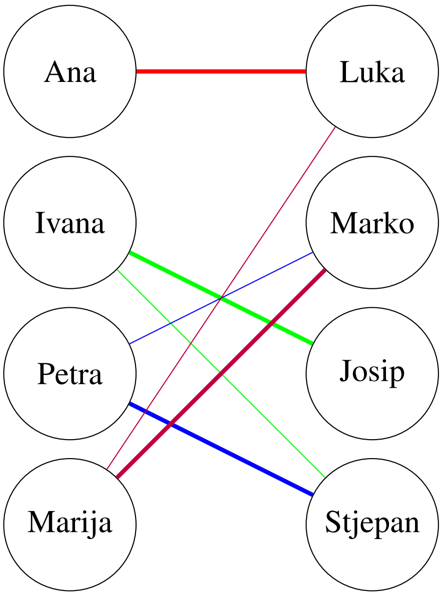
Odgovor na pitanje iz Primjera 1.2.4 jest da, postoji način da svaki dan izaberemo različiti pobjednički tim, a kako doći do tog odgovora će se lako vidjeti nakon što formalno iskažemo Hallov teorem. Ovaj problem bio je zadan kao zadatak na natjecanju Williama Lowell-a Putnam 2012. godine.

Prvenstvena motivacija za Hallov teorem bila je ipak nešto drugačija, no slična prvim primjerima. Također, ona objašnjava i zašto se često na taj teorem referira pod nazivom Hallov teorem o braku. Motivacija je bila sljedeća:

Pretpostavimo da imamo n žena i n muškaraca pri čemu se svatko od njih želi oženiti za nekoga suprotnog spola te da svaka osoba može imati samo jednog supružnika. Pretpostavimo nadalje da svaka žena ima listu muškaraca za koje bi se rado udala. Tada se svaka žena može udati za muškarca sa svoje liste ako i samo ako za svaki k, $1 \leq k \leq n$, unija bilo kojih k listi sadrži barem k imena.

Kako u ovom primjeru imamo skupove jednakih veličina koji predstavljaju muškarce i žene, za rješenje tražimo savršena sparivanja u grafu koji prikazuje dani problem. Prikažimo sada problem na jednom konkretnom primjeru.

Primjer 1.2.5. *Zamislimo da imamo sljedeću situaciju: u nekom selu nalaze se četiri djevojke Ana, Ivana, Petra i Marija te četiri muškarca Luka, Marko, Josip i Stjepan. Među njima postoje neke uzajamne simpatije. Ani se sviđa Luka, Ivani Josip i Stjepan, Petri se sviđaju Marko i Stjepan, a Mariji Luka i Marko. Na grafu prikazanom na slici1.7 prikazani su njihovi odnosi pomoću bridova koji označavaju simpatije.*



Slika 1.7: Grafički prikaz simpatija među djevojkama i muškarcima

U tom bipartitnom grafu tražimo postoji li savršeno sparivanje kojim bismo povezali svaku djevojku s jednim od muškaraca koji joj se sviđa kako bismo riješili originalni problem. U ovom slučaju vidimo da problem ima rješenje te je ono prikazano podebljanim linijama na pripadnom grafu. Štoviše, ako bolje pogledamo vidimo da je rješenje u ovom specijalnom slučaju jedinstveno.

Na malim primjerima kao što je prethodni lako se problem prikaže grafički te je jednostavno vidjeti postoji li sparivanje ili ne. Problem nastaje s povećanjem podataka koje je potrebno uzeti u obzir. Što ako bismo imali primjerice 100 djevojaka i 100 muškaraca za koje treba vidjeti postoji li način da se sve djevojke udaju za muškarca sa svoje liste? U tom slučaju crtanje i proučavanje grafa više nije jednostavan način.

Stoga je prirodno postaviti pitanja koji su uvjeti da bi postojalo određeno sparivanje, na koliko načina se problem može riješiti i postoji li algoritam za traženje rješenja. Hallov teorem dati će nam odgovor na pitanje pod kojim uvjetima postoji rješenje zadanog problema. U nastavku rada prvo ćemo iskazati teorem u njegovoj originalnoj formulaciji i objasniti ekvivalenciju s formulacijom tog teorema u smislu grafova i sparivanja.

Poglavlje 2

Hallov teorem

Već na početku rada spomenuli smo da Hallov teorem ima više načina na koji se iskazuje, a ovisno o području koje se proučava. U ovom poglavlju prvo ćemo iskazati kombinatornu formulaciju teorema, a nakon toga ćemo iskazati teorem i u terminima teorije grafova i sparivanja na čijim primjerima smo ranije pokazali motivaciju, a dokazat ćemo i ekvivalenciju tih formulacija. Uz to vidjet ćemo nekoliko različitih dokaza i posljedica. Ovo poglavlje svojim tokom uglavnom slijedi izlaganje iz poglavlja 5 knjige [8].

2.1 Kombinatorna interpretacija teorema

Definicija 2.1.1. ***Sustav različitih predstavnika*** *ili* ***transverzala*** *niza nepraznih i ne nužno disjunktnih skupova* $S_1, \ldots, S_n$ *je svaka uređena* $n-$*torka* $(x_1, \ldots, x_n)$ *takva da vrijedi* $x_i \in S_i$ *za svaki* $i = 1, \ldots, n$, $x_i \neq x_j$ *ako* $i \neq j$.

U ovom radu za sve skupove koje ćemo promatrati se pretpostavlja da su konačni. Isto tako ćemo u nastavku rada grafove smatrati konačnima, tj. pretpostavljati ćemo da im je skup vrhova konačan. U potpoglavlju 2.4 vidjet ćemo nekoliko posljedica za beskonačne skupove, no tamo će biti naglašeno ako će određeni skup biti beskonačan.

Očito je da transverzala skupova ne postoji uvijek. Zato se postavlja pitanje koji uvjet mora biti zadovoljen da bi postojala. Hallov teorem daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje transverzale. Krenimo prvo s nužnim uvjetom. Kada bi skupovi $S_1, \ldots, S_n$ imali sustav različitih predstavnika očito bi vrijedilo slijedeće:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \geq |I|, \text{ za svaki } I \subseteq \{1, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

Odnosno, za svaki $k = 1, \ldots, n$ unija bilo kojih k skupova sadržavala bi barem k elemenata. Uvjet (2.1) naziva se još i Hallov uvjet jer je Philip Hall 1935. godine prvi dokazao da taj uvjet nije samo nužan nego štoviše i dovoljan za postojanje sustava različitih predstavnika.

Teorem 2.1.2 (Hallov teorem)**.** *Neka je S neprazan skup. Nadalje, neka je I konačan skup, $I = \{1, \ldots, n\}$ te neka je za svaki $i \in I$ S_i podskup skupa S. Tada postoji sustav različitih predstavnika $(x_1, \ldots, x_n)$ ako i samo ako za svaki $k = 1, \ldots, n$ unija bilo kojih k podskupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$, gdje su $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ međusobno različiti, sadrži barem k elemenata.*

Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 2.1.3. *Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ te neka su podskupovi $S_1, \ldots, S_6$ zadani kao u nastavku.*

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, 2\} \\ S_2 &= \{2, 3\} \\ S_3 &= \{1, 3\} \\ S_4 &= \{1, 5, 6\} \\ S_5 &= \{2, 3, 4, 5\} \\ S_6 &= \{1, 3, 6\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Provjeravajući Hallov uvjet mogli bismo vidjeti da za svaki $k = 1, \ldots, 6$ unija bilo kojih k skupova sarži barem k elemenata. Sukladno tome možemo zaključiti da transverzala postoji. Primjerice, jedno moguće rješenje bilo bi $(1, 2, 3, 5, 4, 6)$. Možemo vidjeti da to nije i jedino rješenje, npr. $(2, 3, 1, 5, 4, 6)$ je isto tako moguće rješenje.

No, ako bismo iz skupa S_5 izbacili element 4, imali bismo skup $S_5 = \{2, 3, 5\}$ te uvjet više ne bi vrijedio. Za $k = 6$ imali bismo

$$\begin{gathered} S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 = \{1, 2, 3, 5, 6\} \\ i \\ |\, S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \,| = 5. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Kako je u tom slučaju broj elemenata u uniji 5, a prema Hallovom uvjetu bi ih trebalo biti barem 6, možemo zaključiti da tada ne postoji transverzala zadanih skupova.

2.2 Sparivanje i Hallov teorem

Drugi oblik Hallovog teorema koji je također jako poznat, a vezan je uz teoriju grafova je sljedeći:

Teorem 2.2.1. *Neka je G bipartitan graf s biparticijom (A, B). Tada G sadrži potpuno sparivanje ako i samo ako za svaki $S \subseteq A$ vrijedi*

$$|N(S)| \geq |S|, \tag{2.4}$$

gdje je $N(S) \subseteq B$ skup svih vrhova grafa G koji su susjedni vrhovima iz S.

Uvjet (2.4) je isto što i Hallov uvjet (2.1) iz teorema 2.1.2 samo u ovom slučaju opisuje drugačije elemente.

Kada govorimo o grafovima često je zanimljiv i slučaj kada su biparticije A i B skupovi jednake veličine. Tada postoji specijalni slučaj teorema 2.2.1 koji se još naziva i Hallov teorem o braku.

Korolar 2.2.2 (Hallov teorem o braku)**.** *Neka je G bipartitan graf s biparticijom (A, B) i neka je $|A| = |B|$. Tada G sadrži savršeno sparivanje ako i samo ako vrijedi uvjet* (2.4).

Dokaz. Prvi smjer koji pokazuje nužnost uvjeta je ponovno trivijalan jer ako postoji savršeno sparivanje, onda za proizvoljni $S \subseteq A$ sigurno vrijedi uvjet (2.4). Kako savršeno sparivanje zasićuje sve vrhove iz A i iz B, onda vrijedi i da je $|A| = |B|$.

U drugom smjeru pretpostavljamo valjanost teorema 2.2.1 kojeg ćemo tek kasnije dokazati. Prema njemu postoji potpuno sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz A, a obzirom da je $|A| = |B|$ dobivamo sparivanje koje zasićuje i sve vrhove u B. □

Vratimo se sada na primjer 1.2.2. Zaključili smo da u njemu ne postoji sparivanje kojim bi rasporedili teme seminara na način da svaki od studenata dobije temu koja mu je zanimljiva. Kada bismo primijenili teorem 2.2.1 pri čemu bi skup A označavao vrhove koji prikazuju studente, a B oni koji prikazuju teme vidjeli bismo da Hallov uvjet ne vrijedi za svaki $S \subseteq A$. Uzmemo li za S podskup koji označava Studenta 1, Studenta 2 i Studenta 5, $N(S)$ će biti 2 jer su jedini susjedi tih vrhova oni koji označavaju Temu 2 i Temu 4, a da bi uvjet vrijedio $N(S)$ bi trebao biti barem 3 jer je $|S| = 3$. Način na koji smo došli do tog odgovora u samom primjeru bio je sličan pristupu kada znamo iskaz teorema što objašnjava i zašto je teorem tako intuitivno jasan i primjenjiv.

Bitno je uočiti i odnos između teorema 2.1.2 i teorema 2.2.1. Iako smo spomenuli na početku ovog odjeljka da je teorem 2.2.1 drugi oblik iskaza Hallovog teorema, njihova poveznica ne mora biti odmah očita.

Pokušajmo Hallov teorem preoblikovati u problem teorije grafova. Tada bi skupovi $S_1, \ldots, S_n$ predstavljali vrhove skupa A grafa G s biparticijom (A, B). S druge strane, u skup B bili bi uvršteni svi elementi iz unije skupova $S_1 \cup \cdots \cup S_n$. Bridovi u grafu prikazivati će pripadnost pojedinog elementa određenom skupu S_i. Stoga, mora vrijediti sljedeće:

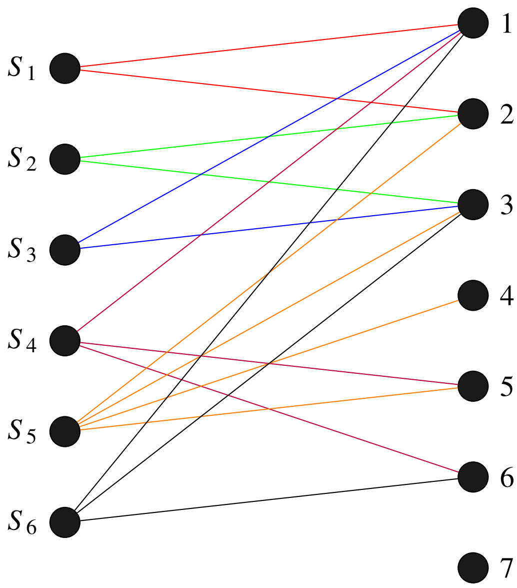
vrh u A koji označava skup S_i sadrži brid prema $b \in B$ ako i samo ako vrijedi $b \in S_i$.

Jednom kada imamo graf koji prikazuje naš problem, pitanja postojanja i traženja transverzale postaju ekvivalentna pitanjima postojanja i traženja potpunog sparivanja u grafu.

