

# Hardyjevi prostori

---

**Tomac, Fran Domagoj**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:832846>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Fran Domagoj Tomac

**HARDYJEVI PROSTORI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>0 Preliminarije</b>	<b>2</b>
0.1 Funkcionalna analiza . . . . .	2
0.2 Matematička analiza . . . . .	4
0.3 Harmonijska analiza . . . . .	9
<b>1 Schwartzove funkcije i temperirane distribucije</b>	<b>14</b>
1.1 Prostor $\mathcal{S}$ i njegova topologija . . . . .	14
1.2 Fourierova pretvorba na $\mathcal{S}$ . . . . .	15
1.3 Prostor $\mathcal{S}'$ . . . . .	16
<b>2 Hardyjevi prostori</b>	<b>19</b>
2.1 Maksimalna definicija prostora $H^p$ . . . . .	19
2.2 Atomarna dekompozicija . . . . .	31
<b>3 Dualnost prostora <math>H^1</math> i BMO</b>	<b>44</b>
3.1 Funkcije ograničene srednje oscilacije . . . . .	44
3.2 Dualnost . . . . .	45
<b>Bibliografija</b>	<b>49</b>

# Uvod

Premda blisko povezana s konceptima Fourierove analize, klasična se teorija Hardyjevih prostora obično promatra kao poglavlje u teoriji kompleksnih funkcija. U tom se kontekstu pojavljuju u prvoj polovici 20. stoljeća, a predstavio ih je F. Riesz 1923. godine ([14]) koji im je naziv nadjenao po engleskom matematičaru G. H. Hardyju zbog nasljeđa njegova rada iz 1915. godine ([11]). Od tada se Hardyjevi prostori promatraju kao određene klase holomorfnih funkcija na dijelovima kompleksne ravnine kao što su jedinični disk oko nule i gornja poluravnina — dobar je izvor za pregled ovog vida teorije Hardyjevih prostora [5]. Međutim, razvojem moderne analize nameće se potreba za proširivanjem teorije, a glavne su korake u tom smjeru načinili američki matematičari E. M. Stein, G. Weiss, R. Coifman i C. Fefferman u [6], [7] te [3] gdje su u posljednja dva rada postavljeni temelji za teoriju Hardyjevih prostora na  $\mathbb{R}^n$  te detaljnije opisana neka njihova svojstva.

Radnja je ovog teksta podijeljena na tri poglavlja. U prvom je poglavlju dana kratka ekspozicija Schwartzovih prostora i temperiranih distribucija što čini okosnicu teorije razvijene u ostatku teksta. Hardyjevi prostori, kao klase temperiranih distribucija kojima su stanovite maksimalne funkcije <sup>1</sup> sadržane u  $L^p$  prostorima, uvedeni su u drugom poglavlju. Dva su važna rezultata dokazana u tom poglavlju: prvi govori da odabiru maksimalnog operatora kojeg koristimo u definiciji možemo pristupiti na više načina, a drugi se odnosi na egzistenciju atomarne dekompozicije — Hardyjeve prostore umijemo “razbiti” na jednostavnije objekte s nekim poželjnim svojstvima pomoću kojih onda možemo prikazati proizvoljan element tog prostora. Konačno, u posljednjem, trećem, poglavlju podrobnije proučavamo prostor  $H^1$  i dokazujemo da je njegov dual upravo prostor funkcija ograničene srednje oscilacije, u oznaci BMO.

---

<sup>1</sup>Precizan smisao ovog pojma dan je u drugom poglavlju.

# Poglavlje 0

## Preliminarije

Ovo poglavlje sadrži sve rezultate koje ćemo koristiti za razvoj teorije na sljedećim stranicama, a reference na dokaze su dane.

### 0.1 Funkcionalna analiza

U ovom odjeljku donosimo pregled neki osnovnih pojmova i rezultata iz funkcionalne analize koji su sadržaj svih uvodnih tekstova u funkcionalnu analizu. Jedna referenca koju ovdje dajemo jest [13].

Također, u čitavom tekstu predmnijevamo poznavanje raznih topoloških pojmova iz teorije normiranih prostora kao što su topologija norme (uniformna topologija), slaba i slaba\* topologija i slično. Osim toga, smatramo da je čitatelj upoznat i s osnovama teorije Fréchetovih prostora i topologije na lokalno konveksnim prostorima (vidjeti, primjerice, [1]).

Neka su  $(X, \|\cdot\|_X)$  i  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normirani prostori. Kažemo da je linearan operator  $T : X \rightarrow Y$  ograničen ako postoji konstanta  $C > 0$  takva da vrijedi

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Osim kada postoji opasnost zabune, obje norme obično označavamo jednostavno sa  $\|\cdot\|$ .

Nije teško dokazati da je optimalna konstanta gore dana sa  $C = \|T\| := \sup_{x \in X, x \neq 0} \|Tx\|$ . Veličinu  $\|T\|$  nazivamo (operatorskom) normom operatora  $T$ . Štoviše, nije se teško uvjeriti da vrijedi

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Sa  $\mathbb{B}(X, Y)$  označavamo skup svih ograničenih linearnih operatora sa  $X$  u  $Y$ :

$$\mathbb{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y; T \text{ je linearan i ograničen}\}.$$

Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane po točkama skup  $\mathbb{B}(X, Y)$  dobiva strukturu vektorskog prostora; a snabdjevan operatorskom normom on je, štoviše, i normiran prostor. Zaista, jednostavno se provjerava da preslikavanje koje smo gore uveli i zvali operatorskom normom zaista i jest norma na tom prostoru.

Temeljno svojstvo ograničenih operatora jest istoznačnost neprekidnosti i ograničenosti. Navedeni odnos precizno je izložen u sljedećem teoremu.

**Teorem 0.1.1.** *Neka su  $X$  i  $Y$  normirani prostori i  $T : X \rightarrow Y$  linearan operator. Sljedeće su tvrdnje međusobno ekvivalentne.*

- (i)  $T$  je neprekidan u nekoj točki  $x_0 \in X$ .
- (ii)  $T$  je neprekidan na  $X$ .
- (iii)  $T$  je uniformno neprekidan na  $X$ .
- (iv)  $T$  je ograničen.

Dokaz ovog teorema sadržaj je bilo kojeg uvodnog teksta u funkcionalnu analizu.

Prisjetimo se da kažemo da je podskup  $S \subseteq X$ , gdje je  $X$  neki topološki prostor, *gust* u  $X$  ako je  $\overline{S} = X$  (ovdje, kao i obično,  $\overline{S}$  označava zatvarač skupa  $S$  u pripadnoj topologiji prostora  $X$ ).

Često nam je zgodnije ograničeni operator<sup>1</sup> zadati na nekom gustom podskupu domene što opravdava sljedeći teorem.

**Teorem 0.1.2.** *Neka su  $X$  i  $Y$  normirani prostori pri čemu je  $Y$  i potpun. Nadalje, neka je  $X_0 \leq X$  gusti potprostor od  $X$  i  $\tilde{T} : X_0 \rightarrow Y$  ograničen linearan operator. Tada postoji jedinstveno proširenje operatora  $\tilde{T}$  do linearnog operatora  $T : X \rightarrow Y$  takvog da vrijedi  $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ .*

Osim prethodnog, koristan je i sljedeći rezultat o proširenju neprekidnih funkcionala.

**Teorem 0.1.3 (Hahn-Banach).** *Neka je  $X$  vektorski prostor na kojem je zadana polunorma  $p$  te  $Y$  potprostor od  $X$ . Nadalje, neka je  $f$  linearan funkcional na  $Y$  takav da vrijedi  $|f(y)| < p(y)$  za sve  $y \in Y$ . Tada postoji linearan funkcional  $F$  na  $X$  takav da je  $F|_Y = f$  te  $|F(x)| \leq p(x)$ , za svaki  $x \in X$ .*

<sup>1</sup>Ukoliko to neće dovesti do zabune, atribut linearan uglavnom ispuštamo.

Za demonstraciju vidjeti teorem 3.2. u [15]. Dodajmo još i da kažemo da je  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  polunorma na vektorskom prostoru  $X$  ako vrijedi

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{i} \quad p(tx) = tp(x)$$

za  $x, y \in X$  i  $t \geq 0$ .

Razmatramo li neprekidne funkcionalne na Hilbertovim prostorima, od neizmjerne je koristi i sljedeći rezultat o reprezentaciji.

**Teorem 0.1.4** (Rieszov teorem o reprezentaciji). *Neka je  $X$  Hilbertov prostor i  $f \in X'$ . Tada postoji jedinstveni  $x_f \in X$  takav da je*

$$f(x) = (x, x_f), \quad x \in X$$

gdje  $(\cdot, \cdot)$  označava skalarni produkt na  $X$ . Štoviše, vrijedi i  $\|f\| = \|x_f\|$ .

Za dokaz vidjeti teorem 3.8.1. u [13].

Navodimo i sljedeći veoma važan rezultat iz funkcionalne analize.

**Teorem 0.1.5.** *Neka je  $X$  normiran prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla u  $X'$ , odnosno  $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ , je kompaktna u slabo-\* topologiji.*

Cauchyjevost i konvergencija u normiranim je prostorima definirana na standardan način, a Cauchyjevi nizovi imaju i sljedeće korisno svojstvo.

**Propozicija 0.1.6.** *Neka je  $(x_n)$  Cauchyjev niz u normiranom prostoru  $X$ . Za svaki niz pozitivnih brojeva  $(\varepsilon_n)$  postoji podniz  $(x_{p(n)})_n$  niza  $(x_n)$  sa svojstvom  $\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \varepsilon_n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Dokaz.* Zbog pretpostavljene Cauchyjevosti niza  $(x_n)$  prvo pronalazimo  $n_1 \in \mathbb{N}$  takav da  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon_1$  čim su  $m, n > n_1$  pa stavimo  $p(1) = n_1$ . Na isti način pronalazimo  $n_2 > n_1$  takav da vrijedi  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon_2$  čim su  $m, n > n_2$ ; stavimo  $p(2) = n_2$ . Konstrukciju nastavljamo analogno i tvrdnja slijedi primjenom principa matematičke indukcije.  $\square$

## 0.2 Matematička analiza

Ovaj odjeljak sadrži konstrukcije i dobro poznate rezultate koje tradicionalno svrstavamo u područje matematičke analize, a koji će biti sveprisutni u ostatku materije.



## Konvolucija

Neka su  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Konvoluciju tih dviju funkcija, u oznaci  $f * g$ , definiramo sa

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Nije se teško uvjeriti da je definicija dobra. Zaista, budući da su  $f$  i  $g$  apsolutno integrabilne — po Fubini-Tonellijevom teoremu — dobro je definiran integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy dx.$$

Međutim, zamjenom varijabli dobivamo

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x - y) dy dx.$$

Primijenimo li još jednom Fubini-Tonellija dobivamo da je unutrašnji integral (koji je upravo  $(f * g)(x)$ ) konačan.

**Napomena 0.2.1.** *Direktnim se računom lako provjerava da je operacija konvolucije komutativna i asocijativna:*

$$(i) \quad f * g = g * f, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$(ii) \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Operaciju konvolucije možemo, preko formule (1), *formalno* promatrati i za preslikavanja koja nisu nužno u  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , a sljedeća nam dobro poznata nejednakost govori za koje će parove Lebesgueovih funkcija ona zacijelo biti dobro definirana.

**Propozicija 0.2.2** (Youngova konvolucijska nejednakost). *Neka je  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  te  $r \in \mathbb{R}$  takav da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

*uz  $1 \leq p, q \leq r \leq +\infty$ . Tada vrijedi*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

## Prostor $C_c^\infty$ i aproksimacije identiteta

Podsjetimo se da je nosač funkcije zatvarač skupa na kojem ona ne iščezava. Preciznije, neka je  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija; *nosač funkcije*  $f$  označavamo sa  $\text{supp}(f)$ <sup>2</sup> ili jednostavno  $\text{supp} f$  i definiramo sa

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Na  $\mathbb{R}^n$  promatramo standardnu topologiju ( $n$ -dimenzionalne) Euklidske norme, a  $\bar{S}$  označava odgovarajući zatvarač skupa  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Sada ćemo promatrati jedan neobično važan prostor funkcija; naime, onaj glatkih funkcija s kompaktnim nosačem. Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren. Uvodimo oznaku

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp} f \text{ je kompaktan u } \mathbb{R}^n\}.$$

Standardno taj prostor označavamo sa  $\mathcal{D}$  i nazivamo ga prostrom *test funkcija* ili probnih funkcija.

Nama će napose od interesa biti slučaj  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Lako se može pokazati da je prostor  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  netrivialan: funkcija

$$\rho(x) := C \begin{cases} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x| < 1 \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}$$

je, primjerice, jedan njegov element. Također, konstantu  $C$  obično odabiremo tako da vrijedi  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ .

**Napomena 0.2.3.** Uočimo da je prostor  $\mathcal{D}$  zatvoren na produkte funkcija definirane po točkama.

Ako nam je dana funkcija  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  promatramo (formalno) niz  $u_k := u * \rho_k$  pri čemu je

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

za svaki  $k \in \mathbb{N}$ . Deriviranjem pod znakom integrala odmah uočavamo  $u_k \in C^\infty$  (čim je konvolucija dobro definirana).

Sada smo spremni formulirati sljedeći vrlo važan teorem o aproksimaciji identiteta. Za dokaz vidjeti teorem 0.13 u [8].

**Teorem 0.2.4.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren i  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Tada vrijedi  $u_k \rightarrow u$  u  $L^p(\Omega)$ . Ako je  $f \in L^\infty(\Omega)$  također i uniformno neprekidna na  $V \subseteq \Omega$  onda vrijedi  $u_k \rightarrow u$  uniformno na  $V$ .

---

<sup>2</sup>Od engl. ili franc. *support*

Na  $\mathcal{D}$  zadajemo topologiju koristeći činjenicu da vrijedi

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subseteq \Omega \\ K \text{ kompaktan}}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

pri čemu je  $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp} f \subseteq K\}$ . Može se pokazati da je svaki prostor  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  Fréchetov. Konačno, topologiju na  $\mathcal{D}(\Omega)$  dobivamo kao strogi induktivni limes gornjih prostora. Za više detalja vidjeti, primjerice, točku 6.2. u [15]. Nadalje, topologija na  $\mathcal{D}$  je inducirana familijom polunormi  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  gdje je

$$\|\phi\|_k := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty, \quad \phi \in \mathcal{D} \quad (2)$$

(također točka 6.2. u [15]).

Radi relativno apstraktnog načina zadavanja topologije zgodno je imati nešto opipljiviji opis pojmova od najveće važnosti: nizovne konvergencije i neprekidnosti (linearnih) operatora na našem prostoru. Može se pokazati da vrijede sljedeća dva rezultata.

**Teorem 0.2.5** (Nizovna konvergencija u  $\mathcal{D}$ ). *Neka je dan niz  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  u  $\mathcal{D}(\Omega)$  te  $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$  pri čemu je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren. Tada vrijedi da  $\phi_n \rightarrow \phi_0$  u topologiji prostora  $\mathcal{D}(\Omega)$  ako i samo ako*

- (i) *postoji kompakt  $K \subseteq \Omega$  takav da  $\text{supp} \phi_k \subseteq K$  za sve  $k \in \mathbb{N}_0$  i*
- (ii)  *$\partial^\alpha \phi_k \rightarrow \partial^\alpha \phi_0$  uniformno za svaki  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .*

Za dokaz ovog rezultata vidjeti teorem 6.5. (e) u [15].

Slijedi i karakterizacija neprekidnosti linearnih operatora sa  $\mathcal{D}(\Omega)$  u lokalno konveksni prostor (teorem 6.6. u [15]).

