Matematika Rubikove kocke

Vidov, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Vidov

MATEMATIKA RUBIKOVE KOCKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima koji su od prvog dana moja najveća podrška i oslonac. Zahvaljujem im na ljubavi, vjeri, razumijevanju, brizi te brojnim odricanjima kako bi mi omogućili ovo studiranje.
Zahvaljujem svojoj obitelji na pomoći i podršci.
Zahvaljujem se svim prijateljima na lijepim uspomenama tijekom studiranja.
Zahvaljujem se svom zaručniku Dariu na ljubavi, potpori, motivaciji, brojnim savjetima i pažnji koju mi je pružio onda kada mi je bilo najpotrebnije.
Na kraju, željela bih zahvaliti svom mentoru doc. dr. sc. Matiji Bašiću na strpljenju i savjetima prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu prikazan je mali dio matematike kojeg u sebi krije Rubikova kocka. Zanimljivo je što njezin nastanak nije povezan s matematikom konkretno, već s arhitekturom, a može se riješiti koristeći "čistu" matematiku. U radu je izložena osnova teorije grupa koja je potrebna za razumijevanje i interpretiranje Rubikove kocke što bitno pomaže za uspješno slaganje Rubikove kocke.

Prvo poglavlje započinje uvođenjem pojma grupe pomoću simetrija jednakostraničnog trokuta. Zatim se pojam grupe proširuje i promatraju se simetrije kvadrata i kocke. Naglasak je na bojanjima vrhova kvadrata i strana kocke do na simetriju, za što nam služi Burnsideova lema.

Na početku drugog poglavlja upoznajemo povijest Rubikove kocke. Opisuje se izgled kocke, oznake strana, oznake poteza i primjena poteza na Rubikovoj kocki. Pokazuje se da je grupa Rubikove kocke zaista grupa i objašnjavaju se ciklički zapisi poteza. Svatko tko je pokušao složiti Rubikovu kocku sigurno se zapitao što bi bilo kada bismo je rastavili i ponovno sastavili. Ako bismo ponovno sastavili kocku nasumičnim spajanjem kockica, jako je mala vjerojatnost da bi se onda potezima mogla složiti. Da bismo to razumijeli upoznajemo se s valjanim i nedozvoljenim konfiguracijama Rubikove kocke. Objašnjava se broj mogućih kombinacija rasporeda svih kockica Rubikove kocke. Uvodimo pojmove konjugat poteza i komutator poteza čijom primjenom možemo promijeniti orijentaciju ili poziciju odgovarajućih rubnih ili vršnih kockica, a da sve ostale kockice ostanu na svom mjestu.

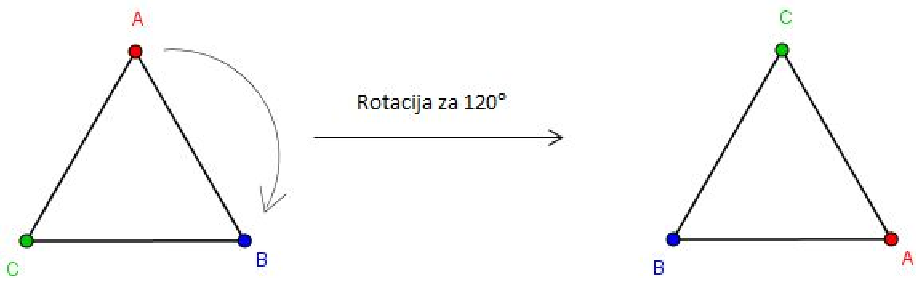
U trećem poglavlju traži se veza Rubikove kocke sa matematikom u školi. Opisane su tri aktivnosti i dani nastavni listići za učenike. Učenjem na konkretnom modelu učenici razvijaju svijest o tome što se točno događa kada primjenjujemo matematiku što vodi do boljeg razumijevanja te u konačnici i samopouzdanja. Rubikovom kockom možemo razvijati motoričke vještine, apstraktno razmišljanje i prostornu inteligenciju učenika. Jako je važna veza dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora koju učenici mogu vježbati pomoću mreže Rubikove kocke u jednoj od danih aktivnosti.

Poglavlje 1

Grupe i simetrije

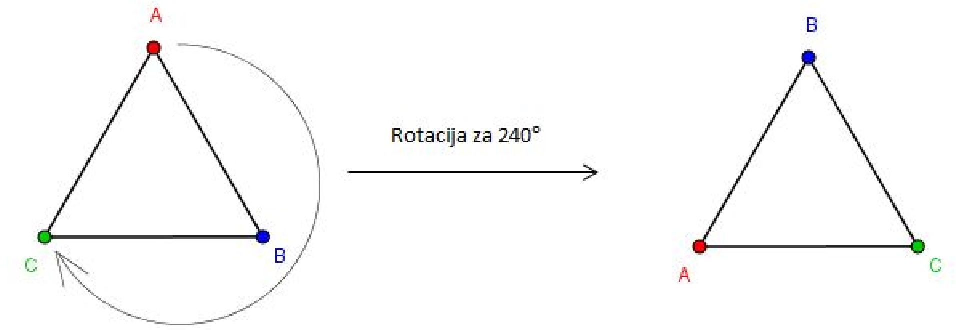
1.1 Simetrije u ravnini i pojam grupe

Kao uvodni primjer promotrimo transformacije ravnine koje preslikavaju jednakostraničan trokut u njega samog. Jedna takva transformacija je rotacija oko središta jednakostraničnog trokuta za 120°. Tom rotacijom se vrh A preslikava u vrh B, vrh B u vrh C, a vrh C u vrh A.



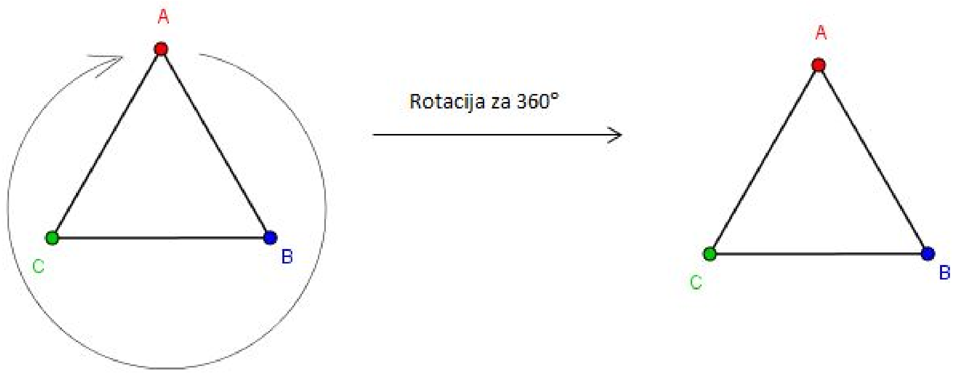
Slika 1.1: Rotacija za 120°.

Rotiramo li jednakostranični trokut oko njegova središta za 240° vrh A se preslikava u vrh C, vrh B u vrh A, a vrh C u vrh B. Možemo primjetiti da je to zapravo rotacija za kut $-120°$, odnosno rotacija za 120° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.



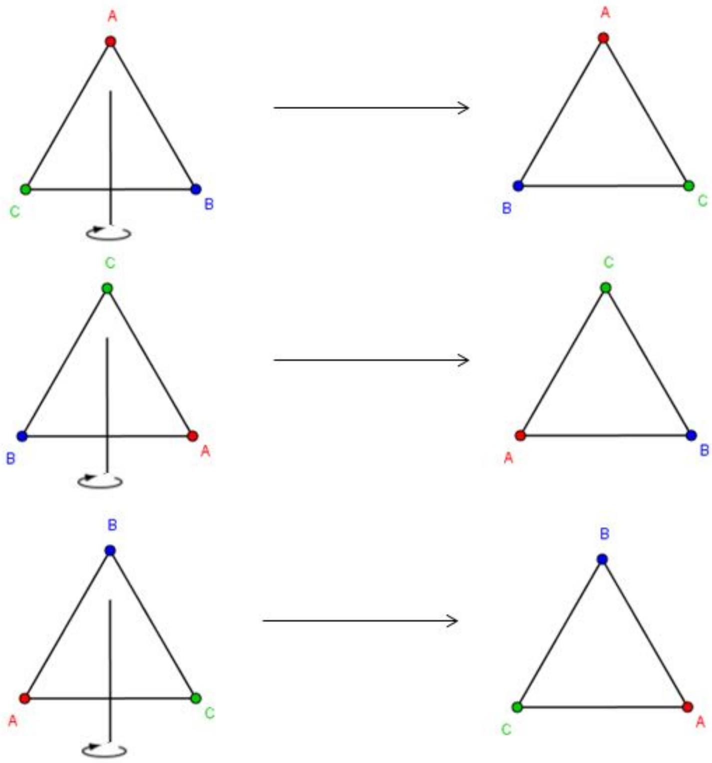
Slika 1.2: Rotacija za 240°.

Rotiranjem jednakostraničnog trokuta oko njegova središta za 360° vrh A se preslika u vrh A, vrh B u vrh B, a vrh C u vrh C. Svi vrhovi trokuta su se preslikali na svoje početno mjesto. To preslikavanje nazivamo **identiteta**.



Slika 1.3: Identiteta.

Rotacijom više ne možemo dobiti ni jedan novi poredak vrhova. Dobivene trokute također možemo zrcaliti s obzirom na pravac koji prolazi gornjim vrhom trokuta i polovištem njemu nasuprotne stranice. Točke pravca pomoću kojeg zrcalimo trokut pri zrcaljenju uvijek ostaju na istom mjestu, na pravcu, one su fiksne. To znači da će gornji vrh u sva tri slučaja ostati nepromijenjen, a preostala druga dva vrha će zamijeniti mjesta.



Slika 1.4: Zrcaljenja jednakostraničnog trokuta.

Promotrimo poredak vrhova u jednakostraničnim trokutima koje smo dobili rotacijama i zrcaljenjem; ABC, ACB, BCA, BAC, CAB i CBA. Možemo li odrediti još kombinacija, osim nabrojanih šest, za poredak vrhova u trokutu?
Promatramo li transformacije ravnine koje fiksiraju trokut, zaključujemo da se vrhovi moraju preslikati u vrhove i to su sve mogućnosti.

Definicija 1.1.1. *Ako promatramo neki skup X u ravnini onda je* ***simetrija skupa*** *X preslikavanje ravnine $f : E \to E$ koje čuva udaljenost (izometrija) i koje preslikava taj skup u samog sebe, $f(X) = X$.*

Kada smo u jednakostraničnom trokutu promatrali rotaciju, a zatim zrcaljenje, promatrali smo zapravo kompoziciju simetrija koja je opet simetrija. Budući da su simetrije preslikavanja, njihova kompozicija je asocijativna, a svako to preslikavanje je i bijekcija, stoga ima inverz. Inverz simetrije je također opet simetrija. Vidjeli smo da postoji i identiteta, simetrija koja svaki vrh trokuta preslika u njega samog. Možemo li na temelju navedenog zaključiti koju strukturu čine simetrije jednakostraničnog trokuta?

Skup $Sym(X)$ svih simetrija skupa X zajedno s kompozicijom simetrija čini primjer općenitijeg pojma kojeg nazivamo **grupa**. Grupa je uređeni par $(G, \circ)$ skupa G i binarne operacije $\circ : G \times G \to G$ koja zadovoljava ista svojstva koja smo istaknuli u primjeru simetrija jednakostraničnog trokuta. U ovom radu promatrat ćemo samo konačne grupe.

Definicija 1.1.2. *Uređeni par $(G, \circ)$ koji se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $\circ : G \times G \to G$ zove se **grupa** ako vrijede sljedeća svojstva:*

$$\forall f, g, h \in G : \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (asocijativnost),$$

$$\forall g \in G \quad (\exists e \in G) : \; e \circ g = g \circ e = g \;\; (neutralni\ element),$$

$$(\forall g \in G) \quad \left(\exists! g^{-1} \in G\right) : \; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e \;\; (inverzni\ element).$$

*Element e, ili e_G ako želimo posebno naglasiti da je riječ o grupi G, zove se **neutralni element** grupe. Za zadani $g \in G$, element $g^{-1} \in G$ koji zadovoljava gore navedeno treće po redu svojstvo, zove se **inverzni element** od g.*
Ako još vrijedi i svojstvo:

$$g \circ h = g \circ h \;\; \forall g, h \in G \;\; (komutativnost),$$

*onda kažemo da je G **komutativna** ili **abelova** grupa.*

Lako se pokazuje da su neutralni element i inverz svakog elementa u grupi jedinstveni. Tu činjenicu ćemo koristiti za dokazivanje nekih jednostavnih tvrdnji u nastavku rada.

Definicija 1.1.3. ***Red** grupe G, koji se označava sa $|G|$, je broj elemenata u skupu G.*

Lema 1.1.4. *Za $x \in G$ vrijedi $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.*

Dokaz. U grupi G vrijedi da je $\left(x^{-1}\right)^{-1}$ inverzni element elementa x^{-1}. Prema definiciji inverznog elementa grupe vrijedi:

$$x^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1} = e.$$

Množenjem slijeva sa x dobivamo:

$$xx^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1} = xe.$$

Promotrimo li sada x^{-1} kao inverz elementa x u grupi G vrijedi:

$$e\left(x^{-1}\right)^{-1} = xe.$$

Dakle vrijedi,

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

što je i trebalo dokazati. □

Lema 1.1.5. *Za* $x, y \in G$ *vrijedi* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Dokaz. Primjenom asocijativnosti te iz činjenice da je element y^{-1} inverz elementa y, a element x^{-1} inverz elementa x vrijedi:

$$xy\left(y^{-1}x^{-1}\right) = x\left(yy^{-1}\right)x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e,$$

iz čega vidimo da je $y^{-1}x^{-1}$ inverz od xy.
Zbog jedinstvenosti inverza zaključujemo da je

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

što smo i trebali dokazati. □

Primjer 1.1.6. *Permutacija konačnog skupa X je bilo koja bijekcija* $f : X \to X$. *Skup svih permutacija skupa X obzirom na kompoziciju čini grupu. Za* $X = \{1, 2, ..., n\}$ *tu grupu označavamo* S_n *i zovemo* ***simetrična grupa*** *na n elemenata. Grupe permutacija* $(S_n, \circ)$ *nisu komutativne. Broj permutacija n-članog skupa je n!. Postoji još jedan zapis permutacije kojeg zovemo cikličkim zapisom. Ciklus je permutacija elemenata iz skupa* $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *takva da* $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto ... \mapsto x_1$ *gdje su* $x_i \in X$. *Permutacija se uvijek može prikazati kao produkt disjunktnih ciklusa. Ciklus* $(x_1\ x_2\ ...\ x_k)$ *zovemo ciklus duljine k. Štoviše, permutacija koja se može prikazati kao ciklus duljine k se naziva* ***k-permutacija***. *Ciklus duljine* 2 *još nazivamo* ***transpozicija***.
Permutacija

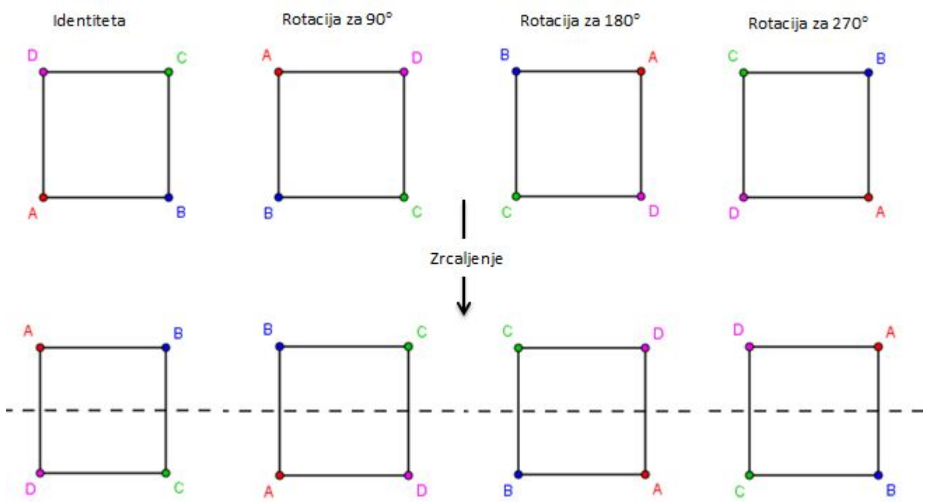
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

se u cikličkoj notaciji može zapisati kao $(1\ 3\ 4)(2\ 6)(5)$. *Ciklička struktura se sastoji od jednog* 3*-ciklusa, jednog* 2*-ciklusa i jednog* 1*-ciklusa. Ponekad se jednočlani ciklusi, poput* (5) *ne zapisuju.*

Primjer 1.1.7. *Neka je* $Z_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ *skup ostataka modulo n. Grupu* $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ *nazivamo* ***grupa ostataka modulo*** *n s obzirom na zbrajanje modulo n. Ove grupe su osnovni primjeri* ***cikličkih grupa*** *i one su komutativne.*

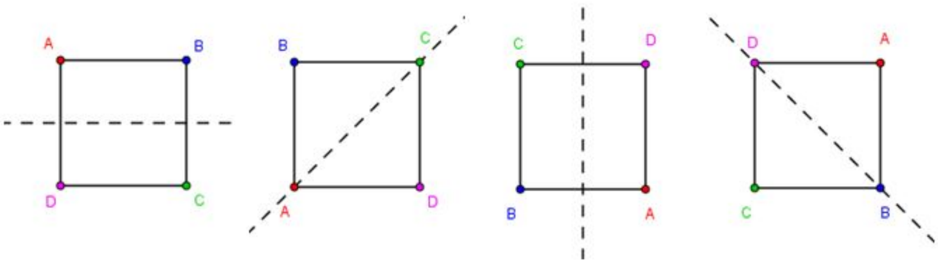
1.2 Podgrupe i prezentacije grupa

Promotrimo koliko simetrija ima kvadrat $ABCD$. Identitetu dobivamo preslikamo li sve elemente kvadrata u njih same. Možemo primjeniti rotaciju za 90°, 180° i 270° oko središta kvadrata. Primjenimo li na kvadrat zrcaljenje koje zamijeni vrhove A i D, te B i C, a zatim kompoziciju svake od rotacija sa zrcaljenjem po istoj osi, dobit ćemo sve simetrije kvadrata. Kasnije ćemo pokazati da navedenih osam simetrija čine sve simetrije kvadrata. Ne postoji nijedna druga permutacija vrhova jer izometrija čuva udaljenosti, a posljedica je i da se dijagonale preslikavaju u dijagonale. U kvadratu postoje dvije dijagonale te se vrhovi A i C onda preslikavaju ili u A i C ili u B i D, analogno i vrhovi B i D.



