# Balansirajući brojevi

**Plantak, Lucija**

# Balansirajući brojevi

**Plantak, Lucija**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lucija Plantak

# BALANSIRAJUĆI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji, dečku, prijateljima i kolegama bez kojih ovo postignuće ne bi bilo moguće. Ujedno im zahvaljujem i na pruženoj podršci tijekom cijelog studija. Posebna zahvala mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić što je našla vremena za moja pitanje te svojim savjetima mi pomogla u izradi rada.*

*Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.*

# Sadržaj

# Uvod

Geometrijsko predočavanje prirodnih brojeva točkicama ili kvadratićima omogućuje zorno izvođenje raznih algebarskih svojstava i relacija. Posebnim rasporedom i slaganjem točkica u pravilne $n$-terokute oblikuju se *figurativni brojevi*. Dijele se na kvadratne, trokutaste, peterokutne, itd. Nama su u ovom radu posebno zanimljivi trokutasti brojevi $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Gauss je dokazao da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja.

Indijski matematičari A. Behera i G.K. Panda su krajem prošlog stoljeća razmatrali sljedeći problem:

*Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?*

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi $n$ i $r$, $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r},$$

odnosno takvi da vrijedi

$$(1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + \cdots + (n+r). \quad (1)$$

Relacija (1) je *diofantska jednadžba* u nepoznanicama $n$ i $r$ i njihov problem se svodi na traženje rješenja $n$ u skupu prirodnih brojeva.

U ovom radu definirat ćemo *balansirajući broj* $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje jednadžbe (1), a njemu pridružen broj $r \in \mathbb{N}_0$ kao *balanser*.

U prvom poglavlju, uz motivaciju i definiciju, izvest ćemo rekurzivnu formulu za niz balansirajućih brojeva $B_k$ :

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

te pokazati neka njihova svojstva i različite zanimljive identitete. Također ćemo povezati balansirajuće brojeve s kvadratno trokutastim brojevima.

U drugom poglavlju izvest ćemo funkciju izvodnicu za niz balansirajućih brojeva:

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

te promatrati još neke funkcije koje ih generiraju.

U trećem poglavlju povezat ćemo balansirajuće brojeve s rješenjima Pitagorine jednadžbe

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2.$$

U četvrtom poglavlju, modificirat ćemo relaciju (1) i definirati *kobalansirajući broj* $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje jednadžbe

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r),$$

gdje je $r \in \mathbb{N}_0$ *kobalanser* pridružen broj $n$. Pokazati ćemo da niz kobalansirajućih brojeva zapravo predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva. Za niz kobalansirajućih brojeva $b_k$ vrijedi rekurzivna relacija

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \ k \in \mathbb{N},$$

a funkcija izvodnica glasi

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}.$$

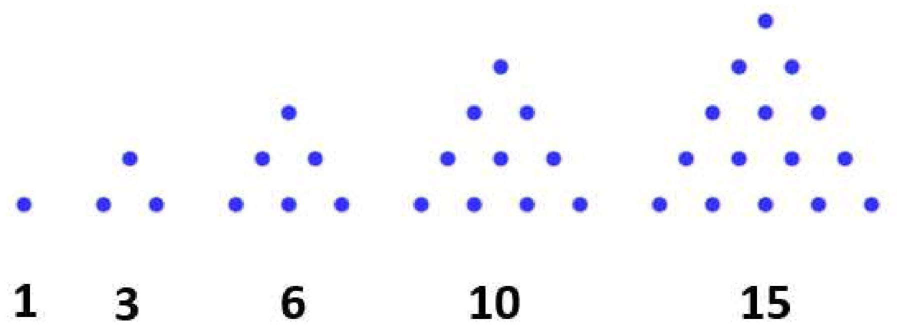
Nizovi balansirajućih i kobalasirajućih brojeva imaju mnoga zanimljiva svojstva te su područje interesa mnogih matematičara današnjice.