Slično vrijedi i u obrnutom smjeru kada započinjemo s bipartitnim grafom G i pokušavamo problem svesti na kombinatorni. Tada će svaki vrh iz A predstavljati jedan skup S_i, a svaki vrh iz B jedan od elemenata tih skupova. Tada ćemo nadalje za svaki brid $e = \{u, v\} \in E$ dodati element s oznakom v u pripadni skup S_i koji je predstavljen vrhom u te ćemo za rješenje problema tražiti transverzalu skupova.

Sada ćemo te odnose problema iz različitih područja pokazati i na konkretnim primjerima koje smo ranije uveli.

Primjer 2.2.3. *U primjeru 2.1.3 zadan je skup* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *te 6 njegovih podskupova* $S_1, \ldots, S_6$. *Dakle, kada bismo problem pretvarali u ekvivalentni problem iz teorije grafova, skup A bio bi* $\{S_1, \ldots, S_6\}$, *a skup B sadržavao bi elemente kao i skup* S. *Potrebno bi bilo dodati još samo bridove. Primjerice za skup* $S_1 = \{1, 2\}$ *bilo bi potrebno dodati brid* $\{S_1, 1\}$ *i* $\{S_1, 2\}$. *Prikaz konačno dobivenog grafa za taj primjer vidljiv je na slici 2.1.*



Slika 2.1: Grafički prikaz primjera 2.1.3

Za obrnuti smjer možemo se poslužiti primjerom 1.2.1 sa studentima i seminarskim temama.

Primjer 2.2.4. *Na slici 1.5 je graf za koji smo vidjeli da u njemu postoji potpuno sparivanje. Sada ćemo to sparivanje interpretirati u terminima skupova. Vrhovi koji označavaju* *studente su oni koji predstavljaju skupove S_i iz Hallovog teorema, a vrhovi s temama predstavljaju elemente tih skupova. Potrebno je ubaciti elemente u skupove ovisno o povezanosti grafa. Npr. Student 1 ima bridove prema vrhovima Tema 2, Tema 4 i Tema 6 pa će stoga skup biti Student1=* $\{Tema2, Tema4, Tema6\}$. *Na kraju, kada za svaki brid ubacimo temu u određeni skup, dobivamo sljedeće skupove:*

$$\begin{aligned}
\textit{Student1} &= \{Tema2, Tema4, Tema6\} \\
\textit{Student2} &= \{Tema1, Tema2\} \\
\textit{Student3} &= \{Tema3, Tema4\} \\
\textit{Student4} &= \{Tema6\} \\
\textit{Student5} &= \{Tema4, Tema5, Tema6\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Kada bismo iz skupova odabrali elemente koji čine sparivanje u pripadnom grafu i označeni su podebljanim bridovima na slici 1.5 dobili bismo upravo transverzalu pripadnih skupova

$$(x_1, \ldots, x_5) = (Tema4, Tema1, Tema3, Tema6, Tema7) \tag{2.6}$$

2.3 Dokazi Hallovog teorema

Postoje različiti dokazi Hallovog teorema s različitim idejama. Za neke od njih može se reći da su prikladniji kombinatornom ili grafičkom pogledu teorema no svi oni na kraju daju isti rezultat. U ovom poglavlju pokazati ćemo neke od tih dokaza. Za početak bitno je vidjeti da smo jedan smjer teorema već dokazali. Na početku poglavlja 2 iskazali smo nužni uvjet (2.1) čiji dokaz je trivijalan jer ako bismo imali transverzalu $(x_1, \ldots, x_n)$ skupova $S_1, \ldots, S_n$ očito je i da za svaki $k = 1, \ldots, n$ bilo kojih k odabranih skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ također ima transverzalu. Stoga, zaključujemo da unija bilo kojih k skupova sadrži barem onih k elemenata koji se nalaze u transverzali, a to je upravo ono što govori nužni uvjet Hallovog teorema. U dokazima koji slijede pokazivati ćemo samo dovoljnost uvjeta. U ovoj točki dokaz indukcijom slijedi dokaz iz 5. poglavlja knjige [9], dokaz brisanjem bridova i Hallov dokaz slijede dokaze iz poglavlja 2 knjige [11], a dokaz indukcijom s blokovima može se pronaći u poglavlju 5 knjige [8].

2.3.1 Dokaz indukcijom

Prva ideja kojom ćemo dokazati dovoljnost uvjeta u Hallovom teoremu biti će metoda matematičke indukcije po broju skupova n. Kao prvi dokaz odabrana je ta metoda jer je intuitivno najjednostavnija i vrlo lako razumljiva.

Prvi dokaz teorema. Provjeravamo bazu indukcije za $n = 1$. Kako pretpostavljamo da su skupovi $S_1, \ldots, S_n$ neprazni, baza je trivijalno zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo koju familiju skupova koja sadrži manje od n skupova. Želimo dokazati da onda tvrdnja vrijedi i za n skupova. Uvažavajući pretpostavku moguća su dva slučaja ovisno sadrži li svaka unija proizvoljnih k skupova više od k elemenata ili postoji neka unija koja ima točno k njih. Zasebno ćemo pogledati svaki od slučajeva.

Slučaj 1: Za svaki $k, 1 \leq k < n$, unija bilo kojih k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ sadrži više od k elemenata, odnosno vrijedi sljedeće:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| > |I|, \text{ za svaki } I \subseteq \{1, \ldots, n\}, \; |I| < n. \tag{2.7}$$

Iz proizvoljnog skupa S_i odaberemo proizvoljni element x kao njegovog reprezentanta i taj element x izbacimo iz svih preostalih skupova. Sada, zbog pretpostavke ovog slučaja, unija bilo kojih $k, 1 \leq k < n$, od preostalih $n - 1$ skupova sadrži barem k elemenata. Prema pretpostavci indukcije slijedi da preostalih $n - 1$ skupova ima sustav jedinstvene reprezentacije. Zajedno sa skupom S_i i njegovim reprezentantom x dobivamo transverzalu polazne familije skupova.

Slučaj 2: Ako ne vrijedi prvi slučaj, mora postojati unija nekih $k, 1 \leq k < n$, skupova koja sadrži točno k elemenata. Prema pretpostavci indukcije za tih k skupova postoji njihova transverzala $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Sada iz preostalih $n - k$ skupova maknemo tih k elemenata $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ koji čine transverzalu. Od preostalih $n - k$ skupova unija bilo kojih s skupova sadrži barem s elemenata jer bi inače unija tih s skupova i prethodnih k skupova imala manje od $s + k$ elemenata što bi bilo u kontradikciji sa pretpostavkom. Slijedno tome i prema pretpostavci indukcije i preostalih $n-k$ skupova imaju svoju transverzalu. Time smo familiju skupova $S_1, \ldots, S_n$ razdvojili u dva disjunktna dijela $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ i $S_{i_{k+1}}, \ldots, S_{i_n}$ od kojih svaki ima transverzalu. Spajajući dobivene transverzale dobivamo transverzalu početne familije skupova obzirom da smo izbacivanjem k elemenata prve transverzale iz $n-k$ preostalih skupova osigurali da se elementi prve transverzale neće ponavljati u drugoj transverzali. □

2.3.2 Dokaz indukcijom s blokovima

Sljedeći dokaz temeljit će se na brisanju određenih elemenata skupova S_i, $i = 1, \ldots, n$ tako da ne narušimo valjanost Hallovog uvjeta. Brisanje ćemo ponavljati dok na kraju ne dobijemo da svaki od tih skupova sadrži točno jedan element te da ti elementi zajedno čine transverzalu. Za ovaj dokaz biti će potrebne dvije leme koje ćemo također dokazati. Dokaz je sličan prethodnom što ćemo vidjeti u nastavku, no izlažemo njegovu ideju jer će biti potrebna u dokazima nekih posljedica teorema.

Niz od r proizvoljnih skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$ nazivat ćemo blokom $B_{r,s}$, gdje je

$$s = \left|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_r}\right|,$$

odnosno broj različitih elemenata u tom bloku. Uzimajući u obzir kako smo definirali blokove, Hallov uvjet ima vrlo jednostavan oblik:

$$s \geq r, \text{ za svaki blok } B_{r,s}. \tag{2.8}$$

Za blokove za koje vrijedi $r = s$ reći ćemo da su kritični blokovi. Prazan blok $B_{0,0}$ također smatramo kritičnim blokom.

Potrebno je još definirati uniju i presjek blokova. Pretpostavimo da niz skupova $A_1, \ldots, A_m, C_{m+1}, \ldots, C_r$ čini blok $B_{r,s}$, a niz skupova $A_1, \ldots, A_m, D_{m+1}, \ldots, D_t$ blok $B_{t,v}$ te da su skupovi $A_1, \ldots, A_m$ oni skupovi koji su sadržani u oba bloka. Tada uniju blokova $B_{r,s} \cup B_{t,v}$ definiramo kao blok $B_{y,z}$, gdje je $y = r + t - m$, koji se sastoji od niza skupova $A_1, \ldots, A_m, C_{m+1}, \ldots, C_r, D_{m+1}, \ldots, D_t$. Presjek blokova $B_{r,s} \cap B_{t,v} = B_{m,w}$ definiramo kao blok koji se sastoji od niza skupova $A_1, \ldots, A_m$.

Lema 2.3.1. *Ako vrijedi uvjet* (2.8) *za kritične blokove $B_{r,r}$ i $B_{t,t}$, unija $B_{r,r} \cup B_{t,t}$ i presjek $B_{r,r} \cap B_{t,t}$ kritičnih blokova je ponovno kritični blok.*

Dokaz. Neka je $B_{r,r} \cup B_{t,t} = B_{y,z}$ i $B_{r,r} \cap B_{t,t} = B_{u,v}$. Tada z koji označava broj elemenata u uniji blokova može biti najviše $r + t$, a umanjuje se za svaki element koji se nalazi u oba bloka $B_{r,r}$ i $B_{t,t}$ što je upravo broj elemenata u presjeku, v. Iz toga vidimo da vrijedi sljedeće:

$$z \leq r + t - v. \tag{2.9}$$

Osim toga prema Hallovom uvjetu vrijedi $v \geq u$ i $z \geq y$.

Kako vrijedi $y + u = r + t$, što je broj skupova u oba bloka zajedno, imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$r + t - v \geq z \geq y = r + t - u \geq r + t - v. \tag{2.10}$$

Sada iz prethodnog vidimo da vrijede jednakosti $z = y$ i $u = v$ pa je time lema dokazana. □

Lema 2.3.2. *Neka su $S_1, \ldots, S_n$ skupovi i neka je $B_{k,k}$ kritični blok koji sadrži k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$. Tada brisanjem elemenata koji se nalaze u uniji $S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}$ iz preostalih $n - k$ skupova koji se ne nalaze u bloku $B_{k,k}$ ne narušavamo valjanost Hallovog uvjeta.*

Dokaz. Pretpostavljamo da vrijedi Hallov uvjet (2.8) za svaki blok skupova $S_1, \ldots, S_n$. Neka je $B_{r,s}$ proizvoljan blok. Potrebno je pokazati da blok $B'_{r,s'}$ koji nastaje brisanjem elemenata bloka $B_{k,k}$ iz njega i dalje zadovoljava Hallov uvjet, odnosno da vrijedi da je $s' \geq r$. Neka su

$$\begin{aligned} B_{k,k} &= \{A_1, \ldots, A_m, D_{m+1}, \ldots, D_k\} \\ B_{r,s} &= \{A_1, \ldots, A_m, C_{m+1}, \ldots, C_r\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

pri čemu su skupovi $A_1, \dots, A_m$ jedini zajednički u oba bloka. Tada uniju i presjek predstavljaju sljedeći skupovi:

$$\begin{aligned} B_{r,s} \cup B_{k,k} = B_{y,z} = \{A_1, \dots, A_m, D_{m+1}, \dots, D_k, C_{m+1}, \dots, C_r\} \\ B_{r,s} \cap B_{k,k} = B_{m,v} = \{A_1, \dots, A_m\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Blok $B'_{r,s'}$ sadrži skupove $A_1, \dots, A_m$ koji ostaju nepromijenjeni jer se brišu elementi sadržani u kritičnom bloku $B_{k,k}$ samo iz skupova koji ne pripadaju tom bloku. Dakle, jedini skupovi bloka $B_{r,s}$ iz kojih su mogli biti brisani elementi su skupovi $C_{m+1}, \dots, C_r$. Brisanjem dobivamo sljedeći blok:

$$B'_{r,s'} = \{A_1, \dots, A_m, C'_{m+1}, \dots, C'_r\}. \tag{2.13}$$

Iz toga slijedi $s' = v + z - k$ kao zbroj v elemenata iz skupova $A_1, \dots, A_m$ koji se nalaze u bloku presjeka $B_{m,v}$ te $z - k$ elemenata iz skupova $C'_{m+1}, \dots, C'_r$ jer skupovi $C_{m+1}, \dots, C_r$ kao blokovi u uniji $B_{y,z}$ sadrže $z - k$ elemenata koji se ne nalaze u bloku $B_{k,k}$.