Slika 1.5: Simetrije kvadrata.

Mogli smo primjeniti i zrcaljenje koje će kvadratu zamijeniti vrhove B i D, a vrhove A i C će ostaviti na istom mjestu jer se nalaze na osi zrcaljenja. Možemo primjeniti još jedno zrcaljenje koje će zamijeniti vrhove C i D, te A i B. Ostaje nam još zrcaljenje koje ostavlja vrhove B i D na istom mjestu jer se nalaze na toj osi zrcaljenja, a zamjenjuje vrhove A i C. Dobit ćemo isti poredak vrhova kao i u slučaju prije gdje smo nakon rotacija primijenili još zrcaljenje.



Slika 1.6: Različite osi simetrije.

Ispišemo li sve permutacije vrhova kvadrata koje možemo napraviti, a da poštujemo čuvanje dijagonala, možemo direktno pobrojati svih osam simetrija kvadrata koje smo prije spomenuli. No, taj način nije uvijek efikasan i bolje ga je primjenjivati kod manjih skupova. Prije nego pokažemo efikasniji način dobivanja svih simetrija kvadrata, definirat ćemo nekoliko bitnih pojmova i analizirati strukturu grupe simetrija kvadrata.

Definicija 1.2.1. *Podskup H grupe G je* ***podgrupa*** *od G ako je to ujedno i grupa za operaciju koja je definirana na G. Dakle, H je podgrupa od G ako vrijede sljedeća dva uvjeta:*

$$(\forall x, y \in H) : xy \in H;$$

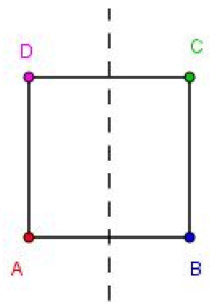
$$(\forall x \in H) : x^{-1} \in H.$$

Činjenicu da je H podgrupa od G označavamo sa $H \leq G$.

Promotrimo jedan element grupe, označimo ga sa a. Primjenimo li taj element na nekom skupu dva puta zaredom dobivamo $a \circ a$, što pišemo kao a^2. Općenito:

$$a^{n+1} = a^n \circ a, \; za \, n \geq 1.$$

Kod simetrija kvadrata gledali smo rotaciju i zrcaljenje. Označimo rotaciju za 90° sa a. Kompoziciju te rotacije sa još jednom rotacijom za 90° zapisujemo kao a^2, što je zapravo rotacija za 180°. Analogno, a^3 je rotacija za 270°, a a^4 je rotacija za 360° i to je neutralni element kojeg označavamo sa e ili id.
Zrcaljenje s obzirom na pravac koji prolazi polovištima stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ označimo sa b.



Slika 1.7: Zrcaljenje b.

Zrcaljenje zamijeni vrhove A i B, te C i D i vidimo da je samo sebi inverz: $b^{-1} = b$.

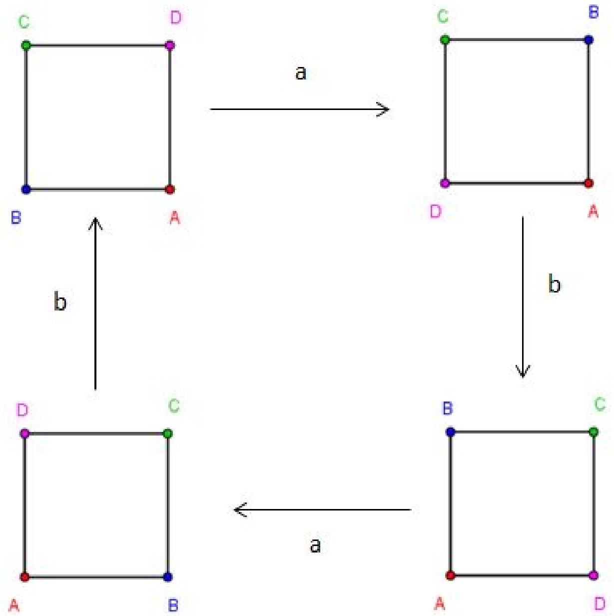
Također, ako primjenimo zrcaljenje na kvadratu dva puta zaredom dolazimo do identitete:

$$b^2 = b \circ b = b \circ b^{-1} = e.$$

Sve simetrije kvadrata koje smo naveli na slici 1.5 možemo prikazati kao kompoziciju simetrija a i b na sljedeći način:

$$\left\{id, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\right\} = Sym(\square).$$

Elemente dobivenog skupa možemo i na drugačiji način opisivati jer postoje i neke druge relacije. Krenimo od kvadrata $ABCD$, primjenom rotacije a dobivamo kvadrat $DABC$, a zatim primjenom zrcaljenja b dobivamo kvadrat $ADCB$. Zarotirajmo vrhove još jednom do kvadrata $BADC$ te konačno ponovnom primjenom zrcaljenja b dobivamo početni kvadrat $ABCD$.



Slika 1.8: Dodatna relacija kvadrata.

Zaključujemo da je $baba = e$ tj. $(ba)^2 = e$ i to je još jedna relacija koja vrijedi u ovoj grupi. Grupu simetrija kvadrata možemo zapisati kao grupu koja je generirana sa elementima a i b za koju vrijede relacije $a^4 = b^2 = (ba)^2 = e$:

$$Sym(\square) = \left\langle a, b \,|\, a^4 = b^2 = (ba)^2 = e \right\rangle.$$

Ovakav zapis grupe zovemo **prezentacija**, elemente a i b zovemo **generatori**, a $a^4 = b^2 = (ba)^2 = e$ zovemo **relacije**.

Primjer 1.2.2. *Promotrimo pravilne poligone. Vrhove poligona rotiramo za veličinu središnjeg kuta u karakterističnom trokutu $\frac{2\pi}{n}$. Takvih rotacija imamo $n-1$. Dodamo li još identitetu, zaključujemo da ih ima n. Zatim primjenjivanjem zrcaljenja na svaku rotaciju dobivamo još n mogućih rasporeda. Može se pokazati da u pravilnom poligonu postoji $2n$ simetrija. Općenito, grupe simetrija pravilnih n-terokuta nazivamo* ***diedarskim grupama****. Generalizirajmo simetrije trokuta i kvadrata i napišimo prezentaciju diedarskih grupa. Označimo ju sa D_n, ima $2n$ elemenata.*

Prezentacija diedarskih grupa je sljedeća:

$$D_n = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = (ba)^2 = e \right\rangle.$$

Generatori su rotacija oko središta n-terokuta za kut $\frac{2\pi}{n}$ i zrcaljenje oko osi koja prolazi polovištima nasuprotnih stranica. Prva relacija se odnosi na rotaciju koja nakon n okretaja opet dođe na početak, druga relacija se odnosi na dvije primjene zrcaljenja koje dovode do identitete i treća relacija je analogna slici 1.8.

1.3 Lagrangeov i Cayleyjev teorem

Neka je G grupa i $H \leq G$ neka podgrupa. Definirajmo relaciju $\sim$ na $G \times G$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

Lema 1.3.1. *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Provjerimo refleksivnost. Pretpostavimo da je $x \in G$. Tada $x^{-1}x = e \in H$, budući da je H podgrupa. Tada je $x \sim x$ što znači da je $\sim$ refleksivna.
Pretpostavimo da su $x, y \in G$ i da vrijedi $x \sim y$. Tada je $x^{-1}y \in H$. Budući da je podgrupa H zatvorena u odnosu na uzimanje inverza slijedi da je $\left(x^{-1}y\right)^{-1} \in H$. Vrijedi:

$$\left(x^{-1}y\right)^{-1} = y^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1} \quad = y^{-1}x.$$

Stoga je $y^{-1}x \in H$, što znači da vrijedi da je $y \sim x$, odnosno $\sim$ je simetrična.
Provjerimo još tranzitivnost. Pretpostavimo da je $x \sim y$ i $y \sim z$. Tada je $x^{-1}y \in H$ i $y^{-1}z \in H$. Budući da je podgrupa H zatvorena s obzirom na množenje vrijedi da je $\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) \in H$. Odnosno,

$$\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) = x^{-1}\left(yy^{-1}\right)z \quad = x^{-1}(ez) = x^{-1}z.$$

Slijedi da je $x^{-1}z \in H$, što znači da je $x \sim z$, odnosno relacija $\sim$ je tranzitivna.
Kako je relacija $\sim$ refleksivna, simetrična i tranzitivna slijedi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. $\square$

Definicija 1.3.2. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije definirana u prethodnoj lemi. Tada skup svih elemenata $x \in G$ za koje vrijedi $x \sim y$ zovemo **klasom ekvivalencije**. Klase na koje se dijeli grupa G po gornjoj relaciji ekvivalencije označavamo sa $[x]$. Skup svih takvih klasa nazivamo **kvocijentni skup** i označavamo ga sa G/H.*

Ako je H podgrupa od G, tada za svaki element $g \in G$ možemo promatrati skup svih elemenata sljedećeg oblika:

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

Lako se pokazuje da je preslikavanje koje element h preslika u gh, odnosno skup H u skup gH bijekcija. Iz toga zaključujemo da ta dva skupa imaju jednako elemenata, odnosno vrijedi:

$$|gH| = |H|.$$

Lema 1.3.3. *Neka je G grupa, $H \leq G$ i $x, y \in G$. Tada vrijedi:*

$$xH = yH \Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

Dokaz. Pokažimo najprije da je $[x] = xH = \{xh; h \in H\}$.
Neka je $y \in [x]$. Tada je $h = x^{-1}y \in H$. Množenjem slijeva sa x dobivamo $xh = y$. Time smo dokazali inkluziju $[x] \subseteq xH$. Za dokaz obrnute inkluzije uzmimo $y \in xH$. Po definiciji skupa xH to znači da je $y = xh$ za neki $h \in H$. No tada je $x^{-1}y = h \in H$, odnosno $y \in [x]$. Time je dokazana obrnuta inkluzija $[x] \supseteq xH$, što znači da vrijedi jednakost $[x] = xH$. Analogno se pokaže i za $[y] = yH$.
Vrijedi $xH = yH$ ako i samo ako je $[x] = [y]$, odnosno ako su x i y ekvivalentni što je po definiciji ako i samo ako je $x^{-1}y \in H$.
Time je dokaz gotov. □

Možemo vidjeti da sve elemente grupe G možemo podijeliti u takve skupove. Zapravo smo na ovaj način grupu G podijelili na klase koje su sve iste veličine. Broj takvih klasa nazivamo **indeks podgrupe** H u G i označavamo ga sa $[G : H]$.
O tome nam govori sljedeći teorem koji ima važnu ulogu u proučavanju strukture grupa.

Teorem 1.3.4. *(Lagrange)*
Ako je G konačna grupa i H neka njezina podgrupa, onda vrijedi:

$$|G| = |H|\,[G : H].$$

Dokaz. Budući da je $\sim$ relacija ekvivalencije, znamo da su dvije klase xH i yH ili jednake ili disjunktne. To znači da postoje neki reprezentanti $x_1, ..., x_n \in G$ tako da je

$$G = x_1H \cup ... \cup x_nH, \;\; x_iH \cap x_jH = \emptyset \;\; za \;\; i \neq j;$$

to jest, gornja je unija disjunktna. Nadalje, broj klasa u G/H je, po definiciji indeksa, točno $[G : H]$; to jest, $[G : H] = n$. Znamo iz komentara prethodne definicije da se može pokazati da je preslikavanje skupa H u xH bijekcija, odnosno da je u svakoj klasi $x_i H$ jednak broj elemenata:

$$card\,(x_i H) = |x_i H| = |H|\,.$$

Time je dokaz završen. □

Iz teorema posebno slijedi da red podgrupe H dijeli red grupe G.

Spomenimo još jednu posljedicu Lagrangeovog teorema; red elementa dijeli red grupe. Ako je a neki element konačne grupe G onda možemo promotriti sve potencije od a. Budući da je G konačna grupa, onda znamo da će se neka potencija morati ponavljati. Iz toga zaključujemo da se potencije periodično ponavljaju i da su sve potencije u skupu $\left\{e, a, a^2, a^3, ..., a^{k-1}\right\} = \langle a \rangle$. Dakle, sigurno će postojati neki broj k takav da je a^k identiteta odnosno neutralni element. Najmanji takav k nazivamo **red** elementa. Ovaj skup čini podgrupu koju nazivamo podgrupa generirana elementom a. Dakle, red elementa u toj podgrupi dijeli red grupe: $|\langle a \rangle|$ dijeli $|G|$.

Definicija 1.3.5. *Neka je S podskup konačne grupe G, a $\langle S \rangle$ najmanja podgrupa od G koja sadrži S. S je skup generatora od G ako $G = \langle S \rangle$. Odnosno svaki element iz G se može zapisati kao konačan produkt elemenata iz S.*

Propozicija 1.3.6. *Neka je G konačna grupa, a $S \subset G$. Pretpostavimo da su sljedeća dva uvjeta zadovoljena.*

1. *Svaki element skupa S zadovoljava neko svojstvo, označimo ga sa P*
2. *Ako $X \in G$ i $Y \in G$ oboje zadovoljavaju svojstvo P, onda $X \cdot Y$ također zadovoljava svojstvo P.*

Tada slijedi da svaki element iz $\langle S \rangle$ zadovoljava svojstvo P.

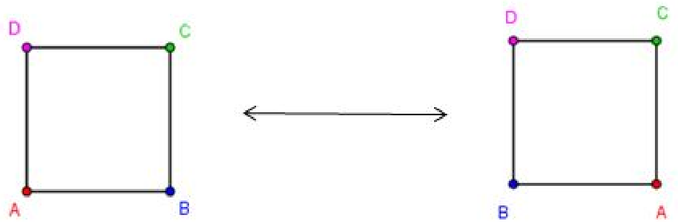
Pokažimo pomoću Lagrangeovog teorema da dobivenih osam simetrija kvadrata čine sve moguće simetrije kvadrata. Znamo da je simetrija kvadrata zapravo permutacija njegovih vrhova. Zbog toga znamo da simetrije kvadrata čine podgrupu od grupe permutacija četiri vrha, odnosno S_4. Zapišimo to:

$$Sym\,(\square) \leq S_4.$$

Grupa S_4 ima $4!$, tj. 24 elementa, a naša grupa simetrija kvadrata ima osam elemenata i također je podgrupa od S_4. Kada bi grupa svih simetrija kvadrata, $Sym\,(\square)$, imala više

od osam elemenata, broj elemenata te grupe bi svejedno trebao biti djelitelj od 24. Naša grupa simetrija kvadrata je sigurno podgrupa grupi svih simetrija kvadrata, $Sym(\square)$, pa zaključujemo da 8 dijeli $|Sym(\square)|$.
Dakle, broj svih simetrija kvadrata je neki broj kojeg 8 dijeli i koji dijeli 24. Jedine mogućnosti su: $|Sym(\square)| = 8$ ili $|Sym(\square)| = 24$.

Primjer 1.3.7. *Pogledajmo sljedeću permutaciju vrhova kvadrata:*



Slika 1.9: Permutacija vrhova kvadrata.

Ovakva permutacija nije simetrija kvadrata.

Sjetimo se, dijagonale se moraju preslikati u dijagonale. Dakle, svih simetrija ne može biti 24. Jedina mogućnost je da ih ima 8. Slijedi:

$$|Sym(\square)| = 8.$$

Sada, kada smo definirali pojam grupe, zanima nas kakva preslikavanja treba gledati među promatranim objektima.