# Poglavlje 1

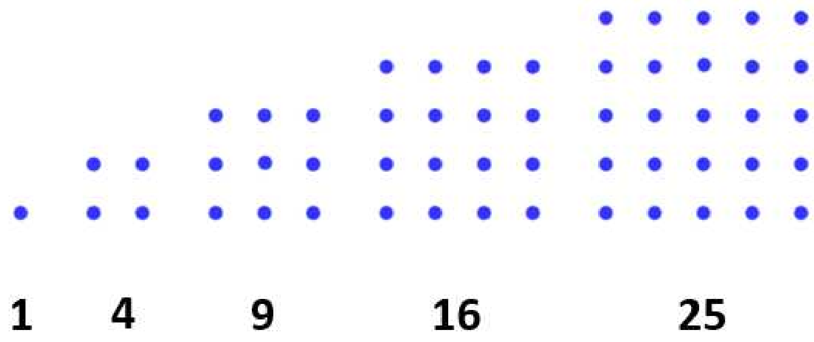
# Balansirajući brojevi

## 1.1 Motivacija i definicija

Brojeve koje možemo reprezentirati različitim geometrijskim likovima nazivaju se *figurativni brojevi*. Dijele se na trokutaste, kvadratne, peterokutne, itd. Njima su se bavili starogrčki matematičari, posebno Pitagorejci. Konkretno ih dobivamo preslagivanjem nekog broja točkica u pravilne $n$-terokute. Na slikama ispod generirani su *trokutasti* i *kvadratni brojevi*.




Slika 1.1: Niz trokutastih brojeva 1,3,6,10,15




Slika 1.2: Niz kvadratnih brojeva 1,4,9,16,25

Označimo $n$-ti trokutasti broj s $T_n$. Sa Slike 1.1 vidimo da je

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n = \frac{1}{2}n(n+1), \; n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, iz prethodne relacije vidimo da niz trokutasti brojeva možemo generirati pomoću rekurzivne formule

$$T_n = T_{n-1} + n, \; n \geq 2,$$

pri čemu je $T_1 = 1$.

Zanimljivo je da vrijedi da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja. Tu je tvrdnju dokazao Gauss i predstavlja specijalni slučaj tvrdnje koja kaže da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše $n$ $n$-terokutnih brojeva.[1]

**Teorem 1.1.1.** *Prirodan broj $m$ je trokutasti broj ako i samo ako je $8m + 1$ potpuni kvadrat.*

*Dokaz.* Broj $m$ je trokutasti broj ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m = \frac{n(n+1)}{2},$$

tj. ako i samo ako postoji pozitivno cjelobrojno rješenje jednadžbe

$$n^2 + n - 2m = 0.$$

[1] Ovu tvrdnju iskazao je Fermat a u potpunosti dokazao Cauchy.

Pozitivno rješenje prethodne jednadžbe je

$$\frac{-1+\sqrt{8m+1}}{2}. \tag{1.1}$$

Ako je ono i cjelobrojno, onda je $\frac{-1+\sqrt{8m+1}}{2} = k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. $8m + 1 = (2k + 1)^2 = \square$. Obratno, ako je $8m + 1$ potpuni kvadrat, onda on očito mora biti kvadrat nekog neparnog prirodnog broja, tj. $8m + 1 = (2k + 1)^2$ pa je izraz (1.1) poprima vrijednost u $\mathbb{N}$. $\square$

Indijski matematičari Behera i Panda su krajem 90-tih godina prošlog stoljeća u [1] razmatrali sljedeći problem:

*Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?*

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi $n$ i $r$, $n > 1$, $r \geq 0$ takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}. \tag{1.2}$$

Uočimo da je

$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = T_8,$$

te

$$T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = 1225 = T_{49},$$

pa su $(n, r) = (6, 2)$ i $(n, r) = (35, 14)$ rješenja postavljenog problema. Prirodno je pitati se ima li još parova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni problem. Pokazat ćemo da ih ima beskonačno mnogo. Relacija (1.2) ekvivalentna je izrazu

$$(1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) + \cdots + (n + r),$$

tj.