Vrijedi da je broj skupova u uniji $y = r + k - m$, što je broj skupova u oba bloka minus onih m koji se ponavljaju, te zbog Hallovog uvjeta vrijedi $z \geq y$ i $v \geq m$. Povezujući te (ne)jednakosti dobivamo sljedeće:

$$s' = v + z - k \geq m + y - k = r. \tag{2.14}$$

Dokazano je da vrijedi (2.8), odnosno $s' \geq r$ pa vidimo da brisanje elemenata kritičnog bloka iz skupova ne narušava valjanost Hallovog uvjeta. □

Drugi dokaz Hallovg teorema. Dokaz je jednak idejom kao prvi dokaz. Kada gledamo u smislu blokova, prvi slučaj bio bi onaj kada ne postoji kritični blok pa bismo također iz nekog skupa birali proizvoljni element i njega brisali iz preostalih skupova. U drugom slučaju postoji kritični blok te bismo elemente tog kritičnog bloka brisali iz svih preostalih skupova koji nisu u tom bloku čime se prema lemi 2.3.2 ne bi promijenila valjanost Hallovog uvjeta. □

2.3.3 Dokaz brisanjem bridova

U sljedeća dva dokaza dokazivat ćemo ekvivalentni teorem u smislu teorije grafova, odnosno teorem 2.2.1.

Treći dokaz teorema. Ovaj dokaz teorema temelji se na brisanju bridova iz grafa tako da se ne mijenja valjanost Hallovog uvjeta. Dokaz je posljedica sljedeće leme kojom ćemo vidjeti da je to moguće. □

Lema 2.3.3. *Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf s biparticijom (A, B) koji zadovoljava Hallov uvjet* (2.4). *Neka su $\{a, b_1\}$ i $\{a, b_2\}$ dva različita brida u tom grafu. Tada barem jedan od grafova $(V, E \setminus \{a, b_1\})$ ili $(V, E \setminus \{a, b_2\})$ mora zadovoljavati Hallov uvjet.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka su $E' = E \setminus \{a, b_1\}$ i $E'' = E \setminus \{a, b_2\}$ te neka su grafovi $G' = (V, E')$ i $G'' = (V, E'')$. Tada postoje $X \subseteq A$ i $Y \subseteq A$ t.d.

$$a \notin X, a \notin Y$$

i vrijedi

$$|N'(X \cup \{a\})| < |X \cup \{a\}|, |N''(Y \cup \{a\})| < |Y \cup \{a\}|,$$

gdje je s N'' označen skup susjednih vrhova u grafu G''. U grafu G' broj elemenata $N'(X)$ ostao je isti kao i u grafu G jer $a \notin X$. Jednako tako vrijedi i za skup Y. Stoga iz gornjih nejednakosti slijedi da je u grafu G' broj bridova

$$N'(a) \subseteq N(X)$$

i isto tako u grafu G''

$$N''(a) \subseteq N(Y).$$

Time vidimo da vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{gathered} |N'(X \cup \{a\})| = |N(X)| = |X| \\ \text{i} \\ |N''(Y \cup \{a\})| = |N(Y)| = |Y|. \end{gathered}$$

Koristeći te dvije jednakosti i pravila skupovnih operacija dobivamo sljedeći niz jednakosti i nejednakosti:

$$\begin{aligned} |X| + |Y| = {} & |N'(X \cup \{a\})| + |N''(Y \cup \{a\})| = \\ & = |N'(X \cup \{a\})| \cup |N''(Y \cup \{a\})| + |N'(X \cup \{a\})| \cap |N''(Y \cup \{a\})| \\ & = |N(X \cup Y \cup \{a\})| + |N(X \cap N(Y))| \\ & \geq |N(X \cup Y \cup \{a\})| + |N(X \cap Y)| \\ & \geq |X \cup Y \cup \{a\}| + |X \cap Y| \\ & \geq |X \cup Y| + 1 + |Y \cap X| = |X| + |Y| + 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Time smo došli do kontradikcije i dokazali lemu. □

2.3.4 Hallov dokaz

Zadnjim dokazom koji ćemo iznijeti biti će prikazana ideja kojom je P. Hall originalno dokazao teorem.

Pretpostavimo da u grafu G s biparticijom (A, B) postoji barem jedno sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz A. Neka je sa $H(G)$ skup svih vrhova $b \in B$ sadržanih u presjeku po svim sparivanjima grafa G(A,B) koja zasićuju sve vrhove iz A.

Prije samog dokaza iskazati ćemo dvije leme. Prvu od lema ćemo i dokazati dok se dokaz druge leme može promaći u [11] gdje se mogu pronaći i još neki dokazi teorema.

Lema 2.3.4. *Pretpostavimo da postoji sparivanje u grafu G s biparticijom (A, B) koje zasićuje sve vrhove iz A. Neka je $X \subseteq A$ takav da $|X| = |N(X)|$. Tada vrijedi $N(X) \subseteq H(G)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $|X| = |N(X)|$. Tada za svako potpuno sparivanje M koje zasićuje sve vrhove iz A u grafu G vrijedi da je skup svih vrhova iz B koji mogu biti povezani s nekim bridom u X upravo $N(X)$. Stoga se $N(X)$ pojavljuje kao podskup u svakom sparivanju. Sada uz pretpostavku da postoji potpuno sparivanje s obzirom na A, vrijedi $N(X) \subseteq H(G)$. □

Lema 2.3.5. *Neka postoji sparivanje M u grafu G te neka je $I = \{a : \{a, b\} \in M \text{ i } b \in H(G)\}$. Tada je $N(I) = H(G)$. Posebno, vrijedi $|H(G)| = |I|$.*

Četvrti dokaz teorema. Neka je G graf s biparticijom (A, B) koji zadovoljava Hallov uvjet (2.4) te neka je vrh $x \in A$. Dokaz teorema dalje ide indukcijom po n, gdje je n broj elemenata od A. Baza za $n = 1$, pri čemu je $n = |A|$, je trivijalno zadovoljena. Pretpostavljamo sada da tvrdnja teorema 2.2.1 vrijedi za svaki $n < |A|$. Preciznije, za bipartitan graf $G'(A', B')$, gdje je $|A'| \leq n$, vrijedi da sadrži potpuno sparivanje s obzirom na A' ako i samo ako za svaki $S \subseteq A'$ vrijedi $|N(S)| \geq |S|$.

Neka $G \setminus \{x\} = G(A \setminus \{x\}, B)$ označava podgraf početnog grafa G sa skupom vrhova $(A \setminus \{x\}) \cup B$. Sada, ako vrijedi Hallov uvjet za graf $G \setminus \{x\}$, prema pretpostavci indukcije postoji potpuno sparivanje M s obzirom na skup $A \setminus \{x\}$ u tom grafu. Neka je sada I skup svih vrhova $a \in A$ takvih da je $\{a, b\} \in M$ i $b \in H(G \setminus \{x\})$.

Ako pretpostavimo da vrijedi $N(x) \subseteq H(G \setminus \{x\})$, tada vrijedi da je $N(I \cup \{x\}) = H(G \setminus \{x\})$ i vrijedi $|N(I \cup \{x\})| = |I| < |I| + 1$ što je kontradikcija s pretpostavkom da vrijedi Hallov uvjet.

Dakle, mora vrijediti $N(x) \nsubseteq H(G \setminus \{x\})$. Na kraju, za bilo koji element $b \in N(x)$ koji se ne nalazi u skupu $H(G \setminus \{x\})$ unija sparivanja M i brida (x, b) je sparivanje polaznog grafa G. □

Postoje i mnogi drugi zanimljivi dokazi Hallovog teorema preko ekvivalentnih teorema npr. Dilworthovog, Königovog, Mengerovog... Ti dokazi u ovom radu nisu bili uključeni jer ćemo neke od ekvivalentnih teorema iskazati kasnije u poglavlju 3 te ćemo tada dokazati njihovu ekvivalenciju.

2.4 Posljedice teorema

Posljedice Hallovog teorema možemo vidjeti u raznim područjima zbog činjenice da se njegova tvrdnja lako generalizira. U ovom dijelu vidjet ćemo neke jednostavnije posljedice iz područja kombinatorike, kako se može primijeniti na beskonačne skupove, grupe ili čak vektorske prostore, dok će neke poznatije generalizacije biti iskazane u sljedećem poglavlju. Pratimo poglavlje 5 knjige [8], osim ako nije drugačije navedeno prije samog dokaza.

Kada su skupovi $S_1, \ldots, S_n$ veliki i proizvoljni, može biti zahtjevno provjeravati vrijedi li Hallov uvjet. U nekim specijalnim slučajevima provjera postojanja transverzale se može svesti na nešto jednostavnije zahtjeve.

Korolar 2.4.1. *Neka su $S_1, \ldots, S_m$ r-člani podskupovi n-članog skupa S pri čemu je svaki od tih n elemenata sadržan u točno d podskupova. Ako vrijedi $m \leq n$, tada postoji transverzala skupova $S_1, \ldots, S_m$.*

Slijedimo dokaz korolara 5.2. iz poglavlja 5 knjige [9].

Dokaz. Ovim korolarom vidimo jedan specijalan slučaj gdje su svi podskupovi jednake kardinalnosti i svaki element se nalazi u točno određenom broju skupova.

Metodom dvostrukog prebrojavanja možemo vidjeti da vrijedi

$$mr = nd$$

jer s lijeve strane brojimo prema broju skupova i broju elemenata u svakom od skupova dok s desne strane brojimo za svaki element polaznog skupa u koliko podskupova se nalazi. Sada, zbog pretpostavke da je $m \leq n$, vrijedi da je $d \leq r$. Pretpostavimo sada suprotno, tj. da ne postoji transverzala skupova $S_1, \ldots, S_m$. Tada prema Hallovom uvjetu(2.1) za neki $k, 1 \leq k \leq m$, postoje skupovi $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ čija unija $X = S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}$ sadrži manje od k elemenata. Za proizvoljan $x \in X$ označimo s $d(x)$ broj skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ koji sadrže x. Tada ponovno dvostrukim prebrojavanjem dobivamo sljedeće:

$$rk = \sum_{j=1}^{k} |S_{i_j}| = \sum_{x \in X} d(x) \leq d|X| < dk \tag{2.16}$$

što povlači

$$rk < dk \text{ pa vrijedi } r < d \tag{2.17}$$

Time smo dobili kontradikcija s pretpostavkom da je $d \leq r$. □

Često se kod kombinatornih problema postavlja pitanje koliko načina postoji da se riješi problem. Sljedeći korolar dati će donju ogradu za broj transverzala skupova.

Korolar 2.4.2. *Neka su $S_1, \dots, S_n$ skupovi takvi da postoji njihova transverzala i neka je $t = \min\{|S_1|, \dots, |S_n|\}$. Tada ako je $t \geq n$ postoji najmanje $t(t-1)\cdots(t-n+1)$ različitih transverzala, a inače ako je $t < n$, onda ih je najmanje $t!$.*

Dokaz. Među skupovima $S_1, \dots, S_n$ mora postojati barem jedan u kojem bilo koji element može biti izabran za njegovog predstavnika transverzale. Gledajući blokove, vidimo da ako ne postoji kritični blok, iz bilo kojeg skupa možemo izabrati bilo koji element za njegovog predstavnika, a ako postoje kritični blokovi onda vrijedi da u bilo kojem skupu najmanjeg kritičnog bloka možemo izabrati bilo koji element za njegovog predstavnika. Bez smanjenja općenitosti recimo da je to skup S_1. Kako vrijedi $|S_1| \geq t$ slijedi da njegovog predstavnika x_1 možemo izabrati na najmanje t načina i taj element možemo izbaciti iz svih preostalih skupova. Tada i dalje postoji transverzala skupova $S_2 \setminus \{x_1\}, \dots, S_n \setminus \{x_1\}$, a najmanji od tih skupova sada sadrži minimalno $t-1$ element. Analognim postupkom sljedeći element transverzale početnih skupova bismo mogli izabrati na $t-1$ način i tako dalje. Za $t \geq n$ postupak možemo ponoviti $t-n+1$, a inače t puta pa sukladno tome vrijedi tvrdnja korolara. □

Nadalje, kada bismo zamislili da su elementi skupa S, čiji su podskupovi $S_1, \dots, S_n$, obojani u dvije različite boje, npr. crnu i bijelu, mogli bismo primjerice tražiti transverzalu tih skupova s najmanjim brojem crnih elemenata.

Teorem 2.4.3. *Za skupove $S_1, \dots, S_n$ postoji transverzala s najviše t crnih elemenata ako i samo ako postoji transverzala i za svaki $k = 1, \dots, n$ unija bilo kojih k skupova sadrži najmanje $k-t$ bijelih elemenata.*

Slijedimo dokaz teorema 5.3. iz poglavlja 5 knjige [9].

Dokaz. Neka je X skup svih crnih elemenata u skupovima $S_1, \dots, S_n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Možemo vidjeti da je ovaj smjer trivijalan. Jer ako unija bilo kojih k skupova sadrži najmanje $k-t$ bijelih elemenata, a ujedno u svakoj uniji ima barem k elemenata jer po pretpostavci postoji transverzala skupova, onda slijedi da postoji transverzala s najviše t crnih elemenata.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ovaj smjer nije odmah očit. Možemo pretpostaviti da vrijedi $|X| > t$ jer bi u suprotnom tvrdnja teorema bila trivijalno zadovoljena. Proširimo početni niz skupova s još $|X| - t$ kopija skupa X. Sada je očito da početni niz skupova ima traženu transverzalu ako i samo ako prošireni ima bilo koju transverzalu jer će pripadni elementi transverzale proširenog skupa $x_{n+1}, \dots, x_{n+|X|-t}$ sigurno biti crni. Dakle, treba pokazati da prošireni niz skupova zadovoljava Hallov uvjet, odnosno da za svaki $k, 1 \leq k \leq n + |X| - t$, unija proizvoljnih k skupova proširenog niza mora sadržavati barem k elemenata.