Definicija 1.3.8. *Neka su $G = (G, \cdot)$ i $H = (H, *)$ dvije grupe. Preslikavanje $f : G \to H$ je **homomorfizam** grupa, ako "čuva strukturu", to jest, ako vrijedi:*

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y) \quad \forall x, y \in G.$$

Uvodimo oznaku:

$$Hom(G, H) := \textit{skup svih homomorfizama iz } G \textit{ u } H.$$

*Nadalje, homomorfizam f koji je još i injekcija naziva se **monomorfizam**, f koji je i surjekcija zovemo **epimorfizam**, a f koji je bijektivan homomorfizam, zovemo **izomorfizam**. Za dvije grupe G i H reći ćemo da su* izomorfne*, ako postoji neki izomorfizam f među njima; tu činjenicu označavamo sa:*

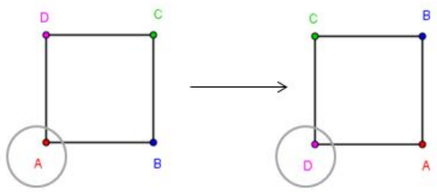
$$G \cong H.$$

U našem primjeru smo vidjeli da grupa simetrija kvadrata čini podgrupu od S_4, odnosno grupe permutacija četiri elementa. Vidjeli smo i da je grupa simetrija jednakostraničnog trokuta izomorfna grupi S_3. Možemo pokazati da za svaku konačnu grupu G, $\exists n \in \mathbb{N}$, takav da je $G \leq S_n$. Za n možemo uzeti broj elemenata grupe G, odnosno $n = |G|$.
Ako imamo $g \in G$ možemo promotriti preslikavanje $f_g : G \to G$ koje je definirano na sljedeći način: $f_g(h) = g \cdot h$. Ovakva funkcija f_g je bijekcija. Skup $\left\{f_g : g \in G\right\}$ ima jednako mnogo elemenata kao i početna grupa G, te s obzirom na kompoziciju čini podgrupu od S_n. Dakle, vidimo da možemo bilo koju konačnu grupu doživjeti kao permutacije konačnog skupa, preciznije, neki podskup permutacija.
Time smo pokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.3.9. *(Cayley)*
Svaka grupa je izomorfna nekoj podgrupi grupe permutacija.

1.4 Djelovanje grupe i Burnsideova lema

Primjer 1.4.1. *Rotirajmo vrhove kvadrata ABCD za* 90°. *Kako je rotacija djelovala na vrh A?*



Slika 1.10: Djelovanje rotacije.

Kažemo da rotacija za 90° *djeluje na vrh A tako da mu pridruži vrh D i zapisujemo na sljedeći način:* $\nu(r_{90^\circ}, A) = D$. *Dakle, rotacija djeluje na A tako da dobijemo D.*

Djelovanje simetrija skupa na taj promatrani skup možemo povezati sa djelovanjem grupe na skup o čemu govori sljedeća definicija.

Definicija 1.4.2. *Kažemo da grupa G djeluje na skup X ako postoji preslikavanje*

$$\nu : G \times X \to X, \nu(g, x) = g \cdot x$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:
(1) $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x, \quad \forall g, g' \in G, x \in X,$
(2) $e \cdot x = x, \quad \forall x \in X,$
gdje je e neutralni element u G.

Definicija 1.4.3. *Promatramo djelovanje grupe G na skup X.*
Orbita *elementa $x \in X$ je skup*

$$x^G = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Stabilizator *elementa $x \in X$ je skup*

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Sljedeći teorem nam daje vezu između orbite i stabilizatora elementa, a dokaz se može naći u [7].

Teorem 1.4.4. *(Teorem o orbiti i stabilizatoru)*
Neka grupa G djeluje na skup X i neka je $x \in X$. Tada je:

$$\left|x^G\right| \cdot |G_x| = |G|.$$

Definicija 1.4.5. *Za konačnu grupu G koja djeluje na konačni skup X definiramo skup svih orbita u oznaci X/G.*

Dakle, orbita nekog elementa su svi oni elementi koji se dobiju djelovanjem na x, odnosno svi elementi u koje se x može preslikati. Stabilizator nekog elementa čine sve one transformacije koje ga ostavljaju na istom mjestu, odnosno fiksiraju ili kako sama riječ kaže stabiliziraju. Rezultat o broju orbita pri djelovanju grupe na skup daje sljedeća tvrdnja koja je poznata i kao **Burnsideova lema**.

Teorem 1.4.6 (Burnsideova lema)**.** *Neka konačna grupa G djeluje na konačnom skupu X. Tada je*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

pri čemu je $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ skup invarijanti od g.

Dokaz. Na dva načina prebrojimo parove $\{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$. Za fiksni $g \in G$ broj parova je $|X^g|$ pa je ukupan broj parova jednak broju elemenata $x \in X$ koji su stabilizirani s g:

$$\sum_{g \in G} |X^g|\,. \tag{1.1}$$

Za fiksni $x \in X$ broj parova jednak je redu stabilizatora $|G_x|$, odnosno broju elemenata $g \in G$ koji stabiliziraju x. Dakle,

$$\sum_{x \in X} |G_x|$$

Prema teoremu 1.4.4. $|G_x| = \frac{|G|}{|x^G|}$ stoga je ukupan broj parova:

$$\sum_{x\in X} \frac{|G|}{|x^G|} = |G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|x^G|}.$$

X je disjunktna unija svih orbita u X/G pa se zbroj po X može podijeliti u zasebne sume po svakoj pojedinačnoj orbiti O:

$$|G| \sum_{O\in X/G} \sum_{x\in O} \frac{1}{|O|}.$$

Dakle, za svaki x sumiramo recipročnu vrijednost veličine orbite kojoj pripada pa u sumi dobivamo po jednu jedinicu za svaku orbitu:

$$|G| \sum_{O\in X/G} \underbrace{|O| \cdot \frac{1}{|O|}}_{=1}.$$

Suma svih orbita $O \in X/G$ je upravo broj orbita pri djelovanju G na X:

$$|G| \cdot \underbrace{\sum_{O\in X/G} 1}_{=|X/G|} = |G| \cdot |X/G|. \tag{1.2}$$

Izjednačavanjem (1.5) i (1.6) slijedi:

$$\sum_{g\in G} |X^g| = |G| \cdot |X/G|$$

čime je dokaz gotov. □

U sljedećem primjeru primjenit ćemo Burnsideovu lemu.

Primjer 1.4.7. *Na koliko načina možemo obojati vrhove kvadrata u n boja do na simetriju?*

Ako smo svakom vrhu kvadrata pridružili istu boju i djelujemo na vrhove nekom simetrijom, primjerice rotacijom vrhova oko središta kvadrata dobit ćemo ponovno isto bojanje i na taj slučaj gledamo kao da je jedino takvo bojanje vrhova.

Simetrije kvadrata čine diedarsku grupu D_4. Pokazali smo da grupa D_4 ima 8 elemenata. Pogledajmo rotaciju vrhova za $90°$ oko središta kvadrata. Vrhovi kvadrata su svi u istoj orbiti pa postoji n načina da ih obojamo. Analogno za rotaciju vrhova za $-90°$ oko središta kvadrata. Dakle, ukupan broj bojanja je $2n$. Rotacija za $180°$ oko središta kvadrata dijeli vrhove u dvije orbite, stoga broj bojanja je n^2. Identiteta ostavlja svaki vrh kvadrata u svojoj orbiti što znači da je broj bojanja n^4. Zrcaljenje kvadrata s obzirom na os koja prolazi polovištima nasuprotnih stranica dijeli vrhove kvadrata u dvije orbite. Budući da takvih osi imamo dvije, broj bojanja je $2n^2$. Zrcaljenje kvadrata po dijagonali dijeli vrhove kvadrata u 3 orbite, dvije orbite za točke koje su fiksirane dijagonalom i treća orbita za vrhove koji se preslikaju jedan u drugog. Postoje dvije dijagonale što znači da je broj bojanja $2n^3$. Prema Burnsideovoj lemi broj bojanja vrhova kvadrata u n boja do na simetriju je:

$$\frac{1}{8}\left(2n + n^2 + n^4 + 2n^2 + 2n^3\right) = \frac{1}{8}\left(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n\right).$$

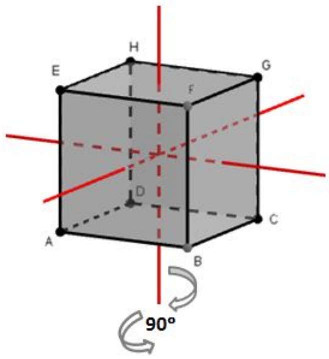
Osim što možemo promatrati objekte u ravnini možemo promatrati i objekte u prostoru. U sljedećem primjeru ćemo primjeniti Burnsideovu lemu i na kocku.

Definicija 1.4.8. *Bojanje strana kocke $f : \{1, 2, ..., 6\} \to \{1, 2, ..., n\}$ svakoj od šest strana pridruži jednu od n boja. Na tom skupu djeluju simetrije kocke koje nam predstavljaju grupu G.*

Zanima nas na koliko klasa možemo podijeliti grupu G s obzirom na djelovanje grupe G na skup X. Za dva bojanja f i f' kažemo da su u istoj klasi i pišemo $f \sim f'$ ako postoji $\sigma \in Sym(\square)$ takva da je $\sigma \cdot f = f'$. Kako ćemo saznati koliko ima različitih elemenata do na bojanje? Odnosno koliko kvocijentni skup X/G ima različitih elemenata? Označimo sa k neku stranu kocke, $k \in \{1, 2, ..., 6\}$. Na skupu bojanja kocke djelujemo grupom simetrija kocke na sljedeći način: $(\sigma \cdot f)(k) = f(\sigma \cdot k)$. Ne uzimajući u obzir simetrije, broj bojanja kocke je n^6 jer za svaku od šest strana kocke imamo n mogućnosti za odabir boje.

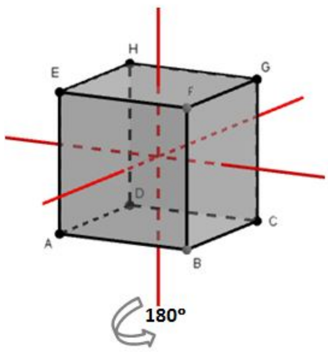
Prije nego što primijenimo prehodnu lemu na kocku pogledajmo koje sve rotacije kocke postoje. S obzirom da se radi o izometrijama znamo da se vrhovi preslikavaju u vrhove, strane u strane, bridovi u bridove, a dijagonale u dijagonale. Posebno, prostorne dijagonale se preslikavaju u prostorne dijagonale.
Budući da imamo četiri prostorne dijagonale rotacije kocke su određene sa S_4, a upravo prostorne dijagonale predstavljaju ta četiri elementa koja permutiramo.

Krenimo s identitetom, ona je jedna jedina i ostavlja sve elemente na mjestu.
Sljedeće, pogledajmo rotaciju za $90°$ oko osi koja prolazi središtem nasuprotnih strana kocke. Takvih osi imamo tri, a možemo rotirati oko svake za $90°$ i $-90°$. Dakle, ukupno ih je šest.



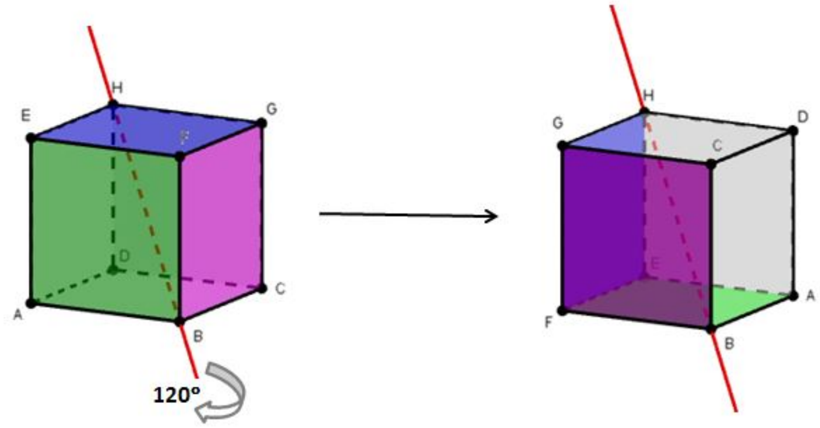
Slika 1.11: Rotacije za 90°.

Promotrimo što se u tom slučaju događa s prostornim dijagonalama. Ako bi označili te dijagonale sa a, b, c, d u ovom slučaju bismo dobili da dijagonale čine ciklus: a se preslikava u b, b u c, c u d i d u a.
Pogledajmo na isti način rotacije za 180°. Budući da rotacijom kocke oko tih osi za $-180°$ dobivamo isti položaj kao i rotacijom za 180° zaključujemo da takvih rotacija ima koliko i osi, tri. Prostorne dijagonale se onda u parovima preslikavaju. Dakle, ako gledamo na njih kao permutaciju četiri elementa onda se te permutacije sastoje od dvije transpozicije, odnosno cikličke permutacije duljine dva; $(ac)(bd)$.



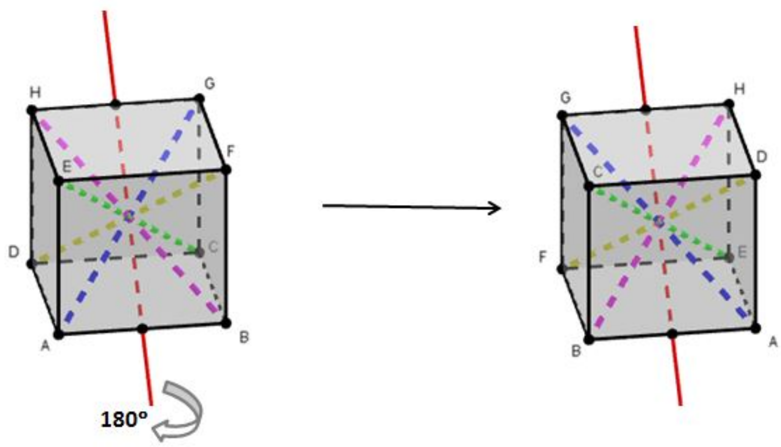
Slika 1.12: Rotacija za 180°.

Zarotirajmo sada kocku oko prostorne dijagonale za 120° i $-120°$. Tu dijagonalu fiksiramo, a ostale prostorne dijagonale se rotiraju. Budući da prostornih dijagonala ima četiri, a rotiramo oko svake u dva smjera, takvih rotacija ukupno ima osam. Kao permutacije možemo ih zapisati kao ciklus duljine tri; (abc).



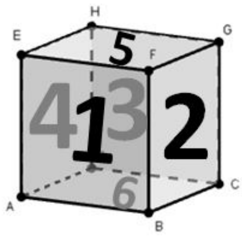
Slika 1.13: Rotacija za 120°.

Zamislimo da smo fiksirali polovišta dva nasuprotna brida i rotirali kocku oko toga. Jedina moguća rotacija je za 180°. Takvih rotacija onda ima šest, koliko ima i parova nasuprotnih bridova. Pri ovoj rotaciji dvije prostorne dijagonale zamijene mjesta, a preostale dvije su fiksirane. Kao permutacije imamo jednu transpoziciju (ab) dok su c i d fiksirane.



Slika 1.14: Rotacija za 180°.

Ovo je rastav na sve moguće tipove permutacija četiri elementa. Ukupno imamo $1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24$ elementa koliko ih ima i u S_4. Može se pokazati da su to sve moguće rotacije kocke.
Još nam preostaje prebrojiti koliko ima invarijanti u svakoj od tih klasa.
Krenimo od identitete, zanima nas koliko ima bojanja koja su fiksirana pri identiteti? Promatramo koliko ima bojanja f za koja djelovanjem vrijedi da je $f = f$, a to su sva; ima ih n^6.
Da bismo lakše zbrojili sva bojanja strana kocke pridružimo stranama kocke brojeve na sljedeći način:



Slika 1.15: Oznake strana kocke.

Kod rotacija za 90° imamo 6 elemenata iz te klase. Srednje strane su jednako obojane, nisu se promijenile rotacijom $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$ i tu boju možemo odabrati na n načina. Gornju stranu $f(5)$ možemo odabrati na n načina, također i donju stranu $f(6)$. Dakle, sveukupno n^3 mogućnosti.
Kod rotacije za 180° vrijedi; $f(1) = f(3)$, $f(2) = f(4)$, $f(5)$, $f(6)$. Dakle, imamo n^4 invarijanti.
Kod rotacija oko prostorne dijagonale, $f(1) = f(2) = f(5)$, $f(3) = f(4) = f(6)$, postoji n^2 mogućnosti.
U zadnjoj klasi vrijedi $f(5) = f(3)$, $f(1) = f(6)$, $f(2) = f(4)$, što znači da tu imamo n^3 mogućnosti.

Prema Burnsideovoj lemi, broj bojanja strana kocke do na rotaciju u n boja je:

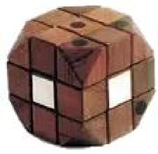
$$|X/G| = \frac{1}{24}\left(1n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 8n^2 + 6n^3\right)$$

Poglavlje 2

Rubikova kocka

2.1 Povijest Rubikove kocke

Rubikova kocka je mehanička igračka koju je 1974. godine izumio Ernö Rubik, mađarski profesor arhitekture. On je pomoću nje htio istražiti metode pomicanja blokova tako da se cijela struktura ne raspadne. Nakon što je pomicao retke i stupce kocke shvatio je da ne zna vratiti kocku u originalni položaj. Trebalo mu je četiri tjedna da nađe kombinaciju kojom će kocku složiti u početni položaj.
Patentirao ju je 1975. godine pod nazivom Magična kocka, ali 1980. godine ime joj je promijenjeno u Rubikova kocka, u njegovu čast.



Slika 2.1: Izgled prve Rubikove kocke (preuzeto iz [23]).

Osim klasične Rubikove $3\times3\times3$-kocke, postoje i verzije Rubikove kocke poput $2\times2\times2$, $4\times4\times4$, $5\times5\times5$. Do danas su se pojavile i brojne varijacije koje su slične Rubikovoj kocki.