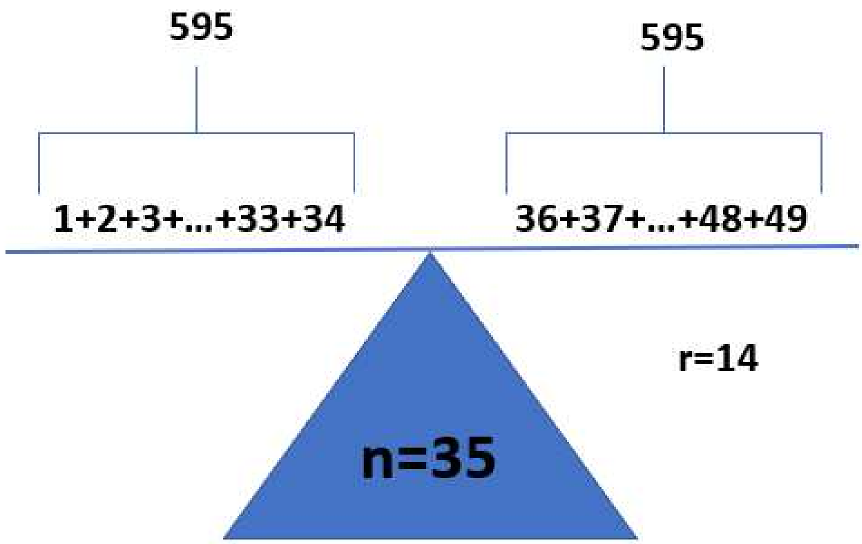
$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) \cdots + (n + r). \tag{1.3}$$

Na prethodnu relaciju možemo gledati kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznanicama $n$ i $r$ a početni problem se svodi na traženje rješenja u skupu prirodnih brojeva jednadžbe (1.3).

**Definicija 1.1.2.** *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu* (1.3). *Tada se $n$ naziva* ***balansirajući broj*** *a $r$ njemu pridruženi* ***balanser****. Oznaka za $k$-ti balansirajući broj je $B_k$.*

Uočimo da je trivijalno rješenje jednadžbe (1.3) uređeni par $(n, r) = (1, 0)$. Označavamo ga s $B_1 = 1$. Pokazali smo da su 6 i 35 balansirajući brojevi s pripadnim balanserima $r = 2$ i $r = 14$, respektivno. To su sljedeća dva balansirajuća broja, tj. $B_2 = 6$ i $B_3 = 35$.

Na prvi pogled naziv ovog niza - *balansirajući brojevi*, odnosno *balancing numbers* (engl.) zvuči neobično. No, pogledamo li Sliku 1.3 na kojoj smo vizualizirali balansirajući broj $B_3$, vidimo “ravnotežu”, tj. “balans” dva zbroja uzastopnih prirodnih brojeva




Slika 1.3: Balansirajući broj $n = 35$ s pripadnim balanserom $r = 14$

Jednadžbu (1.3) možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}n(n-1) = nr + \frac{1}{2}r(r+1), \tag{1.4}$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}. \tag{1.5}$$

Uočimo da je desna strana u (1.5) upravo jednaka $n + r$-tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija balansirajućeg broja.

**Teorem 1.1.3.** *Prirodan broj $n$ je balasirajući ako i samo ako je $n^2$ trokutasti broj.*

S druge stane (1.4) možemo shvati i kao kvadratnu jednadžbu u $r$:

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0. \tag{1.6}$$

Jasno je da je $n$ balansirajući ako i samo postoji pozitivno cjelobrojno rješenje prethodne jednadžbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \tag{1.7}$$

prirodan broj. Dalje, analognim zaključivanjem kao u dokazu Teorema 1.1.1 dobivamo još jednu karakterizaciju balansirajućeg broja:

**Teorem 1.1.4.** *Prirodan broj n je balasirajući ako i samo ako je* $8n^2 + 1$ *potpuni kvadrat.*

Prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da su balasirajući brojevi upravo rješenja Pellove jednadžbe

$$m^2 - 8n^2 = 1, \tag{1.8}$$

pa ih stoga postoji beskonačno mnogo. Skup svih rješenje Pellove jednadžbe (1.8) u nepoznanici $n$ je upravo niz balansirajućih brojeva $(B_k)$.