Sada, ako bi među tih k skupova bili samo skupovi iz početnog niza $S_1, \ldots, S_n$ prema pretpostavci teorema postoji njihova transverzala te je zadovoljen Hallov uvjet.

U drugom slučaju neka je $I \subseteq \{1, \ldots, n + |X| - t\}$ skup indeksa izabranih k skupova te neka je $J = I \cap \{1, \ldots, n\}$. Tada broj elemenata u uniji tih k skupova možemo podijeliti na zbroj elemenata u skupu X i zbroj elemenata u uniji $\bigcup_{j \in J}(S_j \setminus X)$. Vidimo da onda vrijede i slijedeće nejednakosti:

$$|X| + \left| \bigcup_{j \in J} \left(S_j \setminus X \right) \right| \geq (|J| - t) + |X| = |J| + |X| - t \geq |J| + |I \setminus J| = |I|. \tag{2.18}$$

Ovime vidimo da vrijedi Hallov uvjet i u drugom slučaju te je time dokazana i tvrdnja teorema. □

Do sada smo za sve iskazano smatrali da imamo konačno skupova S_i i da su ti skupovi konačni. Kada bismo dopustili beskonačan broj skupova beskonačne kardinalnosti Hallov uvjet više ne bi bio dovoljan za tvrditi da postoji transverzala. To možemo vidjeti sljedećim primjerom:

Primjer 2.4.4. *Neka su*

$$S_i = \begin{cases} \{1, 2, \ldots\}, & i = 0 \\ \{i\}, & i = 1, 2, \ldots \end{cases}. \tag{2.19}$$

vidimo da niz skupova

$$S_0, S_1, S_2, \ldots$$

nema transverzalu jer kada bi odabrali $x_i = i,\ i = 1, 2, \ldots$ što je jedino moguće, ne bi nam ostao niti jedan element za izbor od x_0. Dakle, transverzala ne postoji iako vrijedi Hallov uvjet i za svaki k unija bilo kojih k skupova ima barem k elemenata.

Sljedeći teorem govori o uvjetu za postojanje transverzale ukoliko imamo beskonačan niz konačnih skupova S_i.

Teorem 2.4.5. *Neka je $S = \{1, 2, \ldots\}$. Pretpostavimo da za svaki element $i \in I$, pri čemu je I skup indeksa, imamo konačan skup $S_i \subseteq S$. Tada za niz skupova S_i, $i \in I$ postoji transverzala ako i samo ako vrijedi sljedeće: za svaki prirodni broj k i bilo koji izbor k indeksa, skupovi $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ sadrže barem k različitih elemenata.*

Dokaz teorema 2.4.5 može se vidjeti u [8].

Teorem 2.4.6. *Neka je skup S podijeljen u n ne nužno konačnih podskupova, pri čemu je n konačan broj, na dva različita načina, $S = A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Ako za svaki $k = 1, \ldots, n$ ne postoji k skupova A_i koji su sadržani u manje od k skupova B_j postojat će $x_1, \ldots, x_n$ koji su istovremeno elementi transverzale skupova $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$.*

Napomena 2.4.7. *Kada bismo dopustili da je n beskonačan, potrebno bi bilo imati podskupove $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ konačne kako bismo zadovoljili uvjete teorema 2.4.5 za postojanje transverzale.*

Dokaz. Za svaki skup A_i definiramo skup S_i koji je skup svih indeksa j takvih da je $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Sada se dokaz svodi na pitanje postojanja transverzale skupova S_i jer ako su $j_1, \ldots, j_n$ elementi transverzale tih skupova onda biramo elemente presjeka $x_i \in A_i \cap B_j$ za elemente transverzale polaznih skupova. Vidimo da su tada $x_1, \ldots, x_n$ kao elementi presjeka zasigurno elementi transverzala $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$. Vidimo da se uvjet teorema zapravo svodi na Hallov uvjet za skupove S_i jer prema definiciji skupova S_i provjeravamo da unija bilo kojih k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ sadrži barem k elemenenata, a ti elementi označavaju skupove B_j koji imaju neprazan presjek sa skupovima $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$. □

Teorem 2.4.8. *Neka je $S_1, \ldots, S_n$ niz podskupova od S. Ako $S_1, \ldots, S_r$ imaju transverzalu $(x_1, \ldots, x_r)$ i ako postoji trasverzala niza skupova $S_1, \ldots, S_n$. Tada $S_1, \ldots, S_n$ ima transverzalu čiji su elementi $x_1, \ldots, x_r$ iako ne moraju biti izabrani kao predstavnici skupova $S_1, \ldots, S_r$.*

Prethodni teorem nije očita posljedica Hallovog teorema no lako se dobiva kao posljedica jednog od algoritama za traženje transverzale koji je M. Hall opisao u poglavlju 5 knjige [8].

U nastavku su iskazane još dvije posljedice teorema s primjenom u linearnoj algebri i teoriji grupa.

Teorem 2.4.9. *U beskonačnom vektorskom prostoru bilo koje dvije baze imaju jednaku kardinalnost.*

Dokaz. Neka su $X = \{x_i : i \in I\}$ i $Y = \left\{y_j : j \in J\right\}$ dvije baze vektorskog prostora V nad poljem F. Svaki element baze X možemo prikazati kao linearnu kombinaciju elemenata iz baze Y i obrnuto. Neka je x_i proizvoljni element baze X i njegov prikaz u bazi Y je

$$x_i = \sum_{j \in J} c_j y_j \tag{2.20}$$

te neka je S_i skup elemenata $y_j \in Y$ za koje vrijedi $c_j \neq 0$. Skupovi S_i su konačni i kada ne bi zadovoljavali Hallov uvjet, odnosno ako bi nekih k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ imali manje od k elemenata, skup X bi bio linearno zavisan što ne može biti jer čini jednu od baza za

V. Stoga, prema teoremu 2.4.5, možemo odabrati po jedan međusobno različiti element iz svakog skupa S_i te vidimo da je

$$|Y| \geq |X|. \tag{2.21}$$

Analogno bismo mogli proizvoljni y_j prikazati kao linearnu kombinaciju elemenata iz baze X te bismo istim zaključivanjem dobili

$$|X| \geq |Y|. \tag{2.22}$$

Sada iz (2.21) i (2.22) slijedi $|X| = |Y|$. □

Teorem 2.4.10. *Neka je H konačna podgrupa grupe G. Tada postoji skup elemenata koji su istovremeno transverzala skupova lijeve klase i desne klase od G.*

Dokaz. Ovaj teorem posljedica je teorema 2.4.6 zbog činjenice da lijeve i desne klase od G sadrže jednak broj elemenata kao i podgrupa H i klase su ekvivalencije na koje se raspada grupa G po relaciji ekvivalencije zadanoj s

$$x \sim y \text{ ako i samo ako vrijedi } x^{-1}y \in H \text{ za svaki } x, y \in G \text{ (lijeve klase)} \tag{2.23}$$

odnosno,

$$x \sim y \text{ ako i samo ako vrijedi } yx^{-1} \in H \text{ za svaki } x, y \in G \text{ (desne klase).} \tag{2.24}$$

□

Na kraju ovog poglavlja vratimo se još na primjer 1.2.4 gdje je pitanje bilo možemo li svaki dan nekog turnira s $2n$ timova koji traje $2n - 1$ dan odabrati jedan od pobjedničkih timova tako da se niti jedan dan ne izabere isti tim. Već smo rekli da je odgovor potvrdan, a sada možemo primijeniti Hallov teorem i argumentirati zašto je to tako. Neka je S_i skup koji sadrži sve timove koji su pobijedili i-tog dana. Svaki skup S_i ima točno n elemenata jer se igra n utakmica i u svakoj utakmici postoji pobjednički tim. Sada je potrebno vidjeti da postoji transverzala skupova $S_1, \ldots, S_n$, odnosno da je zadovoljen Hallov uvjet. Pretpostavimo suprotno. Pretpostavimo da postoji k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ čija unija sadrži manje od k elemenata. Dakle, ta unija sadrži sve timove koji su pobijedili barem jednom u tih k dana turnira te vidimo da zbog $|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}| < k$ postoji manje od k timova koji su imali barem jednu pobjedu u tih k dana. U tom slučaju, postoji barem jedan tim koji je izgubio svih k utakmica i to je onaj tim koji se ne nalazi u uniji $S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}$. Dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom jer je taj tim igrao s točno k drugih timova koji moraju imati barem tu jednu pobjedu u tih k dana i time unija $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ ne može sadržavati manje od k elemenata. Ovime smo dobili da postoji transverzala skupova $S_1, \ldots, S_n$, a elementi transverzale su upravo izbor timova koji nas zanima.

Poglavlje 3

Ekvivalentni teoremi

U ovom poglavlju iskazat ćemo nekoliko teorema ekvivalentnih Hallovom. Iskazati ćemo Königov teorem, Birkhoff–von Neumannov, Dilworthov te ćemo vidjeti što su to latinski pravokutnici. Za svaki od ekvivalentnih teorema osim iskaza vidjet ćemo i dokaz, neke primjere i njihove posljedice.

3.1 Königov teorem

Königov teorem, nazvan prema Dénesu Königu[1], jedan je od *min-max* teorema. Min-max teoremi govore o jednakosti maksimalne vrijednosti jednog skupa i minimalne vrijednosti drugog.

Definicija 3.1.1. *Neka je $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ matrica takva da je $a_{ij} \in \{0, 1\}$ za sve $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$. Takve matrice još nazivamo $0-1$ matrice ili* ***binarne*** *matrice. Kažemo da su dvije jedinice u matrici A* ***zavisne*** *ako pripadaju istom retku ili stupcu, a inače kažemo da su* ***nezavisne***. *Veličina najvećeg skupa nezavisnih jedinica još se naziva rangom matrice A.*

U nastavku će nam u biti svejedno govorimo li o retcima ili stupcima matrice stoga ćemo uvesti pojam **linija** matrice koji će biti zajednički naziv za retke i stupce.

Teorem 3.1.2 (König-Egerváry, 1931)**.** *Neka je A $m \times n$ binarna matrica. Tada je maksimalan broj nezavisnih jedinica jednak minimalnom broju linija potrebnih da se pokriju sve jedinice sadržane u A.*

Pratimo dokaz teorema 5.5. iz poglavlja 5 knjige [9].

[1] D. König (1844-1944), mađarski matematičar

Dokaz. Označimo s r maksimalni broj nezavisnih jedinica u matrici A, a s R minimalni broj linija potrebnih da pokrijemo sve jedinice u matrici. Dakle, potrebno je dokazati

$$r = R. \tag{3.1}$$

Vidimo da sigurno vrijedi

$$R \geq r \tag{3.2}$$

jer ako postoji r nezavisnih jedinica moraju postojati i linije koje pokrivaju samo njih. U nastavku ćemo dokazati da vrijedi i $r \geq R$ te ćemo time imati i jednakost.

Očito je da permutiranjem redaka i stupaca ne mijenjamo r niti R. Pretpostavimo da je $a + b = R$ pri čemu je a broj redaka i b broj stupaca potrebnih da se pokriju sve jedinice u A. Tada možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je to upravo prvih a redaka i prvih b stupaca. Matricu A možemo podijeliti u četiri podmatrice: $a \times b$ podmatricu B, $a \times (n - b)$ podmatricu C, $(m - a) \times b$ podmatricu D i $(m - a) \times (n - b)$ podmatricu E pri čemu je početna matrica

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Sada možemo svakom od prvih a redaka pridružiti skup S_i, $i = 1, \ldots, a$,

$$S_i = \{j \ : \ a_{ij} = 1 \text{ i } j > b\} \subseteq \{b + 1, \ldots, n\}, \tag{3.4}$$

odnosno skup indeksa stupaca u kojima se nalazi jedinica, a da se nalaze u podmatrici C. U podjeli na podmatrice još znamo da E sigurno nema niti jednu jedinicu.

Nastavak dokaza temeljit će se na već dokazanom Hallovom teoremu. Tvrdimo da za niz skupova $S_1, \ldots, S_a$ postoji transverzala, tj da možemo izabrati iz svakog retka po jednu jedinicu tako da niti jedne dvije ne budu iz istog stupca (odnosno s istim indeksom j). Kada Hallov uvjet ne bi vrijedio, postojao bi neki k, $1 \leq k \leq a$, t.d. $|S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_k}|$ sadrži manje od k elemenata što nam govori da jedinice u tih k redaka mogu biti pokrivene s manje od k stupaca, a to je kontradikcija s činjenicom da je $a + b$ minimalni broj linija za pokrivanje svih jedinica u polaznoj matrici A.