**Teorem 0.2.6.** *Neka je  $Y$  lokalno konveksan vektorski prostor,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren te  $A : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$  linearno preslikavanje. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

- (a)  *$A$  je neprekidan.*
- (b)  *$A$  je ograničen.*
- (c) *Ako  $\phi_i \rightarrow 0$  u  $\mathcal{D}(\Omega)$  onda  $A\phi \rightarrow 0$  u  $Y$ .*

## Distribucije

Linearne funkcionalne na  $\mathcal{D}$  neprekidne u topologiji strogo inuktivnog limesa nazivamo *distribucijama*.<sup>3</sup> Primijetimo da nam teorem 0.2.6 daje opis distribucija (na  $\mathbb{R}$  promatramo konstantnu familiju (polu)normi od kojih je svaka jednaka aposlutnoj vrijednosti  $|\cdot|$ ).

Očekivano, prostor distribucija označavamo sa  $\mathcal{D}'$ . Također, obično za djelovanje distribucije  $T$  na funkciju  $\phi$  koristimo oznaku  $\langle T, \phi \rangle$  umjesto  $T(\phi)$ .

Distribucije tretiramo kao poopćenja klasičnog pojma funkcije. S druge strane, funkcije znamo zbrajati, množiti, derivirati i slično pa želimo te operacije uvesti i za distribucije — postupak je to koji se obično svodi na prikladno “prebacivanje” tih operacija na funkcije.

I zbrajanje distribucija je definirano po točkama; dakle, za  $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$  stavimo

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle := \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Deriviranje distribucija definiramo oponašajući slučaj distribucije  $T_f$  pridružene funkciji  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , a koju zadajemo sa  $\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\phi dx$ . Parcijalnom integracijom dobivamo  $\langle T'_f, \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle$ .

Sada za distribuciju  $T \in \mathcal{D}'$  i  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  stavimo

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Zgodno je imati i pojam nosača distribucije:

**Definicija 0.2.7.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  i  $\omega \subseteq \Omega$  otvoreni skup takav da je  $\langle T, \phi \rangle = 0$  za sve  $\phi \in \omega$ . Tada kažemo da  $T$  išezava na  $\omega$ . Komplement unije svih skupova na kojima  $T$  išezava nazivamo nosačem distribucije  $T$ .*

Lako je provjeriti da skup distribucija s kompaktnim nosačem uz nasljeđene operacije zbrajanja i množenja skalarom ima strukturu vektorskog prostora. Osim toga, dobro je poznata sljedeća karakterizacija tog prostora (za dokaz vidjeti teorem 9.8. u [9]).

**Teorem 0.2.8.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren. Prostor distribucija na  $\Omega$  koje imaju kompaktni nosač se poklapa s dualom prostora  $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$  opremljenim Fréchetovom topologijom lokalno jednolike konvergencije.*

Sada smo spremni definirati integral distribucije. Ipak, to ne možemo načiniti za sve elemente  $\mathcal{D}'$ .

---

<sup>3</sup>Analogno, u slučaju da nas zanimaju funkcije s vrijednostima u  $\mathbb{C}$  promatrat ćemo antilinearne funkcionalne.

**Definicija 0.2.9.** Označimo  $\mathbb{E} := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : T * \phi \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ . Za  $u \in \mathbb{E}$  sada definiramo njen integral  $\int u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  sa:

$$\langle \int u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi * u \, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

**Definicija 0.2.10.** Kažemo da je distribucija  $u \in \mathbb{E}$  integrabilna ako vrijedi  $u * \phi_n \rightarrow u * \phi$  čim  $\phi_n \rightarrow \phi$  u  $\mathcal{D}$ .

Nije teško provjeriti da je, za  $u$  integrabilnu, i njen integral distribucija i da prostor svih integrabilnih distribucija (uz nasljeđene operacije) čini vektorski prostor (slijedi jednako kao lema 2.4. u [2]).

**Napomena 0.2.11.** Jednostavno poopćenje propozicije 2.7. iz [2] nam pokazuje da su sve distribucije iz  $\mathcal{E}'$  integrabilne. Uvažimo li teorem 0.2.8 zaključujemo da, čim distribucija ima kompaktan nosač, možemo govoriti o njenom integralu.

Za detaljniju ekspoziciju distribucija vidjeti, primjerice, poglavlje 6 u [15].

## 0.3 Harmonijska analiza

### Fourierova pretvorba

Osnovni pojam u harmonijskoj analizi svakako je onaj Fourierove pretvorbe. Promatramo li Fourierovu pretvorbu periodičkih funkcija (onih na (višedimenzionalnom) torusu) govorimo i o Fourierovom redu funkcije i pripadnim koeficijentima. Ipak, nas zanimaju funkcije definirane na čitavom  $\mathbb{R}^n$ .

Konstrukcija ove transformacije obično kreće s  $L^1$  funkcijama, gdje za  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  definiramo

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

a koristi se i oznaka  $\hat{f} := \mathcal{F}f$ . Preslikavanje  $f \mapsto \hat{f}$  nazivamo *Fourierovom pretvorbom*. Lako je provjeriti da je ta transformacija linearna:

**Propozicija 0.3.1.** Za  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  te  $\lambda \in \mathbb{R}$  vrijedi  $\mathcal{F}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$ .

Osim toga, direktna provjera korištenjem teorema o dominiranoj konvergenciji te Fubinijevog teorema lako daje:

**Propozicija 0.3.2.** Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(a)  $|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$  za sve  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

(b)  $\mathcal{F}f$  je uniformno neprekidna.

(c)  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ .

**Napomena 0.3.3.** Primijetimo da nam (a) dio prethodne propozicije zapravo govori da je  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  ograničen linearan operator norme manje ili jednake 1.

Odgovor na pitanje što je kodomena Fourierove pretvorbe sadržaj je sljedeće propozicije. Dokaz nije težak, a sastavni je dio bilo kojeg pregleda teorije Fourierove analize.

**Propozicija 0.3.4** (Riemann-Lebesgueova lema). Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Tada vrijedi

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Prethodne tri propozicije nam stoga daju:

**Korolar 0.3.5.** Fourierova pretvorba  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$  je linearan operator.

Prirodno je pitati se postoji li inverz (na slici) Fourierove pretvorbe i znamo li ga zapisati. Odgovor na oba pitanja je potvrđan.

**Teorem 0.3.6** (Formula inverzije). Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  takva da je i  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Tada vrijedi

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Često se koristi oznaka  $\check{f} := \hat{\hat{f}}$ .

Korištenjem Fubinijevog teorema lako dobivamo sljedeću korisnu formulu:

**Propozicija 0.3.7.** Neka su  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Sada želimo proširiti operator  $\mathcal{F}$  i na druge Lebesgueove prostore. Prvi korak na tom putu je sljedeći dobro poznati rezultat kojega nije teško dokazati (primjerice, teorem 8.29. u [9]).

**Teorem 0.3.8** (Plancherelov teorem). Ako je  $f \in L^1 \cap L^2$ , tada je i  $\hat{f} \in L^2$ . Nadalje,  $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$  možemo na jedinstven način proširiti do unitarnog izomorfizma na  $L^2$ .

Konačno, koristeći napomenu 0.3.3, prethodni rezultat i teorem o realnoj (multilinearnoj) interpolaciji (Riesz-Thorin; teorem 6.27. u [9]) dobivamo

**Teorem 0.3.9** (Hausdorff-Youngova nejednakost). *Neka je  $p \in (1, 2)$  te  $1/p + 1/q = 1$ . Tada je  $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  ograničen linearan operator uz  $\|\mathcal{F}f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .<sup>4</sup>*

Konačno, nije se teško uvjeriti da se sve “velike formule” poput propozicija 0.3.2 i 0.3.7 prenose i na  $L^p$  funkcije za  $p \in (1, 2]$ .

## Poissonova jezgra

Koncept Poissonove jezgre je sveprisutan ne samo u harmonijskoj analizi već i u drugim granama matematike kao što je teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Uzmimo da se nalazimo na  $\mathbb{R}^n$ ; tada je Poissonova jezgra zadana kao

$$P(x) = c_n(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pri čemu je

$$c_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}, \quad (3)$$

a  $|x|$  označava standardnu Euklidsku normu na  $\mathbb{R}^n$ , odnosno,  $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$  uz  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Prisjetimo se i da je “gama funkcija”  $\Gamma$  zadana sa

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Direktan račun pokazuje da vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx = 1.$$

## Maksimalne funkcije i lema o pokrivaču

Maksimalne funkcije su svakako jedan od najvažnijih pojmova u harmonijskoj analizi. Postoji mnogo varijanti istih, ali — govoreći slobodno — mogli bismo reći da će za danu funkciju njoj pridružena maksimalna funkcija sadržavati informaciju o tome kako se ponašaju “maksimumi sredina” te funkcije. Nerijetko je prikladnije umjesto same funkcije promatrati njenu maksimalnu funkciju koja će dati bolji uvid u neka njena svojstva;

<sup>4</sup>Za optimalnu konstantu vidjeti Babenko-Becknerovu nejednakost.

upravo je to tehnika kojom se dobiva, primjerice, i Claderón-Zygmundova dekompozicija o kojoj će biti više govora kasnije.

Sljedeći pogled nekih osnovnih rezultata koje trebamo u sljedećim poglavljima.

Prepostavimo da je dana funkcija  $F : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  gdje je  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > 0\}$  gornji poluprostor. Za parametar  $a > 0$ , promatramo njenu netangencijalnu maksimalnu funkciju  $F_a^*$  danu sa

$$F_a^*(x) = \sup_{\substack{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ |y-x| < at}} |F(y, t)|.$$

Može se pokazati da za  $a \geq b > 0$  vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x) dx \leq c_n \left( \frac{a+b}{b} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} F_b^*(x) dx \quad (4)$$

gdje je  $c_n$  zadana sa (3). Dokaz se može pronaći u [18]: točka 2.5.1. u §2.

Za  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  stavimo

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

Preslikavanje  $M : L_{loc}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo Hardy-Littlewoodovim maksimalnom funkcijom i ono je jedno od najvažnijih takvih preslikavanja u harmonijskoj analizi. Lako se vidi da se radi o sublinearnoj funkciji, a vrijedi i sljedeće ocjene.

**Teorem 0.3.10** (Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem). *Neka je  $1 < p \leq \infty$  i  $n \in \mathbb{N}$ .  $M : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  je ograničeni (sublinearni) operator:*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_{L^p}.$$

Također, za  $f \in L^1$  vrijedi slaba ocjena

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c_d}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Dakle, i  $M : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{weak}^1(\mathbb{R}^n)$  je ograničen sublinearan operator.

$L^\infty$  ocjena se trivijalno dobiva, a za dokaz slabe se koristi Vitalijeva lema o pokrivaču (za potpuni tretman te leme i slabe ocjene vidjeti §3, točku 2 u [12]). Konačno, tvrdnja teorema slijedi primjenom Marcinkiewiczovog teorema o interpolaciji (teorem 6.28. u [9]).

Navodimo još poznatu Whitneyjevu lemu o pokrivaču dokaz koje se može pronaći u dodatku u [10].



**Propozicija 0.3.11.** *Neka je  $\Omega \neq \emptyset$  pravi otvoreni podskup od  $\mathbb{R}^n$ . Tada postoji familija otvorenih kocki  $\{Q_k\}$  sa sljedećim svojstvima:*

(i)  $\cup_k Q_k = \Omega$  i  $Q_k$ -ovi imaju disjunktne interiore,

(ii)  $\sqrt{n}l(Q_k) \leq d(Q_k, \Omega^c) \leq 4\sqrt{n}l(Q_k)$ ,

(iii) ukoliko je  $Q_k \cap Q_j \neq \emptyset$  onda vrijedi

$$\frac{1}{4} \leq \frac{l(Q_k)}{l(Q_j)} \leq 4.$$

Ovdje  $l(Q)$  označava duljinu stranice kocke  $Q$ , a  $d(Q, \Omega^c)$  njenu udaljenost do  $\Omega^c$ .

# Poglavlje 1

## Schwartzove funkcije i temperirane distribucije

Elementi Hardyjevih prostora su specifične temperirane distribucije, dakle linearni funkcionali na prostoru Schwartzovih funkcija ( $\mathcal{S}$ ) neprekidni u Fréchetovoj topologiji kojom je taj prostor opskrbljen.

### 1.1 Prostor $\mathcal{S}$ i njegova topologija

Pretpostavimo da se nalazimo u  $\mathbb{R}^n$ . Za funkciju  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  i multi-indekse  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  definiramo polunorme

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|.$$

Lako se provjeri da su definirana preslikavanja uistinu polunorme. Sada definiramo prostor Schwartzovih funkcija sa

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha, \beta} < +\infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Dakle, prostor  $\mathcal{S}$  sadrži glatke funkcije koje - zajedno sa svojim derivacijama - dovoljno brzo opadaju. Kako su polunorme homogene i subaditivne, očigledno je da se radi o *vektorskom prostoru*.

Nadalje, reći ćemo da niz  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}$  konvergira k  $f \in \mathcal{S}$  ako konvergira u svakoj polunormi, odnosno, ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n) (n \geq n_0 \implies \|f_n - f\|_{\alpha, \beta} < \varepsilon).$$

Analogno se definira pojam Cauchyjevosti niza.

Uočimo sada da familija polunormi  $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\}$  razlikuje točke. Zaista, ako je  $\|f\|_{\alpha,\beta} = 0$  u svakoj polunormi, onda posebno imamo  $\|f\|_\infty = 0$  što daje  $f \equiv 0$ .

Prirodno je na  $\mathcal{S}$  promatrati najslabiju topologiju u kojoj su sve polunorme  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  neprekidna preslikavanja. Uvažimo li prethodnu opservaciju i činjenicu da je familija polunormi koju promatramo prebrojiva zaključujemo da je (vidjeti, primjerice, 4. poglavlje, propoziciju 2.1., u [4])  $\mathcal{S}$  štoviše i *metrizabilan* te da se njegova topologija zapravo poklapa s topologijom induciranom tom metrikom (koju čak znamo i eksplicitno zapisati).

Konačno, uočimo da je  $\mathcal{S}$  i *potpun* prostor. Doista, ako je  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}$  Cauchyjev niz onda, prema gornjim definicijama, imamo i da je uniformno (u normi  $\|\cdot\|_\infty$ ) Cauchyjev pa pronalazimo funkciju  $f$  takvu da  $f_n \rightarrow f$  uniformno. Sada nije teško pokazati da je ta funkcija u  $\mathcal{S}$  te da  $f_n \rightarrow f$  u svakoj polunormi  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ . Sve naše gornje primjedbe možemo koncizno rekapitulirati na sljedeći način.

**Napomena 1.1.1.** *Prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  je Fréchetov prostor: potpun metrizabilan lokalno konveksan topološki vektorski prostor.*

Dodatno, pravilom za deriviranje produkta lako provjeravamo:

**Napomena 1.1.2.** *Prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  je zatvoren na množenje funkcija pri čemu je ono definirano na uobičajen način — po točkama.*

## 1.2 Fourierova pretvorba na $\mathcal{S}$

Promatramo Fourierovu pretvorbu funkcija iz  $\mathcal{S}$ , a definiramo ju na potpuno isti način kao za  $L^1$  funkcije.

**Definicija 1.2.1.** *Fourierova pretvorba na  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  je preslikavanje  $f \mapsto \hat{f}$  gdje je*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Može se pokazati da Fourierova pretvorba ima sljedeća algebarska svojstva. Za dokaz vidjeti, primjerice, propoziciju 2.1. u [16].

**Propozicija 1.2.2.** *Neka je  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

- (i)  $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot h}$  za  $h \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $f(x) e^{-2\pi i x \cdot h} \rightarrow \hat{f}(\xi + h)$  za  $h \in \mathbb{R}^n$ .
- (iii)  $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-n} \hat{f}(\delta^{-1} \xi)$  uz  $\delta > 0$ .

$$(iv) \partial^\alpha f(x) \rightarrow (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

$$(v) (-2\pi i x)^\alpha f(x) \rightarrow \partial^\alpha \hat{f}(\xi).$$

$$(vi) f(Rx) = \hat{f}(R\xi) \text{ čim je } R \text{ rotacija.}$$

Koristeći gornja svojstva, lako se pokaže da vrijedi.