## 1.2 Rekurzivna formula

Poznato je da je skup svih rješenja Pellove jednadžbe (1.8) dan s

$$m_k + n_k\sqrt{8} = (m_1 + n_1\sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

gdje je $(m_1, n_1)$ fundamentalno rješenje, tj. najmanje rješenje od (1.8) u skupu prirodnih brojeva. U ovom slučaju odmah se vidi da $(m, n) = (3, 1)$ zadovoljava jednadžbu (1.8) i to je očito najmanje moguće rješenje u $\mathbb{N}$. Stoga je

$$m_k + n_k\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$m_k - n_k\sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

oduzimanjem prethodnih relacija i dijeljenjem s $2\sqrt{8}$ dobivamo

$$n_k = \frac{1}{2\sqrt{8}}((3+\sqrt{8})^k - (3-\sqrt{8})^k).$$

Budući da je

$$n_k = B_k,$$

dobivamo eksplicitnu formulu za niz balansirajućih brojeva:

**Teorem 1.2.1.** *Vrijedi*

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((3+\sqrt{8})^k - (3-\sqrt{8})^k\right), \tag{1.9}$$

*za* $k \in \mathbb{N}_0$.

Relacija (1.9) se ponekad naziva *Binetova formula za balansirajuće brojeve*. Možemo je zapisati i u obliku

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((1+\sqrt{2})^{2k} - (\sqrt{2}-1)^{2k}\right),$$

iz čega vidimo da je

$$B_k \approx \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{2})^{2k},$$

za dovoljno velike $k$. Prvih nekoliko članovi niza $(B_n)$ je

$$1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, \ldots$$

Za niz rješenja $(n_k)$ Pellove jednadžbe (1.8) vrijedi sljedeća rekurzija:

$$n_{k+2} = 2m_1 n_{k+1} - n_k, \ k \geq 0,$$

pri čemu je $m_1 = 3$, a početne vrijednosti su $n_0 = 0$, $n_1 = 1$. Direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

**Teorem 1.2.2.** *Vrijedi*

$$B_{k+2} = 6B_{k+1} - B_k, \tag{1.10}$$

*za* $k \in \mathbb{N}_0$*, uz početne uvjete* $B_0 = 0$*,* $B_1 = 1$.

## 1.3 Identiteti

Budući da niz balansirajućih brojeva zadovoljava linearnu rekurziju (1.10), mogu se pokazati mnogi zanimljivi identiteti.

**Teorem 1.3.1.** *Za sve prirodne brojeve n vrijedi*

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}. \tag{1.11}$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Za $n = 1$ imamo $B_1^2 = 1 + B_0 B_2$, tj. $1 = 1$, pa tvrdnja vrijedi.

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = k$.

**Korak:** Promatramo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$. Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2 &= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - (B_k^2 - 1) \\ &= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1 \\ &= B_kB_{k+2} + 1, \end{aligned}$$

čime je pokazano da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. □

Uočimo da relacija (1.11) predstavlja nelinearnu rekurziju drugog reda:

$$B_{n+1} = \frac{B_n^2 - 1}{B_{n-1}},\ n \geq 2,$$

uz početne uvjete $B_1 = 1$, $B_2 = 6$.

**Napomena 1.3.2.** *Iz Teorema 1.3.1 možemo uočiti još jedno zanimljivo svojstvo. Naime, n-ti balansirajući broj je približno jednak geometrijskoj sredini svog neposrednog prethodnika i svog neposrednog sljedbenika,*

$$B_n = \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \approx \sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}.$$

*Na primjer,* $B_6 = 6930$ *a* $\sqrt{B_7B_5} \approx 6929.99992$*. Rastom indeksa n, aproksimacija postaje sve bolja. Preciznije, vrijedi*

$$B_n = \left\lceil \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \right\rceil,$$

*pri čemu* $\lceil x \rceil$ *označava najmanji cijeli broj koji nije manji od x a naziva se* najmanje cijelo *od x ili "strop" (eng. ceiling) od x.*

**Teorem 1.3.3.** *Neka su m i n prirodni brojevi. Tada vrijedi*

$$B_{m+n} = B_mB_{n+1} - B_{m-1}B_n.$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Iz Teorema 1.2.2 slijedi da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \leq k$.