Dakle, kada znamo da skupovi $S_1, \ldots, S_a$ zadovoljavaju Hallov uvjet znamo da postoji a jedinica koje se nalaze u prvih a redaka gdje niti jedne dvije nisu u istoj liniji i niti jedna od njih nije u privih b stupaca. Analognim postupkom i argumentima u podmatrici D postoji b jedinica gdje niti jedne dvije nisu u istoj liniji. Tih R jedinica iz podmatrica B i C ima svojstvo da se niti jedne dvije ne nalaze na istoj liniji pa iz toga slijedi i druga nejednakost, $r \geq R$. □

Ovaj teorem je matrična formulacija sljedećeg Königovog teorema iz područja teorije grafova. Prije samog iskaza uvesti ćemo još jedan pojam.

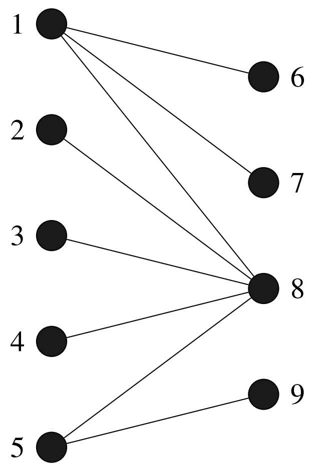
Definicija 3.1.3. ***Vršni pokrivač*** *$K \subseteq V$ grafa $G = (V, E)$ je skup vrhova takav da svaki brid u G ima barem jedan kraj u K, tj.*

$$\textit{za svaki } e = \{u, v\} \in E \textit{ vrijedi } u \in K \textit{ ili } v \in K. \tag{3.5}$$

Teorem 3.1.4. *U bipartitnom grafu G broj bridova u maksimalnom sparivanju jednak je broju vrhova minimalnog vršnog pokrivača.*

Uočimo i ekvivalenciju teorema 3.1.2 i 3.1.4. Neka je G bipartitan graf te neka je $A(G)$ pripadna matrica susjedstva. Već smo rekli da ako gledamo matricu susjedstva za sparivanje u svakom retku i svakom stupcu se može pronaći najviše jedna jedinica. Stoga je očito i da je pojam ranga matrice A ekvivalentan veličini maksimalnog sparivanja u grafu G. Slično, vidimo da je broj linija potrebnih za pokrivanje svih jedinica u matrici A ekvivalentan najmanjem vršnom pokrivaču od G.

Primjer 3.1.5. *U ovom primjeru na slici 3.1 vidimo jedan konkretan graf i njegovu matricu susjedstva te ćemo provjeriti tvrdnje oba ekvivalentna teorema za njih.*



(a)

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

Slika 3.1: Grafički i matrični primjer Königovg teorema

Na grafu vidimo da sigurno ne postoji potpuno sparivanje koje će zasićivati sve vrhove u biparticiji $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jer $|A| > |B|$. Dakle, tražimo maksimalno sparivanje koje imamo u grafu. Za početak vidimo da se u maksimalnom sparivanju M mora nalaziti brid $\{5, 9\}$. Nadalje, svejedno je koji od bridova $\{2, 8\}, \{3, 8\}, \{4, 8\}$ uzmemo u sparivanje pa recimo da je to brid $\{2, 8\}$. Jednako tako biramo između bridova $\{1, 6\}, \{1, 7\}$ pa neka vrijedi $\{1, 6\} \in M$. Time smo dobili jedno maksimalno sparivanje M jer ne postoji sparivanje M' t.d. $|M'| > |M|$. Dakle, veličina maksimalnog sparivanja u grafu G je $|M| = 3$.

Sada prema teoremu 3.1.4 bi trebalo vrijediti da je onda i broj vrhova u minimalnom vršnom pokrivaču jednak 3. Proučavanjem grafa vidimo da skup vrhova $K = \{1, 5, 8\}$ *jest minimalni vršni pokrivač upravo veličine* $|K| = 3$.

Zbog simetričnosti neusmjerenog grafa i činjenice da se radi o bipartitnom grafu dovoljno bi bilo promatrati matricu susjedstva $A = [a_{ij}],\ i = 1, \ldots, 5,\ j = 6, \ldots, 9$. *Označimo tu matricu s* A'.

$$A'(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

U toj matrici vidimo da nije moguće izabrati 4 različite nezavisne jedinice tako da matrica ne može biti punog ranga. No, izborom jedinica na pozicijama a_{11}, a_{23} *i* a_{44} *imamo 3 nezavisne jedinice što je maksimalan broj nezavisnih jedinica. Također vidimo da vrijedi tvrdnja teorema 3.1.2 jer je minimalan broj linija potrebnih za pokrivanje svih jedinica isto jednak 3 (npr. za izbor uzmemo prvi redak, treći stupac i četvrti stupac).*

Na kraju je još bitno uočiti ekvivalenciju Hallovog teorema 2.1.2 i Königovog teorema 3.1.2 čiji dokaz slijedimo iz poglavlja 5.1. knjige [8].

Teorem 3.1.6. *Hallov teorem ekvivalentan je Königovom teoremu.*

Dokaz. Za dokaz je potrebno pokazati obje implikacije.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ovaj smjer, kada iz Hallovog teorema želimo dokazati Königov smo već vidjeli u dokazu teorema 3.1.2.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je A binarna matrica, p njen rang, a $q = a + b$ minimalni broj linija za pokrivanje svih jedinica u matrici, pri čemu je a broj redaka, a b broj stupaca. Definirajmo sada što su skupovi $S_1, \ldots, S_n$ iz Hallovog teorema. Za svaki $a_{ij} \in A$ vrijedi da je $j \in S_i$ ako i samo ako vrijedi $a_{ij} = 1$.

Ako za broj linija u kojima su sadržane sve jedinice u matrici vrijedi

$$q < n, \tag{3.7}$$

tada za nekih $k = n - a$ redaka koji nisu sadržani u tih a redaka vrijedi da se jedinice nalaze samo u nekim od b stupaca. Iz nejednakosti (3.7) slijedi da je $b < n - a = k$ pa je time narušena valjanost Hallovog uvjeta (2.1) jer će unija $|S_1 \cup \cdots \cup S_n|$ sadržavati najviše $b < n$ elemenata.

No, ako vrijedi $q = n$ tada prema Königovom teoremu postoji n jedinica, od kojih niti jedne dvije nisu na istoj liniji, pa njihovi pripadni indeksi stupaca predstavljaju transverzalu tih n skupova. □

3.2 Birkhoff–von Neumannov teorem

U ovoj točki slijedimo izlaganje iz poglavlja 5.2.2. knjige [9]. I dalje će nam objekti u centru promatranja biti matrice. Definirajmo dvostruko stohastičke matrice, još jednu specifičnu vrstu matrica o kojoj će biti riječ u ovom poglavlju.

Definicija 3.2.1. *Kvadratna matrica A je* ***dvostruko stohastička*** *ako su njeni elementi nenegativni realni brojevi i suma svakog retka i stupca je jednaka 1.*

Permutacijska matrica je dvostruko stohastička matrica s elementima 0 i 1 t.d. je u svakom retku i stupcu točno jedna jedinica. Matrica A je **konveksna kombinacija** matrica $A_1, \ldots, A_s$ ako postoje nenegativni realni koeficijenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ takvi da vrijedi

$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i A_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1. \tag{3.8}$$

Garrett Birkhoff[2] i John von Neumann[3] su neovisno jedan o drugom dokazali sljedeći teorem koji je po njima dobio ime.

Teorem 3.2.2 (Birkhoff-Von Neumannov teorem)**.** *Svaka dvostruko stohastička matrica je konveksna kombinacija permutacijskih matrica.*

Dokaz. Neka je A dvostruko stohastička kvadratna matrica reda n. Teorem ćemo dokazati pomoću matematičke indukcije po broju nenegativnih elemenata a_{ij} u matrici A. Zbog pretpostavke da je matrica dvostruko stohoastička reda n sigurno postoj barem n nenegativnih elemenata $a_{ij} \in A$.

U slučaju kada postoji točno n nenegativnih elemenata tvrdnja je trivijalno zadovoljena jer je tada matrica A permutacijska matrica.

Dakle, možemo pretpostaviti da matrica A ima više od n nenegativnih elemenata. Sada je pretpostavka matematičke indukcije da za matrice s manje od n elemenata a_{ij} t.d. $a_{ij} > 0$ vrijedi teorem.

Slično kao u prethodnom poglavlju definiramo skupove,

$$S_i = \{j : a_{ij} > 0\}, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Provjeriti ćemo da skupovi $S_1, \ldots, S_n$ zadovoljavaju Hallov uvjet (2.1). Ako bi unija $k, 1 \leq k \leq n$, skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ sadržavala manje od k elemenata, tada bi svi nenegativni elementi tih k redaka bili sadržani u najviše $k-1$ stupaca. Dakle suma tih k stupaca bi bila najviše $k - 1$ dok bi suma pripadnih k redaka bila k. Time smo došli do kontradikcije

---

[2]G. Birkhoff (1911.-1996.) američki matematičar

[3]J. von Neumann (1903.-1957.) američki matematičar

i zaključujemo da skupovi $S_1, \dots, S_n$ zadovoljavaju Hallov uvjet. Tada prema Hallovom teoremu 2.1.2 postoji transverzala $(j_1, \dots, j_n)$ skupova $S_1, \dots, S_n$.

Neka je $P_1 = [p_{ij}]$ permutacijska matrica t.d. $p_{ij} = 1$ ako i samo ako $j = j_i$, odnosno ako je j i-ti element transverzale skupova $S_1, \dots, S_n$. Prema definiciji skupova S_i znamo da će elementi $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}$ sigurno biti pozitivni. Neka je λ_1 minimum tih elemenata, tj.

$$\lambda_1 = \min\{a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}\}. \tag{3.10}$$

Promotrimo sljedeću matricu:

$$A_1 = \frac{1}{1 - \lambda_1}(A - \lambda_1 P_1) \tag{3.11}$$

Tako definirana matrica A_1 ima manje nenegativnih elemenata nego početna matrica A. Traženjem da λ_1 bude minimalni element tog skupa osiguravamo da upravo taj element koji je minimalni (i eventualno ostali elementi matrice koji imaju jednaku vrijednost kao on) bude u novoj matrici 0, a da ostali ostanu nenegativni.

Stoga je prema pretpostavci indukcije matrica A_1 konveksna kombinacija nekih permutacijskih matrica $P_2, \dots, P_s$, tj.

$$A_1 = \sum_{i=2}^{s} \lambda_i P_i \tag{3.12}$$

pa vrijedi da je početna matrica

$$A = \lambda_1 P_1 + (1 - \lambda_1) A_1 = \lambda_1 P_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{s} \lambda_i P_i. \tag{3.13}$$

Time zaključujemo da je polazna dvostruko stohastička matrica A konveksna kombinacija permutacijskih matrica. □

Napomena 3.2.3. *Na sličan način se može dokazati i jača tvrdnja, da se svaka $n \times n$ nenegativna matrica A čija je suma svakog retka i stupca jednaka pozitivnom broju γ može prikazati kao linearna kombinacija permutacijskih matrica, odnosno $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i$ pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ nenegativni realni koeficijenti i vrijedi $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = \gamma$.*

Primjer 3.2.4. *U ovom primjeru pokazat ćemo tvrdnju teorema na jednoj konkretnoj matrici A te ćemo algoritmom iz dokaza pronaći pripadne koeficijente λ_i i permutacijske matrice P_i. Neka je matrica A zadana kao u nastavku*

$$A = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 3/5 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Vidimo da postoji više izbora za transverzalu skupova S_1, S_2, S_3. *Uzmimo na primjer za transverzalu* $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 3)$. *Tada je, prema algoritmu dokaza,* P_1 *sljedeća matrica:*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Nadalje, $\lambda_1 = \min\{2/5, 1/5, 1/5\} = 1/5$, *pa uvrštavanjem u jednadžbu* (3.11) *vrijedi*

$$A_1 = \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}P_1 \tag{3.16}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Nova matrica A_1 *sada ima 5 nenegativnih elemenata dok je početna matrica imala njih 7. Naša početna matrica A trenuto ima sljedeći rastav:*

$$A = \frac{1}{5}P_1 + \frac{4}{5}A_1. \tag{3.18}$$

Nastavimo li dalje jednakim algoritmom rastavljati matricu A_1 *(uz odabir transverzale* $(y_1, y_2, y_3) = (1, 3, 2)$*) dobivamo*

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

pa je nova matrica

$$A_2 = \frac{4}{3}A_1 - \frac{1}{3}P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Time smo došli do kraja algoritma jer je matrica A_2 *ujedno i permutacijska matrica. Uvrštavanjem u jednadžbu* (3.13) *dobivamo sljedeći rastav početne matrice na konveksnu kombinaciju permutacijskih matrica.*

$$A = \frac{1}{5}P_1 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}A_2 + \frac{1}{4}P_2\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

3.3 Latinski pravokutnici

Latinski pravokutnici su jedni od najstarijih kombinatornih objekata koji se proučavaju još od antičkih vremena. Objekti koje ovdje proučavamo ponovno su specifična vrsta matrica. Njihova primjena nalazi se u mnogim područjima kombinatorike i matematike općenito kao što su na primjer teorija grafova, teorija brojeva, kriptografija itd. Nama će u ovom radu biti zanimljivi jer primjenom Hallovog teorema 2.1.2 dolazimo do odgovora na jedno od važnijih pitanja vezanih uz latinske pravokutnike i kvadrate. U nastavku pratimo poglavlje 5.2.1. knjige [9].