**Korolar 1.2.3.** *Fourierova pretvorba na  $\mathcal{S}$  je neprekidan linearan operator sa slikom sadržanom u  $\mathcal{S}$ .*

Dodatno, poznato je da vrijedi (teorem 2.4. u [16]) formula inverzije:

**Propozicija 1.2.4.** *Neka je  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Tada vrijedi*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Prethodna dva rezultata možemo pisati zajedno.

**Korolar 1.2.5.** *Fourierova pretvorba sa  $\mathcal{S}$  u  $\mathcal{S}$  je neprekidan i bijektivan linearan operator.*

### 1.3 Prostor $\mathcal{S}'$

Elemente topološkog duala prostora  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nazivamo *temperiranim distribucijama*. Dakle,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ako vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$$

čim  $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  takav da  $\varphi_n \rightarrow \mathbf{0}$  u topologiji prostora  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , odnosno, čim vrijedi

$$\|\varphi_n\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Jasno je da su temperirane distribucije opet distribucije, odnosno da vrijedi  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  pri čemu je  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  topološki dual prostora  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  opskrbljenog topologijom strogog induktivnog limesa (vidjeti, primjerice, šesto poglavlje, sekcija 6.2. u [15]) pa i elemente prostora  $\mathcal{S}'$  znamo derivirati, množiti glatkim funkcijama, konvoluirati sa Schwartzovim funkcijama i slično. Spomenute su operacije definirane na sljedeći način. Pri tome, od ovog mjesta nadalje, koristimo uobičajenu konvenciju da djelovanje funkcionala  $T$  na vektor  $\phi$  označavamo sa  $\langle T, \phi \rangle$  umjesto  $T(\phi)$ .

**Definicija 1.3.1.** *Neka je  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  te  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . Definiramo:*

$$(i) \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$$

$$(ii) \langle fT, \phi \rangle := \langle T, f\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$$

$$(iii) [\varphi * T](x) := \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle. \quad ^1.$$

Na ovom smo mjestu dužni nekoliko napomena. Prvo, lako je dokazati da ćemo za  $T, f, \varphi$  te  $\alpha$  kao u prethodnoj definiciji opet imati  $fT, \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Nadalje, direktna provjera pokazuje i da je zadovoljeno pravilo produkta za deriviranje  $fT$ , a koje za derivacije prvog reda možemo zapisati kao

$$\partial_j(\phi T) = (\partial_j \phi)T + \phi(\partial_j T), \quad j = 1, \dots, n.$$

Za općeniti slučaj ( $\partial^\alpha$ ) vidjeti poglavlje 6, odjeljak 6.15. u [15].

S druge strane, može se pokazati da vrijedi sljedeća propozicija (propozicija 9.10 u [9]).

**Propozicija 1.3.2.** *Neka je  $T \in \mathcal{S}'$  i  $\phi \in \mathcal{S}$ . Tada je  $\phi * T \in C^\infty$  sporo rastuća (najviše polinomijalno).*

Osim toga, oponašajući dokaz dijela (b) teorema 6.32. u [15] pri čemu koristimo činjenicu da je  $\mathcal{D}$  gusto u  $\mathcal{S}$  (vidjeti teorem 7.10. u [15]) lako dobivamo da vrijedi:

**Propozicija 1.3.3.** *Neka je  $\phi \in \mathcal{S}$  takva da je  $\int \phi dx = 1$  te  $f \in \mathcal{S}'$ . Tada vrijedi*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f * \phi_j = f \quad \text{u } \mathcal{S}'.$$

Također je konvoluiranje distribucije s test funkcijom i neprekidno; preciznije, vrijedi sljedeći rezultat (za dokaz vidjeti teorem 6.33. u [15]).

**Teorem 1.3.4.** *Neka je  $f \in \mathcal{D}'$  i preslikavanje  $L$  zadano sa*

$$L\phi := f * \phi, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

*Tada je  $L$  neprekidno linearno preslikavanje sa  $\mathcal{D}$  u  $C^\infty$ .*

Ipak, možemo proširiti značenje konvolucije tako da dozvolimo konvoluiranje s funkcijama  $L^1(\mathbb{R}^n)$  i rezultat tretiramo kao temperiranu distribuciju. Moramo, međutim, postaviti neke restrikcije na temperirane distribucije koje promatramo; naime, zahtijevati ćemo da naša distribucija bude ograničena. Kažemo da je  $T \in \mathcal{S}'$  ograničena ako je

$$\phi * T \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{za svaku } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

Sada smo spremni definirati konvoluciju distribucije s  $L^1$  funkcijom.

<sup>1</sup>Ovdje su korištene standardne oznake  $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$  te  $\tau_y \varphi(x) := \varphi(x - y)$ .

**Definicija 1.3.5.** Neka je  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ograničena te  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Defniramo distribuciju  $T * h$  sa

$$\langle T * h, \phi \rangle = \langle T * \tilde{\phi}, \tilde{h} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (T * \tilde{\phi})(x) \tilde{h}(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lako je uvjeriti se da je gornje preslikavanje zaista (temperirana) distribucija i to ograničena. Nadalje, jednakom se lakoćom provjeri da je zadovoljeno  $T * (h_1 * h_2) = (T * h_1) * h_2$  za  $h_i \in L^1$  i  $T \in \mathcal{S}'$ .

Konačno, za više detalja o distribucijama općenito, klasična je referenca [15] i to poglavlje 6 u istoj.

## Poglavlje 2

# Hardyjevi prostori

U ovom poglavlju dajemo definiciju Hardyjevih prostora, a najveći je dio pažnje usmjeren na proučavanje ekvivalentnosti odnosa takozvane maksimalne i atomarne definicije tih prostora. Također, dan je i pregled nekih temeljnih svojstava Hardyjevih distribucija koji daju bolji uvid u prirodu Hardyjevih prostora. Brzo ćemo ustanoviti da se prostori  $H^p$  zapravo poklapaju sa Lebesgueovim prostorima,  $L^p$ , čim je  $p > 1$ ; stoga je i pitanje pripada li temperirana distribucija  $f$  nekom  $H^p$ , u tom slučaju, tek problem njene norme. Ali, pitamo li se pripada li ta distribucija u  $H^p$ , za neko  $0 < p \leq 1$ , nije dovoljno razmotriti samo njenu “veličinu” već ona mora imati i određena svojstva poništavanja. Vidjeti ćemo da ta činjenica proizlazi iz odabira maksimalnog operatora u definiciji Hardyjevih prostora, a prijeći će u sferu jasnijeg razmatranjem njegovih atoma.

Svi će gore spomenuti koncepti dobiti precizno značenje i objašnjenje na sljedećim stranicama, a glavni izvor za ovaj dio teksta je [18]. U onome što slijedi, osim ako to nije drugačije navedeno, uvijek pretpostavljamo da se nalazimo na prostoru  $\mathbb{R}^n$  opskrbljenom standardnom topologijom (Euklidske) norme i kratkoće radi pišemo samo  $\mathcal{S}'$  umjesto  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  i slično. Pored toga, u imenovanju elemenata prostora  $\mathcal{S}'$  izostavljamo atribut *temperirane* i nazivamo ih jednostavno distribucijama.

### 2.1 Maksimalna definicija prostora $H^p$

Prije nego dođemo do centralnog teorema ovog odjeljka i odgovarajuće maksimalne definicije Hardyjevih prostora uvodimo nekoliko tipova maksimalnih funkcija od interesa. Za detaljniju ekspoziciju maksimalnih funkcija vidjeti drugo poglavlje u [18].

Za  $\Phi \in \mathcal{S}$  i distribuciju  $f \in \mathcal{S}'$  definiramo *maksimalnu funkciju*  $M_\Phi$  sa

$$M_\Phi f(x) := \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gdje  $\Phi_t$  označava dilataciju funkcije  $\Phi$  danu sa

$$\Phi_t(x) := t^{-n} \Phi(x/t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Uočimo da u gornjoj maksimalnoj funkciji razmatramo usrednjenja distribucije  $f$  obzirom na samo jednu funkciju, naime na unaprijed odabrani  $\Phi$ . Umjesto toga, možemo uzeti u obzir neku kolekciju funkcija iz  $\mathcal{S}$ . To nas vodi na definiciju takozvanih *velikih maksimalnih funkcija*.

Pretpostavimo, stoga, da je dana *konačna* familija polunormi  $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}$  te sa  $\mathcal{S}_\mathcal{F}$  označimo kolekciju funkcija iz  $\mathcal{S}$  kontroliranih obzirom na tu familiju polunormi; preciznije, definiramo

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} := \{\Phi \in \mathcal{S} : \|\Phi\|_{\alpha,\beta} \leq 1 \text{ za sve } \|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}\}.$$

Sada možemo staviti

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) := \sup_{\Phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\Phi f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Posljednja u nizu varijanti maksimalnih funkcija neophodnih za naša razmatranja je *netangencijalna maksimalna funkcija* koju definiramo na sljedeći način. Neka je  $f \in \mathcal{S}'$  *ograničena*<sup>1</sup> distribucija i  $P_t$  dilatirana Poissonova jezgra (vidjeti odjeljak 0.3) i  $t > 0$ . Promatramo Poissonov integral od  $f$  i stavimo

$$u(x, t) := (f * P_t)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Konačno, netangencijalna maksimalna funkcija sada je definirana sa

$$u^*(x) := \sup_{|x-y|<t} |u(y, t)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sada dolazimo do prvog od dva velika rezultata u ovom poglavlju, a koji je također i priprema za definiciju prostora  $H^p$ .

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $f$  distribucija i  $0 < p \leq \infty$ . Tada su sljedeća tri uvjeta ekvivalentna.*

(i) *Postoji  $\Phi \in \mathcal{S}$  sa svojstvom  $\int \Phi dx \neq 0$  takva da  $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>U smislu definicije 1.1.

<sup>2</sup>Često ćemo u notaciji izostavljati domenu integracije (u ovom slučaju je to  $\mathbb{R}^n$ ).



(ii) Postoji (konačna) kolekcija polunormi  $\mathcal{F}$  takva da  $M_{\mathcal{F}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

(iii) Distribucija  $f$  je ograničena i  $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Sada smo spremni dati definiciju Hardyjevih prostora.

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  i  $0 < p \leq \infty$ . Kažemo da  $f$  pripada Hardyjevom prostoru  $H^p(\mathbb{R}^n)$  ako je zadovoljen bilo koji od gornja tri uvjeta.

Da bismo dokazali teorem moramo uvesti još neke maksimalne operatore čija će kontrola biti ključna u dokazu. Prvi od tih operatora je “netangencijalna” verzija  $M_{\Phi}$  dana sa

$$M_{\Phi}^* f(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f * \Phi_t)(y)| = \sup_{|y|<t} |(f * \Phi_t)(x-y)|.$$

Nadalje, promatramo “tangencijalnu” verziju tog istog operatora, naime

$$M_N^{**} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, t > 0} |(f * \Phi_t)(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-N}. \quad (2.1)$$

Taj operator ovisi o parametru  $N$  kojeg ćemo kasnije prikladno odabrati.

Izravno iz definicija tih maksimalnih operatora je jasno da vrijedi sljedeći odnos

$$M_{\Phi} f \leq M_{\Phi}^* f \leq M_N^{**} f.$$

Kao što smo najavili, zanima nas i kontrola tih operatora - sadržaj je to sljedećih dviju lema.

**Lema 2.1.3.** Ako je  $M_{\Phi}^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  i  $N > np$  onda je i  $M_N^{**} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Štoviše, vrijedi ocjena

$$\|M_N^{**} f\|_{L^p} \leq C_{N,p} \|M_{\Phi}^* f\|_{L^p}$$

*Dokaz.* Definirajmo funkciju  $F(x, t) = |(f * \Phi_t)(x)|^p$  te — kao u odjeljku 0.3 — promatramo njenu netangencijalnu maksimalnu funkciju na konusu otvora  $a \geq 1$ , odnosno, uzmemo  $F_a^*(x) = \sup_{|y|<at} F(x-y, t)$ . Slično, za otvor širine 1 stavimo  $F_1^*(x) = F^*(x) = \sup_{|y|<t} F(x-y, t)$ . Sada nam nejednakost (4) iz odjeljka 0.3 daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x) dx \leq c_n (1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F^*(x) dx. \quad (2.2)$$

Imamo

$$\|M_{\Phi}^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y|<t} |(f * \Phi_t)(x-y)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} F^*(x) dx.$$

Primijetimo, nadalje, da za  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  i parametar  $N \geq 0$  vrijedi

$$|(f * \Phi_t)(x - y)|^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F_{2^k}^*(x). \quad (2.3)$$

Zaista, za  $k = 0$ , odnosno u slučaju  $|y| \in (0, t]$ , očigledno vrijedi

$$\left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{-Np}$$

pa već nulti član u sumi s desne strane dominira lijevu stranu. Slično, za  $2^{k-1}t < |y| \leq 2^k t$  dobivamo

$$\left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{(1-k)Np}$$

pa vidimo da  $k$ -ti član desne strane dominira lijevu.

Nadalje, lako se vidi da red s desne strane u (2.3) konvergira za gotovo svaki (u odnosu na Lebesgueovu mjeru)  $x \in \mathbb{R}^n$ . Naime, pretpostavili smo da je  $M_{\Phi}^* f$  u  $L^p(\mathbb{R}^n)$  te kao takva mora biti konačna osim možda na skupu mjere 0. Zato vrijedi ocjena

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F_{2^k}^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} \sup_{|y| < 2^k t} F(x - y, t) \leq M_{\Phi}^*(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} < \infty.$$

U poziciji smo stoga iskoristiti Lebesgueov teorem o monotonij konvergenciji pa dobivamo

$$|M_N^{**} f(x)|^p = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, t > 0} |(f * \Phi_t)(x - y)|^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F_{2^k}^*(x)$$

pa integriranjem i korištenjem opservacije (2.2) slijedi

$$\|M_N^{**} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} c_n (1 + 2^k)^n \|M_{\Phi}^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Tvrdnja leme, dakle, vrijedi uz

$$C_{N,p}^p = c_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} (1 + 2^k)^n$$

što je jamačno konačno čim je  $N > n/p$ . □

Sljedeća lema nam treba za prelazak s jedne aproksimacije identiteta na drugu.

**Lema 2.1.4.** *Neka su  $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}$  uz  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi dx = 1$ . Tada postoji niz  $(\eta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  takav da*

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{(k)} * \Phi_{2^{-k}}. \quad (2.4)$$

Pri tome  $\eta^{(k)} \rightarrow 0$  brzo, u smislu da za svaku polunormu  $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$  i  $M \geq 0$  imamo

$$\|\eta^{(k)}\|_{\alpha, \beta} = O(2^{-kM}) \quad \text{kad } k \rightarrow \infty.$$

*Dokaz.* Uzmimo funkciju  $\hat{\phi} \in C^\infty$  sa svojstvom  $\hat{\phi}(\xi) = 1$  za  $|\xi| \leq 1$  i  $\hat{\phi}(\xi) = 0$  za  $|\xi| \geq 2$ . Takvu funkciju znademo konstruirati, recimo, koristeći poznate teoreme o aproksimaciji identiteta (vidjeti teorem 0.2.4).

Stavimo li  $\hat{\psi}_0(\xi) := \hat{\phi}(\xi)$  te  $\hat{\psi}_k(\xi) := \hat{\phi}(2^{-k}\xi) - \hat{\phi}(2^{1-k}\xi)$  za  $k \geq 1$ , imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k(\xi) = 1.$$

Zaista, po konstrukciji funkcije  $\hat{\phi}$  vrijedi  $1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\phi}(2^{-k}\xi)$  pa gornji identitet lako slijedi.

Uočimo da vrijedi  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi dx = 1 = \hat{\Phi}(0)$ . Dodatno, pretpostavimo da je  $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$  čim je  $|\xi| \leq 2$ . Očito vrijedi

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \cdot \hat{\Phi}(2^{-k}\xi) \quad (2.5)$$

pa možemo staviti

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \quad (2.6)$$

i time su jednoznačno određene funkcije  $\eta^{(k)}$  (vidjeti korolar 1.2.3). Osim toga, iz (2.5) koristeći neprekidnost Fourierove pretvorbe i njena algebarska svojstva (propozicija 0.3.2) dobivamo (2.4).