**Korak:** Promatramo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$. Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{m+k+1} &= 6B_{m+k} - B_{m+k-1} \\ &= 6(B_mB_{k+1} - B_{m-1}B_k) - (B_mB_k - B_{m-1}B_{k-1}) \\ &= B_mB_{k+2} - B_{m-1}B_{k+1}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. □

**Korolar 1.3.4.** *Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeći identiteti:*

*(a)* $B_{n+1} \cdot B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1)$,

*(b)* $B_n = B_k \cdot B_{n-k+1} - B_{k-1} \cdot B_{n-k}$, $k \leq n$,

*Dokaz.* (a) Direktno iz (1.11).

(b) Uz $m + n = k$ iz Teorema 1.3.3 dobivamo $B_k = B_m B_{k-m+1} - B_{m-1} B_{k-m}$, $m \leq k$.

□

**Korolar 1.3.5.** *Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeći identiteti:*

*(a)* $B_{2n} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1})$,

*(b)* $B_{2n+1} = B_{n+1}^2 - B_n^2$.

*Dokaz.* (a) Iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom $n$ s $2n$ i $k = n + 1$ dobivamo

$$B_{2n} = B_n \cdot B_{n+1} - B_{n-1} \cdot B_n.$$

(b) Analogno, iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom $n$ s $2n + 1$ i $k = n + 1$ dobivamo jednakost.

□

**Korolar 1.3.6.** *Ako je n prirodan broj, tada vrijedi*

*(a)* $B_1 + B_3 + \cdots + B_{2n-1} = B_n^2$,

*(b)* $B_2 + B_4 + \cdots + B_{2n} = B_n B_{n+1}$,

*(c)* $B_1 + B_2 + \cdots + B_{2n} = B_n(B_n + B_{n+1})$.

*Dokaz.* (a) Zbrajanjem niza jednakosti iz Korolara 1.3.4(b) za $n = 1, 2, \cdots, k$ dobivamo

$$\begin{aligned}
B_3 &= \cancel{B_2^2} - B_1^2,\\
B_5 &= \cancel{B_3^2} - \cancel{B_2^2},\\
B_7 &= \cancel{B_4^2} - \cancel{B_3^2},\\
&\vdots\\
B_{2k-1} &= \cancel{B_k^2} - \cancel{B_{k-1}^2},\\
B_{2k+1} &= B_{k+1}^2 - \cancel{B_k^2},\\
&\text{-----------}\\
B_3 + B_5 + \cdots + B_{2k+1} &= B_{k+1}^2 - B_1^2 = B_{k+1}^2 - B_1,
\end{aligned}$$

pa slijedi tražena relacija jer je $B_1 = 1$.

(b) Na isti na način kao prethodno, samo iz Korolara 1.3.4(a).

(c) Zbrajanjem jednakosti iz (a) i (b).

□

## 1.4 Veza s kvadratno trokutastim brojevima

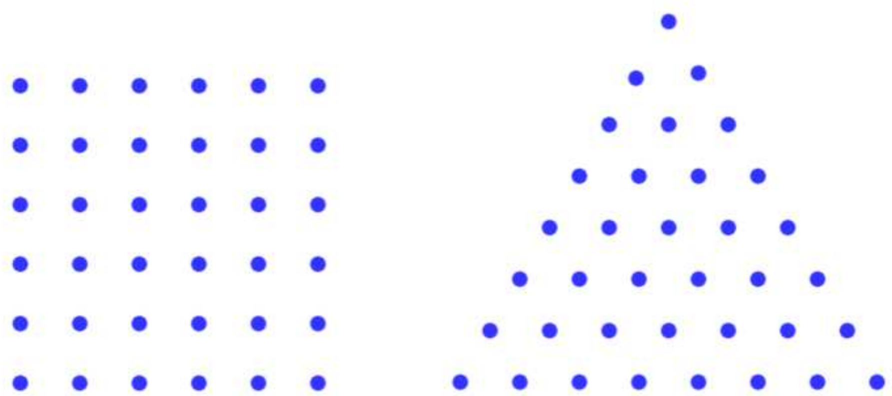
U odsječku 1.1 opisana je veza između balasirajućih brojeva i trokutastih brojeva. Dakle, balasirajući broj $n$ je prirodan broj koji zadovoljava jednadžbu $T_n + T_{n+1} = T_{n+r}$ za neki $r \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, $n$ je balasirajući broj ako i samo ako je $n^2$ trokutasti broj (Teorem 1.1.3), odnosno

$$B_n^2 = T_{n+r},$$

gdje je $r$ pripadni balanser.