Slika 2.2: Varijacije Rubikove kocke (preuzeto iz [21]).

Natjecanja

Postoje brojna natjecanja u slaganju Rubikove kocke. Od uobičanjenog slaganja $3 \times 3 \times 3$ Rubikove kocke do slaganja $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$, $6 \times 6 \times 6$, $7 \times 7 \times 7$-kocke, te raznih varijacija Rubikove kocke, zatim slaganja kocke s povezom na očima, jednom rukom, ispod vode i slično. Cilj je složiti Rubikovu kocku u što kraćem vremenu.
Prvo natjecanje je organizirala Guinnessova knjiga rekorda 1981. godine, a pobjednik natjecanja je složio Rubikovu kocku za 38 sekundi. Prvo svjetsko natjecanje održano je 1982. godine i postavljen je novi rekord od 22.95 sekundi.
Od 2003. godine u natjecanjima se osim najbržeg vremena pojedinog natjecatelja uzima i njegovo prosječno vrijeme svih pokušaja osim najbržeg i najsporijeg (3 od 5 pokušaja).
Trenutni rekord je postavljen 2018. godine kad je Rubikova kocka složena u 3.47 sekundi.

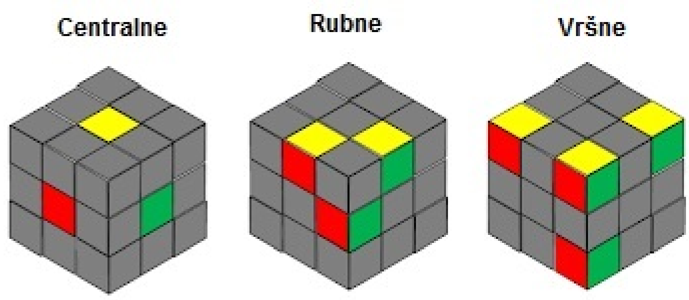
Slika 2.3: Natjecanje u slaganju Rubikove kocke s povezom na očima (preuzeto iz [30]).

2.2 Izgled Rubikove kocke

Rubikova kocka se sastoji od 27 manjih kocaka jednakih veličina, koje ćemo nazivati ”kockice”. Vidljivo je 26 kockica, ali ako rastavimo Rubikovu kocku na dijelove možemo uočiti da 27. kockica zapravo ne postoji. Ona se sastoji od tri osi koje se presjecaju u samom središtu Rubikove kocke i drže na mjestu šest centralnih kockica.

Slika 2.4: Središnje 27. kockice nema (preuzeto iz [8]).

Rubikova kocka ima šest strana od kojih se svaka sastoji od 9 kvadrata, odnosno strana kockica. Ukupno ima 54 strana kockica. Korisno je odrediti nazive svih individualnih kockica prema lokaciji u Rubikovoj kocki. Kockice u kutu nazivamo ”vršne” kockice. Njih ima 8 i svaka ima tri vidljive strane. Kockice kojima su vidljive dvije strane nazivamo rubnim” kockicama i njih ima 12. Kockice koje imaju jednu vidljivu stranu nazivamo ”centralnim” kockicama i ima ih sveukupno 6, koliko ima i strana Rubikove kocke.

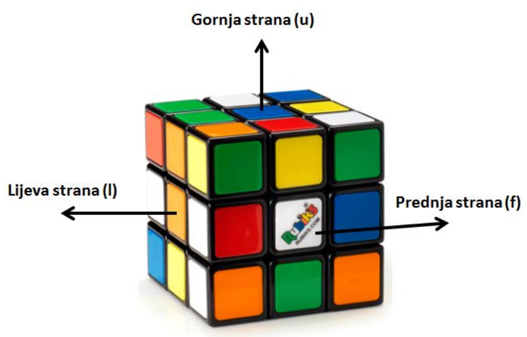


Slika 2.5: Vrste kockica (preuzeto iz [29]).

Kažemo da je Rubikova kocka složena, odnosno u originalnom položaju kada je svaka strana kocke obojana jednom od 6 boja. Dakle, 9 kvadratića na istoj strani kocke trebaju biti jednakih boja.

2.3 Oznake i potezi na Rubikovoj kocki

Odredimo nazive svih strana Rubikove kocke prema Davidu Singmasteru. Postoji
desna strana **r** (eng. right),
lijeva strana **l** (eng. left),
gornja strana **u** (eng. up),
donja strana **d** (eng. down),
prednja strana **f** (eng. front) i
stražnja strana **b** (eng. back).



Slika 2.6: Oznake strana Rubikove kocke (preuzeto iz [24]).

Prednost ovakvih naziva je što se svaka strana kocke može označiti jednim slovom. Da bismo imenovali vršne kockice, nabrojimo vidljive strane u smjeru kazaljke na satu. Primjerice, kockica u gornjem, lijevom, prednjem kutu se označava sa ulf, također možemo pisati i lfu ili ful. Ponekad će nam biti bitno koja strana je prva navedena, tada pričamo o "orijentiranim kockicama". U tom slučaju, ulf, lfu i ful su različite kockice.
Analogno za rubne i centralne kockice, navedemo strane koje su vidljive u smjeru kazaljke na satu. Na primjer, rubnu kockicu koja se nalazi na gornjoj desnoj strani označavamo sa fr, a kockicu u centru prednje strane kocke ćemo nazvati f jer jedina vidljiva strana kockice leži na prednjoj strani kocke. Također prostor u kojem se kockice nalaze označavamo na isti način kao i kockice koje se nalaze u njemu. Primjerice, ulf kockica se nalazi u ulf prostoru. Rotacijom strana kocke prostori ne mijenjaju položaj dok sve kockice, osim centralnih mijenjaju.
Konačno, želimo uvesti oznake poteza Rubikove kocke. Intuitivno je jasno što bismo smatrali potezom na Rubikovoj kocki.

Definicija 2.3.1. *Osnovni potez na Rubikovoj kocki je rotacija jedne od njenih strana za* $90°$ *u smjeru kazaljke na satu ako gledamo prema strani koja se rotira.*

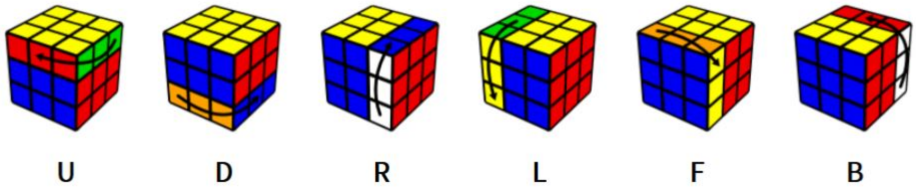
Na Rubikovoj kocki ima 6 osnovnih poteza. Oznake su:

R = rotacija desne strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
L = rotacija lijeve strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
U = rotacija gornje strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
D = rotacija donje strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
F = rotacija prednje strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
B = rotacija stražnje strane kocke za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.

Ovu notaciju nazivamo **Singmasterova notacija**.

Pokažimo osnovne poteze Rubikove kocke na primjeru.

Primjer 2.3.2. *Ovisno koji osnovni potez primjenimo na Rubikovoj kocki, ona može izledati na sljedeće načine:*



Slika 2.7: Promjena Rubikove kocke osnovnim potezima (preuzeto iz [28]).

Postoji još jedan osnovni potez koji kocku ostavlja na mjestu, a to je identiteta. Primjerice, ako ponovimo jedan od osnovnih poteza 4 puta zaredom, kocka ostaje nepromijenjena.

Definicija 2.3.3. *Za potez na Rubikovoj kocki kažemo da je identiteta ako njegovom primjenom nije promijenjen izgled kocke. Označavamo ga slovom I.*

Osnovni potezi imaju svoje suprotne poteze koje ćemo nazivati osnovni suprotni potezi.

Definicija 2.3.4. *Osnovni suprotni potez na Rubikovoj kocki je rotacija jedne od njenih strana za* 90° *u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, gledajući prema strani koju rotiramo.*

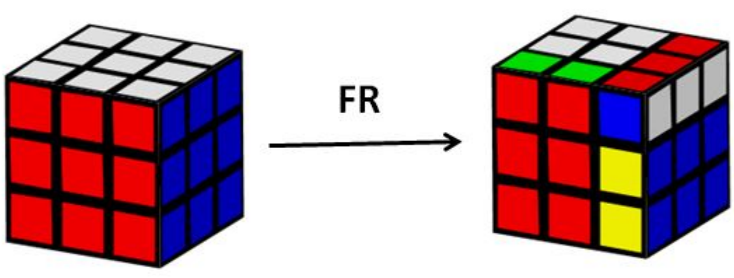
Koristit ćemo sljedeće oznake:

$\mathbf{R}^{-1}$ = rotacija desne strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
$\mathbf{L}^{-1}$ = rotacija lijeve strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
$\mathbf{U}^{-1}$ = rotacija gornje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
$\mathbf{D}^{-1}$ = rotacija donje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
$\mathbf{F}^{-1}$ = rotacija prednje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.
$\mathbf{B}^{-1}$ = rotacija stražnje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.

Definicija 2.3.5. *Potez na Rubikovoj kocki je svaki konačan slijed osnovnih ili osnovnih suprotnih poteza.*

Opći potez na Rubikovoj kocki se zapravo sastoji od više osnovnih ili osnovnih suprotnih poteza Rubikove kocke.

Primjer 2.3.6. *Opći potez FR na Rubikovoj kocki znači da smo najprije napravili potez F, a zatim R. Tim potezom dovodimo kocku u sljedeće stanje:*



Slika 2.8: Potez FR.

Kada bi napravili neki osnovni potez na Rubikovoj kocki, primjerice potez F, a zatim primjenili njegov suprotni osnovni potez, F^{-1} Rubikova kocka bi se vratila natrag u početno stanje što nas dovodi do sljedeće definicije.

Definicija 2.3.7. *Potez X^{-1} Rubikove kocke je suprotan potezu X ako vrijedi $XX^{-1} = I$.*

Ako na Rubikovoj kocki primjenimo n puta zaredom isti osnovni potez X, za konačan opći potez koristimo oznaku pomoću potencije: X^n.
No, primjetimo da nema smisla gledati poteze za $n > 4$ jer se svi takvi potezi svode na osnovne četiri rotacije jedne strane Rubikove kocke.
Primjerice, ako primjenimo potez F^{13} to je isto kao i da smo primjenili samo potez F jer $F^{13} = F^{1+4+4+4} = FIII = F$. Dakle, okrenuti prednju stranu Rubikove kocke trinaest puta je isto kao i okrenuti ju jednom.

Usporedimo li potez F^3 sa potezom F^{-1} što možemo primjetiti?
Ako smo zarotirali prednju stranu kocke tri puta u smjeru kazaljke na satu, znamo da bismo još jednom takvom rotacijom doveli kocku do identitete. Ista ta rotacija i potez u suprotnom smjeru dovodi do identitete. Dakle, isto je primjeniti potez F^3 ili potez F^{-1}.

Pogledajmo ponovno prethodni primjer. Primjenili smo potez FR na Rubikovoj kocki, odnosno zarotirali smo prednju stranu kocke, a zatim desnu stranu. Kako bismo vratili kocku u početni položaj?
Intuitivno je jasno da okretanjem najprije desne strane u suprotnom smjeru, a zatim i prednje strane Rubikove kocke ona bi se vratila u početni položaj. Kako možemo to zapisati?
Dakle, potez suprotan potezu FR, odnosno $(FR)^{-1}$ koji vraća Rubikovu kocku u originalni položaj je $R^{-1}F^{-1}$.

Općenito vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3.8. *Neka je $X = Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}, Y_n$ potez na Rubikovoj kocki pri čemu su $Y_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ osnovni potezi. Tada je njegov suprotni potez jednak:*

$$X^{-1} = (Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}, Y_n)^{-1} = Y_n^{-1} Y_{n-1}^{-1} ... Y_2^{-1} Y_1^{-1}$$

.

2.4 Grupa Rubikove kocke

Neka je G_R skup svih poteza na Rubikovoj kocki. Ako su X i Y dva poteza na Rubikovoj kocki tada $X \circ Y$ označava da najprije izvodimo potez X, a zatim Y. Pokazat ćemo da je G_R grupa.

- G_R je sigurno zatvorena s obzirom na $\circ$ jer ako su X i Y potezi tada je i $X \circ Y$ također potez na Rubikovoj kocki.

- Ako je I potez koji ne mijenja konfiguraciju Rubikove kocke, tada $X \circ I$ znači "izvodimo potez X, a zatim ništa". Odnosno to je isto kao da izvedemo samo potez X, dakle $X \circ I = X$.

- Ako je X potez, okretom poteza u suprotnom smjeru možemo dobiti potez X^{-1}. Tada $X \circ X^{-1}$ znači "izvedi potez X, a zatim napravi suprotno od X". To je isto kao i da smo ostavili kocku u prvobitnom stanju. Dakle, $X \circ X = I$, dakle X^{-1} je inverz poteza X.

- Pokažimo da je operacija $\circ$ asocijativna.

Ako je C jedna orijentirana kockica onda sa $X(C)$ označavamo orijentirani prostor u koji prelazi C nakon primjene poteza X. Strane od $X(C)$ pišemo u istom poretku kao i strane kockice C, odnosno prva strana kockice C treba biti i prva strana od $X(C)$. Primjerice, potezom R rubnu kockicu ur stavljamo u prostor br. Strana u kockice prelazi na stranu b prostora, a strana r kockice ide u stranu r prostora. Pišemo $R(ur) = br$. Ako imamo potez $X \circ Y$ onda potez X šalje kockicu C u prostor $X(C)$, a potez Y ju pomiče u prostor $Y(X(C))$. Dakle, $(X \circ Y)(C) = Y(X(C))$.

Sada možemo pokazati asocijativnost operacije $\circ$. Za bilo koje poteze X, Y i Z treba vrijediti:

$$(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z).$$

Ako su ta dva poteza jednaka znači da rade istu promjenu na Rubikovoj kocki. Dakle, trebamo pokazati da potez $(X \circ Y) \circ Z$ i potez $X \circ (Y \circ Z)$ dovode svaku kockicu Rubikove kocke na isto mjesto. Za svaku kockicu C moramo pokazati da je

$$[(X \circ Y) \circ Z]\,(C) = [X \circ (Y \circ Z)]\,(C).$$

Iz gornjih tvrdnji znamo da je

$$[(X \circ Y) \circ Z]\,(C) = Z([X \circ Y]\,(C)) = Z(Y(X(C))).$$

S druge strane,

$$[X \circ (Y \circ Z)]\,(C) = (Y \circ Z)(X(C)) = Z(Y(X(C))).$$

Dakle, $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$ što znači da je $\circ$ asocijativna.

Slijedi da je $(G_R, \circ)$ zaista grupa.

Napomena 2.4.1. *Nadalje ćemo zapisivati $X \circ Y$ kao XY.*

Svojstvo komutativnosti u grupi Rubikove kocke ne vrijedi što je najlakše pokazati kontraprimjerom.

Primjer 2.4.2. *Na složenoj Rubikovoj kocki primjenimo potez RU. Kocka će izgledati kao na sljedećoj slici.*

Slika 2.9: Potez RU.

Uzmimo primjerice kockicu dfr, ona je sada na mjestu ufl.

Sada na složenoj Rubikovoj kocki primjenimo potez UR. Kocka će izgledati kao na sljedećoj slici.

Slika 2.10: Potez UR.

Kockica dfr je otišla na mjesto ufr. Primjenjeni potezi daju drugačije konfiguracije, što možemo vidjeti i na slikama. Dakle, $RU \neq UR$, stoga svojstvo komutativnosti ne vrijedi.

Međutim, postoje neki potezi na Rubikovoj kocki koji komutiraju. Primjerice potezi U i D. Možemo primjetiti da je presjek skupa kockica koji se mijenjaju potezom U i skupa kockica koji se mijenjaju potezom D prazan. Takvi potezi će komutirati.

Uvedimo novi pojam koji je koristan za dokazivanje komutativnosti.

Definicija 2.4.3. *Neka su X i Y dva poteza na Rubikovoj kocki.* ***Komutator*** *poteza X i Y je potez $XYX^{-1}Y^{-1}$ i označavamo ga s $[X, Y]$.*

Propozicija 2.4.4. *Dva poteza X i Y komutiraju ako i samo ako je $[X, Y] = I$.*

Dokaz. Pretpostavimo da potezi X i Y komutiraju. Njihov komutator je potez $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$. Budući da je $XY = YX$ slijedi:

$$[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1} = YXX^{-1}Y^{-1} = YIY^{-1} = YY^{-1} = I.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi $[X, Y] = I$. Želimo pokazati da za poteze X i Y vrijedi $XY = YX$. Da bi vrijedilo $XYX^{-1}Y^{-1} = I$ onda mora vrijediti $XY = YX$. □

U prethodnom primjeru smo promatrali komutiraju li potezi R i U. Komutator poteza R i U je $RUR^{-1}U^{-1}$ i može se pokazati da se pomoću njega Rubikova kocka ne bi vratila u početno stanje dok za poteze U i D vrijedi $[U, D] = I$.