Pozivajući se na isti teorem kao gore, a jer su funkcije  $\Phi$  i  $\Psi$  u  $\mathcal{S}$ , imamo  $\hat{\Phi}, \hat{\Psi} \in \mathcal{S}$ . Nadalje, uočimo da je  $\hat{\psi}_k$  nošena u  $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$ , a lako se vidi i da vrijedi  $|\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}_k(\xi)| \leq c_\alpha 2^{-k\alpha}$  pa zaključujemo da je i  $\hat{\psi}_k \in \mathcal{S}$ .

Nadalje, kako Fourierova pretvorba konvoluciju Schwartzovih funkcija prevodi u produkt, možemo pisati  $\eta^{(k)} = \phi^{(k)} * \Psi$  pri čemu je  $\hat{\phi}^{(k)}(\xi) = \hat{\psi}_k(\xi)/\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)$ . Koristeći maločas

navedenu činjenicu o nosaču funkcije  $\hat{\psi}_k$  kao i pretpostavku da je  $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$  čim  $|\xi| \leq 2$  lako dobivamo  $\hat{\phi}^{(k)} \in \mathcal{S}$  i  $\phi^{(k)} \in \mathcal{S}$ . Budući da je prostor  $\mathcal{S}$  zatvoren na produkte funkcija dobivamo i  $\eta^{(k)} \in \mathcal{S}$ . Nadalje, iz već navedene ocjene  $|\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}_k(\xi)| \leq c_\alpha 2^{-k\alpha}$  možemo, koristeći definicije polunormi  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ , izravnim računom dobiti da vrijedi  $\|\hat{\eta}^{(k)}\|_{\alpha,\beta} = O(2^{-kM})$  pri čemu je  $M$  proizvoljan. Analogna tvrdnja za  $\eta^{(k)}$  tada slijedi iz ograničenosti inverza Fourierove transformacije na  $\mathcal{S}$ .

Konačno, pretpostavku da je  $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$  čim je  $|\xi| \leq 2$  možemo uvesti bez smanjenja općenitosti. Naime, jasno je da uvijek možemo naći  $k_0$  dovoljno velik da vrijedi  $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$  čim je  $|\xi| \leq 2 \cdot 2^{-k_0}$  te u tom slučaju stavimo

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_{k-k_0}(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \quad \text{za } k \geq k_0$$

i  $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = 0$  inače. □

**Napomena 2.1.5.** *Pretpostavimo da nam je dana (konačna) familija polunormi  $\mathcal{F}_0$  i konstanta  $M \geq 0$ . Argumentirajući kao u gornjem dokazu vidimo da uvijek možemo pronaći konačni skup  $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0$  polunormi takav da, čim je  $\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , vrijedi  $\|\eta^{(k)}\|_{\alpha,\beta} \leq c2^{-kM}$ .*

Sada smo u poziciji dokazati teorem 2.1.1.

*Dokaz teorema 2.1.1.* (i)  $\implies$  (ii) Dokažimo prvo da vrijedi

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{F}}\|_{L^p} \leq c\|M_{\Phi}^* f\|_{L^p}. \quad (2.7)$$

Za  $\Psi \in \mathcal{S}$ , pomoću leme 2.1.4, odnosno (2.4), prelazimo na drugu aproksimaciju identiteta:

$$(M_{\Psi} f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \Psi_t)(x)| \leq \sup_{t>0} \sum_{k=0}^{\infty} |f * \Phi_{2^k t} * \eta_t^{(k)}(x)|.$$

Štoviše, koristeći definiciju konvolucije, nejednakost trokuta za integrale te definiciju operatora  $M_N^{**}$  (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned} (M_{\Psi} f)(x) &\leq \sup_{t>0} \sum_{k=0}^{\infty} \int |f * \Phi_{2^k t}(x-y)| \cdot t^{-n} |\eta^{(k)}(y/t)| dy \\ &\leq \sup_{t>0} t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \int M_N^{**} f(x) \cdot \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^N \cdot |\eta^{(k)}(y/t)| dy. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uočimo, međutim, da zamjenom varijabli dobivamo ocjenu

$$t^{-n} \int \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^N \cdot |\eta_t^{(k)}(y/t)| dy = \int (1 + 2^k |y|)^N \cdot |\eta^{(k)}(y)| dy \leq c2^{-k}$$

čim je  $\|\eta^{(k)}\|_{\alpha,\beta} \leq c2^{-k(N+1)}$  za neku familiju polunormi (zadnja je nejednakost gore jasna iz definicije polunormi  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ ). Nadalje, prema napomeni 2.1.5 znamo da će to vrijediti za  $\Psi$  iz dobro odabrane familije  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ . Time smo odredili jednu familiju polunormi  $\mathcal{F}$  te dobili

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) = \sup_{\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_{\Psi}f(x) \leq cM_N^{**}f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pa, stavimo li  $N > n/p$ , pomoću leme 2.1.3, slijedi 2.7. Vidimo, stoga, da je dovoljno dokazati

$$\|M_{\Phi}^*f\|_p \leq c\|M_{\Phi}f\|_p. \quad (2.9)$$

A posteriori ćemo se uvjeriti da  $\|M_{\Phi}f\|_{L^p} < \infty$  jamči

$$\|M_{\Phi}^*f\|_{L^p} < \infty.$$

Za gore odabranu familiju  $\mathcal{F}$  i  $\lambda > 0$  definiramo

$$F = F_{\lambda} := \{x : \mathcal{M}_{\mathcal{F}}f(x) \leq \lambda M_{\Phi}^*f(x)\}.$$

Primijetimo da za dovoljno veliki  $\lambda$  vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_{\Phi}^*f)^p dx \leq 2 \int_F (M_{\Phi}^*f)^p dx. \quad (2.10)$$

Doista, po definiciji skupa  $F$  imamo

$$\int_{F^c} (M_{\Phi}^*f)^p dx \leq \lambda^{-p} \int_{F^c} (\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f)^p dx \leq c^p \lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\Phi}^*f)^p dx.$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz (2.7). Uzmemo li  $\lambda \geq 2c^p$  dobivamo

$$\int_{F^c} (M_{\Phi}^*f)^p dx \leq 1/2 \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\Phi}^*f)^p dx$$

pa (2.10) lako slijedi.

Nejednakost (2.9) dokazujemo tako da prvo za proizvoljan  $q > 0$  pokažemo da je

$$M_{\Phi}^*f(x) \leq c[M(M_{\Phi}f)^q(x)]^{1/q}, \quad \text{za } x \in F \quad (2.11)$$

gdje je  $M$  standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator. Zaista, iz maksimalnog teorema (za  $M$ )<sup>3</sup> i  $p > q$  tada dobivamo

$$\begin{aligned} \int_F [M_{\Phi}^*f(x)]^p dx &\leq c \int_F [M(M_{\Phi}f)^q(x)]^{p/q} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} [M(M_{\Phi}f)^q(x)]^{p/q} dx \\ &\leq \bar{c} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\Phi}^p f(x) dx. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>vidjeti teorem 0.3.10

Konačno, korištenjem (2.10) sada lako dobivamo (2.9).

Uvedimo oznake:

$$f(x, t) = (f * \Phi_t)(x) \quad \text{te} \quad f * (x) = M_{\Phi}^* f(x) = \sup_{|x-y|<t} |f(y, t)|.$$

Iz svojstava supremuma vidimo da za svaki  $x$  možemo iznaći  $(y, t)$  tako da  $|x - y| < t$  i  $|f(y, t)| \geq f^*(x)/2$ . Za  $r > 0$  dovoljno malen primjenom teorema srednje vrijednosti za  $f(x, t) \in C^{\infty}$  na kugli oko  $y$  radijusa  $rt$  imamo

$$|f(x', t) - f(y, t)| \leq rt \sup_{|z-y|<rt} |\nabla_z f(z, t)|, \quad x' \in B(y, rt).$$

Očito vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial z_i} f(z, t) = \frac{1}{t} f * \frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_t(z),$$

a, osim toga, nije teško vidjeti da postoji konstanta  $c > 0$  takva da je  $\|\partial/\partial z_i \Phi_t(x+h)\|_{\alpha, \beta} \leq c$  za  $|h| \leq 1+r$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  te polunorme  $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$  iz  $\mathcal{F}$ . To slijedi iz kompaktnosti skupa funkcija oblika  $\partial\Phi/\partial z_i(x+h)$  pri čemu je  $|h| \leq 1+r$  te  $i = 1, 2, \dots, n$ . Da bismo se u to uvjerali prvo primijetimo da je, kako je indeksa  $i$  konačno mnogo, tvrdnju dovoljno provjeriti za fiksni  $i$  i translate odgovarajuće funkcije, a to pak slijedi izravno iz definicije kompaktnosti korištenjem činjenice da  $h$  uzimamo iz kugle fiksnog radijusa — dakle, kompaktnog skupa. Stoga i funkcije  $\partial/\partial z_i$  ulaze u  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  odabranu gore pa zaključujemo:

$$|f(x', t) - f(y, t)| \leq cr \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \leq cr \lambda M_{\Phi}^* f(x), \quad \text{za } x \in F.$$

Drugim riječima, koristeći maločas uvedene oznake možemo pisati  $|f(x', t) - f(y, t)| \leq cr \lambda f^*(x)$  pri čemu (kao što smo prethodno komentirali) uzimamo da vrijedi i  $|f(y, t)| \geq f^*(x)/2$ . Dakle, za  $r$  dovoljno malen da je  $c\lambda r \leq 1/4$  imamo

$$|f(x', t)| \geq \frac{1}{4} f^*(x) = \frac{1}{4} M_{\Phi}^* f(x), \quad x' \in B(y, rt),$$

a što se lako dobije korištenjem nejednakosti  $|f(x', t) - f(y, t)| \geq |f(y, t)| - |f(x', t)|$ .

Konačno, sada sve podižemo na  $q$ -tu potenciju te izračunamo integral srednje vrijednosti po  $B(x, (1+r)t)$  i koristimo bjelodanu činjenicu da je  $\left(\frac{1+r}{r}\right)^n \geq 1$  pa dobijemo

$$|M_{\Phi}^* f(x)|^q \leq \left(\frac{1+r}{r}\right)^n \frac{4^q}{|B(x, (1+r)t)|} \int_{B(x, (1+r)t)} |f(x', t)|^q dx' \leq c M[(M_{\Phi} f)^q](x)$$

što je upravo (2.11).

Da bi dokaz tvrdnje (i)  $\implies$  (ii) bio potpun, dužni smo potvrditi da — pod pretpostavkom da je  $\|M_\Phi f\|_{L^p} < \infty$  — vrijedi  $\|M_\Phi^* f\|_{L^p} < \infty$ . U tu svrhu, za parametre  $L > 0$  te  $0 < \varepsilon \leq 1$  promatramo modifikaciju funkcije  $M_\Phi^*$ , naime

$$M_\Phi^{\varepsilon, L} f(x) := \sup_{|x-y| < t < \varepsilon^{-1}} |f * \Phi_t(y)| \cdot \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L}.$$

Kako  $f * \Phi_t$  raste najviše polinomijalno brzo (vidjeti propoziciju 1.3.2), odmah možemo uočiti da za fiksno  $p > 0$  zacijelo postoji dovoljno veliki  $L$  tako da  $M_\Phi^{\varepsilon, L} \in L^p$ . Nadalje, postupajući analogno dokazu (2.7) dobivamo

$$\| \sup_{\Psi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\Psi^{\varepsilon, L} f \|_{L^p} \leq c_L \|M_\Phi^{\varepsilon, L} f\|_{L^p} \quad (2.12)$$

pri čemu konstanta  $c_L$  ovisi eventualno o  $L$ , ali nipošto o  $\varepsilon$ . Zaista, u dokazu (2.7) ključna je bila nejednakost (2.8); ona će i u ovom slučaju slično glasiti, samo moramo uzeti u obzir da će se u drugom redu, umjesto  $(1 + 2^k|y|/t)^N$ , pojaviti faktor

$$\frac{t^L \cdot (\varepsilon + 2^{-k}t + \varepsilon|x-y|)^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^{-L} \cdot (2^{-k}t)^{-L}} \cdot \left(1 + \frac{2^k|y|}{t}\right)^N,$$

a koji je, lako se vidi, omeđen sa

$$c2^{kL} \cdot \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^L \cdot \left(1 + \frac{2^k|y|}{t}\right)^N$$

i postupak nastavljamo na istovjetan način. Ostaje pustiti  $\varepsilon \rightarrow 0$  pa dobijemo

$$\|M_\Phi^* f\|_{L^p} \leq \bar{c}_L \|M_\Phi f\|_{L^p}$$

što znači da je i  $M_\Phi^* f \in L^p$  čim je  $M_\Phi f \in L^p$ .

**(ii)  $\implies$  (iii)** Prvo uočimo da, zbog pretpostavke (ii), za proizvoljnu funkciju  $\Phi \in \mathcal{S}$  vrijedi  $M_\Phi^* f \in L^p$ . Doista, za  $\Phi \in \mathcal{S}$ , zbog konačnosti familije  $\mathcal{F}$ , dobro je definirana funkcija

$$\phi := \frac{\Phi}{\max\{\|\Phi\|_{\alpha, \beta} : \|\cdot\|_{\alpha, \beta} \in \mathcal{F}\}}.$$

Osim toga je i  $\phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$  pa pretpostavka (ii) daje  $M_\phi f \in L^p$ . Sada, po maločas pokazanom, dobivamo tvrdnju za funkciju  $\phi$ ; međutim, kako se ona od početne funkcije razlikuje samo za multiplikativnu konstantu, tvrdnja je zadovoljena i za  $\Phi$ .

Nadalje, jer je  $|f * \Phi_t(x)|^p \leq (M_{\Phi}^* f(y))^p$  i zbog činjenice da za fiksni  $t > 0$  i  $x$  volumen kugle  $|x - y| \leq t$  možemo izraziti u obliku  $ct^n$  (za određeni  $c > 0$ ) imamo

$$|f * \Phi_t(x)|^p \leq \min_{|x-y| \leq t} (M_{\Phi}^* f(y))^p \leq ct^{-n} \int_{|x-y| \leq t} (M_{\Phi}^* f(y))^p dy \leq ct^{-n} \|M_{\Phi}^* f\|_{L^p}^p.$$

Dakle je  $\|f * \Phi\|_{\infty} = \|f * \Phi_1\|_{\infty} < \infty$  pa zaključujemo da je  $f$  ograničena.

Neka je  $\{\Phi^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ograničena familija funkcija iz  $\mathcal{S}$  te  $P(x) = c_n(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}$  Poissonova jezgra (vidjeti odjeljak 0.3). Sada tvrdimo da je

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \Phi_{2^k}^{(k)}(x). \quad (2.13)$$

Jer je familija koju promatramo ograničena znamo da je  $M_{\Phi^{(k)}}^* \leq cM_{\mathcal{F}}$  za neku konstantu  $c$  neovisnu o  $k$ .

Nadalje, za  $a > 0$  je

$$\left(M_{\Phi_a}^* f\right)(x) = \sup_{a|x-y| < t} |(f * \Phi_t)(y)|$$

pa, ukoliko je  $a \geq 1$ , vrijedi i  $(M_{\Phi_a}^* f)(x) \leq M_{\Phi}^* f(x)$ . Konačno, prisjetimo se definicije  $u^*$  i, uz (2.13), dobivamo

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \sup_{|x-y| \leq t} |(f * P_t)(y)| \leq \sup_{|x-y| \leq t} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |(f * \Phi_{2^k}^{(k)})(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{|x-y| \leq t} |(f * \Phi_{2^k}^{(k)})(y)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (M_{\Phi^{(k)}}^* f)(x) \leq c(M_{\mathcal{F}} f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty. \end{aligned}$$

To znači da je  $(u^*)^p \leq c(M_{\mathcal{F}} f)^p$ ; stoga je i  $u^* \in L^p$ . Prema tome, ostaje još dokazati (2.13).