**Definicija 1.4.1.** ***Kvadratno trokutasti broj*** *je broj koji je istovremeno trokutasti broj i kvadratni broj. Oznaka za n-ti kvadratno trokutasti broj je $ST_n$.*

Očito je $ST_1 = 1$. Najmanji netrivijalan kvadratno trokutasti broj je $ST_2 = 36$.



Slika 1.4: Kvadratno trokutasti broj 36 kao trokut i kvadrat, duljina stranice kvadrata je $n = 6$, duljina stranica trokuta je $n + 2 = 8$

Prema onome što smo pokazali niz kvadrata balansirajućih brojeva $(B_n^2)$ upravo predstavlja niz kvadratno trokutastih brojeva. Dakle, kvadrat svakog balansirajućeg broja je kvadratno trokutasti broj i obratno korijen svakog kvadratno trokutastog broja je balasirajući broj.

Koristeći Teorem 1.2.2 i Teorem 1.3.1, možemo naći rekurzivnu relaciju za kvadratno trokutaste brojeve.

**Teorem 1.4.2.** *Niz kvadratno trokutastih brojeva* $(ST_n)$ *zadovoljava sljedeću rekurzivnu relaciju*

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2, \; n \geq 3,$$

*uz početne uvjete* $ST_1 = 1, \; ST_2 = 6$.

*Dokaz.* Kvadriranjem obje strane rekurzivne relacije (1.10), imamo

$$\begin{aligned} B_{n+1}^2 &= 34B_n^2 - (12B_nB_{n-1} - 2B_n^2 - B_{n-1}^2) \\ &= 34B_n^2 - 2(B_{n+1} + B_{n-1})B_{n-1} + 2B_n^2 + B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2(B_n^2 - B_{n+1}B_{n-1}) - B_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Kako je, prema Teoremu 1.3.1 $B_{n+1}B_{n-1} = B_n^2 - 1$, dobivamo

$$B_{n+1}^2 = 34B_n^2 - B_{n-1}^2 + 2,$$

što je upravo

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2$$

jer je $ST_n = B_n^2$. □

# Poglavlje 2

# Funkcije povezane s balansirajućim brojevima

U ovom poglavlju bavimo se funkcijom izvodnicom za niz balansirajućih brojeva te funkcijama koje generiraju balasirajuće brojeve.

## 2.1 Funkcije izvodnice

Funkcije izvodnice su koristan alat koji se primjenjuje za rješavanje različitih problema iz područja kombinatorike i vjerojatnosti, te za manipulaciju nizovima (posebno rekurzivnim). Ideja je nizu brojeva pridružiti funkciju. Konkretno, nizu brojeva $(a_n)_{n\geq 0}$ pridružujemo tzv. *formalni red potencija*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$$

kojeg nazivamo *funkcija izvodnica*. Pod pojmom *formalni* mislimo da se ne obaziremo na problem konvergencije reda ili možemo razmišljati na način da varijabli $x$ nije dodijeljena nikakva vrijednost. Također, nad ovim redovima možemo izvoditi određene operacije na čisto formalnoj razini. Naravno, funkcija $f$ je definirana za sve $x$ u kojima je red $\sum_{i=1}^{n} a_ix^i$ konvergentan.

Dajemo nekoliko primjera funkcija izvodnica poznatih nizova:

$$\begin{aligned}(1,1,1\cdots) &\mapsto 1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x},\\ (1,-1,1,-1\cdots) &\mapsto 1-x+x^2-x^3\cdots=\frac{1}{1+x},\\ (1,0,1,0,\cdots) &\mapsto 1+x^2+x^4\cdots=\frac{1}{1-x^2},\\ \left(\frac{1}{n!}\right) &\mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\cdots=e^x,\end{aligned}$$

Funkcija izvodnica za poznati Fibonaccijev niz $(F_n)$ zadan rekurzijom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ glasi

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

## Operacije s redovima

Neka su

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

dva formalna reda potencija.