Definicija 3.3.1. ***Latinski pravokutnik*** *tipa* $r \times n$ *je* $r \times n$ *matrica u kojoj svaki redak sadrži sve elemente skupa* $\{1, 2, \dots, n\}$ *i niti jedan stupac ne sadrži dva elementa s istom vrijednošću.* ***Latinski kvadrat*** *reda* n *je latinski pravokutnik tipa* $n \times n$*.*

Vidimo da se u latinskom kvadratu reda n svaki $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ nalazi točno jednom u svakom retku i svakom stupcu. **Nepotpuni** latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica u kojoj su neki od elemenata popunjeni vrijednostima iz skupa $\{1, \dots, n\}$ tako da se u niti jednom retku i stupcu ne nalaze dva elementa s istim vrijednostima dok su preostali elementi ”prazni”.

Primjer 3.3.2. *U ovom primjeru vidimo jedan* 3×5 *latinski pravokutnik i jedan* 4×4 *latinski kvadrat.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & 4 \\ & 3 & 4 & \\ & & 1 & 2 \\ 4 & & 2 & \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Matrica (3.23) *je jedan nepotpuni latinski kvadrat, a matrica* (3.24) *je jedan način da se on dopuni do latinskog kvadrata.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Iz primjera latinskog kvadrata (3.24) vidimo da za svaki n postoji latinski kvadrat reda n. Jedan takav je sljedećeg oblika:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Primjer 3.3.3. *Primjer nepotpunog latinskog kvadrata reda 4 koji se ne može dopuniti do latinskog kvadrata.*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Očito je da se matrica (3.26) *ne može nadopuniti do latinskog kvadrata jer bi svaki latinski pravokutnik u posljednjem retku trebao sadržavati broj 1, a sve tri slobodne pozicije u pripadnom stupcu već sadrže 1.*

Zanima nas još može li se latinskom pravokutniku (3.22) dodati još dva retka tako da dobijemo pripadni latinski kvadrat reda 5?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Matrica (3.27) pokazuje da je u ovom slučaju to moguće. No, može li se i bilo koji drugi latinski pravokutnik dopuniti do latinskog kvadrata? Vidjeli smo na primjeru da popunjavanje nepotpunog latinskog kvadrata ne mora uvijek biti moguće, no sljedećim teoremom ćemo vidjeti da za razliku od toga latinski pravokutnik uvijek možemo dopuniti do latinskog kvadrata.

Teorem 3.3.4. *Neka je R latinski pravokutnik tipa $r \times n$, gdje je $r < n$. R se može dopuniti do latinskog pravokutnika R' tipa $(r+1) \times n$.*

Dokaz. Neka su $\{1, 2, \dots, n\}$ vrijednosti koje sadrži latinski pravokutnik R. Definirajmo skupove $S_1, \dots, S_n$ tako da je S_i skup svih vrijednosti iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji se ne nalaze u i-tom stupcu latinskog pravokutnika R, $1 \leq i \leq n$. Dokažimo da postoji transverzala skupova $S_1, \dots, S_n$. Svaki skup S_i sadrži točno $n - r$ elemenata i svaki element skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ nalazi se u točno $n-r$ skupova. Time imamo zadovoljene uvjete korolara 2.4.1 prema kojemu onda postoji transverzala skupova $S_1, \dots, S_n$. Tada latinskom pravokutniku R možemo dodati redak koji sadrži elemente transverzale skupova $S_1, \dots, S_n$ jer će tada dodani redak imati sve elemente skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ i neće imati ponavljajućih vrijednosti u niti jednom stupcu čime smo dobili dopunjeni latinski pravokutnik R'. □

Očito je da ćemo ponavljanjem tog postupka u nekom trenutku dobiti latinski kvadrat. Sljedećim teoremom još ćemo odgovoriti na pitanje na koliko načina je moguće proširiti latinski pravokutnik s još jednim retkom.

Teorem 3.3.5. *Broj načina na koji možemo dodati redak u $r \times n$ latinski pravokutnik tako da ga proširimo do $(r + 1) \times n$ latinskog pravokutnika je najmanje $(n - r)!$*

Sljedeći dokaz dio je dokaza teorema 5.1.5. iz poglavlja 5 knjige [8].

Dokaz. Tvrdnja teorema slijedi direktno iz korolara 2.4.2 koji govori o broju transverzala. Vidimo da je $\min\{|S_1|, \dots, |S_n|\} = n - r$ i vrijedi $n - r < n$ pa prema korolaru postoji najmanje $(n - r)!$ traznsverzala koje možemo dodati kao retke latinskog pravokutnika. □

Latinski pravokutnici i Birkhoff-von Neumannov teorem 3.2.2 usko su povezani s igrom sudoku. Sudoku se može definirati kao 9×9 matrica koja u svakom retku, stupcu i svakoj od 9 označenih podmatrica reda 3×3 sadrži sve elemente skupa $\{1, \dots, 9\}$. Početna matrica je nepotpuna te je cilj igre dopuniti ju tako da i dalje vrijede prethodno napisana pravila. Vidimo da ako bismo izostavili posljednje napisano pravilo za podmatrice dobivamo upravo latinski kvadrat reda 9. Dakle, sudoku je posebna vrsta latinskih pravokutnika. Prema napomeni 3.2.3 sudoku matrica može se napisati i kao linearna kombinacija permutacijskih matrica jer je suma svakog retka i stupca jednaka 45.

3.4 Dilworthov teorem

Dilworthov teorem još je jedan u nizu teorema ekvivalentnih Hallovom teoremu. Teorem je dobio ime po matematičaru koji ga je dokazao 1950. godine, Robertu P. Dilworthu[4]. Objekti koji će se proučavati tokom ovog potpoglavlja biti će parcijalno uređeni skupovi. U ovoj točki slijedimo poglavlje 3 knjige [11].

Definicija 3.4.1. ***Parcijalno uređen skup*** *je uređeni par $P = (X, \leq)$ gdje je X skup nad kojim je definirana binarna relacija $\leq$ te vrijedi sljedeće:*

1. *$x \leq x$ za svaki $x \in X$ (refleksivnost)*

[4]R. P. Dilworth(1914.-1993.) američki matematičar

2. *ako vrijedi $x \leq y$ i $y \leq x$, onda $x = y$ za svaki $x, y \in X$ (antisimetričnost)*

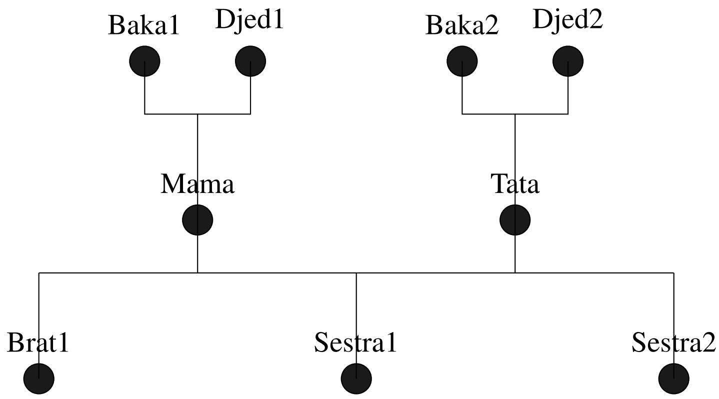
3. *ako vrijedi $x \leq y$ i $y \leq z$, onda $x \leq z$, za svaki $x, y, z \in X$ (tranzitivnost)*

Vidimo da nije nužno da svaka dva elementa skupa X budu usporediva, no u slučaju kada to vrijedi govorimo o **totalno uređenom skupu**. **Lanac** parcijalno uređenog skupa P je podskup $L \subseteq X$ takav da su svaka dva elementa u L usporediva. **Antilanac** parcijalno uređenog skupa P je podskup $A \subseteq X$ takav da niti jedna dva elementa u A nisu usporediva. **Visina** parcijalno uređenog skupa P označava maksimalnu duljina lanca, a **širina** označava maksimalnu duljinu antilanca.

Napomena 3.4.2. *Parcijalno uređeni skup skraćeno ćemo pisati PUS.*

Primjer 3.4.3. *Neka je X skup svih ljudi na svijetu te neka je relacija $\leq$ nad tim skupom definirana kao "biti potomak". Preciznije, za osobe a i b definiramo $a \leq b$ ako je a potomak od b. Tada je $P = (X, \leq)$ parcijalno uređen skup.*

U primjeru vidimo da se ne radi o totalno uređenom skupu već o parcijalnom jer se prema definiciji uređaja na primjer brat i sestra ne mogu uspoređivati. Uzmimo da je npr. $X' \subseteq X$ jedna obitelj kao podskup skupa svih ljudi. Tada obiteljsko stablo lijepo može prikazati usporedivost elemenata u skupu X' s ranije definiranom relacijom $\leq$.



Slika 3.2: Primjer PUS-a na obiteljskom stablu

Vidimo da na grafu sa slike 3.2 jedan lanac čini na primjer skup $\{Baka1, Mama, Sestra1\}$, dok jedan antilanac čine $\{Brat1, Sestra1, Sestra2\}$.

Teorem 3.4.4 (Dilworthov teorem)**.** *Neka je X konačan skup i neka je r širina PUS-a $P = (X, \leq)$. Tada P možemo zapisati kao particiju r lanaca.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po broju elemenata skupa X. Baza za $|X| = 1$ je zadovoljena trivijalno. Pretpostavljamo da tvrdnja teorema vrijedi za sve $n < |X|$. Možemo vidjeti da u slučaju kada niti jedna dva elementa skupa X nisu usporediva također vrijedi tvrdnja jer je X istovremeno i najdulji antilanac i može biti particioniran u $r = |X|$ lanaca duljine 1. Pretpostavimo stoga da u X postoji barem dva elementa koje je moguće usporediti. Neka je X' podskup skupa X takav da vrijedi $x \in X'$ ako i samo ako je x usporediv s nekim elementom u $X \setminus \{x\}$. Neka je m takav da vrijedi

$$m \leq z, \text{ za svaki } z \in X' \text{ koji je usporediv s } m \tag{3.28}$$

i neka je još M takav da vrijedi

$$z \leq M, \text{ za svaki } z \in \{x \in X : x \neq m, m \leq x\} \text{ koji je usporediv s M.} \tag{3.29}$$

Dakle, m je minimalni element skupa X koji je usporediv s nekim elementom iz $X \setminus \{x\}$, a M je maksimalni element skupa X koji je usporediv s m i kao takav sigurno postoji. Neka je sada $X'' = X \setminus \{m, M\}$.

Ako je širina PUS-a $P'' = (X'', \leq)$ manja ili jednaka $r - 1$, tada prema pretpostavci indukcije X'' možemo zapisati kao particiju $r-1$ lanaca pa početni skup X možemo zapisati kao particiju tih $r - 1$ lanaca i lanac $\{m, M\}$ te vrijedi teorem.

Pretpostavimo sada da je širina PUS-a P'' jednaka r. Neka je A pripadni antilanac duljine r. Definirajmo još dva skupa:

$$X^+ = \{x \in X : x \geq a \text{ za neki } a \in A\} \tag{3.30}$$

$$X^- = \{x \in X : x \leq a \text{ za neki } a \in A\}. \tag{3.31}$$

Primijetimo da ta dva skupa imaju sljedeća svojstva:

$$X^+ \cup X^- = X \quad \text{i} \quad X^+ \cap X^- = A. \tag{3.32}$$

Inače, ako ne bi vrijedilo da je unija jednaka čitavom skupu X, postojao bi neki element $a' \in X$ koji nije usporediv s niti jednim elementom antilanca A. Stoga taj antilanac ne bi bio maksimalan i mogao bi se proširiti na antilanac $A \cup \{a'\}$. Provjerimo još i svojstvo presjeka. Neka je x element sadržan u presjeku. Tada, prema definiciji skupova X^+ i X^-, vrijedi da postoje $a, b \in A$ t.d. $a \leq x \leq b$. Zbog svojstva tranzitivnosti PUS-ova imamo da vrijedi $a \leq b$, odnosno da su a i b usporedivi što je jedino moguće u slučaju $a = b = x$ pa je $x \in A$.

Možemo vidjeti da je A antilanac skupa X'' pa elementi m i M sigurno neće biti sadržani u njemu. Tada još mora vrijediti $m \notin X^+$ jer je m minimalni element i $M \notin X-$ jer je on maksimalni usporedivi element. Sada možemo iskoristiti pretpostavku indukcije jer vidimo da vrijedi

$$|X^+| < |X| \quad \text{i} \quad |X^-| < |X|. \tag{3.33}$$

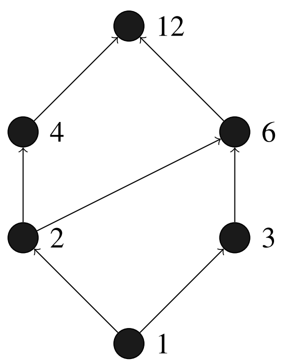
Prema pretpostavci indukcije oba PUS-a, $P^+ = (X^+, \leq)$ i $P^- = (X^-, \leq)$, se mogu zapisati kao particija r lanaca pri čemu će svaki od njih sadržavati po jedan element antilanca A, nazovimo te particije C_a^+ i C_a^- za svaki $a \in A$. Sada možemo spajanjem pripadnih lanaca dobiti particiju polaznog PUS-a P jer vidimo da je $\{C_a^+ \cup \{a\} \cup C_a^- : a \in A\}$ rastav na točno r lanaca koji pokrivaju cijeli polazni skup X. □

Jedan od načina na koji možemo promatrati parcijalno uređene skupove je preko Hasseovog dijagrama koji nam omogućava da vrlo jednostavano vidimo koji elementi skupa su usporedivi, a koji nisu.