To postizemo oponašajući tehniku dokaza leme 2.1.4. Odabiremo, dakle, neku  $\phi \in C_c^{\infty}$  takvu da  $\phi(x) = 1$  na  $|x| \leq 1/2$  te  $\phi(x) = 0$  za  $|x| \geq 1$  pa imamo

$$P(x) = \phi(x)P(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)]P(x).$$

Izraz (2.13) je tada zadovoljen uz  $\Phi^{(0)}(x) = \phi(x)P(x)$  i

$$\Phi^{(k)}(x) = c_n[\phi(x/2) - \phi(x)](2^{-2k} + |x|^2)^{-(n+1)/2}, \quad k \geq 1.$$



Osim toga, činjenica da je ovako definirana familija  $\{\Phi^{(k)}\}$  ograničena se lako dobiva primijetimo li da je  $\phi(x/2) - \phi(x)$  nošena u  $1/2 \leq |x| \leq 2$ .

$(iii) \implies (i)$  Naposljetku, pretpostavimo (iii). Uzmimo sada u  $\infty$  brzo opadajuću funkciju  $\eta$  zadanu na  $(1, \infty)$  koja osim toga zadovoljava i sljedeće momentne uvjete:

$$\int_1^\infty \eta(s) ds = 1 \quad \text{i} \quad \int_1^\infty s^k \eta(s) ds = 0, k = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Doista, takvu funkciju znademo i eksplicitno zapisati; primjer je

$$\eta(s) := \frac{1}{\pi s} \operatorname{Im}\{\exp[1 - w(s-1)^{1/4}]\}$$

gdje je  $w = e^{-i\pi/4}$  (vidjeti točku 3.2.2 u [17]).

Sada za funkciju

$$\Phi(x) := \int_1^\infty \eta(s) P_s(x) ds \quad (2.15)$$

želimo dokazati da je takva za koju je (i) zadovoljeno.

Korištenjem binomnog teorema (odnosno, njegovog poopćenja):

$$(1 + t^2)^{-(n+1)/2} = \sum_{k < R} a_k t^k + O(t^R), \quad 0 \leq t < \infty$$

pri čemu su  $a_k$  odgovarajući binomni koeficijenti, možemo zapisati

$$P_s(x) = \frac{c_n s}{(s^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}} = \sum_{k < R} c_n a_k s |x|^{1-n} \left(\frac{s}{|x|}\right)^k + O(s^{R+1} |x|^{-n-1-R}).$$

Vraćanjem u (2.15) i korištenjem momentnih uvjeta (2.14) vidimo da je  $\Phi$  brzo opadajuća. Analogno, deriviranjem (po  $x$ ) pod znakom integrala, sličnim rezoniranjem to isto zaključujemo i za proizvoljnu derivaciju funkcije  $\Phi$ . Dobili smo  $\Phi \in \mathcal{S}$ .

Također, kako je  $\int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx = 1$  (odjeljak 0.3) to korištenjem Fubinijevog teorema zamjenom varijabli vidimo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) dx = \int_1^\infty \eta(s) ds \cdot \int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx = \int_1^\infty \eta(s) ds = 1.$$

Sličan račun pokazuje i

$$(f * \Phi_t)(x) = \int_1^\infty u(x, st) \eta(s) ds$$

pri čemu je  $u(x, t)$  definirano kao na početku ovog poglavlja. Ali sada vrijedi

$$M_{\Phi}f(x) \leq \sup_{t>0} |u(x, t)| \int_1^{\infty} |\eta(s)| ds = c \sup_{t>0} |u(x, t)| \leq cu^*(x)$$

pa zaključujemo da je  $M_{\Phi}f \in L^p$ . Time je dokaz teorema potpun.  $\square$

Revidiramo li postupak u dokazu tvrdnje (i)  $\implies$  (ii) u prethodnom teoremu, naime pozivajući na napomenu 2.1.5, vidimo da smo familiju  $\mathcal{F}$  mogli odabrati neovisno o  $f$ . Preciznije, za parametar  $N$  dovoljno velik ( $N > n/p$ ) stavimo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N := \{|\cdot|_{\alpha, \beta} : |\alpha|, |\beta| \leq N\}$$

pa dobivamo da su veličine

$$\|M_{\Phi}f\|_{L^p}, \quad \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N}f\|_{L^p} \quad \text{i} \quad \|u^*\|_{L^p} \quad (2.16)$$

usporedive među sobom i bilo koju od njih možemo tretirati kao “normu” na  $H^p(\mathbb{R}^n)$ . Naravno, radi se doista o normi samo u slučaju  $p \geq 1$ . Ipak, za  $p \leq 1$  možemo gledati  $p$ -tu potenciju jedne od tih veličina i ona će onda definirati metriku na  $H^p$ ; time je, dakle, definirana topologija na Hardyjevim prostorima.

Korisno je uočiti i sljedeće činjenice koje navodimo u obliku formalne napomene.

**Napomena 2.1.6.** (a) *Neka je  $f \in H^p$  i  $\Phi \in \mathcal{S}$ . Tvrdimo da se tada funkcija  $f * \Phi \in C^{\infty}$  nalazi u svakom  $L^r$  za  $r \geq p$ . To je očigledno točno za  $r = p$  jer vrijedi  $|(f * \Phi)(x)| \leq (M_{\Phi}^*f)(x)$ , a (kao što smo imali i na više mjesta u prethodnom dokazu) znamo da  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}f \in L^p$  jamči  $M_{\Phi}^*f \in L^p$ . Osim toga, po definiciji maksimalnog operatora  $M_{\Phi}^*$ , za svaki  $y$  takav da je  $|y - x| \leq 1$  imamo*

$$|(f * \Phi)(x)| \leq (M_{\Phi}^*f)(y)$$

što, pak, daje

$$|(f * \Phi)(x)|^p \leq \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} [(M_{\Phi}^*f)(y)]^p dy \leq c \|f\|_{H^p}^p.$$

gdje je  $B_x$  jedinična kugla oko  $x$ . Zaključujemo da se  $f * \Phi$  također nalazi i u  $L^{\infty}$ , odnosno  $f * \Phi \in L^p \cap L^{\infty}$  pa smo gotovi po teoremu o interpolaciji normi (vidjeti odjeljak 1 u IV. poglavlju u [12]).

(b) *Na isti način na koji smo u prethodnom dokazu pokazali da je svaka distribucija iz  $H^p$  ujedno i ograničena možemo pokazati da je konvergencija u  $H^p$  normi jača od*

one u smislu distribucija. Naime, neka je  $(f_n)$  niz u  $H^p$  takav da  $f_n \rightarrow f$  u  $H^p$ . Kako za  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\Phi \in \mathcal{S}$  vrijedi  $\Phi = \tau_{-x}(\widetilde{\tau_x \Phi})$ , možemo pisati

$$\langle f_n - f, \Phi \rangle = [(f_n - f) * (\tau_x \widetilde{\Phi})](-x)$$

pa nastavljamo potpuno analogno. Ovdje smo koristili oznake iz prvog poglavlja.

Uzmimo sada neko  $1 < p \leq \infty$ . Sada ćemo pokazati da prostor  $H^p$  možemo poistovjetiti sa  $L^p$ . Uzmimo prvo  $f \in L^p$ . Znamo da je  $M_\Phi f(x) \leq cMf(x)$  (gdje je  $M$ , kao i prije, standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator); vidjeti točku 2.1. u [18]. Međutim, po maksimalnom teoremu za  $M$  (teorem 0.3.10) znamo da je  $Mf \in L^p$  pa dobivamo  $f \in H^p$ . S druge strane, neka je  $\Phi \in \mathcal{S}$  takva da je  $\int \Phi = 1$  i  $M_\Phi f \in L^p$ . To pak znači da je  $\sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)| < \infty$  za gotovo svaki  $x$  jer, budući da je  $f \in L^p$ , za  $M_\Phi f$  mora vrijediti da je konačna osim možda na skupu mjere 0. Dobivamo da je niz  $(f * \Phi_{1/n})_n$  ograničen u  $L^p$ . Kako je, nadalje,  $L^p$  dual prostora  $L^{p'}$  (gdje je  $1/p' + 1/p = 1$ ) to, po Banach-Alaoglu teoremu (teorem 0.1.5), znamo da je i slabo kompaktan. Stoga možemo pronaći  $f_0 \in L^p$  i podniz (kojeg isto označavamo) takav da  $f * \Phi_{1/n} \rightarrow f_0$  slabo. Međutim, po rezultatu o aproksimaciji identiteta (propozicija 1.3.3) znamo da  $f * \Phi_{1/n} \rightarrow f$  u smislu distribucija, a kako se ta dva limesa ne mogu razlikovati, vrijedi  $f = f_0$ ; dakle je  $f \in L^p$ .

Što je sa rubnim slučajem  $p = 1$ ? Na isti način kao i maločas dobivamo  $H^1 \subset L^1$ . Međutim, može se pokazati da ne vrijedi jednakost; vidjeti točku 1.2.1 u [18].

S obzirom na prethodnu raspravu, u ostatku ovog poglavlja promatramo  $H^p$  samo za eksponente  $0 < p \leq 1$ .

## 2.2 Atomarna dekompozicija

Ovaj odjeljak predstavlja alternativni (ali ekvivalentan) pogled na elemente Hardyjevih prostora, a ponudit će daljnji uvid u njihovu prirodu. Ideja je “razbiti” prostor  $H^p$  na dijelove — jednostavnije elemente koje je lakše promatrati i koji neposredno otkrivaju određena svojstva, a pomoću kojih onda možemo prikazati bilo koji element prostora  $H^p$ . Te gradivne blokove nazivamo *atomima*, a kako bismo taj pojam učinili opipljivijim damo definiciju  $H^1$  atoma.

Neka je  $B$  kugla u  $\mathbb{R}^n$ . Kažemo da je funkcija  $a$  atom za  $H^1(\mathbb{R}^n)$  ako vrijedi:

- (i)  $a$  je nošena u  $B$ ,
- (ii)  $|a| \leq |B|^{-1}$  gotovo svuda i

$$(iii) \int a = 0.$$

Nije se teško uvjeriti (a to ćemo napraviti kasnije) da je  $a \in H^1$ . U svojstvu (iii) se sada ogleda sljedeća (u uvodu ovog poglavlja već nagoviještena) činjenica: nalazi li se distribucija  $f$  u prostoru  $H^1$  nije samo pitanje njene veličine ( $M_\Phi f \in L^1$ ) već mora imati i stanovita svojstva poništavanja koja osiguravaju iščezavanje integrala.

U slučaju  $0 < p \leq 1$  definicija atoma je slična, a vrijedi i prethodna opaska u analognoj formulaciji.

**Definicija 2.2.1.** *Neka je  $0 < p \leq 1$ . Za funkciju  $a$  kažemo da je atom prostora  $H^p(\mathbb{R}^n)$  ako*

(i) *postoji kugla  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  takva da je  $a$  nošena u  $B$ ,*

(ii)  *$|a| \leq |B|^{-1/p}$  gotovo svuda i*

(iii)  *$\int x^\alpha a(x) dx = 0$  za sve multiindekse  $\alpha$  sa svojstvom  $|\alpha| \leq n(p^{-1} - 1)$ .*

Prije no što dođemo do temeljnog rezultata ovog dijela, uvodimo novi maksimalni operator. Naime, za čvrstu  $\Phi \in C^\infty$  nošenu u jediničnoj kugli oko 0 te za koju vrijedi  $\int \Phi \neq 0$  stavimo

$$\mathcal{M}_0 f(x) := M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|.$$

Također, za  $H^p$  normu uzimamo

$$\|f\|_{H^p} := \|\mathcal{M}_0 f\|_{L^p}.$$

Dakako, mogli smo se odlučiti i za neku drugu od prethodno razmatranih veličina iz (2.16). Osim toga, kroz ostatak ovog dijela poglavlja držimo fiksnom neku konačnu familiju polunormi  $\mathcal{F}$  i koristimo pokratu  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ .

Dodajmo samo još da uvedena notacija služi tek kao podsjetnik da naša razmatranja više nisu ovisna o samoj distribuciji  $f$  i familiji  $\mathcal{F}$  (vidjeti također i raspravu na kraju prethodnog odjeljka).

Cilj je ovdje dokazati da će se distribucija  $f$  nalaziti u  $H^p$  ako i samo ako ju možemo prikazati u obliku

$$f = \sum_k \lambda_k a_k$$

gdje su  $a_k$  atomi promatranog Hardyjevog prostora, a  $(\lambda_k)$  prikladan niz kompleksnih brojeva. Preciznu tvrdnju iskazat ćemo nešto kasnije, a za njen dokaz preliminarno navodimo jednu varijantu Claderón- Zygmundove dekompozicije.

**Propozicija 2.2.2.** *Neka je  $f$  lokalno integrabilna funkcija takva da je  $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  za  $0 < p \leq 1$  i  $\alpha > 0$ . Tada postoji dekompozicija  $f = g + b$ ,  $b = \sum b_k$  i familija kocki  $\{Q_k^*\}$  (u  $\mathbb{R}^n$ ) tako da*

(i) *funkcija  $g$  je ograničena i  $g(x) \leq c\alpha$  za gotovo svaki  $x$ ,*

(ii) *za svaki  $k$  je funkcija  $b_k$  je nošena u  $Q_k^*$ , a vrijedi i*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_0 b_k)^p dx \leq c \int_{Q_k^*} (\mathcal{M}f)^p dx$$

$$\text{te } \int b_k = 0,$$

(iii) *familija  $\{Q_k^*\}$  ima svojstvo ograničenog presjeka (drugim riječima, svaka točka iz  $\cup Q_k^*$  se nalazi u najviše konačno mnogo kocki  $Q_k^*$ ) i vrijedi*

$$\bigcup_k Q_k^* = \{x : \mathcal{M}f(x) > \alpha\}.$$

Dokaz ove tvrdnje je netrivialan, a budući da nije neposredno vezan uz materiju Hardyjevih prostora, na ovom ga mjestu izostavljam. Zainteresirani čitatelj detaljnu demonstraciju može pronaći u [18] (vidjeti točku 2.1. u §2). Bitno je imati na umu da nam Calderón-Zygmundova dekompozicija daje način da funkciju  $f$  kao gore rastavimo na dva dijela: jedan proizvoljno malen i jedan kojem znademo kontrolirati veličinu (u smislu  $H^p$  norme). Štoviše, iz dokaza je jasno da vrijedi sljedeći korolar (vidjeti korolar 2.1.5 u [18]).