Primjer 2.4.5. *Neka je $S = \{D, U, L, R, F, B\} \subset G_R$. Tada svaki potez $X \in S$ zadovoljava svojstvo: "X ostavlja centralne kockice u njihovim prostorima". Ako su $X, Y \in G_R$ takvi da ostavljaju centralne kockice u svojim prostorima, onda $X \circ Y$ također zadržavaju centralne kockice u svojim prostorima. Budući da je $G_R = \langle S \rangle$ prema propoziciji 1.3.6. zaključujemo da svaki element iz G_R ostavlja centralne kockice u njihovim prostorima.*

Teorem 2.4.6. *Neka su C_1 i C_2 dvije neorijentirane vršne kockice na Rubikovoj kocki. Neka su C_1' i C_2' također dvije neorijentirane vršne kockice. Tada postoji potez na Rubikovoj kocki koji šalje kockicu C_1 u C_1' i C_2 u C_2'.*

Dokaz. Pretpostavimo da C_1 i C_1' leže na istoj strani kocke, bez smanjenja općenitosti neka je to f. Tada potez F^n šalje C_1 u C_1'. Neka C_2'' označava poziciju kockice C_2 nakon poteza F^n. Ako je $C_2'' = C_2'$ onda smo gotovi.

Pretpostavimo da $C_2'' \neq C_2'$. Budući da je $C_1 \neq C_2$ ne može vrijediti da je $C_1' = C_2'$ jer bi to značilo da dvije različite kockice primjenom jednog poteza dolaze na isto mjesto. Dakle, C_1', C_2' i C_2'' su tri različite vršne kockice. Razlikujemo dva slučaja:

1. Postoji strana kocke koju dijele kockice C_2'' i C_2', ali ne i C_1'. Bez smanjenja općenitosti neka je to b. Rotirajmo ju B^n puta što nas dovodi do $C_1 \to C_1'$ i $C_2 \to C_2'$.

2. C_2'' i C_2' dijele stranu sa C_1'.

   (a) C_2'', C_2' i C_1' dijele više od dvije strane kocke. Ovo je nemoguć slučaj zbog konfiguracije Rubikove kocke.

(b) C_2'' i C_2' ne dijele ni jednu stranu. Budući da svaka vršna kockica dijeli stranu kocke sa svim vršnim kockicama osim jedne, svaka od C_2'' i C_2' dijeli barem jednu stranu sa C_1'. C_2'' i C_1' ne dijele barem jednu stranu, bez smanjenja općenitosti neka je to l. C_2'' se može pomaknuti L^n puta da bi dijelila stranu sa C_2', ali ne i sa C_1'. Bez smanjenja općenitosti neka je ta strana r. tada C_2'' može doći na mjesto C_2' nakon R^n poteza. Slijedi $C_1 \to C_1'$ i $C_2 \to C_2'$.

Pretpostavimo da C_1 i C_1' ne dijele ni jednu stranu kocke. Spomenuli smo već da svaka vršna kockica ne dijeli stranu sa samo jednom vršnom kockicom. C_1 se stoga može pomaknuti jednim potezom na bilo koje susjedno mjesto i onda će dijeliti stranu sa C_1', bez smanjenja općenitosti neka je to strana f. Potez F^n će staviti kockicu C_1 na mjesto C_1'. Ako je $C_2'' = C_2'$ onda smo gotovi.

Pretpostavimo da $C_2'' \neq C_2'$. Ranije smo spomenuli $C_1 \neq C_2$ i $C_1' \neq C_2'$. Dakle, C_1', C_2' i C_2'' su tri različite kockice. Ponovno razlikujemo dva slučaja:

1. Postoji strana kocke koju dijele kockice C_2'' i C_2', ali ne i C_1'. Bez smanjenja općenitosti neka je to u. U^n može pomaknuti C_2'' i C_2' što nas dovodi do $C_1 \to C_1'$ i $C_2 \to C_2'$.

2. Ne postoji strana kocke koju dijele C_2'' i C_2', a da C_1' ne dijeli.

   (a) Svaka strana koju dijele C_2'' i C_2', dijeli i C_1'. To je nemoguće s obzirom na konfiguraciju Rubikove kocke.

   (b) C_2'' i C_2' ne dijele ni jednu stranu. Budući da svaka vršna kockica dijeli stranu kocke sa svim vršnim kockicama osim jedne, C_2'' i C_2' oboje dijele barem jednu stranu sa C_1'. Postoji strana na C_2'' koju ne dijeli sa C_1' jer bi inače bili na istoj poziciji. Bez smanjenja općenitosti neka je to d. Rotirajmo C_2'' D^n puta tako da C_2'' i C_2' dijele stranu kocke (što je moguće budući da samo originalna pozicija od C_2'' neće dijeliti stranu sa C_1') i C_2'' ne dijeli istu stranu kocke koju C_2' i C_1' dijele. Bez smanjenja općenitosti neka je r strana koju dijele C_2'' i C_2' i koju C_1' ne dijeli s njima. Rotirajmo tu stranu R^n puta dok C_2'' ne dođe na poziciju C_2'. Slijedi $C_1 \to C_1'$ i $C_2 \to C_2'$.

Dakle, postoji potez Rubikove kocke koji šalje C_1 u C_1' i C_2 u C_2'. □

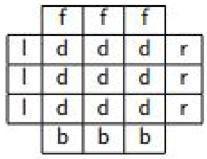
2.5 Rubikova kocka i permutacije

Niz poteza na Rubikovoj kocki možemo promatrati kao permutacije kockica i tako ćemo lakše opisati gdje se koja kockica premješta i kako je orijentirana. Prisjetimo se na primjeru koliko je permutacija moguće napraviti na nekom skupu.

Primjer 2.5.1. *Sve permutacije tročlanog skupa* $\{1, 2, 3\}$ *su* $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. *Dakle, broj permutacija* 3*-članog skupa je* $3! = 6$.

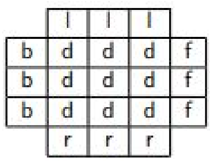
Spomenuli smo u primjeru 1.1.6. zapis permutacije koji zovemo cikličkim zapisom. Promotrimo sljedećih nekoliko primjera u kojima ćemo koristiti cikličke zapise za poteze na Rubikovoj kocki.

Primjer 2.5.2. *Rastvorimo Rubikovu kocku te pogledajmo donju stranu označenu na sljedeći način:*



Slika 2.11: Prikaz donje strane (preuzeto iz [3]).

Zarotirajmo donju stranu Rubikove kocke za 90°, *odnosno primjenimo potez D. Sada donja strana kocke izgleda ovako:*

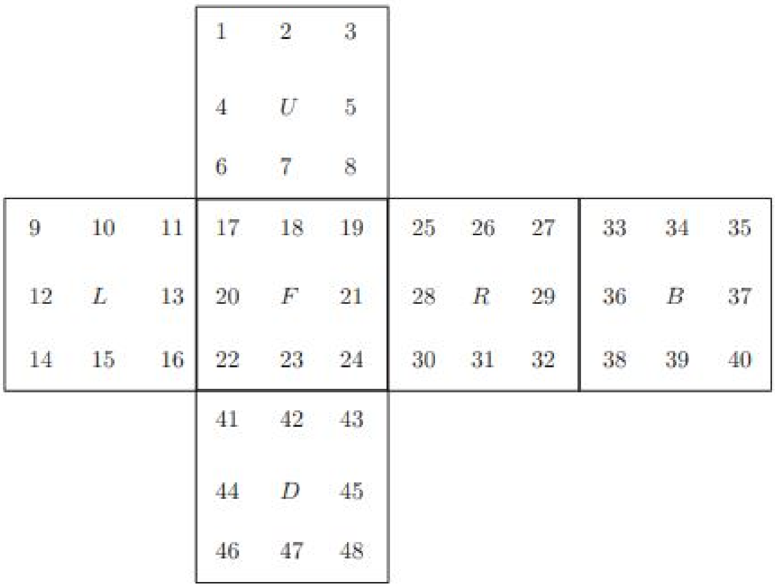


Slika 2.12: Prikaz donje strane nakon poteza D (preuzeto iz [3]).

Krenimo od vršne kockice dlf, *ona ide u* dfr *što zapisujemo na sljedeći način:* $D(dlf) = dfr$. *Pogledajmo dalje,* dfr *ide u* drb, drb *u* dbl, *a* dbl *ide u* dlf. *Na isti način gledamo što se dogodilo s rubnim kockicama;* df *ide u* dr, dr *u* db, db *u* dl, *a* dl *ide u* df. *Ovakvo premještanje kockica možemo zapisati pomoću ciklusa na sljedeći način:*

$$D = (dlf\ dfr\ drb\ dbl)(df\ dr\ db\ dl).$$

Primjer 2.5.3. *Svaki osnovni potez ostavlja centralne kockice fiksirane. Postoji* $9 \cdot 6 - 6 = 48$ *obojanih kvadrata, odnosno strana kockica koje se mogu premještati.*
Označimo te strane kockica sa $1, 2, 3, ...48$ *kao na slici 2.11.*



Slika 2.13: Mreža $3 \times 3 \times 3$ Rubikove kocke (preuzeto iz [12]).

Šest osnovnih poteza se upravo mogu opisati sljedećim disjunktnim cikličkim zapisom.

F = (17 19 24 22) (18 21 23 20) (6 25 43 16) (7 28 42 13) (8 30 41 11)
B = (33 35 40 38) (34 37 39 36) (3 9 46 32) (2 12 47 29) (1 14 48 27)
L = (9 11 16 14) (10 13 15 12) (1 17 41 40) (4 20 44 37) (6 22 46 35)
R = (25 27 32 30) (26 29 31 28) (3 38 43 19) (5 36 45 21) (8 33 48 24)
U = (1 3 8 6) (2 5 7 4) (9 33 25 17) (10 34 26 18) (11 35 27 19)
D = (41 43 48 46) (42 45 47 44) (14 22 30 38) (15 23 31 39) (16 24 32 40)

Primjer 2.5.4. *Promotrimo poteze $D, R \in G_R$ na Rubikovoj kocki. Koji je red poteza D i R, a koji je red poteza DR?*

Red poteza D i poteza R je 4 *jer ponavljanjem tih poteza četiri puta dolazimo do identitete. Red poteza DR bismo mogli pronaći pomoću cikličkog zapisa poteza DR.*

$$D = (dlf\ dfr\ drb\ dbl)(df\ dr\ db\ dl)$$

$$R = (rfu\ rub\ rbd\ rdf)(ru\ rb\ rd\ rf)$$

Pogledajmo gdje potez DR premješta kockicu dlf: $D(dlf) = dfr$, $R(dfr) = rfu$. Dakle, $DR(dlf) = rfu$. Analogno za ostale kockice.

$$DR = (dlf\ rfu\ rub\ rbd\ dbl)(drf)(df\ rf\ ru\ rb\ rd\ db\ dl).$$

Napisali smo potez DR kao 3 nezavisna ciklusa. U prvom ciklusu se nalazi pet elemenata, ali on se mora ponavljati tri puta jer svaki ciklus promijeni orijentaciju vršnih kockica. Dakle, trebamo primjeniti $3 \cdot 5 = 15$ DR poteza da bi se vršne kockice vratile na početno mjesto. U drugom ciklusu se nalazi jedan element koji se svakim ciklusom vraća na početnu poziciju, ali u drugoj orijentaciji što znači da dolazi na početno mjesto u svakoj trećoj primjeni. Treći ciklus ima 7 elemenata i nakon 7 poteza DR dolazi u početno stanje i ne mijenja orijentaciju. Dakle, red poteza DR je najmanji zajednički višekratnik od $15, 3$ i 7. Red poteza DR je onda 105.

Primjer 2.5.5. *Potez $FFRR$ na Rubikovoj kocki se može zapisati kao permutacija:*

$$(df\ uf)(dr\ ur)(br\ fr\ fl)(dbr\ ufr\ dfl)(ulf\ urb\ drf)$$

Svaka k-permutacija se može prikazati kao produkt 2-ciklusa. Ako imamo 3-ciklus $(x\ y\ z)$ onda se on može zapisati kao dvije transpozicije: $(x\ y)(x\ z)$. Dakle, niz ciklusa iz prethodnog primjera bi onda zapisali na sljedeći način:

$$(df\ uf)(dr\ ur)(br\ fr)(br\ fl)(dbr\ ufr)(dbr\ dfl)(ulf\ urb)(ulf\ drf)$$

Definicija 2.5.6. *Ako se permutacija može izraziti kao paran broj 2-ciklusa, onda je permutacija parna. Ako se može izraziti kao neparan broj 2-ciklusa onda je neparna. Dakle, parnost ciklusa duljine n je određen brojem transpozicija od kojih je sastavljena.*

Propozicija 2.5.7. *Ciklus duljine n se može zapisati kao $n - 1$ transpozicija. Općenito, parni ciklusi su neparne permutacije, a neparni ciklusi parne permutacije.*

U prethodnom primjeru smo pokazali da je permutacija koja odgovara potezu $FFRR$ parna jer se sastoji od 8 zamjena kockica što je paran broj. Time dolazimo do sljedećeg teorema.

Teorem 2.5.8. *Ako je konfiguracija Rubikove kocke dobivena potezima na Rubikovoj kocki onda se njeno stanje može opisati parnom permutacijom.*

Dokaz. Pretpostavimo da je na Rubikovoj kocki napravljeno $n \in \mathbb{N}$ poteza. Dokazati ćemo matematičkom indukcijom da se njeno stanje može opisati parnom permutacijom. Trebamo dokazati da je nakon bilo kojeg broja poteza broj zamjena kockica, kojim se može prikazati permutacija, paran broj.

Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi jer je onda Rubikova kocka u složenom stanju i permutaciju možemo pokazati kao 0 zamjena dvije kockice.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj $k \in \mathbb{N}$, odnosno da se nakon k osnovnih poteza na Rubikovoj kocki stanje može opisati kao paran broj zamjena kockica.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja i za $k + 1$.

Nakon što je napravljeno k osnovnih poteza na kocki, prema pretpostavci indukcije stanje kocke se može opisati parnim brojem. Ako dodamo još jedan osnovni potez stanje će se i dalje moći prikazati kao paran broj zamjena po dvije kockice. Pogledajmo potez F;

$$F = (flu\ fru\ fdr\ fdl)(fu\ fr\ fd\ fl) = (flu\ fru)(flu\ fdr)(flu\ fdl)(fu\ fr)(fu\ fd)(fu\ fl)$$

Broj zamjena kockica je 6, dakle, permutacija koja odgovara potezu F je parna. Analogno možemo pokazati i za sve ostale osnovne poteze i njihove inverze.

Kako smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n = 0$ te iz pretpostavke da vrijedi i za neki $k \in \mathbb{N}$, pokaže se da vrijedi i za $k + 1$ pa prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

2.6 Konfiguracije Rubikove kocke

Valjanim konfiguracijama ćemo nazivati one konfiguracije Rubikove kocke koje se mogu dobiti slijedom osnovnih poteza.

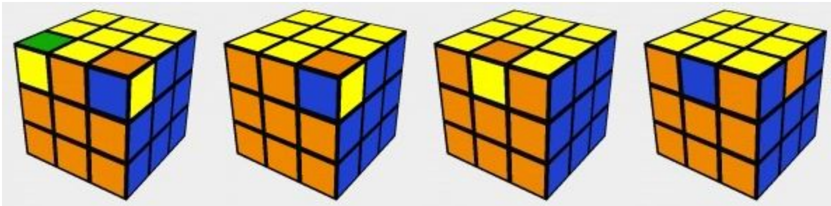
Teorem 2.6.1. *Konfiguracija je valjana ako i samo ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:*

1. *Permutacije rubnih kockica i permutacije vršnih kockica imaju istu parnost.*
2. *Suma okretaja vršnih kockica je* 0 *u* $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.
3. *Suma okretaja rubnih kockica je* 0 *u* $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Navesti ćemo primjere konfiguracija koje nisu valjane, nazovimo ih ”nedozvoljene” konfiguracije.

Primjer 2.6.2. *Nedozvoljene konfiguracije čine:*

- *Zamijenjene dvije vršne ili dvije rubne kockice.*
- *Jedna rubna kockica izokrenuta*
- *Jedna vršna kockica rotirana*



Slika 2.14: Nedozvoljene konfiguracije Rubikove kocke (preuzeto iz [32]).

Da bismo izračunali broj konfiguracija Rubikove kocke potrebno je odrediti sve permutacije vršnih i rubnih kockica u Rubikovoj kocki.