Definicija 3.4.5. ***Hasseov dijagram*** *PUS-a $P = (X, \leq)$ je usmjeren graf kojem su vrhovi elementi skupa X, a bridovi su uređeni parovi $(x, y) \in X \times X$ takvi da vrijedi $x \leq y$, $x \neq y$ i ne postoji $z \neq x \neq y$ takav da $x \leq z \leq y$.*

Lako je smisliti razne primjere parcijalno uređenih skupova. Na primjer možemo promatrati partitivni skup nekog skupa i na njemu parcijalni uređaj "biti podskup" ili skup djelitelja nekog prirodnog broja s relacijom "biti djeljiv" Primjer djelitelja ćemo vidjeti i u sljedećem primjeru gdje ćemo prikazati i njegov Hasseov dijagram.

Primjer 3.4.6. *Neka je s $D(12)$ označen skup svih djelitelja broja 12, odnosno $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Promatramo relaciju "biti djeljiv" nad tim skupom. Tada za $n, m \in D$ vrijedi $n \leq m$ ako i samo ako n dijeli m. Promatramo PUS $P = (D(12), |)$. Njegov Hasseov dijagram prikazan je na grafu sa slike 3.3.*



Slika 3.3: Hasseov dijagram PUS-a $P = (D(12), |)$

Iz dijagrama je sada očito da npr. 3 i 4 nisu usporedivi, odnosno ne vrijedi $3|4$ niti $4|3$. Također možemo vidjeti na grafu da je najdulji antilanac duljine 2 i da postoje 3 antilanca duljine 2. To su $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ i $\{4, 6\}$. Prema Dilworthovom teoremu 3.4.4 tada P možemo zapisati kao particiju 2 lanca. Iz grafa lako vidimo da su to npr. lanci $L_1 = \{1, 2, 4, 12\}$ i $L_2 = \{3, 6\}$.

Na kraju ovog potpoglavlja još je bitno uočiti ekvivalenciju s Hallovim teoremom. Pokazat ćemo da iz Dilworthovog teorema slijedi Hallov teorem 2.1.2 čiji dokaz je moguće pronaći i u točki 8.1. knjige [9], dok ćemo drugi smjer ekvivalencije pokazati s Königovim teoremom 3.1.2 za kojeg smo već dokazali da je ekvivalentan Hallovom te je taj dokaz moguće pronaći u [5].

Teorem 3.4.7. *Iz Dilworthovog teorema slijedi Hallov teorem.*

Dokaz. Neka je $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ i neka su $S_1, \ldots, S_n$ podskupovi skupa S za koje vrijedi Hallov uvjet (2.1), odnosno unija bilo kojih k skupova $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ sadrži barem k elemenata. Definiramo PUS $P = (X, \leq)$ na sljedeći način:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, S_1, S_2, \ldots, S_n\} \tag{3.34}$$

nad kojim je definiran parcijalni uređaj s

$$x_i \leq S_j \text{ ako i samo ako vrijedi } x_i \in S_j. \tag{3.35}$$

Vidimo da je S jedan antilanac PUS-a P duljine m. Tvrdimo da je on i najdulji antilanac. Neka je A proizvoljni antilanac PUS-a P te neka je skup $I = \{i : S_i \in A\}$. Tada A sigurno ne sadrži niti jedan element unije $\cup_{i \in I} S_i$ jer za svaki $x \in S_i$ vrijedi $x \leq S_i$ pa antilanac A ne može sadržavati i x i S_i. Zbog Hallovog uvjeta vrijedi sljedeća nejednakost:

$$|A| \leq |I| + |S| - \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \leq |S|. \tag{3.36}$$

Time smo dokazali da je S najdulji antilanac PUS-a P.

Sada znamo da se PUS P može particionrati u m lanaca. Nadalje, svaki od lanaca će sadržavati 2 elementa. Zbog činjenice da je S najdulji antilanac, svaki od m lanaca će sadržavati jedan element iz S, a drugi element iz skupa $\{S_1, \ldots, S_n\}$. Imamo particiju na m lanaca oblika $\{x_{j_i}, S_i\}$ pa je $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ transverzala skupova $S_1, \ldots, S_n$ i time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Teorem 3.4.8. *Iz Königovog teorema slijedi Dilworthov teorem.*

Dokaz. Neka je $P = (X, \leq)$ proizvoljan PUS u kojem je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Definiramo binarnu kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ reda n na sljedeći način:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ako } x_i \leq x_j \text{ i } x_i \neq x_y \\ 0, \text{inače.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Neka je $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_s}$ lanac duljine s PUS-a P. Tada elementi matrice $a_{i_1 i_2}, \ldots, a_{i_{s-1} i_s}$ čine skup od $s - 1$ nezavisnih jedinica matrice A. Particija od P na j lanaca tada u svom matričnom prikazu sadržava $|X| - j$ nezavisnih jedinica. Analogno vrijedi i obrnuto, tj. ako imamo $|X| - j$ nezavisnih jedinica matrice A one odgovaraju j lanaca koji particioniraju PUS P. Pretpostavimo sada da je m minimalan broj lanaca na koji možemo zapisati PUS P kao particiju. Tada matrica A sadrži $|X| - m$ nezavisnih jedinica te je to ujedno i rang matrice A. Tada prema Königovom teoremu 3.1.2 možemo sve jedinice u matrici A pokriti s $|X| - m$ linija koje u PUS-u P označavaju najviše $|X| - m$ različitih elemenata. Vidimo da preostalih m linija označava barem m elemenata $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ koji čine antilanac u P. □

Dualni problem Dilworthovom poznat je pod nazivom Mirskyjev teorem. U teoremu 3.4.9 moguće je vidjeti iskaz tog dualnog problema.

Teorem 3.4.9 (Mirsky, 1971.)**.** *Neka je $P = (X, \leq)$ parcijalno uređeni skup i r njegova visina. Tada P možemo zapisati kao particiju najmanje r antilanaca.*

3.5 Mengerov teorem

Posljednji teorem koji ćemo ukratko prikazati u ovom poglavlju ima primjenu u teoriji grafova. Karl Menger[5] je 1927. godine dokazao još jedan u nizu min-max teorema. Mengerov teorem opisuje povezanost u grafu i ima dvije verzije. Njegova generalizacija dalje vodi prema problemu traženja maksimalnog toka minimalne cijene što se može opisati kao problem linearnog programiranja. U ovoj točki pratit ćemo izlaganje iz poglavlja 5.3. knjige [6].

Za graf kažemo da je **povezan** ako postoji put između bilo koja dva vrha u tom grafu. Mengerov teorem govori o minimalnom broju bridova ili vrhova koje je potrebno izbaciti iz grafa da bi on postao nepovezan.

Uvedimo još dvije potrebne oznake. Ako je $G = (V, E)$ graf tada će $G \setminus V'$ označavati podgraf grafa G sa skupom vrhova $V \setminus V'$ i skupom bridova $E' = \{\{x, y\} \in E : x \in V \setminus V',\ y \in V \setminus V'\}$. Slično, $G \setminus E'$ označavati će podgraf grafa G sa skupom vrhova V i skupom bridova $E \setminus E'$.

Definicija 3.5.1. ***Vršni rez*** *grafa $G = (V, E)$ je podskup $V' \subseteq V$ takav da vrijedi da je podgraf $G \setminus V'$ nepovezan. Analogno definiramo* ***bridni rez*** *kao podskup $E' \subseteq E$ takav da vrijedi da je podgraf $G \setminus E'$ nepovezan.* ***Vršna povezanost*** *grafa G je najmanji broj vrhova čijim izbacivanjem graf prestaje biti povezan, odnosno broj elemenata minimalnog vršnog reza u grafu. Slično,* ***bridna povezanost*** *grafa G je najmanji broj bridova čijim izbacivanjem graf prestaje biti povezan, odnosno broj elemenata minimalnog bridnog reza u grafu.*

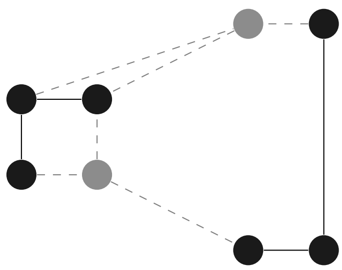
[5] K. Menger (1902-1985), austrijsko-američki matematičar

Komponenta povezanosti grafa G je podgraf grafa G u kojem su bilo koja dva čvora povezana putem i koji nije sadržan u niti jednom većem povezanom podgrafu. Vidimo da je graf povezan ako i samo ako se sastoji od samo jedne komponente povezanosti.

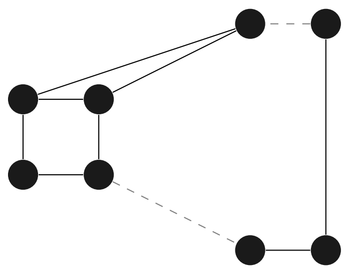
Definicija 3.5.2. *Neka je $G = (V, E)$ graf, u, v dva vrha u tom grafu te P_1 i P_2 dva puta između tih vrhova. Za P_1 i P_2 kažemo da su **vršno disjunktni** ako P_1 i P_2 nemaju drugih zajedničkih vrhova osim u i v, a **bridno disjunktni** ako ti putovi nemaju niti jedan zajednički brid.*

Put između dva vrha u i v nazivamo (u, v)-put. Rez kojim dobivamo da su u i v u različitim komponentama povezanosti nazivamo $(u - v)$-rez.

Primjer 3.5.3. *Pogledajmo graf sa slike 1.1 i njegovu vršnu i bridnu povezanost.*



Slika 3.4: Vršni rez



Slika 3.5: Bridni rez

Na grafu sa slike 3.4 vidimo da izbacivanjem vrhova obojanih u sivo i pripadnih bridova kojima je on jedan kraj dobivamo nepovezan graf s dvije komponente povezanosti od kojih se svaka sastoji od tri vrha i dva brida. Dakle, vrhovi obojani u sivo označavaju jedan vršni rez tog grafa.

Slično i s druge strane, na grafu sa slike 3.5, izbacivanjem bridova označenih isprekidanom linijom ponovno dobivamo graf s dvije komponente povezanosti. Stoga ta dva brida čine jedan bridni rez tog grafa.

No, možemo vidjeti da izbacivanjem samo jednog vrha ili brida iz početnog grafa sa slike 1.1 graf i dalje ostaje povezan. Pa je, stoga, minimalni broj vrhova u vršnom i minimalni broj bridova bridnom rezu jednak 2 te su rezovi iz primjera ujedno i minimalni.

Teorem 3.5.4 (Mengerov teorem)**.** *Neka je $G = (V, E)$ graf te neka su u i v nesusjedni vrhovi grafa G. Tada je maksimalni broj vršno disjunktnih putova između u i v jednak broju vrhova u minimalnom vršnom $(u - v)$-rezu.*

Napomena 3.5.5. *Bitno je naglasiti da postoji više ekvivalentnih formulacija ovog teorema ovino o tome što se promatra. U iskazu teorema 3.5.4 proučavali smo vršno disjunktne putove, a jednako tako smo mogli proučavati i bridno disjunktne. Iskaz teorema za bridno* *disjunktne putove nalazi se u nastavku rada kao teorem 3.5.6. Nadalje, na početku rada smo rekli da u radu proučavamo jednostavne grafove pa je i Mengerov teorem iskazan tako, no njegova važna primjena se pronalazi i u usmjerenim grafovima. Postoje, stoga, i iskazi teorema koji govore o vršnim i bridno disjunktnim putovima usmjerenog grafa.*

Teorem 3.5.6. *Neka je $G = (V, E)$ povezan graf te neka su u i v nesusjedni vrhovi grafa G. Tada je maksimalni broj bridno disjunktnih putova između u i v jednak broju bridova u minimalnom bridnom $(u - v)$-rezu.*

Dokaz teorema biti će izveden za verziju bridno disjunktnih putova u neusmjerenom grafu, odnosno dokazat ćemo Mengerov teorem 3.5.6.

Dokaz. Za dokaz ovog teorema ćemo se ponovno poslužiti matematičkom indukcijom, ovaj put po broju bridova u danom grafu. Najmanji graf koji zadovoljava uvjete teorema sadrži dva brida. Dakle, bazu je potrebno provjeriti za $m = 2$, a to je trivijalno zadovoljeno jer minimalni bridni $(u - v)$-rez sadrži bilo koji od dva brida u grafu, a sam graf je i jedini put između u i v.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za sve grafove s manje od m bridova pri čemu je $m = |E|$. Nastavak dokaza možemo razdvojiti na dva slučaja - jedan gdje postoji minimalni bridni $(u - v)$-rez takav da nisu svi njegovi bridovi incidentni s vrhom u niti s vrhom v i jedan gdje su svi bridovi minimalnog bridnog $(u - v)$-reza incidentni s u ili v. Za svaki od tih slučajeva ćemo zasebno dokazati da vrijedi tvrdnja teorema.