**Korolar 2.2.3.** *Za bilo koji prirodni broj  $d$  elemente dekompozicije iz prethodne propozicije možemo presložiti tako da funkcije  $b_k$  zadovoljavaju*

$$\int b_k q dx = 0$$

*za sve polinome  $q$  stupnja  $\leq d$ .*

Vratimo se sada atomima prostora  $H^p$  za neko  $0 < p \leq 1$ . Uočimo odmah da svojstva (i) i (ii) iz definicije 2.2.1 jamče da je  $\int |a(x)|^p dx \leq 1$ . Nadalje, sada koristimo svojstvo (iii) za dokazivanje za nas krucijalne nejednakosti (koja distribuciju promovira u redove Hardyjevih distribucija):

$$\int (\mathcal{M}_0 a(x))^p dx \leq c \tag{2.17}$$

gdje je  $\mathcal{M}_0$  generirana  $C^\infty$  funkcijom  $\Phi$  nošenom u jediničnoj kugli oko ishodišta i za koju vrijedi  $\int \Phi \neq 0$ . Drugim riječima, promatramo  $\mathcal{M}_0 f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|$ . Uzmimo,

dalje, atom  $a$  prostora  $H^p$  nošen u kugli  $B$  s centrom  $\bar{x}$ . Neka je  $B^*$  također kugla s centrom  $\bar{x}$ , ali dvostruko većeg radijusa od  $B$ . Gornji integral sada razdvajamo na

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_0 a(x))^p dx = \int_{B^*} (\mathcal{M}_0 a(x))^p dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} (\mathcal{M}_0 a(x))^p dx.$$

Vrlo jednostavan račun pokazuje da za  $x \in B^*$  imamo  $\mathcal{M}_0 a(x) \leq c|B|^{-1/p}$ . Ostaje razmotriti što se događa za  $x \notin B^*$ . Uzmimo da je  $d$  najmanji prirodni broj takav da  $d > n(p^{-1} - 1)$  te sa  $q_{x,t}$  označimo Taylorov polinom stupnja  $d$  funkcije  $y \mapsto \Phi_t(x - y)$  oko  $\bar{x}$ . Korištenjem momentnih uvjeta (iii) dobivamo

$$\begin{aligned} (a * \Phi_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} a(y) \Phi_t(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} a(y) [\Phi_t(x - y) - q_{x,t}(y)] dy \\ &= \int_B a(y) [\Phi_t(x - y) - q_{x,t}(y)] dy. \end{aligned}$$

Prisjetimo se sada uobičajenih ocjena ostatka u Taylorovom razvoju, naime

$$|\Phi_t(x - y) - q_{x,t}(y)| \leq c \frac{|y - \bar{x}|^{d+1}}{t^{n+d+1}}.$$

Međutim je  $y \in B$ ,  $x \notin B^*$ , a  $\Phi$  je nošena u  $B(0, 1)$  pa možemo uzeti  $t \geq c|x - \bar{x}|$ . S druge strane, označimo li sa  $r$  radijus kugle  $B$ , vrijedi ocjena  $|y - \bar{x}| < r$  pa dobivamo

$$\mathcal{M}_0 a(x) \leq c \left( \frac{r}{|x - \bar{x}|} \right)^{n+d+1} \cdot |B|^{-1/p}. \quad (2.18)$$

Zbog našeg odabira broja  $d$  vrijedi  $(n+d+1)p > n$  pa dobivamo (2.17). Time smo pokazali da su atomi uistinu i elementi prostora  $H^p$ .

Uzmimo sada neku kolekciju  $\{a_k\}$   $H^p$  atoma i niz kompleksnih brojeva  $(\lambda_k)$  konačne  $l^p$  norme, odnosno, takav da vrijedi  $\sum_k |\lambda_k|^p < \infty$ . Tvrdimo da tada i red

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \quad (2.19)$$

konvergira u smislu distribucija i vrijedi  $\|f\|_{H^p} \leq c(\sum_k |\lambda_k|^p)^{1/p}$ , to jest,  $f$  se nalazi u  $H^p$ . Da bismo se u to uvjerali uočimo da, u slučaju da je gornji red konvergentan (u  $\mathcal{D}'$ ) to zbog neprekidnosti konvoluiranja distribucije s test funkcijama (vidi teorem 1.3.4) lako dobivamo

$$\mathcal{M}_0 f = \mathcal{M}_0 \left( \sum_k \lambda_k a_k \right) \leq \sum_k |\lambda_k| \mathcal{M}_0 a_k.$$

S druge strane, jer je  $p \leq 1$ , vrijedi

$$\left( \sum_k |\lambda_k| \mathcal{M}_0 a_k \right)^p \leq \sum_k |\lambda_k|^p (\mathcal{M}_0 a_k)^p.$$

Kombiniranjem prethodnih dviju nejednakosti te integriranjem slijedi

$$\int [\mathcal{M}_0 f(x)]^p dx \leq \sum_k |\lambda_k|^p \int [\mathcal{M}_0 a_k(x)]^p dx \leq \sum_k |\lambda_k|^p$$

što dokazuje konvergenciju (2.19) u  $H^p$  normi. Prisjetimo li se napomene 2.1.6 (ii) zaključujemo da taj red, štoviše, konvergira i u smislu distribucija.

**Napomena 2.2.4.** Uočimo da smo prethodnim postupkom dokazali da je potprostor (a lako je provjeriti da on to doista i jest) konačnih linearnih kombinacija atoma  $H^p$  gust u  $H^p$  — to slijedi zbog konvergencije reda (2.19) u  $H^p$  normi. Štoviše, uzmemo li u obzir definiciju  $H^p$  atoma 2.2.1, možemo primijetiti i da je tu doista riječ o prostoru ograničenih funkcija s kompaktnim nosačem koje zadovoljavaju momentno svojstvo (iii) iz te definicije.

Naposljetku dolazimo i do glavnog rezultata u ovom odjeljku, a radi se o stanovitom obratu prethodne konkluzije.

**Teorem 2.2.5.** Neka je  $p \leq 1$ . Tada svaki  $f \in H^p$  možemo prikazati kao sumu određenih  $H^p$  atoma, kao u (2.19). Štoviše, taj će red konvergirati u  $H^p$  normi, a vrijedi i

$$\sum_k |\lambda_k|^p \leq c \|f\|_{H^p}^p.$$

Prije nego što ponudimo dokaz ovog teorema navodimo jedan rezultat o gustoći u  $H^p$  te određene nove pojmove i odnose, a koji se pojavljuju u dokazu propozicije 2.2.2.

**Lema 2.2.6.** Neka je  $0 < p \leq 1$ . Prostor lokalno integrabilnih funkcija je gust u  $H^p$ .

Za lokalno integrabilnu funkciju  $f$  želimo dobiti familiju  $\{Q_k^*\}$  iz Claderón-Zygmundove dekompozicije. To radimo tako da za odabrani  $\alpha > 0$  prvo uvedemo skup  $O = \{x : \mathcal{M}f > \alpha\}^4$  i nađemo njegovu Whitneyjevu dekompoziciju  $\{Q_k\}$  (vidjeti propoziciju 0.3.11). Za  $b > 1$  promatramo "napuhane" kocke  $bQ_k$ . Štoviše, uzmemo li  $b$  dovoljno malen, zbog svojstava familije  $\{Q_k\}$ , zaključujemo da možemo postići  $\cup Q_k^* = O$  te da familija  $\{Q_k^*\}$  ima svojstvo ograničenog presjeka.

<sup>4</sup>Ovdje, kao i u ostatku, uzimamo da  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  za prigodno odabranu konačnu familiju; vidjeti i uvod u ovaj odjeljak.

Sada nastavljamo našu konstrukciju. Neka je  $\zeta \in C^\infty$  pozitivna funkcija koja na stranici kocke oko ishodišta brida duljine 1 postiže vrijednost 1, a iščezava izvan koncentrične kocke sa stranicama duljine  $a > 1$  (uzimamo da je  $b > a$ ). Nadalje, postavimo  $\zeta_k(x) := \zeta([x - x_k]/l_k)$  gdje je  $x_k$  centar kocke  $Q_k$ , a  $l_k$  duljina njene stranice. Uzmemo li sada

$$\eta_k := \zeta_k / \left( \sum_j \zeta_j \right)$$

lako provjeravamo da je  $\chi_O = \sum_k \eta_k$  te da je svaka funkcija  $\eta_k$  nošena u  $\tilde{Q}_k := aQ_k$ . Konačno, elemente  $b_k$  dobivamo tako da stavimo  $b_k = (f - c_k)\eta_k$  i konstantu  $c_k$  podesimo tako da  $b_k$  zadovoljava momentni uvjet  $\int b_k = 0$ ; to jest, odabiremo  $c_k = \int f\eta_k / \int \eta_k$ .

S ovim osnovnim elementima Calderón-Zygmundove dekompozicije na umu, spremni smo dokazati lemu 2.2.6.

*Dokaz leme 2.2.6.* Ideja je za  $f \in H^p$  pronaći odgovarajuću dekompoziciju kao u propoziciji 2.2.2:  $f = g + b$ . Tada bi, korištenjem tvrdnji (ii) i (iii) iz te propozicije, imali

$$\|b\|_{H^p}^p = \|\mathcal{M}_0 b\|_{L^p}^p \leq \sum_k \|\mathcal{M}_0 b_k\|_{L^p}^p \leq c \int_{\{\mathcal{M}f > \alpha\}} (\mathcal{M}f)^p dx$$

što bi davalo  $\|b\|_{H^p} \rightarrow 0$  kada  $\alpha \rightarrow 0$  pri čemu je  $\alpha$  parametar dekompozicije. Osim toga, tvrdnja (i) bi davala da je  $g$  lokalno integrabilna pa bi upravo to bio traženi aproksimirajući niz. Nažalost, problem je u tome što u ovom trenutku nije jasno postoji li zaista takva dekompozicija za proizvoljnu distribuciju iz  $H^p$  koja zadovoljava navedena svojstva (i)-(iii).

Pokušat ćemo iznaći sličnu dekompoziciju, ali sa nešto općenitijim svojstvima. Za početak, uočimo da  $b_k$  možemo definirati kao i u maločas predstavljenoj konstrukciji:  $b_k = (f - c_k)\eta_k$ ; razlika je što su sada  $b_k$  distribucije s kompaktnim nosačem. Svakako je, dakle, smisleno promatrati njen integral (vidjeti napomenu 0.2.11), a slično kao i prije dobivamo  $\int b_k = 0$ . Nadalje, može se pokazati da za kocke  $Q_k^*$  kao gore vrijede nejednakosti

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \leq c\mathcal{M}f(x), \quad x \in Q_k^* \tag{2.20}$$

te

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \leq c\alpha \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}}, \quad x \notin Q_k^* \tag{2.21}$$

pri čemu  $l_k$  označava duljinu brida kocke  $Q_k$ . Te se nejednakosti dobivaju analognim postupkom kao i ocjene (24) i (25) u točki 2.1.3 iz dokaza propozicije 2.1 u [18].

Korištenjem tih dviju nejednakosti direktno dobivamo da vrijedi (ii) kao u propoziciji 2.2.2



što nam je, pak, dovoljno za ostvarivanje konvergencije reda  $\sum_k b_k$  u  $H^p$  normi pa, posljedično, i u smislu distribucija. Stavimo  $b = \sum_k b_k$  pa — nakon svega rečenog — zaključujemo da je distribucija  $g = f - b$  dobro definirana.

Preostaje nam još zaključak (i) iz propozicije 2.2.2 zamijeniti s nejednakošću koju znamo dokazati i bez pretpostavke da je  $f$  lokalno integrabilna, a koja će istovremeno biti dostatna da dobijemo lokalnu integrabilnost od  $g$ . Na ovom mjestu još jednom svjedočimo praktičnoj vrijednosti maksimalnih operatora — pokazat će se da je dobra surogat-ocjena sljedeća:

$$\mathcal{M}_0 g(x) \leq c \mathcal{M} f(x) \chi_{O^c}(x) + c\alpha \sum_k \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \quad (2.22)$$

Zaista, ona odmah daje

$$\int \mathcal{M}_0 g \, dx \leq c \int_{\{\mathcal{M} f \leq \alpha\}} \mathcal{M} f \, dx + c\alpha \sum_k |l_k|^n.$$

S druge strane, vrijedi

$$\alpha \sum_k |l_k|^n = \alpha \sum |Q_k| = \alpha |\{\mathcal{M} f > \alpha\}| = \alpha^{1-p} \int_{\{\mathcal{M} f > \alpha\}} \alpha^p \, dx \leq \alpha^{1-p} \int (\mathcal{M} f)^p \, dx$$

i

$$\int \mathcal{M} f \, dx \leq \alpha^{1-p} \int (\mathcal{M} f)^p \, dx$$

pa iz naše gornje nejednakosti dobivamo  $g \in H^1$ . Prisjetimo li se napomene s kraja prethodnog odjeljka, znamo da je  $g \in L^1$  pa je tvrdnja dokazana.

Dakle, dužni smo još jedino dokazati (2.22). To ćemo postići promatranjem dva slučaja. Uzmimo prvo da  $x \notin O$ . Tada očitо vrijedi  $\mathcal{M}_0 g \leq \mathcal{M}_0 f + \sum \mathcal{M}_0 b_k$ . Osim toga je i  $|x - x_k| \geq cl_k$  budući da  $x \notin O$  i  $x_k$  je centar od  $Q_k^*$  te  $l_k$  duljina njenog brida. Stoga, koristeći (2.21), dobivamo

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \leq \frac{c\alpha l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Kako je očitо zadovoljeno i  $\mathcal{M}_0 f \leq c \mathcal{M} f$  vidimo da 2.22 vrijedi u slučaju  $x \notin O$ .

Uzmimo sada da je  $x \in O$ ; tada je jamačno  $x \in Q_m^*$  za neko  $m$ . Sada ćemo kocke  $Q_k^*$  iz particije skupa  $O$  promatrati u kontekstu njihove udaljenosti od  $Q_m^*$ ; promatramo dvije klase kocki: one “bliske”  $Q_m^*$ , to jest, one za koje je  $Q_m^* \cap Q_k^* \neq \emptyset$  i one “daleke”, to jest,

takve za koje je  $Q_m^* \cap Q_k^* = \emptyset$ . Jasno je da postoji neka konačna i fiksna gornja granica za broj kocaka “bliskih” nekoj  $Q_m^*$  — i ta granica ne ovisi o  $m$ . Možemo, stoga, pisati  $g = (f - \sum_{\text{bliske}} b_k) - \sum_{\text{daleke}} b_k$ .

Kao i u prethodnom slučaju, pomoću (2.21) i činjenice da vrijedi  $|x - x_k| \geq cl_k$ , za “daleke” kocke dobivamo ocjenu

$$\mathcal{M}_0 b_k \leq \frac{c\alpha l_k^{n+1}}{(l_k - |x - x_k|)^{n+1}}$$

pa zaključujemo da je

$$\mathcal{M}_0 \left( \sum_{\text{daleke}} b_k \right) \leq c\alpha \sum_{\text{daleke}} \frac{l_k^{n+1}}{(l_k - |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Ostaje još vidjeti što se događa sa komadom  $f - \sum_{\text{bliske}} b_k$ . Prema prijašnjoj je konstrukciji  $b_k = (f - c_k)\eta_k$  pa je i

$$f - \sum_{\text{bliske}} b_k = f - \sum_{\text{bliske}} f\eta_k - \sum_{\text{bliske}} c_k\eta_k.$$

Prema tome vrijedi

$$\mathcal{M}_0 \left( f - \sum_{\text{bliske}} b_k \right) \leq \mathcal{M}_0 \left[ f \left( 1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k \right) \right] + \sum_{\text{bliske}} |c_k| \mathcal{M}_0(\eta_k).$$

Preostaje samo ocijeniti desnu stranu. Može se pokazati da vrijedi

$$|c_k| < c\alpha$$

(vidjeti nejedakost (22) u točki 2.1.2. iz dokaza poopćenja Claderón-Zygmundove dekompozicije u [18]).

Također, kao što spomenuli, sve su sume u gornjem rastavu konačne. Opet, slično kao i prije, budući da je  $x \in Q_m^*$  i  $l_m \geq c|x - x_m|$ , zaključujemo

$$\sum_{\text{bliske}} |c_k| \mathcal{M}_0(\eta_k) \leq \frac{c\alpha l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

Konačno, za ocjenu prvog člana s desne strane promatramo  $[f(1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k) * \Phi_t](x)$ . Samo su dvije mogućnosti: ako je  $t \leq c_0 d(Q_m, O^c)$  ( $d$  označava udaljenost dva skupa definiranu u standardnom smislu) za neku odabranu, dovoljno malenu, konstantu  $c_0$ , onda jamačno vrijedi  $[f(1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k) * \Phi_t](x) = 0$ . Zaista, po definiciji preslikavanja  $\eta_k$  će  $1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k$  iščezavati na  $Q_m^*$ , a  $\Phi_t$  je nošena u kugli oko ishodišta radijusa  $t$ ,  $B(0, t)$  pa tvrdnja slijedi

zbog odabira  $t$ . S druge strane, imamo li  $t > c_0 d(Q_m, O^c)$ , možemo pokazati da će vrijediti ocjena

$$\mathcal{M}_0(f\eta_k)(x) \leq c\mathcal{M}f(x)$$

(vidjeti raspis gore već referencirane ocjene 25 iz [18]), a jasno je da vrijedi i  $\mathcal{M}_0f \leq c\mathcal{M}f$  pa lako slijedi ocjena i u ovom slučaju.