Zaključili smo već da su centralne kockice fiksirane. Postoji 8 vršnih i 12 rubnih kockica. Te kockice su drugačije, svaka vršna kockica, kojoj su vidljive tri boje, može ići samo u kutni dio Rubikove kocke, a svaka rubna kockica može jedino na rub kojem su vidljive dvije boje.
Zamislimo sada da smo kompletno rastavili Rubikovu kocku na kockice. Na koliko načina ju možemo ponovno sastaviti?
Počnimo s vršnim kockicama. Uzmimo prvu kockicu i stavimo ju na bilo koje od 8 mjesta na kojima se mogu nalaziti, odnosno možemo ju pozicionirati na 8 načina. Ostalo nam je 7 mogućih mjesta na koje možemo staviti drugu vršnu kockicu. Nakon toga, ostaje nam 6 mogućih mjesta na koje možemo staviti treću. Analogno dalje, dok nam ne ostane jedna moguća pozicija za zadnju, osmu vršnu kockicu. Dakle, ukupan broj načina na koje možemo pozicionirati vršne kockice je:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320.$$

Što je s orijentacijom vršnih kockica? Svaku vršnu kockicu na odabranoj poziciji možemo još rotirati na 3 načina zbog 3 boje koje su vidljive na njoj. Zaključujemo da onda svih 8 vršnih kockica možemo još okretati na $3 \times 3 \times 3 \times 3 ... \times 3 = 3^8 = 6\,561$ načina.
Dakle, svaka od 40320 pozicija vršnih kockica ima još 6561 drugačijih načina okreta. To znači da ukupan broj postavljanja vršnih kockica na Rubikovoj kocki iznosi:

$$8! \times 3^8 = 40\,320 \times 6\,561 = 264\,539\,520.$$

Analogno pobrojimo rubne kockice. Broj pozicija rubnih kockica je $12! = 479\,001\,600$, a broj okreta rubnih kockica $2^{12} = 4\,096$. Dakle, ukupan broj postavljanja rubnih kockica na Rubikovoj kocki iznosi:

$$12! \times 2^{12} = 479\,001\,600 \times 4\,096 = 1\,961\,990\,553\,600.$$

Za svaki od 264 milijuna načina postavljanja vršnih kockica postoji 1 961 990 553 600 načina postavljanja rubnih kockica. Konačno, sveukupan broj načina na koje možemo ponovno sastaviti Rubikovu kocku je:

$$\begin{aligned}\left(8! \times 3^8\right) \times \left(12! \times 2^{12}\right) &= (40\,320 \times 6\,561) \times (479\,001\,600 \times 4\,096)\\ &= 264\,539\,520 \times 1\,961\,990\,553\,600\\ &= 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.\end{aligned}$$

Ako pogledamo malo bolje, složenu Rubikovu kocku ne možemo potezima dovesti na sve te pobrojane položaje. Brojali smo stanja kocke koje se mogu posložiti kompletnim rastavljanjem Rubikove kocke na djelove od kojih se sastoji. Odnosno uvažili smo i "nedozvoljene" konfiguracije Rubikove kocke. Da bismo izračunali broj svih konfiguracija Rubikove kocke koji se mogu dobiti samo potezima na već složenoj Rubikovoj kocki, dakle, bez rastavljanja kocke, moramo pogledati što se sve događa rotacijama vršnih i rubnih kockica u složenoj kocki.

Svaku vršnu kockicu u složenoj Rubikovoj kocki možemo premještati na neku od 8 pozicija, dakle, možemo dostići svih 8! pozicioniranja. No, nisu sve rotacije, kojih inače ima 3^8, moguće. Zašto?
Kada rotiramo jednu vršnu kockicu Rubikove kocke u smjeru kazaljke na satu, automatski rotiramo neku drugu vršnu kockicu u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Dakle, možemo okretati svih 7 vršnih kockica kako želimo, ali ti okreti koje napravimo diktiraju okret finalne, osme, vršne kockice.
Stoga, primjenjujući samo poteze, moguće je prema teoremu 2.6.1. postići jednu trećinu ukupnog izračunatog broja okretaja vršnih kockica: $\frac{1}{3} \cdot 3^8 = 3^7$.
Analogno izračunamo i za rubne kockice. Pozicionirati ih možemo na 12! načina, ali rotirati rubne kockice, bez rastavljanja kocke prema teoremu 2.6.1., možemo na jednu polovinu ukupnog broja okretaja rubnih kockica: $\frac{1}{2} \cdot 2^{12} = 2^{11}$. Svaki put kada zarotiramo strane jedne rubne kockice, zarotiraju se i strane neke druge rubne kockice.
Gledajući sada samo stanja Rubikove kocke koja se mogu dobiti potezima na kocki, primjetimo da postoji još jedna restrikcija na sveukupno pozicioniranje vršnih i rubnih kockica, ako ignoriramo izokretanja i rotacije strana istih i gledamo samo njihove pozicije.
8! permutacija vršnih kockica su podijeljene u dvije jednake grupe koje možemo zvati parnim i neparnim permutacijama, ovisno o tome koliko parova mora biti zamijenjeno da bi se došlo do određene permutacije iz originalnog položaja. Isto vrijedi i za 12! permutacija rubnih kockica, pola ih je parno, a pola neparno.
Ako rasporedimo vršne kockice parnom, odnosno neparnom permutacijom, onda moraju i rubne kockice biti raspoređene parnom, odnosno neparnom permutacijom. Možemo postići samo parno-parno i neparno-neparno pozicioniranje vršnih i rubnih kockica.
Zaključujemo, s obzirom na restrikciju pozicioniranja prema teoremu 2.6.1., može se postići

polovina ukupnog broja pozicioniranja vršnih i rubnih kockica.
Dakle, možemo postići jednu trećinu ukupnog okreta vršnih kockica, jednu polovinu ukupnog okreta rubnih kockica i jednu polovinu ukupnog pozicioniranja vršnih i rubnih kockica. Zbog toga broj konfiguracija Rubikove kocke, bez rastavljanja same kocke, iznosi jednu dvanaestinu ukupnog broja konfiguracija koja se mogu dobiti rastavljanjem Rubikove kocke.

$$\begin{aligned}\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{12} &= \frac{519\,024\,039\,293\,878\,272\,000}{12} \\ &= 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.\end{aligned}$$

To je ukupan broj načina na koje možemo rasporediti sve kockice Rubikove kocke počevši od njenog originalnog položaja.

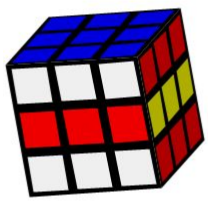
2.7 Strategije za rješavanje Rubikove kocke

Za rješavanje Rubikove kocke često se koristi konjugacija poteza, ali i komutatori koje smo opisali u prethodnom potpoglavlju. Primjerice, ako želimo dvije rubne kockice okrenuti da budu dobro orijentirane ili zarotirati dvije vršne kockice.

Definicija 2.7.1. *Neka su X i Y dva poteza na Rubikovoj kocki. Možemo primjeniti novi potez YXY^{-1} koji nazivamo* ***konjugat*** *poteza X potezom Y i označavamo ga sa X^Y.*

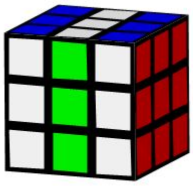
Na sljedećim primjerima ćemo pokazati na koji način komutatori i konjugati poteza utječu na orijentaciju i poziciju kockica u Rubikovoj kocki. Sve primjere ćemo izvoditi na složenoj kocki da lakše vidimo što komutatori i konjugati rade na Rubikovoj kocki. Prije nego krenemo na primjere definirat ćemo poteze koji pomiču centralne kockice.

U_S je rotacija horizontalnog središnjeg sloja kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu, ali gledajući kocku s gornje strane.



Slika 2.15: Potez U_S.

R_S je rotacija vertikalnog središnjeg sloja kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu gledajući kocku sa desne strane.

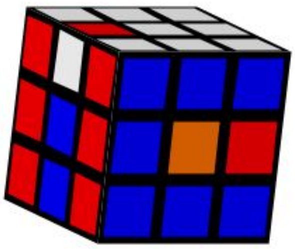


Slika 2.16: Potez R_S.

Analogno i za B_S, D_S, F_S, L_S.

Primjer 2.7.2. *(Orijentiranje dviju rubnih kockica)*
Da bismo promijenili orijentaciju gornje lijeve i gornje prednje rubne kockice primjenjujemo sljedeće:

- $X = LU_S{}^{-1}L^2U_S{}^2L$. *Ovaj potez preokreće gornju lijevu kockicu bez da promijeni ostatak gornje strane. Ostala dva sloja su izmiješana.*



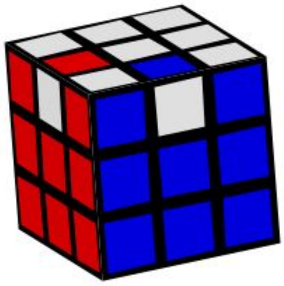
Slika 2.17: Nakon poteza $LU_S{}^{-1}L^2U_S{}^2L$.

- $Y = U$ *rotira gornju prednju kockicu na mjesto gornje lijeve kockice i ne utječe na ostala dva sloja kocke.*
- $X^{-1} = L^{-1}U_S{}^2L^2U_SL^{-1}$ *izokreće gornju lijevu rubnu kockicu i popravlja ostala dva sloja kocke.*
- $Y^{-1} = U^{-1}$ *vraća gornju stranu na početnu poziciju.*

Dakle, komutator

$$XYX^{-1}Y^{-1} = (LU_S{}^{-1}L^2U_S{}^2L)U(L^{-1}U_S{}^2L^2U_SL^{-1})U^{-1}$$

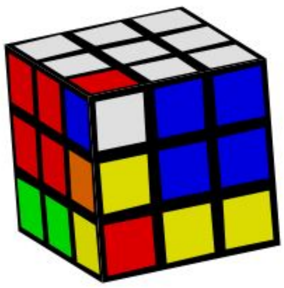
mijenja orijentaciju gornje lijeve i gornje prednje rubne kockice, a na ostale ne utječe.



Slika 2.18: Promjena orijentacije rubnih kockica ul i uf.

Primjer 2.7.3. *(Orijentiranje dviju vršnih kockica)*
Da bismo promijenili orijentaciju gornje prednje lijeve i gornje prednje desne vršne kockice primjenjujemo sljedeće:

- $X = F^{-1}DFLDL^{-1}$. *Ovaj potez rotira gornju prednju lijevu vršnu kockicu u smjeru kazaljke na satu bez da izmiješa ostale kockice na gornjoj strani kocke.*



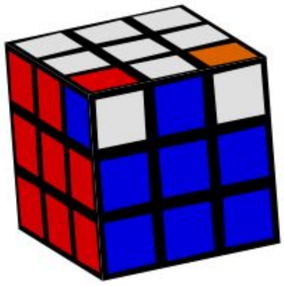
Slika 2.19: Promjena orijentacije vršne kockice potezom $F^{-1}DFLDL^{-1}$.

- $Y = U$ *rotira gornju prednju desnu kockicu na mjesto gornje prednje lijeve kockice i ne utječe na ostala dva sloja kocke.*
- $X^{-1} = LD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}F$ *izokreće gornju prednju lijevu vršnu kockicu u smjeru obrnutom od kazaljke na satu i popravlja ostala dva sloja kocke.*
- $Y^{-1} = U^{-1}$ *vraća gornju stranu na početnu poziciju.*

Dakle, komutator

$$XYX^{-1}Y^{-1} = (F^{-1}DFLDL^{-1})U(LD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}F)U^{-1}$$

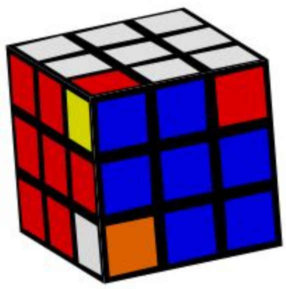
mijenja orijentaciju gornje prednje lijeve i gornje prednje desne vršne kockice, a na ostale ne utječe.



Slika 2.20: Orijentiranje dviju vršnih kockica.

Primjer 2.7.4. *(Rotiranje pozicija triju vršnih kockica)*

- $X = LDL^{-1}$. *Ovaj potez sklanja gornju prednju lijevu vršnu kockicu sa gornje strane i ne utječe na ostatak gornje strane.*
- $Y = U$ *utječe samo na gornji sloj kocke.*
- *Potezi X i Y utječu samo na gornju prednju lijevu kockicu.*
- *Slijedi*
$$XYX^{-1}Y^{-1} = (LDL^{-1})U(LD^{-1}L^{-1})U^{-1}.$$



Slika 2.21: Promjena pozicije triju vršnih kockica.

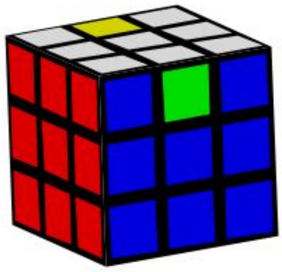
Primjer 2.7.5. *(Rotiranje pozicija triju rubnih kockica)*

- $X = R_S$
- $Y = U^2$

Slijedi:

$$XYX^{-1}Y^{-1} = R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2.$$

Prednja donja, gornja prednja i gornja stražnja rubna kockica mijenjaju mjesta.



Slika 2.22: Promjena pozicije triju rubnih kockica.

Primjer 2.7.6. *(Rotiranje pozicija triju gornjih rubnih kockica)*
Cilj nam je zarotirati pozicije gornje prednje, gorenj desne i gornje lijeve rubne kockice. Znamo da je

$$X = R_S U^2 (R_S)^{-1} U^2$$

ciklus prednje donje, prednje gornje i gornje stražnje rubne kockice. Neka je

$$Y = F^2 U.$$

Što radi potez YXY^{-1}?

- *Y pomiče tri rubne kockice kojima želimo zamijeniti mjesta redom na prednju donju, prednju gornju i gornju stražnju poziciju.*

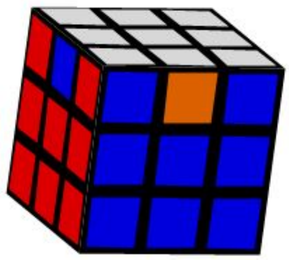
Slika 2.23: Primjena F^2U.

- *X rotira prednju donju, prednju gornju i gornju stražnju rubnu kockica (za njih želimo da tvore ciklus).*
- Z^{-1} *vraća rubne kockice na željeno mjesto i popravlja sve što se izmješalo.*

Dakle:

$$YXY^{-1} = (F^2U)R_S U^2(R_S)^{-1}U^2(U^{-1}F^2) = F^2UR_S U^2(R_S)^{-1}UF^2$$

rotira mjesta željenih triju rubnih kockica na gornjoj strani Rubikove kocke.



Slika 2.24: Zarotirane tri gornje rubne kockice.

Primjer 2.7.7. *(Rotiranje pozicija triju gornjih vršnih kockica i očuvanje orijentacije)*
Neka je

$$X = FLF^{-1}, \; Y = R^2, \; Z = F^2.$$

- *Jedina kockica koja se pomiče primjenom X i Y je prednja donja desna vršna kockica.*
- *Dakle, komutator* $XYX^{-1}Y^{-1}$ *je* 3*-ciklus vršnih kockica.*

- *Može se provjeriti da rotira vršne kockice na mjesta prednje donje lijeve, prednje donje desne i stražnje gornje desne vršne kockice.*

Z pomiče posljednje dvije vršne kockice na gornji sloj. Dakle konjugat:

$$Z(XYX^{-1}Y^{-1})Z^{-1} = F^{-1}LF^{-1}R^2FL^{-1}F^{-1}R^2F^2$$

ciklički premješta tri vršne kockice na gornjem sloju Rubikove kocke. Ovaj primjer je jako koristan u slučaju da su kockice dobro orijentirane, jer gornja strana vršne kockice ostaje gornja strana.

Slika 2.25: Očuvana orijentacija i drugačija pozicija vršnih kockica.

Postoji mnogo algoritama pomoću kojih se može složiti Rubikova kocka. Ukratko ćemo opisati dva najčešće korištena.

Jedan od najpopularnijih algoritama koji se koristi i na natjecanjima u slaganju Rubikove kocke je "Prvo kutove". Taj algoritam se može podijeliti u četiri koraka:
1. Stavljanje vršnih kockica na ispravne pozicije.
2. Okretanje vršnih kockica da bi ih ispravno orijentirali.
3. Stavljanje rubnih kockica na ispravne pozicije.
4. Okretanje rubnih kockica da bi ih ispravno orijentirali.

Vidimo da je pomoću komutatora i konjugata poteza moguće napraviti sva četiri koraka.

U algoritmu "Sloj po sloj" kao što sami naziv kaže rješavamo sloj po sloj Rubikove kocke. Većinom se prva dva reda mogu složiti na temelju logike, ali može se i pomoću komutatora i konjugata. Posebno, za zadnji sloj je potrebna primjena komutatora i konjugata kako bi posložili sve kockice, a da ne izmiješamo već složena dva reda.

Poglavlje 3

Rubikova kocka u školi

Učenici u prvom razredu osnovne škole prvi puta imenuju geometrijska tijela poput kugle, valjka, kocke, kvadra. Donošenjem Rubikove kocke na nastavu kao model jednog geometrijskog tijela učenicima možemo približiti trodimenzionalni prostor i oblike u njemu. U drugom razredu osnovne škole učenici opisuju strane kocke kao likove, bridove kao dužine, a vrhove kao točke. Povezuju geometrijska tijela i likove. Sa simetrijama, konkretno osnom i centralnom simetrijom, učenici se upoznaju u 5. razredu, ali samo u ravnini. Također Rubikova kocka u nastavi matematike može poslužiti kao pomoć pri istraživanju volumena kocke, ako kažemo da se ona sastoji od jediničnih kockica. U šestom i sedmom razredu može biti model za učenje razlomaka i postotaka. U nižim razredima možemo i pokazati svojstvo komutativnosti, koji potezi na Rubikovoj kocki su komutativni, a koji ne. U osmom razredu učenici istražuju međusobne odnose pravaca i ravnina u prostoru. Pomoću Rubikove kocke prikaz ravnina i pravaca u ravnini bi bio zorniji. Učenici tada znaju i skicirati uspravna geometrijska tijela, ali i njihove mreže. Skiciranjem mreže Rubikove kocke učenici bi uvježbali i povezali 2D i 3D prikaze. U srednjoj školi Rubikova kocka bi bila korisna za zorni prikaz rotacije i inverznih elemenata. Učenici se u 3. razredu srednje škole upoznaju s kombinatorikom što znači da mogu neka osnovna prebrojavanja usvojiti proučavajući Rubikovu kocku.