Slučaj 1: Pretpostavljamo da je S minimalni bridni $(u - v)$-rez takav da nisu svi njegovi bridovi incidentni s vrhom u niti s vrhom v. Neka je $|S| = k$. Podgraf $G \setminus S$ više nije povezan već se sastoji od dvije komponente povezanosti, a kako je S bridni $(u - v)$-rez znamo da će se vrhovi u i v nalaziti u različitim komponentama povezanosti.

Definiramo grafove G_1 i G_2 kao grafove koji nastaju iz grafa G kontrakcijom pripadnih komponenti povezanosti. Kontrakcija je operacija nad bridovima i vrhovima grafa koja briše brid iz grafa te krajeve tog brida spaja u jedan vrh. Dakle, graf G_1 dobivamo iz grafa G kontrakcijom svih bridova koji pripadaju komponenti povezanosti koja sadrži vrh u, a graf G_2 dobivamo iz grafa G kontrakcijom svih bridova koji pripadaju komponenti povezanosti koja sadrži vrh v. Primjerice graf G_1 će sadržavati bridove koji pripadaju komponenti povezanosti koja sadrži vrh v, dok će cijela komponenta povezanosti kojoj pripada vrh u biti kontrahirana samo u taj vrh u.

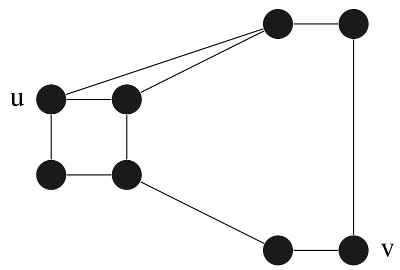
Vidimo da grafovi G_1 i G_2 sadrže manje bridova nego graf G i da je S i dalje minimalni bridni $(u - v)$-rez za G_1 i G_2. Sada po pretpostavci indukcije vrijedi da postoji $k = |S|$ bridno disjunktnih putova između u i v. Na kraju dobivamo k bridno disjunktnih putova između u i v u početnom grafu povezujući te disjunktne putove s bridovima bridnog reza.

Slučaj 2: Pretpostavimo sada da su svi bridovi minimalnog bridnog $(u - v)$-reza incidentni s u ili v. Ovaj slučaj je bitno jednostavniji. Ako graf G sadrži brid $e \in E$ koji nije sadržan u nekom minimalnom bridnom $(u-v)$-rezu, vidimo da tvrdnja vrijedi trivijalno jer izbacivanjem brida e iz grafa možemo primijeniti pretpostavku indukcije i time bi dobili da vrijedi tvrdnja teorema.

Pretpostavimo stoga još da su svi bridovi grafa G sadržani u nekom minimalnom bridnom $(u - v)$-rezu. Očito je da se svaki (u, v)-put P sastoji od dva brida (jedan povezan s vrhom u i jedan povezan s vrhom v) te da sadrži najviše jedan brid nekog minimalnog bridnog $(u - v)$-reza kardinalnosti $k = |S|$. Sada možemo izbaciti put P iz grafa te prema pretpostavci dobiti graf s najviše $k - 1$ bridno disjunktnih (u, v)-putova. Dodamo li tome i put P dobivamo k bridno disjunktnih (u, v)-putova i time smo dokazali tvrdnju teorema. □

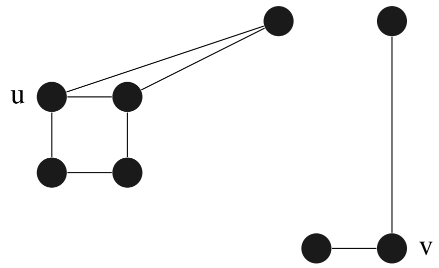
Dijelove dokaza biti će jednostavnije shvatiti nakon što pogledamo sljedeći primjer u kojem ćemo se ponovno poslužiti grafom sa slike 1.1.

Primjer 3.5.7. *Neka je G graf sa slike 3.6 i neka su vrhovi u i v zadani kao što je označeno.*



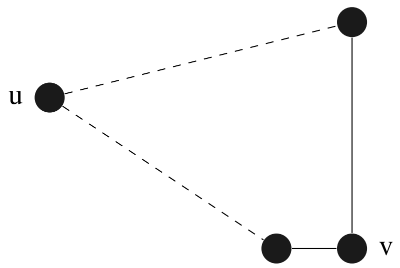
Slika 3.6: Primjer povezanog grafa G

Za taj graf smo već vidjeli u primjeru 3.5.3 na grafu sa slike 3.5 jedan bridni $(u-v)$-rez te smo rekli da je on ujedno i minimalni bridni rez. Vidimo da taj bridni rez ne sadrži bridove incidentne s u niti s v. Na slici 3.7 vidimo dvije komponente povezanosti dobivene izbacivanjem bridova sadržanih u bridnom rezu iz početnog grafa G.

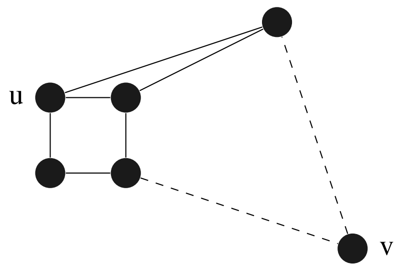


Slika 3.7: Komponente povezanosti

Konstruiramo grafove G_1 i G_2 dobivene kontrakcijama bridova kao u dokazu teorema 3.5.6. Dakle, vidimo na slikama 3.8 i 3.9 da svaki od njih ima 2 bridno disjunktna $(u-v)$-puta.

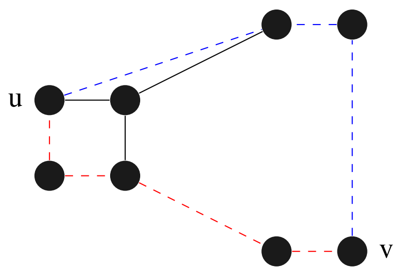


Slika 3.8: Graf G_1



Slika 3.9: Graf G_2

Spajanjem tih putova uključujući bridove reza dobivamo 2 bridno disjunktna $(u-v)$-puta početnog grafa G što možemo vidjeti na slici 3.10 gdje su ta dva puta označena isprekidanom linijom različitih boja.



Slika 3.10: Bridno disjunktni (u, v)-putovi

Iz grafa možemo vidjeti da odabir bridno disjunktnih (u, v)-putova nije jedinstven, ali maksimalni broj takvih je jednak minimalnom bridnom $(u-v)$-rezu kao što smo dokazali u teoremu 3.5.6.

Bibliografija

[1] *Hall's Marriage Theorem*, https://brilliant.org/wiki/hall-marriage-theorem/, (pristupljeno 25. kolovoza 2020.).

[2] V. K. Balakrishnan, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics*, McGraw-Hill, New York, 1995.

[3] ______, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*, McGraw-Hill, New York, 1997.

[4] P. Bartlett, *Latin Squares (Enumeration, Partial, Graphs)*, skripta, University of California, Santa Barbara (2012), http://web.math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2012/latin_squares/MC2012_LatinSquares_lecture1.pdf, (pristupljeno 7. rujna 2020.).

[5] T. Britz, *Aspects of Combinatorial Optimization*, skripta, Kumamoto University (2011), http://www.thomasbritz.dk/ACO/Lecture2.pdf, (pristupljeno 8. rujna 2020.).

[6] J. L. Gross i J. Yellen, *Graph Theory and its applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2005.

[7] D. Guichard, *An Introduction to Combinatorics and GraphTheory*, skripta, Whitman College (2020), https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/cgt.pdf, (pristupljeno 7. rujna 2020.).

[8] M. Hall, *Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, New Jersey-Hoboken, 1986.

[9] S. Jukna, *Extremal Combinatorics*, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.

[10] F. Kalebić, J. Mandić, D. Vukičević i S. Braić, *Prebrojavanje savršenih sparivanja*, math.e **17** (2010), http://e.math.hr/sites/default/files/br17/kalebic_et_al.pdf, (pristupljeno 7. rujna 2020.).

[11] J. Kung, G. C. Rota i C. Yan, *Combinatorics: The Rota Way*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[12] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu (2011), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf, (pristupljeno 25. kolovoza 2020.).

[13] A. Rao, *Hall's Theorem*, skripta iz predmeta CSE599s: Extremal Combinatorics, Sveučilište u Washingtonu (2011), https://homes.cs.washington.edu/~anuprao/pubs/CSE599sExtremal/lecture6.pdf, (pristupljeno 7. rujna 2020.).

Sažetak

U ovom radu cilj je bio dokazati i vidjeti primjene jednog od važnijih teorema iz područja kombinatorike, Hallovog teorema. U prvom dijelu rada iskazana je njegova kombinatorna formulacija i ekvivalencija u smislu teorije grafova i sparivanja te su dana četiri različita dokaza Hallovog teorema. Prvi iskaz teorema govori o nužnom i dovoljnom uvjetu za postojanje transverzale danih konačnih skupova. Jednostavnom generalizacijom dolazi se do iskaza Hallovog teorema u smislu teorije grafova koji govori o nužnom i dovoljnom uvjetu za postojanje potpunog sparivanja u bipartitnom grafu. Na kraju drugog poglavlja iskazane su i neke posljedice iz područja kombinatorike, teorije skupova, teorije grupa i linearne algebre. Nadalje, u posljednjem poglavlju smo pokazali da je on samo jedan u nizu ekvivalentnih teorema čija primjena se širi na mnoga područja matematike pa je i motivacija koju smo vidjeli na početku rada raznolika. Među ekvivalentne teoreme pripadaju osim Hallovog još Königov, Dilworthov, Mengerov, Birkhoff-Von Neumannov teorem i drugi. U radu su iskazani i dokazani navedeni teoremi i prikazana je njihova primjena. Vidjeli smo da objekti koji se promatraju u tim teoremima sežu od jednostavnih grafova (Mengerov i Königov teorem), binarnih matrica (Königov teorem) i dvostruko stohastičih matrica (Birkhoff-Von Neumannov teorem) do parcijalno uređenih skupova (Dilworthov teorem). Upoznali smo se i s latinskim pravokutnicima, još jednom specifičnom vrstom matrica, te smo pokazali da je Hallov teorem zaslužan za dokaz jednog od važnijih teorema o latinskim pravokutnicima.

Summary

The aim of this thesis was to prove and present the applications of one of the central theorems in the field of combinatorics, Hall's theorem. Through the first part of the thesis we have expressed its combinatorial formulation, equivalence in terms of graph theory and matching and provided four different proofs. The first statement of the theorem gives the necessary and sufficient condition for the existence of a system of distinct representatives of given sets. A simple generalization leads to the statement of Hall's theorem in terms of graph theory, which speaks of a necessary and sufficient condition for the existence of complete matching in a bipartite graph. At the end of the second chapter, several consequences from the field of combinatorics, set theory, group theory and linear algebra are presented. Furthermore, in the last chapter we have shown that Hall's theorem is one in a sequence of equivalent theorems whose application extends to many areas of mathematics, so the motivation we saw at the beginning of the paper is diverse. Among the equivalent theorems, in addition to Hall's theorem, there are König's, Dilworth's, Menger's, Birkhoff-Von Neumann theorem, and others. These theorems are stated and proved in this thesis and their application is presented. We have seen that the objects observed in these theorems vary from simple graphs (Menger's and König's theorem), binary matrices (König's theorem) and doubly stochastic matrices (Birkhoff-Von Neumann theorem) to partially ordered sets (Dilworth's theorem). We were also introduced to Latin rectangles, another specific type of matrix, and have shown that Hall's theorem is responsible for proving one of the most important theorems in Latin rectangles.

Životopis

Rođena sam 2.9.1996. u Zagrebu gdje sam odrasla i obrazovala se. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam u O.Š. Gustava Krkleca u Travnom gdje sam završila prva tri razreda, četvrti razred pohađala sam u O.Š. Tituša Brezovačkog u Španskom dok sam preostale razrede osnovne škole završila u O.Š. Špansko Oranice. Obrazovanje sam nastavila u XI. gimnaziji u Zagrebu gdje sam maturirala 2015. godine. Paralelno uz primarno obrazovanje pohađala sam Osnovnu glazbenu školu Rudolfa Matza te nakon toga Glazbeno učilište Elly Bašić gdje sam 2018. maturirala i stekla zvanje glazbenik harmonikaš. Po završetku gimnazije, upisala sam preddiplomski studij Matematika, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu i 2018. stekla zvanje prvostupnice edukacije matematike. Nakon toga sam nastavila obrazovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu na diplomskog studiju smjer Računarstvo i matematika. Od 2015. sam aktivna članica Akademskog harmonikaškog orkestra Ivan Goran Kovačić, a od 2017. sam članica međunarodne organizacije Mensa. Znanja stečena na fakultetu usavršavala sam na ljetnoj školi Infinum Academy 2019. za razvoj Android aplikacija te na studentskom poslu u firmi Libusoft Cicom d.o.o kao pripravnica softverskog inženjerstva.