Summa summarum, i u slučaju  $x \in O$  smo dokazali ocjenu (2.22) pa je dokaz leme dovršen.  $\square$

Sada smo spremni prijeći na dokaz glavnog rezultata.

*Dokaz teorema 2.2.5.* Tvrdnju ćemo prvo dokazati uz dodatnu pretpostavku da je naša distribucija  $f$  lokalno integrabilna funkcija. U općenitom slučaju tvrdnja slijedi po gustoći jednostavnom modifikacijom argumenta.

Pretpostavimo, dakle, da je  $f$  lokalno integrabilna. Za svaki  $j \in \mathbb{Z}$  sada promatramo poopćenu Calderón- Zygmundovu dekompoziciju funkcije  $f$  sa  $\alpha$  jednakim  $2^j$ . Pri tome označavamo  $f = g^j + b^j$  i  $b^j = \sum_k b_k^j$ , a svaki je  $b_k^j$  dan sa  $b_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j$  gdje  $c_k^j$  biramo po analogiji s prethodnom konstrukcijom. Nadalje, označimo li  $O^j = \{x : \mathcal{M}f(x) > 2^j\}$  očito imamo  $O^{j+1} \subset O^j$ , a dobivamo i da je svaka funkcija  $b_k^j$  nošena u  $Q_k^{j*}$  uz  $\cup_k Q_k^{j*} = O^j$ . Konačno, kocke  $Q_k^{j*}$  su dobivene "napuhivanjem" kao u konstrukciji koja je prethodila ovom dokazu.

Uočimo sada da zacijelo imamo  $g^j \rightarrow f$  u  $H^p$  normi kada  $j \rightarrow \infty$ . Zaista, sličnim rezoniranjem kao i prije te eksploatacijom tvrdnji (ii) i (iii) iz propozicije 2.2.2 slijedi

$$\|b^j\|_{H^p}^p = \int (\mathcal{M}_0 b^j)^p dx \leq \sum_k \int (\mathcal{M}_0 b_k^j)^p dx \leq \int_{\cup_k Q_k^{j*}} (\mathcal{M}f)^p dx = \int_{\mathcal{M}f > 2^j} (\mathcal{M}f)^p dx \rightarrow 0.$$

Kao i maločas, opet zaključujemo da  $g^j \rightarrow f$  i u smislu distribucija. Osim toga, tvrdnja (i) iz iste propozicije daje  $|g^j| \leq c2^j$  pa vrijedi

$$g^j \rightarrow 0 \quad \text{uniformno kada } j \rightarrow -\infty.$$

Kombiniranjem tih dviju činjenica i jednostavnim argumentom teleskopiranjem dobivamo

$$f = \sum (g^{j+1} - g^j) \tag{2.23}$$

pri čemu konvergenciju promatramo u smislu distribucija.

Nejednakost trokuta daje  $|g^{j+1} - g^j| \leq c2^j$ . S druge strane je  $g^{j+1} - g^j = b^j - b^{j+1}$  pa zaključujemo da je  $g^{j+1} - g^j$  nošena u  $O^j$ . Dakle, umjesto (2.23) možemo pisati

$$f = \sum_{j,k} (g^{j+1} - g^j) \eta_k^j. \quad (2.24)$$

Sa  $B_k^j$  označimo kuglu opisanu  $Q_k^{j*}$  i stavimo  $a_{j,k} = (g^{j+1} - g^j) \eta_k^j \cdot c^{-1} 2^{-j} |B_k^j|^{-1/p}$ . Očito je  $a_{j,k}$  nošena u  $B_k^j$ , a vrijedi i  $|a_{j,k}| \leq |B_k^j|^{-1/p}$ . Željeli bismo, uz  $\lambda_{j,k} = c2^j |B_k^j|^{1/p}$ , iz (2.24) dobiti tvrdnju. Nažalost,  $a_{j,k}$  su tek “zamalo” atomi jer ne zadovoljavaju momentne uvjete. U ostatku ovog dijela dokaza radimo na dostatnom profinjenju gornje dekompozicije kako bismo postigli željena svojstva poništavanja.

Sada oponašamo postupak u dokazu propozicije 2.2.2 pa čitatelja pozivamo da detalje upotpuni revizijom već referenciranog dokaza u [18]. Označimo prvo sa  $\mathcal{H}_k^j$  Hilbertov prostor (kompleksnih) funkcija definiranih na  $Q_k^{j*}$  uz skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{\int f(x)g(x)\eta_k^j(x) dx}{\int \eta_k^j(x) dx}. \quad (2.25)$$

Jasno, u  $\mathcal{H}_k^j$  držimo da leže točno one funkcije kojima je norma inducirana gornjim skalarnim produktom konačna.

Za prirodan broj  $d$ , u  $\mathcal{H}_k^j$  sada promatramo konačno-dimenzionalni potprostor polinoma stupnja  $\leq d$  kojeg označavamo sa  $\mathcal{H}_{k,d}^j$ . Neka je  $P_k^j$  ortogonalni projektor na taj potprostor; tada je

$$c_k^j = P_k^j(f).$$

Lako je uvjeriti se da je polinom  $c_k^j$  takav za koji imamo momentno svojstvo

$$\int (f - c_k^j \eta_k^j) q dx = 0 \quad (2.26)$$

za sve polinome  $q$  stupnja  $\leq d$ . (Za ponešto detaljniji pregled ove konstrukcije vidjeti točku 2.4.1 u dokazu propozicije 2.1 u [18]).

Odaberimo sada jedan  $j \in \mathbb{Z}$  i držimo ga fiksnim. Radi jednostavnije notacije pišemo samo  $P_k^j = P_k$ . Nadalje, promatramo polinom  $c_{k,l}$  zadan sa

$$c_{k,l} = P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]. \quad (2.27)$$

Neka je  $\{e_m\}$  baza prostora  $\mathcal{H}_{k,d}^j$ . Može se provjeriti da je tada  $P(x, y) = \sum_k e_k(x)\bar{e}_k(y)$  jezgra operatora  $P_k^j$ ; drugim riječima, vrijedi

$$P_k^j f(x) = \int P(x, y) f(y) \eta_k^j(y) dy.$$

Sad je lako zaključiti da je  $c_{k,l} \neq 0$  samo ako su indeksi  $k$  i  $l$  takvi da je zadovoljeno  $Q_k^{j*} \cap Q_l^{j+1*} \neq \emptyset$ . Odsta, u gornjem se integralu pojavljuje član  $\eta_k^j(y)\eta_l^{j+1}(y)$  pa je tvrdnja jasna.

Na način sličan onome na koji se dobivaju ocjene (22) i (22') u spomenutom dokazu propozicije 2.2.2 može se pokazati da vrijedi

$$|c_{k,l}\eta_l^{j+1}| \leq c2^j. \quad (2.28)$$

Uočimo sljedeći račun.

$$g^{j+1} - g^j = b^j - b^{j+1} = \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}.$$

Posljednja jednakost slijedi neposredno iz dekompozicije  $b_k$  s početka ovog dokaza. Sad tvrdimo da vrijedi zapis

$$g^{j+1} - g^j = \sum_k A_k^j \quad (2.29)$$

pri čemu je

$$A_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j + \sum_l c_{k,l}\eta_l^{j+1}. \quad (2.30)$$

Kako bismo se u to uvjerali prisjetimo se prvo da — po konstrukciji — imamo  $\sum_k \eta_k^j = 1$ . To daje

$$\sum_k \left( \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j \right) = \left( \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1} \right) \cdot \sum_k \eta_k^j = \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}.$$

Također, uvažimo li tu opservaciju i u (2.27), dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_k c_{k,l} &= \sum_k P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j] = P_l^{j+1} \left[ (f - c_l^{j+1}) \sum_k \eta_k^j \right] = P_l^{j+1}[f - c_l^{j+1}] \\ &= P_l^{j+1}(f) - P_l^{j+1}(c_l^{j+1}) = P_l^{j+1}(f) - P_l^{j+1}(f) = 0. \end{aligned}$$

Promotrimo li iznova dekompoziciju (2.23) vidimo da možemo pisati

$$f = \sum_j \sum_k A_k^j.$$

Uočimo sljedeća svojstva  $A_k^j$ .

(i)  $A_k^j$  je sadržana u kugli koja sadrži  $Q_k^{j*}$  i sve  $Q_l^{j+1*}$  koje imaju netrivialan presjek s  $Q_k^{j*}$ .

Zaista, prisjetimo se da je  $\eta_k^j$  nošena u  $\widetilde{Q}_k^j \subset Q_k^{j*}$  pa vidimo da tvrdnja jamačno vrijedi za prva dva člana u (2.30), a za posljednji član slijedi istim udarcem uvažimo li opasku nakon (2.27). Štoviše, kako je  $O^{j+1} \subset O^j$  to — čim je  $Q_k^{j*} \cap Q_l^{j+1*} \neq \emptyset$  — pronalazimo konstantu  $c$  tako da vrijedi  $\text{diam}(Q_k^{j*}) \geq c \cdot \text{diam}(Q_l^{j+1*})$ .<sup>5</sup> Imajući to na umu, vidimo da smo  $B_k^j$  mogli odabrati tako da vrijedi  $|B_k^j| = c|Q_k^j|$ .

(ii)  $|A_k^j| \leq c2^j$ . Da se uvjerimo da je tome zaista tako primijetimo prvo da dio u (2.30) koji sadrži  $f$  možemo izraziti kao

$$f\eta_k^j(1 - \sum_l c_l^{j+1}\eta_l^{j+1}) = f\eta_k^j \cdot \chi_{(O^{j+1})^c},$$

(prisjetimo se definicije i svojstava funkcija  $\eta_p^r$  i  $c_p^r$ ) a po svojstvima Claderón-Zygmundove dekompozicije znademo da tamo imamo  $|f| \leq c2^j$ . Za ostale članove jednostavno koristimo ocjenu (2.28) kao i

$$4|c_k^j\eta_k^j| \leq c2^j$$

(vidjeti nejednakost (22') u dokazu propozicije 2.2.2 u [18]).

(iii)  $A_k^j$  zadovoljava momentne uvjete iz definicije atoma prostora  $H^p$ . Prisjetimo li se korolaru 2.2.3 odmah dobivamo da tvrdnja vrijedi za  $b_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j$ . Nadalje, po definiciji polinoma  $c_{k,l}$  imamo

$$\begin{aligned} (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j - c_{k,l}\eta_l^{j+1} &= (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j + P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]\eta_l^{j+1} \\ &= \{(f - c_l^{j+1})\eta_k^j - P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]\}\eta_l^{j+1} \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je član  $(f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j - c_{k,l}\eta_l^{j+1}$  okomit (u odnosu na prethodno definirani skalarni produkt) na prostor polinoma stupnja  $\leq d$  pa tvrdnja slijedi.

Sada smo skoro gotovi s našom konstrukcijom. Imamo  $f = \sum_{j,k} A_{j,k}$  pa stavimo  $a_k^j = c^{-1}2^{-j}|B_k^j|^{-1/p}A_k^j$  i  $\lambda_{j,k} = c2^j|B_k^j|^{1/p}$ . Prema gornjim razmatranjima tada vrijedi  $f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k}a_k^j$ , a također znamo i da su  $a_k^j$  atomi. Osim toga, imamo i

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p = c \sum_{j,k} 2^{jp}|B_k^j| = c' \sum_{j,k} 2^{jp}|Q_k^j| = c' \sum_j 2^{jp}|\{\mathcal{M}f > 2^j\}| \quad (2.31)$$

$$\leq c' \int_{\{\mathcal{M}f > 2^j\}} (\mathcal{M}f)^p dx \leq c \int (\mathcal{M}f)^p dx \simeq \|f\|_{H^p}^p. \quad (2.32)$$

Druga jednakost u prvom redu slijedi po komentaru u (i) gore, a prva nejednakost se dobije tako da jednostavno uočimo

$$\int_{\{\mathcal{M}f > 2^j\}} (\mathcal{M}f)^p dx > 2^{jp}|\{\mathcal{M}f > 2^j\}|.$$

<sup>5</sup>Ovdje je  $\text{diam}(Q)$  oznaka za duljinu prostorne dijagonale u kocki  $Q$ .

Time je, dakle, tvrdnja dokazana za lokalno integrabilne funkcije.

Uzmimo sada proizvoljnu distribuciju  $f \in H^p$ . Po lemi 2.2.6 pronalazimo niz lokalno integrabilnih funkcija  $(f_m)$  takav da je  $f_0 = 0$  i  $f_m \rightarrow f$  u  $\|\cdot\|_{H^p}$  kada  $m \rightarrow \infty$ . Štoviše, možemo pretpostaviti i da za svaki  $m \in \mathbb{N}_0$  vrijedi  $\|f_{m+1} - f_m\|_{H^p}^p \leq 2^{-m-1}\|f\|_{H^p}^p$ . U to se uvjerimo evociranjem dokaza propozicije 0.1.6 i poistovjećivanjem odgovarajućeg podniza sa samim nizom. Teleskopiranjem stoga jednostavno zaključujemo da vrijedi

$$f = \sum (f_{m+1} - f_m)$$

pri čemu konvergenciju, naravno, promatramo u  $H^p$  normi, a koja jamči i konvergenciju u smislu distribucija. Konačno, kako su sve funkcije  $f_{m+1} - f_m$  lokalno integrabilne, možemo uzeti njihovu atomarnu dekompoziciju kao u prethodnom dijelu dokaza čime dobivamo

$$f = \sum_{m,j,k} \lambda_{j,k}^m \alpha_k^{j,m}.$$

Osim toga, vrijedi i

$$\sum_{m,j,k} |\lambda_{j,k}^m|^p \leq c \sum \|f_{m+1} - f_m\|_{H^p}^p \leq c' \|f\|_{H^p}^p$$

pa je time dokaz tvrdnje završen. □

Naposljetku napomenimo da postoje i drugačiji načini da se pristupi iznalaženju sastavnih jedinica Hardyjevih prostora (u našim su razmatranjima tu ulogu imali atomi). Primjerice, uvjet (ii) iz definicije 2.2.1 smo mogli zamijeniti slabijim zahtjevom

$$\left( \frac{1}{|B|} \int_B |a|^q dx \right)^{1/q} \leq |B|^{-1/p}$$

pri čemu uzimamo  $q > 1$  za  $p = 1$  te  $q = 1$  za  $p < 1$ . Doista, da bismo pokazali da su tako definirani atomi elementi prostora  $H^p$  ključno je bilo osigurati da vrijedi nejednakost (2.17), a nju i u ovom slučaju dobivamo na gotovo posve isti način. Uzmimo da nas zanima slučaj  $p = 1$  i  $q > 1$ . Razlika je jedino u argumentaciji nejednakosti (2.18); naime, po maksimalnom teoremu 0.3.10 za standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator imamo  $\int_B (Ma)^q dx \leq c \int_B |a|^q dx$  pa (2.18) slijedi primjenom Hölderove nejednakosti. Po teoremu 2.2.5 sada zaključujemo da ovakve “generalizirane” atome možemo aproksimirati našim uobičajenim atomima. Postoje još neki načini generalizacije pojma atoma i tada govorimo o *molekulama* prostora  $H^p$ ; za više detalja vidjeti poglavlje 3, točku 5.7. u [18].

## Poglavlje 3

# Dualnost prostora $H^1$ i BMO

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da je prostor  $H^1$  — u izvjesnom smislu — prirodna zamjena za  $L^1$  (vidjeti, recimo, raspravu na kraju prvog odjeljka u prethodnom poglavlju). Sada naše napore ponovno usmjeravamo na taj Hardyjev prostor; naime, na problem pronalaska njegova duala, a centralni je rezultat ovog poglavlja pokazati da je to prostor funkcija ograničenih srednjih oscilacija<sup>1</sup> (kojeg je uobičajeno označavati sa BMO). Također, budući da je  $L^\infty$  dual prostora  $L^1$ , očekujemo da će i BMO biti prirodna zamjena za  $L^\infty$ .

U prvom dijelu ovog poglavlja dajemo pregled definicije i osnovnih svojstava prostora BMO, a drugi dio sadrži iskaz i dokaz već najavljenog teorema o dualnosti.