Aktivnost 1

Aktivnost je primjerena svim razredima srednje škole i bila bi uvodna aktivnost u problematiku bojanja kvadrata ili kocke. Vizualnom metodom i logičkim razmišljanjem učenici će doći do broja kombinacija bojanja perlica u dvije boje, do na rotaciju. Uspoređivati će odnose između dva objekta koristeći rotaciju i eliminirati netočna rješenja. Učenici će objašnjavati ideje i postupke koje provode i kritički će razmišljati. Uočavati će pravilnosti, argumentirati i analizirati svaki korak u rješavanju i donositi samostalne zaključke. Razumijevanjem ovakvih zadataka učenici bi bili spremni proučavati bojanja do na simetrije i na modelu Rubikove kocke, gledajući jednu njenu stranu ili cijelu kocku.

Nastavni oblik:
kombinirani (frontalni i individualni)

Nastavne metode:

- metoda razgovora
- metoda rješavanja zadataka
- metoda demonstracije
- vizualna metoda

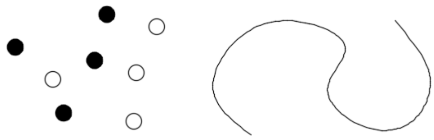
Potrebni materijal:
Nastavni listić-narukvica, olovka, bojica.

Detaljan tijek aktivnosti:

Učenicima dijelim nastavne listiće. Dodatno objašnjavam što znači kada narukvice smatramo istima. Dajem im ideju da proučavamo naprije niz od četiri crne perlice na narukvici. Pitam ih na koliko načina možemo obojati narukvicu da četiri crne perlice budu jedna do druge, ali da rotacijom narukvice ne dobivamo istu kombinaciju? Učenici iznose svoja razmišljanja i zaključivanja i dolazimo do zaključka. Učenici bojaju sve moguće kombinacije na nastavnom listiću te kreću na sljedeći korak. Kada su gotovi opet argumentiramo koje kombinacije postoje i zašto te dolaze do zaključka. Analogno za 3. i 4. korak. U 5. koraku zapisuju ukupno rješenje.

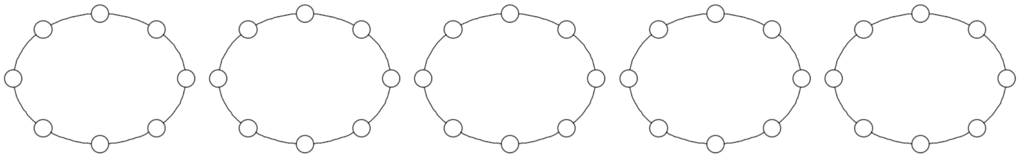
NASTAVNI LISTIĆ - NARUKVICA

Zadatak. Za izradu narukvice korišteno je 8 perlica od čega su 4 crne boje, a 4 bijele boje te konac.

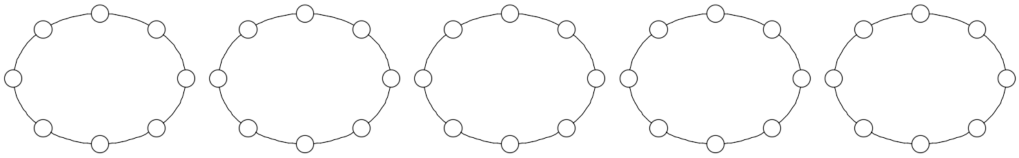


Na koliko jedinstvenih načina možemo izraditi narukvicu tako da poredak perlica na njima ne bude isti? Dvije narukvice smatramo istima ukoliko se okretanjem jedne dovodimo u jednak raspored perlica druge. Obojajte potrebne perlice na sljedećim predlošcima tako da sve narukvice budu različite.

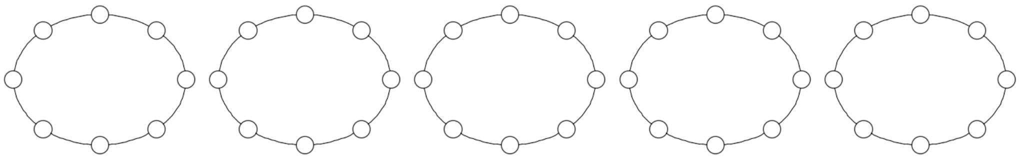
Korak 1. Broj mogućih kombinacija sa četiri perlice crne boje u nizu:



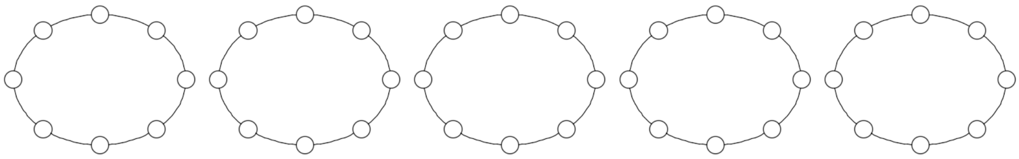
Korak 2. Broj mogućih kombinacija sa tri perlice crne boje u nizu:



Korak 3. Broj mogućih kombinacija sa dvije perlice crne boje u nizu:



Korak 4. Broj mogućih kombinacija sa jednom perlicom crne boje u nizu:



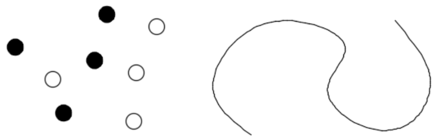
Korak 5.

Ukupan broj različitih narukvica: $\boxed{}$

Napomena: Broj različitih narukvica je manji od broja ponuđenih predložaka.

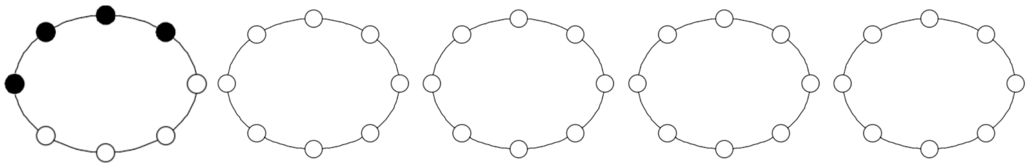
RJEŠENJE NASTAVNOG LISTIĆA - NARUKVICA

Zadatak. Za izradu narukvice korišteno je 8 perlica od čega su 4 crne boje, a 4 bijele boje te konac.

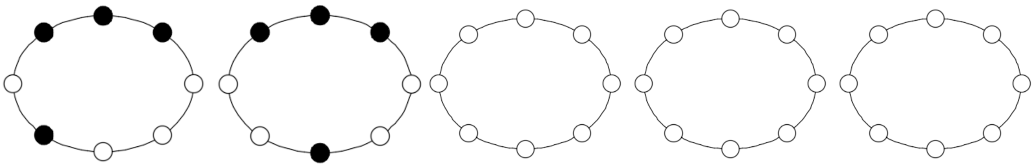


Na koliko jedinstvenih načina možemo izraditi narukvicu tako da poredak perlica na njima ne bude isti? Dvije narukvice smatramo istima ukoliko se okretanjem jedne dovodimo u jednak raspored perlica druge.
Obojajte potrebne perlice na sljedećim predlošcima tako da sve narukvice budu različite.

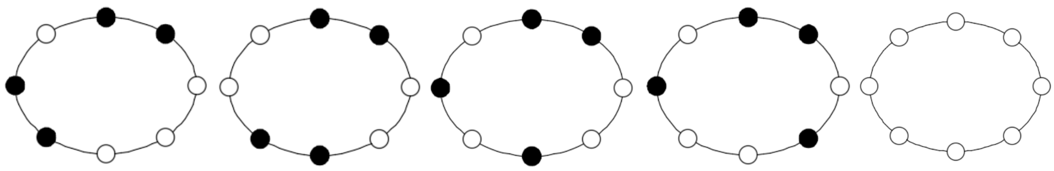
Korak 1. Broj mogućih kombinacija sa četiri perlice crne boje u nizu:



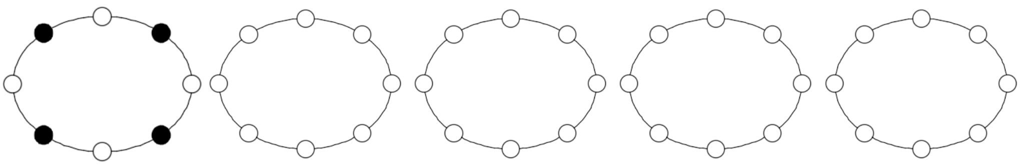
Korak 2. Broj mogućih kombinacija sa tri perlice crne boje u nizu:



Korak 3. Broj mogućih kombinacija sa dvije perlice crne boje u nizu:



Korak 4. Broj mogućih kombinacija sa jednom perlicom crne boje u nizu:



Korak 5.

Ukupan broj različitih narukvica: **8**

Napomena: Broj različitih narukvica je manji od broja ponuđenih predložaka.

Aktivnost 2

Aktivnost je primjerena za učenike 8. razreda osnovne škole. Gledanjem i primjenjivanjem algoritama za slaganje zanimljivih konfiguracija učenici mogu razviti svijest o tome što se događa kada primjenjuju poteze. Uočavati će pravilnosti i veze između poteza. Razumijevanjem transformacija na Rubikovoj kocki primjenom algoritama učenici bi mogli kasnije i neke složenije transformacije predvidjeti, vizualizirati i apstrahirati. Cilj aktivnosti je razvijanje prostorne inteligencije i svijest o suprotnim elementima. Ako učenici razumiju na koji način iz neke dane konfiguracije doći natrag do složene Rubikove kocke to će im podići samopouzdanje i povjerenje u vlastite sposobnosti. Zainteresirati će ih i motivirati za neke složenije probleme. Učenici će poboljšati motoriku, logičko razmišljanje, koncentraciju i strpljenje. Učenicima će biti motivirajuće promijeniti način razmišljanja i imati drugačiji tip nastave.

Nastavni oblik:
kombinirani (frontalni i individualni)

Nastavne metode:

- metoda razgovora
- metoda rješavanja zadataka
- metoda demonstracije
- vizualna metoda

Potrebni materijal:
Nastavni listić 1, Nastavni listić 2, olovka, Rubikova kocka.

Detaljan tijek aktivnosti:

Učenicima dijelim Nastavni listić 1 i Rubikovu kocku. Na početku sata upoznajemo se sa oznakama poteza na Rubikovoj kocki. Demonstriram iste učenicima koristeći Rubikovu kocku. Komentiramo prvi primjer i svi radimo potez F na Rubikovoj kocki. Učenici argumentiraju kako će vratiti kocku natrag u složeno stanje i zapisuju na nastavni listić svoja razmišljanja. U sljedećem zadatku obilazim učenike i gledam jesu li ispravne poteze napravili. Učenici dijele svoja razmišljanja i provjeravamo rješenja učenika za podzadatke a) i b). Prije nego krenu na c) zadatak učenicima demonstriram na Rubikovoj kocki i suprotne osnovne poteze i zapisujemo njihove oznake. Učenici obrazlažu svoja razmišljanja i provjeravamo rješenje.
Učenicima dijelim Nastavni listić 2 i napominjem da postoji zapis preko potencije u slučaju

da više puta izvodimo isti potez. Provjeravam kod svakog učenika primjenu algoritma za dobivanje zanimljivih kofiguracija i potičem diskusiju o potezima koje trebamo napraviti da bismo vratili kocku u složeno stanje. Učenici zapisuju na listić svoje zaključke koje kasnije diskutiramo i provjeravamo. Zadnja konfiguracija je složenija stoga pomažem učenicima kojima treba pomoć. Diskutiramo kako vratiti kocku u složeno stanje i skupa zapisujemo postupak. Demonstriram na kocki poteze, a učenici prate.

Slike na Nastavnom listiću 2 su preuzete iz [25].

NASTAVNI LISTIĆ 1– POTEZI NA RUBIKOVOJ KOCKI

Oznake poteza:

F (front) – okret prednje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

B (back) – okret stražnje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

R (right) – okret desne strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

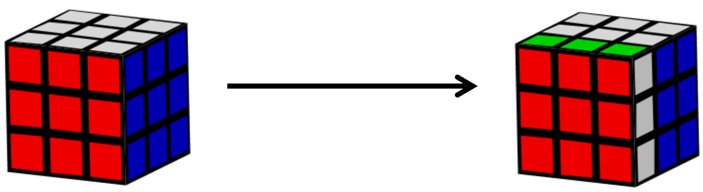
L (left) – okret lijeve strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

U (up) – okret gornje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

D (down) – okret donje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

Primjer:

Primjenimo li na složenoj Rubikovoj kocki (gdje je prednja strana crvena, desna plava, a gornja bijela) potez F, ona će izgledati na sljedeći način.



Opište riječima kako biste nakon tog poteza vratili kocku u složeno stanje.

Zadatak.

a) Primjenite na kocki najprije potez F, a zatim potez R. (To ćemo inače zapisivati kao potez FR.)

b) Opišite riječima što trebamo napraviti da bismo kocku vratili u složeno stanje.

- **Označimo okret prednje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu malim slovom f, stražnje b, desne r, lijeve l, gornje u i donje d.**

c) Kako biste sada zapisali oznakama potez koji ste opisali u b) dijelu zadatka?

RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA 1– POTEZI NA RUBIKOVOJ KOCKI

Oznake poteza:

F (front) – okret prednje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

B (back) – okret stražnje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

R (right) – okret desne strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

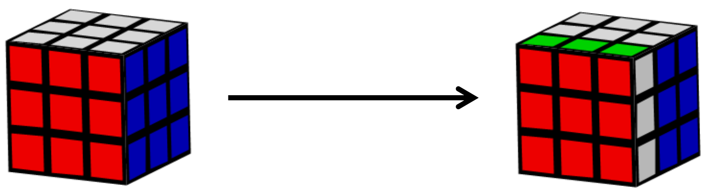
L (left) – okret lijeve strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

U (up) – okret gornje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

D (down) – okret donje strane kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu.

Primjer:

Primjenimo li na složenoj Rubikovoj kocki (gdje je prednja strana crvena, desna plava, a gornja bijela) potez F, ona će izgledati na sljedeći način.



Opište riječima kako biste nakon tog poteza vratili kocku u složeno stanje.

Jednom četvrtinom okreta prednje strane u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu.

Zadatak.

a) Primjenite na kocki najprije potez F, a zatim potez R. (To ćemo inače zapisivati kao potez FR.)

b) Opišite riječima što trebamo napraviti da bismo kocku vratili u složeno stanje.

Najprije okrenemo desnu stranu u suprotnom smjeru od kazaljke na satu, a zatim prednju.

- **Označimo okret prednje strane kocke za 90° u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu malim slovom f, stražnje b, desne r, lijeve l, gornje u i donje d.**

c) Kako biste sada zapisali oznakama potez koji ste opisali u b) dijelu zadatka?

r f

NASTAVNI LISTIĆ 2– ZANIMLJIVI UZORCI RUBIKOVE KOCKE

Koristeći se oznakama poteza iz Nastavnog listića 1 pokušajte na Rubikovoj kocki dobiti sljedeće zanimljive uzorke.

Napomena: ako primjenimo dva puta zaredom isti potez, npr. FF onda to pišemo kao F^2.

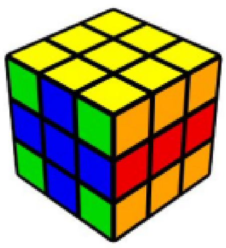
Šahovnica: $U^2D^2F^2B^2L^2R^2$

Kako biste vratili kocku u složeno stanje?

Znate li to zapisati oznakama poteza koje smo odredili?

____

Plus minus: $U^2R^2L^2U^2R^2L^2$



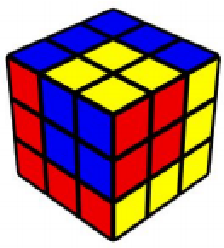
Kako biste vratili kocku u složeno stanje?

Znate li to zapisati oznakama poteza koje smo odredili?

____

- *Pokušajte napraviti i sljedeći uzorak Rubikove kocke i razmislite kako biste nakon toga mogli vratiti kocku u složeno stanje.*

Kocka u kocki: $FLFuRUF^2L^2ulBdbL^2U$



RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA 2– ZANIMLJIVI UZORCI RUBIKOVE KOCKE

Koristeći se oznakama poteza iz Nastavnog listića 1 pokušajte na Rubikovoj kocki dobiti sljedeće zanimljive uzorke.

Napomena: ako primjenimo dva puta zaredom isti potez, npr. FF onda to pišemo kao F^2.

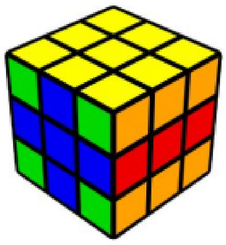
Šahovnica: $U^2D^2F^2B^2L^2R^2$

Kako biste vratili kocku u složeno stanje?

Znate li to zapisati oznakama poteza koje smo odredili?

$r^2l^2b^2f^2d^2u^2$

Plus minus: $U^2R^2L^2U^2R^2L^2$



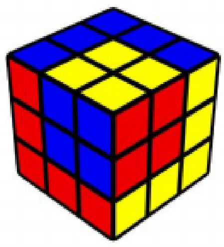
Kako biste vratili kocku u složeno stanje?

Znate li to zapisati oznakama poteza koje smo odredili?