**Zbrajanje redova.** Za njihovu sumu vrijedi

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

**Množenje reda skalarom.** Ako je $\alpha$ bilo koji skalar,

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n.$$

**Množenje redova.** Dva se formalna reda $A(x) = \sum a_k x^k$, $B(x) = \sum b_j k^j$ mogu pomnožiti na prirodan način: svaki član prvog reda množi se sa svakim članom drugog reda. Dobiveni se umnošci mogu srediti tako da se zbroje koeficijenti uz istu potenciju $x^n$. Za svaki $n$

broj takvih koeficijenata je konačan, pa je taj zbroj uvijek konačan. Zato je rezultat ponovo formalni red koji ćemo označiti s $C(x) = \sum c_n x^n$ :

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \dots) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Koeficijent uz član $x^n$ dobit ćemo na ovaj način: ako je iz prve sume odabran član $a_k x^k, k \leq n$, onda se on treba pomnožiti s članom $b_{n-k} x^{n-k}$ druge sume. Prema tome, uz potenciju $x^n$ nalazit će se zbroj koeficijenata $a_k b_{n-k}$, za sve vrijednosti $k$ od 0 do $n$:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \dots a_n b_0.$$

Formalni izvod ove formule je

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j x^{k+j}.$$

U dvostrukoj sumi s desne strane grupirat ćemo zajedno članove s istom potencijom $k + j$. Neka je taj zbroj označen s $n = k + j$. Zatim ćemo ih poredati prema rastućoj potenciji $n$. Tada dobivamo

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+j=n} a_k b_j\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

## 2.2 Funkcija izvodnica za balansirajuće brojeve

**Teorem 2.2.1.** *Funkcija izvodnica niza balansirajućih brojeva* $(B_n)$ *je*

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}.$$

*Dokaz.* Prema definiciji funkcija izvodnica je dana redom potencija

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n. \tag{2.1}$$

Funkciju ćemo izvesti tako što pomnožimo rekurziju (1.10) za $(B_n)$ s $x^n$,

$$B_{n+1} x^n = 6 B_n x^n + B_{n-1} x^n,$$

a zatim sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}$. Dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} x^n = 6 \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} x^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1}x^{n+1} = 6\sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - x\sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}x^{n-1}.$$

Prema (2.1) imamo

$$\frac{1}{x}(g(x) - x) = 6g(x) - xg(x),$$

tj.

$$(1 - 6x + x^2)g(x) = x,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Pomoću funkcije izvodnice pronaći ćemo još jednu eksplicitnu formulu za opći član niza balansirajućih brojeva.

**Korolar 2.2.2.** *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 6^{n-k}. \tag{2.2}$$

*Dokaz.* Koristimo Taylorov razvoj u red funkcije

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{1-(6x-x^2)} \\
&= x(1 + (6x - x^2) + (6x - x^2)^2 + (6x - x^2)^3 + \cdots) \\
&= x + x^2(6 - x) + x^3(6 - x)^2 + x^4(6 - x)^3 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}(6 - x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\left(6^k - \binom{k}{1}6^{k-1}x + \binom{k}{2}6^{k-2}x^2 - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}6x^{k-1} + (-1)^k\binom{k}{k}6^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(6^k x^{k+1} - \binom{k}{1}6^{k-1}x^{k+2} + \binom{k}{2}6^{k-2}x^{k+3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}6x^{2k} + (-1)^k\binom{k}{k}x^{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}6^{k-i}x^{k+i+1}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sada red dobiven u (2.2) uspoređujemo s redom $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$, odnosno tražimo koeficijente uz iste potencije od $x$.