### 3.1 Funkcije ograničene srednje oscilacije

Kažemo da je funkcija  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  ograničene srednje oscilacije ako postoji konstanta  $A > 0$  takva da za svaku kuglu  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leq A \quad (3.1)$$

pri čemu  $f_B$  označava srednju vrijednost  $f$  na kugli  $B$ ; drugim riječima  $f_B = |B|^{-1} \int_B f dx$ . Sa BMO označavamo prostor svih funkcija ograničene oscilacije na  $\mathbb{R}^n$  opskrbljenog standardnim operacijama zbrajanja i množenja skalarom (po točkama).

Također, sa  $\|f\|_{\text{BMO}}$  označimo najmanji  $A$  za koji vrijedi (3.1); lako je provjeriti da smo time zadali normu na prostoru BMO.

Navedimo sada i neka jednostavna svojstva prostora BMO.

---

<sup>1</sup>engl. bounded mean oscillation.



**Napomena 3.1.1.** (i) Strogo uzevši, elementi prostora BMO su definirani samo do na aditivnu konstantu budući da su, očigledno, upravo konstante nul-elementi u  $\|\cdot\|_{BMO}$ .

(ii) Pretpostavimo li da smo u (3.1)  $f_B$  zamijenili s proizvoljnom familijom konstanti  $\{c_B\}$  prostor BMO bi ostao isti. Zaista, vrijedi  $|c_B - f_B| \leq A$  jer

$$|c_B - f_B| = \left| \frac{1}{|B|} \int_B (c_B - f) dx \right| \leq \frac{1}{|B|} \int_B |c_B - f| dx \leq A.$$

Ta nam je opservacija dostatna za zaključak:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| dx \leq \frac{1}{|B|} \int_B |c_B - f_B| dx + \frac{1}{|B|} \int_B |f - c_B| dx \leq 2A.$$

Jednostavna je vježba, korištenjem navedene činjenice, dokazati i da smo u našoj definiciji, umjesto kugli, mogli promatrati i familiju svih kocki u  $\mathbb{R}^n$ .

(iii) Bjelodana je činjenica da svaka ograničena funkcija pripada prostoru BMO. Obrat, međutim, ne vrijedi, a jednostavan je protuprimjer funkcija  $f(x) = \log|x|$ . Da bismo se uvjerali da je  $f$  doista u BMO, uočimo prvo da je tvrdnju dovoljno dokazati na kuglama radijusa 1. Zaista, prema (ii) je dovoljno dokazati

$$\frac{1}{|B|} \int_B |\log|x| - c_B| dx \tag{3.2}$$

pa, ako  $B$  nije radijusa 1 provodimo zamjenu varijabli  $x \mapsto \delta x$  (uz prikladno odabrani  $\delta$ ) te iskoristimo činjenicu da je  $\log|\delta x| = \log|x| + \log|\delta|$ . Time dobivamo

$$\frac{1}{|B|} \int_B |\log|x| - c_B| dx = \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} |\log|x| - c_{\tilde{B}}| dx$$

gdje je  $\tilde{B}$  kugla koncentrična sa  $B$ , ali radijusa manjeg od 1.

Neka je sada  $B$  kugla sa središtem u  $x_0$ . Ako je  $\|x_0\| \leq 1$  (3.2) vrijedi uz odabir  $c_B = 0$ , a inače uzimamo  $c_B = \log|x_0|$ .

## 3.2 Dualnost

U ovom odjeljku dokazujemo da za svaki neprekidni linearni funkcional  $l$  na  $H^1$  postoji prikaz

$$l(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx, \quad g \in H^1 \tag{3.3}$$

pri čemu je  $f$  prigodna BMO funkcija.

Međutim, vidjeti ćemo da gornji integral ne mora apsolutno konvergirati za proizvoljnu  $f \in \text{BMO}$  i  $g \in H^1$ . Tome ćemo doskočiti tako da prvo uzmemo da  $g$  pripada nekom “dobrom” potprostoru od  $H^1$ ; pokazat ćemo da je potprostor ograničen distribucija  $g$  s kompaktnim nosačem i takvih za koje je  $\int g \, dx = 0$  dobar odabir. Taj ćemo potprostor označavati sa  $H_a^1$  i on se očigledno podudara s prostrom svih konačnih linearnih kombinacija  $H^1$  atoma, a za koji znamo da je gust u  $H^1$  (vidjeti napomenu 2.2.4).

Kako je  $\text{BMO} \subset L_{\text{loc}}^1$  lako dobivamo da integral u (3.3) apsolutno konvergira. Nadalje, nejednoznačnost iz napomene 3.1.1 (i), ovdje ne uzrokuje probleme upravo zbog pretpostavke  $\int g \, dx = 0$ . Sada smo spremni iskazati glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorem 3.2.1.** (a) *Neka je  $f \in \text{BMO}$ . Tada se linearni funkcional  $l$  zadan formulom (3.3) na  $H_a^1$  može na jedinstven način proširiti do neprekidnog linearnog funkcionala na  $H^1$  i to tako da vrijedi*

$$\|l\| \leq c\|f\|_{\text{BMO}}.$$

(b) *Obratno, za svaki neprekidni funkcional  $l$  na  $H^1$  možemo pronaći  $f \in \text{BMO}$  takvu da vrijedi (3.3) i*

$$\|f\|_{\text{BMO}} \leq c'\|l\|.$$

*Dokaz.* Uzmimo neku  $f \in \text{BMO}$ . Da bismo dobili tvrdnju (a), dovoljno je pokazati da je funkcional dan u (3.3) neprekidan na  $H_a^1$  jer tvrdnja tada slijedi korištenjem teorema 0.1.2. Mi ćemo dokazati da za proizvoljnu  $g \in H_a^1$ , štoviše, vrijedi ocjena:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx \right| \leq c\|f\|_{\text{BMO}}\|g\|_{H^1}. \quad (3.4)$$

Ukoliko je  $f$  ograničena, gornju ocjenu nije teško dobiti. Zaista, neka je  $g = \sum_k \lambda_k a_k$  atomarna dekompozicija od  $g$ . Znamo da tada red  $\sum_k \lambda_k a_k$  konvergira i u  $L^1(\mathbb{R}^n)$  normi pa možemo pisati

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx = \sum_k \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a_k(x) \, dx.$$

Zbog momentnog uvjeta kojeg  $a_k$ , kao  $H^1$  atomi, zadovoljavaju, vrijedi

$$\int f a_k \, dx = \int_{B_k} [f(x) - f_{B_k}] a_k(x) \, dx$$

pri čemu je  $a_k$  nošena u  $B_k$ . Kako je, nadalje,  $|a_k| \leq |B_k|^{-1}$ , korištenjem dobivenih jednakosti slijedi

$$\left| \int f g \, dx \right| \leq \sum_k \frac{|\lambda_k|}{|B_k|} \int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}| \, dx \leq \sum |\lambda_k| \cdot \|f\|_{\text{BMO}}.$$

Po našem teoremu o atomarnoj dekompoziciji — naime, teoremu 2.2.5 — dobivamo da je nejednakost (3.4) dokazana u slučaju da je  $f$  ograničena.

Da bismo nejednakost dokazali za općenitu  $f \in \text{BMO}$  koristimo aproksimacijski argument. Uzmimo  $g \in H_a^1$ ; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da  $f$  postiče realne vrijednosti (u suprotnom promatramo realni i imaginarni dio te postupamo kao u nastavku). Uočimo sada preslikavanja

$$f^{(k)} = \begin{cases} -k & \text{za } f(x) \leq -k, \\ f(x) & \text{za } -k \leq f(x) \leq k, \\ k & \text{za } k \leq f(x) \end{cases}$$

gdje uzimamo  $k \in \mathbb{N}$ . Jasno je da su uvedena preslikavanja ograničeni elementi BMO pa prema netom dokazanom vrijedi  $|\int f^{(k)} g \, dx| \leq c \|f^{(k)}\|_{\text{BMO}} \|g\|_{H^1}$ . Nadalje, nije teško vidjeti da je  $\|f^{(k)}\|_{\text{BMO}} \leq c \|f\|_{\text{BMO}}$  pa, štoviše, imamo  $|\int f^{(k)} g \, dx| \leq c \|f\|_{\text{BMO}} \|g\|_{H^1}$ . Konačno, kako očigledno vrijedi  $f^{(k)} \rightarrow f$  gotovo svuda to po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi (3.4). Primijetimo još, naposljetku, da ograničenost funkcija  $f^{(k)} g$  dobivamo korištenjem činjenice da je  $g \in H_a^1$ .

Da bismo dokazali obrat, odaberimo prvo neku kuglu  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Neka  $L_B^2$  označava prostor svih  $L^2$  funkcija nošenih u  $B$ ; norma na tom prostoru je  $\|g\|_{L_B^2} = \left( \int_B |g|^2 \, dx \right)^{1/2}$ . Nadalje, sa  $L_{B,0}^2$  označimo potprostor od  $L_B^2$  sačinjen od onih funkcija za koje vrijedi  $\int_B g \, dx = 0$ . Uočimo da funkcije s ovakvim opisom možemo prikazati kao višekratnike generaliziranih  $H^1$  atoma kao na kraju prethodnog poglavlja, a sličnim računom kao i u toj opasci također dobivamo  $\|g\|_{H^1} \leq c |B|^{1/2} \|g\|_{L^2}$ .

Prema gornjemu, znamo da ograničeni linearni funkcional  $l$  na  $H^1$  (za kojeg, bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo da je norme  $\leq 1$ ) možemo proširiti do linearnog funkcionala na  $L_{B,0}^2$  — to slijedi iz Hahn-Banachovog teorema (teorem 0.1.3). Nadalje, po Rieszovom teoremu o reprezentaciji (teorem 0.1.4) za Hilbertov prostor  $L_{B,0}^2$  i funkcional  $l$  pronalazimo  $F^B \in L_{B,0}^2$  sa svojstvom

$$l(g) = \int_B F^B(x) g(x) \, dx, \quad \text{za } g \in L_{B,0}^2 \quad (3.5)$$

te

$$\left( \int_B |F^B(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c|B|^{1/2}. \quad (3.6)$$

Sada nam je cilj pronaći funkciju  $f$  koja će se od svake funkcije  $F^B$  razlikovati samo do na aditivnu konstantu. Primijetimo prvo da za kugle  $B_1 \subset B_2$  jamačno vrijedi da je funkcija  $F^{B_1} - F^{B_2}$  je konstantna na  $B_1$ . Doista, kako obje funkcije  $f^{B_1}$  i  $f^{B_2}$  daju isti funkcional na  $L^2_{B_1,0}$  jednostavna argumentacija, koristeći odgovarajuće reprezentacije oblika (3.5), daje da je tome tako. Funkciju  $F^B$  iz prethodnog postupka možemo zamijeniti sa  $f^B = F^B + c_B$  gdje konstantu  $c_B$  odabiremo tako da je integral od  $f^B$  jednak 0 na jediničnoj kugli oko ishodišta. Međutim, tada dobivamo da je  $f^{B_1} = f^{B_2}$  na  $B_1$  čim je  $B_1 \subset B_2$  pa na cijelom prostoru  $\mathbb{R}^n$  možemo definirati  $f(x) = f^B(x)$  kada  $x \in B$ .

Ostaje još pokazati da je  $f \in \text{BMO}$  te da vrijedi formula reprezentacije za svaki  $g \in H^1$ .

Uočimo da je

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B| dx \leq \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c_B|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{|B|} \int_B |F^B(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c;$$

prva nejednakost slijedi iz Hölderove nejednakosti, a posljednja iz (3.6). Konačno, zbog (3.5) imamo

$$l(g) = \int f(x)g(x) dx$$

čim je  $g \in L^2_{B,0}$  za neko  $B$  pa je, prema tome, ta reprezentacija zadovoljena i za  $g \in H^1_a$ . Zbog jedinstvenosti proširenja neprekidnog operatora sa gustog potprostora (teorem 0.1.2), tvrdnja slijedi.  $\square$

# Bibliografija

- [1] E. Beckenstein i L. Narici, *Topological vector spaces*, Chapman and Hall, 2010.
- [2] G. Chinnaraman, *Integrable distributions and  $\phi$ -Fourier transform*, Novi Sad J. Math. **43** (2013), br. 2, 21–37.
- [3] R. Coifman i G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bulletin of AMS **83** (1977), br. 4, 569–645.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer, 1985.
- [5] P. L. Duren, *Theory of  $H^p$  spaces*, Pure and Applied Mathematics 38, Academic Press, Inc., 1970.
- [6] G. Weiss E. M. Stein, *On the theory of harmonic functions of several variables: I. The theory of  $H^p$ -spaces*, Acta Mathematica **103** (1960), br. 1-2, 25–62.
- [7] C. Fefferman i E. M. Stein,  *$H^p$  spaces of several variables*, Acta Mathematica **129** (1972), 137–193.
- [8] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations. 2nd edition*, Princeton University Press, 1995.
- [9] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [10] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 249, Springer-Verlag New York, 2008.
- [11] G. H. Hardy, *The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function*, Proceedings of the London Mathematical Society (1915), 269–277.
- [12] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover books on advanced mathematics, Dover Publications, 1976.

- [13] E. O. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [14] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, *Mathematische Zeitschrift* (1923), br. 18, 87–95.
- [15] W. Rudin, *Functional Analysis, 2nd edition*, McGraw-Hill, 1991.
- [16] R. Shakarchi i E. M. Stein, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [17] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, 30, Princeton University Press, 1971.
- [18] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Mathematical Series, 43, Princeton University Press, 1993.

# Sažetak

Hardyjevimi se prostorima klasično pristupa u kontekstu kompleksne analize gdje ih se promatra na nekom dijelu kompleksne ravnine. U ovom je tekstu, međutim, predstavljen moderan tretman prostora  $H^p(\mathbb{R}^n)$ , uz  $0 < p \leq \infty$ , kao klase onih temperiranih distribucija kojima je prikladno definirani maksimalni operator sadržan u  $L^p(\mathbb{R}^n)$  prostoru.

Prvi važni dokazani rezultat tvrdi da maksimalni operator koji korišten u definiciji može biti izabran na nekoliko ekvivalentnih načina. Osim toga, dokazali smo i da za proizvoljni  $f \in H^p$  možemo pronaći familiju  $\{a_k\}$  jednostavnijih elemenata te kompleksni niz koeficijenata  $\{\lambda_k\}$  tako da je  $f = \sum_k \lambda_k a_k$  u  $H^p$  normi; elemente  $\{a_k\}$  nazivamo atomima, a rezultirajuću dekompoziciju atomarnom. Konačno, dan je i detaljniji pregled posebno zanimljivog prostora  $H^1$  te demonstracija činjenice da je njegov dual prostor funkcija ograničene srednje oscilacije (BMO).

# Summary

One classically addresses Hardy spaces in the context of complex analysis where they are observed on some section of complex plane. In this text, however, a modern treatment of the  $H^p(\mathbb{R}^n)$  space, with  $0 < p \leq \infty$ , as the class of those tempered distributions whose appropriately defined maximal operator is contained in the  $L^p(\mathbb{R}^n)$  space is laid out.

The first major result that is proved claims that the maximal operator used in the definition may be chosen in a couple of equivalent ways. Moreover, we proved that for an arbitrary  $f \in H^p$  a family  $\{a_k\}$  of simpler elements and a sequence of complex coefficients  $\{\lambda_k\}$  can be obtained such that  $f = \sum_k \lambda_k a_k$  in the  $H^p$  norm; we call the elements  $\{a_k\}$  atoms, and the resulting decomposition atomic. Finally, a thorough overview of a particularly interesting space  $H^1$  is given along with the demonstration of the fact that its dual is the space of functions with bounded mean oscillation (BMO).



# Životopis

Rođen sam godine 1995. u Virovitici gdje sam završio osnovnu školu i gimnaziju. Nakon toga, 2014. godine, upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu gdje obrazovanje i nastavljam na diplomskom studiju primijenjene matematike kojeg upisujem 2017. godine.