$l^2r^2u^2l^2r^2u^2$

- *Pokušajte napraviti i sljedeći uzorak Rubikove kocke i razmislite kako biste nakon toga mogli vratiti kocku u složeno stanje.*

Kocka u kocki: $FLFuRUF^2L^2ulBdbL^2U$



Aktivnost 3

Aktivnost je primjerena za učenike 4. razreda srednje škole. Učenici će u ovom izazovnom problemu razvijati prostornu inteligenciju i kritičko mišljenje. Razvijati će i njegovati logičko i apstraktno razmišljanje. Primjenjivati će matematičke strategije, rotirati strane kocke i razmišljati unaprijed o potezima na Rubikovoj kocki. U nižim razredima je bitno imati konkretan model pomoću kojeg učenici razvijaju svoje matematičke sposobnosti. U ovoj aktivnosti, koja je primjerena za 4. razred srednje škole, razvijaju sposobnost apstrahiranja budući da ne moraju imati konkretan model. Glavni cilj aktivnosti je razviti vezu između dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prikaza objekta. Analizirati će dobivene problemske situacije, zamišljati ih u prostoru i prevoditi ponovno u dvodimenzionalni prikaz. Razvijati će otvorenost u suočavanju s nepoznatim i novim situacijama. Odabrati će strategije za rješavanje, argumentirati svoje postupke i samostalno donositi zaključke. Razmjenjivati će međusobno matematičke ideje, poboljšati komunikacijske vještine i timski rad.

Nastavni oblik:
rad u četveročlanim skupinama

Nastavne metode:

- metoda razgovora
- metoda rješavanja zadataka
- vizualna metoda

Potrebni materijal:
Nastavni listić, olovka, bojica.

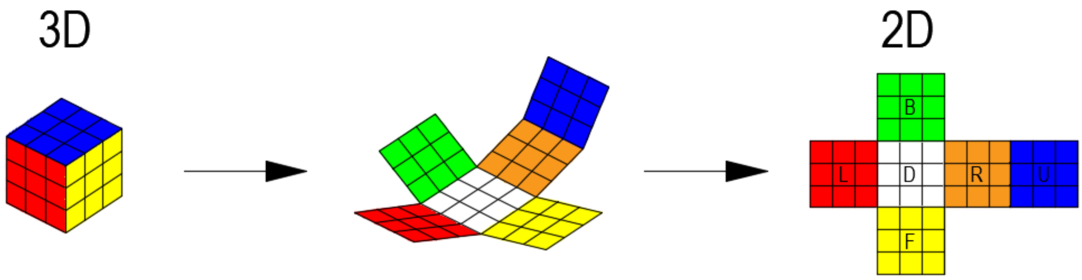
Detaljan tijek aktivnosti:

Dijelim razred u skupine po četiri učenika i dajem im nastavne listiće. Diskutiramo $3D$ i $2D$ prikaz Rubikove kocke i ponavljam pravila koja su dana u prvom primjeru. Kada je sve jasno kreću na rješavanje zadatka, a ja obilazim skupine, pratim njihov rad i slušam razmišljanja i ideje. Kada je većina gotova sa rješavanjem prozivam jednu skupinu da dođe na ploču prezentirati prvi korak u nastavnom listiću. Potičem diskusiju u razredu i zapisujemo rješenje. Ostali učenici provjeravaju svoja rješenja. Analogno radimo i za ostale korake te označavamo konačno rješenje.

NASTAVNI LISTIĆ – 3D U 2D

UPUTE

Rubickova kocka se može iz trodimenzionalnog prostora prevesti u dvodimenzionalni prostor jednostavnim “rastvaranjem” kocke kao što je prikazano na slici.



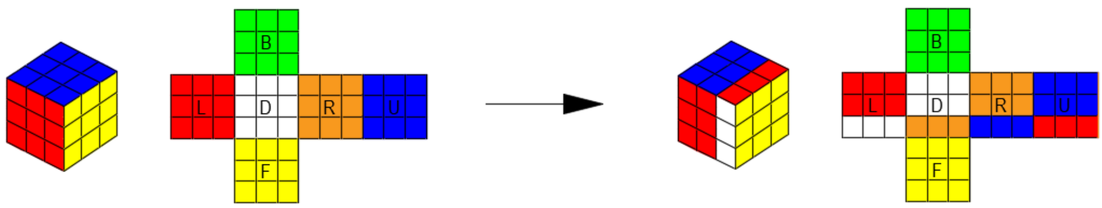
Vodeći računa o načinu rada mehanizma kocke te promjenom položaja kockica kao posljedicom okreta pojedinih strana, potrebno je odrediti položaj kockice nakon zadanih poteza.

Pravila:

Stranice kocke smijemo okretati samo u smjeru kazaljke na satu. Svako slovo predstavlja okret isključivo te stranice u smjeru kazaljke na satu za 90°. Stranice su definirane kao **L** (Left), **R** (Right), **U** (Up), **D** (Down), **B** (Back), **F** (Front).

Primjer:

Ukoliko je zadan potez F položaj stranica kocke se promijenio na sljedeći način.

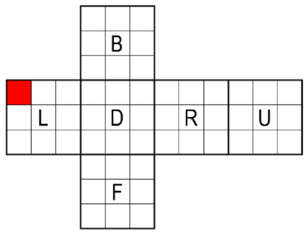


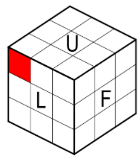
NASTAVNI LISTIĆ – 3D U 2D

Zadatak

Sukladno priloženim uputama potrebno je obilježiti pomake određene kockice na Rubikovoj kocki kroz niz zadanih poteza. Poznat je početni položaj kockice te su zadani koraci (potezi) koje je potrebno izvršiti. Obojajte položaj kockice nakon svakog izvršenog koraka.

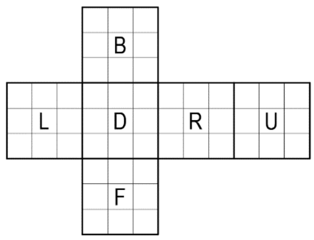
POČETNI POLOŽAJ:





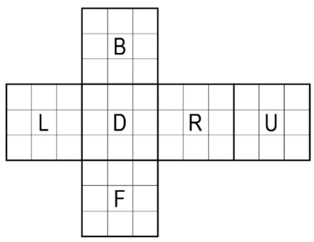
1. KORAK

POTEZ: **U**



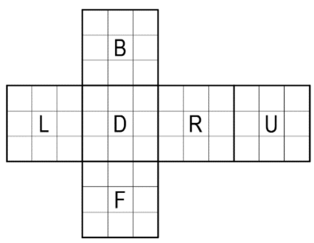
2. KORAK

POTEZ: **R**



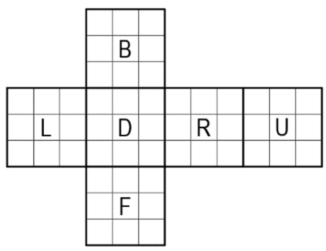
3. KORAK

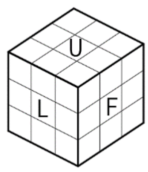
POTEZ: **B**



4. KORAK

POTEZ: **U**



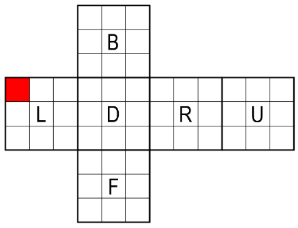


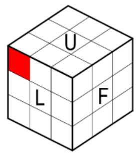
RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA – 3D U 2D

Zadatak

Sukladno priloženim uputama potrebno je obilježiti pomake određene kockice na Rubickovoj kocki kroz niz zadanih poteza. Poznat je početni položaj kockice te su zadani koraci (potezi) koje je potrebno izvršiti. Obojajte položaj kockice nakon svakog izvršenog koraka.

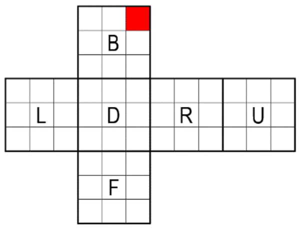
POČETNI POLOŽAJ:





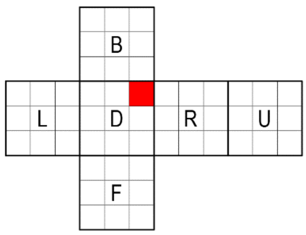
1. KORAK

POTEZ: **U**



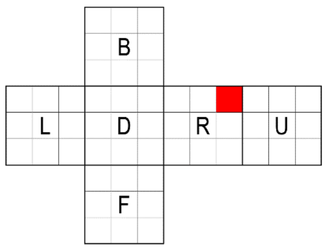
2. KORAK

POTEZ: **R**



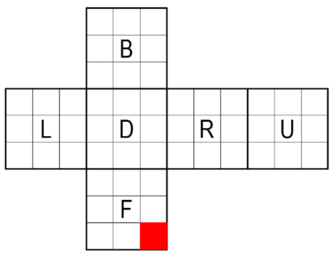
3. KORAK

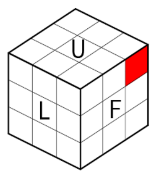
POTEZ: **B**



4. KORAK

POTEZ: **U**





Rubikovom kockom učenike možemo zainteresirati i motivirati za nastavu matematike. Rubikova kocka učenicima omogućava vizualizaciju geometrijskih pojmova. Pruža im mogućnost da samostalno otkrivaju matematiku, razmjenjuju matematičke ideje i primjenjuju ih. Potiče ih na stvaranje i istraživanje pretpostavki o matematičkim objektima, odnosima i pravilnostima. Radom na Rubikovoj kocki učenici poboljšavaju motoričke vještine, razvijaju logičko i apstraktno razmišljanje, prostornu inteligenciju, primjenu matematičkih strategija i strpljenje. Kod učenika se razvija prostorni zor i stvara se veza između dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prikaza Rubikove kocke. Prepoznaju elemente koji se mogu matematički prikazati i postaju svjesni svojih matematičkih kompetencija. Razumijevanjem matematike primjenjene na Rubikovoj kocki razvijaju pozitivan odnos prema radu, samopouzdanje i kreativnost. Kod nekih učenika javila bi se znatiželja za proučavanjem težih problema Rubikove kocke i upornost pri rješavanju istih. Susret s Rubikovom kockom je izazovni problem koji potiče učenike na promišljanje, argumentiranje te donošenje samostalnih zaključaka.

Bibliografija

[1] M. Bašić, *Simetrije*, dostupno na:
https://www.showme.com/sh?h=exxUbrs (srpanj 2020.).

[2] F. M. Brückler, *Grupa Rubikove kocke*, Poučak 36, (2008), 4-15.

[3] J. Chen, *Group theory and the Rubik's cube*, (2004), dostupno na:
http://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik's%20Cube.pdf (kolovoz 2020.).

[4] C. Cooke, *Solving the Rubik's Cube using Group Theory*, (2017), dostupno na:
https://digitalcommons.ric.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1164&context=honors_projects (rujan 2020.).

[5] L. Daniels, *Group theory and the Rubik's cube*, (2014), dostupno na:
https://www.lakeheadu.ca/sites/default/files/uploads/77/docs/Daniels_Project.pdf (rujan 2020.).

[6] T. Davis, *Group theory via Rubik's cube*, (2006), dostupno na:
https://www.yumpu.com/en/document/view/5717917/group-theory-via-rubiks-cube-tom-davis (kolovoz 2020.).

[7] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Vol. 163, Springer Science Business Media, 1996.

[8] K. Gittemeier, *How to solve Rubik's cube*, dostupno na:
https://www.kevingittemeier.com/how-to-solve-rubiks-cube-easy/ (kolovoz 2020.).

[9] L.J. Halbeisen, Group theory lecture notes-*Subgroups*, dostupno na:
http://user.math.uzh.ch/halbeisen/4students/gtln/sec3.pdf (rujan 2020.).

[10] M. Hutchings, *The mathematics of Rubik's cube*, (2011), dostupno na:
https://math.berkeley.edu/~hutching/rubik.pdf (rujan 2020.).

[11] D. Ilišević, G. Muić, *Uvod u matematiku*, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/uum.pdf (kolovoz 2020.).

[12] D. Joyner, *Adventures in group theory: Rubik's Cube, Merlin's machine, and other mathematical toys*, JHU Press, 2008.

[13] V. Krčadinac, J. Šiftar, *Konačne geometrije*, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf (kolovoz 2020.).

[14] D. L. Kreher, *Group theory notes*, (2020), dostupno na: https://pages.mtu.edu/~kreher/ABOUTME/syllabus/GTN.pdf (kolovoz 2020.).

[15] J. McKernan, Lecture 3-*Cosets*, dostupno na: http://math.mit.edu/~mckernan/Teaching/12-13/Spring/18.703/l_3.pdf (rujan (2020.).

[16] I. Nakić, *Diskretna matematika*, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf (rujan 2020.).

[17] E. Shinder, *Mathematics of the Rubik's cube*, (2016), dostupno na: https://e-shinder.staff.shef.ac.uk/rubiks-cube.pdf (rujan 2020.).

[18] B. Širola, *Algebarske strukture*, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf (kolovoz 2020.).

[19] D.R. Wilkins, *Mathematics course 111: Algebra I, Part II: Groups*, dostupno na: https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/111/group.pdf (rujan 2020.).

[20] Algebarske strukture-vježbe, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/grupe.pdf (kolovoz 2020.).

[21] Amazing Rubik's cube facts, dostupno na: https://ruwix.com/amazing-rubiks-cube-facts/. (kolovoz 2020.).

[22] Burnside's lemma, dostupno na: https://www.imomath.com/index.php?options=249&lmm=1, (kolovoz 2020.).

[23] First Rubik's cube, dostupno na:
https://www.timetoast.com/timelines/rubiks-cube--2 (kolovoz 2020.)

[24] Original Rubik's cube, dostupno na:
https://sg.carousell.com/p/rubik's-cube-original-1002310904/ (kolovoz 2020.)

[25] Pretty Rubik's cube patterns with algorithms, dostupno na:
https://ruwix.com/the-rubiks-cube/rubiks-cube-patterns-algorithms/ (kolovoz 2020.).

[26] Rubik's, dostupno na:
https://www.rubiks.com/en-eu/ (kolovoz 2020.).

[27] Rubik's cube and twisty puzzle wiki, dostupno na:
https://ruwix.com/ (kolovoz 2020.).

[28] Rubik's cube move notation, dostupno na:
https://jperm.net/3x3/moves (kolovoz 2020.).

[29] Rubik's cube tutorials, dostupno na:
https://sites.google.com/site/cubetutorials101/3x3-rubik-s-cube/3x3-beginner (kolovoz 2020.).

[30] St.Petersburg teen solves Rubik's cubes blindfolded, dostupno na:
https://www.tampabay.com/news/St-Petersburg-teen-solves-Rubik-s-Cubes-blindfolded-using-ancient-method_162489105/ (kolovoz 2020.).

[31] The mathematics of the Rubik's cube, (2009), dostupno na:
https://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf (rujan 2020.).

[32] Unsolvable Rubik's cube, dostupno na:
https://ruwix.com/the-rubiks-cube/unsolvable-rubiks-cube-invalid-scramble/ (kolovoz 2020.).

[33] Using Burnside's lemma, dostupno na:
https://math.stackexchange.com/questions/706552/using-burnsides-lemma-understanding-the-intuition-and-theory (rujan 2020.).

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je povezati teoriju grupa sa Rubikovom kockom i upoznati se s kombinatorikom i geometrijom koja se krije u Rubikovoj kocki.
Proučavanjem simetrija geometrijskih objekata uvodi se pojam grupe i prezentacije grupa. Prikazana je Burnsideova metoda prebrojavanja na bojanju kvadrata i kocke, do na simetriju. Uvode se oznake i potezi na Rubikovoj kocki te njihov prikaz pomoću ciklusa. Opisane su konfiguracije Rubikove kocke koje se mogu dobiti primjenom poteza, ali i rastavljanjem Rubikove kocke na dijelove od kojih se sastoji. Primjenom komutatora i konjugata poteza opisano je nekoliko strategija za promjenu orijentacije i pozicije nekoliko rubnih i vršnih kockica čijim je razumijevanjem moguće složiti Rubikovu kocku. U zadnjem dijelu rada je dan metodički osvrt na potencijal koji Rubikova kocka može donijeti nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi i opisane su nastavne aktivnosti.

Summary

The aim of this thesis is to connect group theory with the Rubik's cube and get to know combinatorics and geometry hidden in the Rubik's cube.
The concept of group and presentation of groups is introduced by studying the symmetries of geometric objects. Burnside's method of counting is presented by the coloring of squares and cubes, up to symmetry. Notation and moves on the Rubik's cube are introduced and they are represented by cycle notation. The configurations of the Rubik's cube are described, which can be obtained by making the moves, but also by disassembling the Rubik's cube into the parts of which it consists. By using commutators and move conjugates, several strategies for changing the orientation and position of edge and corner cubies are described, that leads to understanding of assembling the Rubik's cube. In the last chapter, a methodical review of the potential that the Rubik's Cube can bring to the teaching of mathematics in primary and secondary school is given, and the teaching activities are described.

Životopis

Rođena sam 15. srpnja 1993. godine u Zadru. Pohađala sam Osnovnu školu "Valentin Klarin" do 2007. godine. Nastavila sam svoje školovanje iste godine u Gimnaziji Franje Petrića u Zadru. U srednjoj školi razvila sam interes za matematiku i sudjelovala na županijskim natjecanjima iz matematike. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika - smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem 2011. godine. Zvanje sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike stječem 2016. godine i nastavljam školovanje na diplomskom studiju istog smjera.