Odredimo najprije koeficijente uz neparne potencije $x^{2n+1}$. Trebamo naći parove $(i,k)$ za koje je $k+i+1=2n+1$ i $0 \le i \le k$. To su sljedeći parovi

$$(i,k) = (0,2n), (1,2n-1), (2,2n-2), (3,2n-3), \dots, (n,n),$$

pa je

$$B_{2n} = \binom{2n}{0} 6^{2n} + \binom{2n-1}{1} 6^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} 6^{2n-4} + \cdots + \binom{n}{n} 6^0$$

Sada odredimo koeficijente uz parne potencije $x^{2n}$. Parovi $(i,k)$ za koje je $k+i+1=2n$ i $0 \le i \le k$ su

$$(i,k) = (0,2n-1), (1,2n-2), (2,2n-3), (3,2n-4), \dots, (n-1,n),$$

te dobivamo

$$B_{2n+1} = \binom{2n-1}{0} 6^{2n-1} + \binom{2n-2}{1} 6^{2n-3} + \binom{2n-3}{2} 6^{2n-5} + \cdots + \binom{n}{n-1} 6^1.$$

Posljednje dvije formule daju (2.2). □

## 2.3 Funkcije koje generiraju balansirajuće brojeve

Definiramo funkcije

$$F(x) = 2x\sqrt{8x^2+1}, \tag{2.4}$$
$$G(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}, \tag{2.5}$$
$$H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1}, \tag{2.6}$$
$$K(n) = 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1, \tag{2.7}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da navedene funkcije generiraju balansirajuće brojeve.

**Teorem 2.3.1.** *Ako je $n$ balansirajući broj, onda su $F(n)$, $G(n)$, $H(n)$ i $K(n)$ također balansirajući brojevi.*

*Dokaz.* Pokazali smo da ako je $n$ balansirajući broj, onda je $8n^2+1$ potpun kvadrat (Teorem 1.1.4). Stoga je

$$\frac{8n^2(8n^2+1)}{2} = 4n^2(8n^2+1)$$

trokutasti broj koji je također potpun kvadrat, tj. to je kvadratni trokutasti broj. Korijen kvadratnog trokutastog broja je (parni) balansirajući broj $2n\sqrt{8n^2+1} = F(n)$.

Kako je $8n^2 + 1$ potpun kvadrat, slijedi da je

$$8(G(n))^2 + 1 = \left(8n + 3\sqrt{8n^2+1}\right)^2$$

također potpun kvadrat, stoga $G(n)$ je balansirajući broj (Teorem 1.1.4).

Kako je

$$H(n) = G(G(n)),$$

slijedi da je i $H(n)$ balansirajući broj.

Slično, zbog

$$K(n) = G(F(n)),$$

slijedi da je $K(n)$ balansirajući broj. □

**Napomena 2.3.2.** *Za svaki balansirajući broj $n$, $F(n)$ je uvijek paran, a $K(n)$ je uvijek neparan. $G(n)$ je paran kada je $n$ neparan i $G(n)$ je neparan kada je $n$ paran, a $H(n)$ je iste parnosti kao i $n$.*

Zanima nas postoji li među funkcijama (2.4) - (2.7) neka koja će za dani balasirajući broj $B_k$ generirati sljedeći član niza $B_{k+1}$. Prema prethodnoj napomeni to ne mogu biti funkcije $F$, $K$ i $H$ jer su susjedna dva člana balasirajućeg niza različite parnosti. Pokazat ćemo se da opisano svojstvo ima funkcija $G$.

**Teorem 2.3.3.** *Ako je $n$ balansirajući broj, onda je $G(n)$ njegov sljedbenik, tj. $G(B_k) = B_{k+1}$.*

*Dokaz.* Neka je $n = B_k$. Rekurzivna relacija (1.10) daje

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1} = 3B_k + (3B_k - B_{k-1}). \tag{2.8}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}(3B_k - B_{k-1})^2 &= 9B_k + B_{k-1}^2 - 6B_kB_{k-1}\\ &= 9B_k^2 + B_{k-1}^2 - B_{k-1}(B_{k+1} + B_{k-1})\\ &= 9B_k^2 - (B_k^2 - 1)\\ &= 8B_k^2 + 1.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (2.8) imamo

$$G(B_k) = 3B_k + \sqrt{8B_k^2+1} = 3B_k + 3B_k - B_{k-1} = B_k - B_{k-1} = B_{k+1}.$$

□

Funkcija $G$ je strogo rastuća (na čitavoj domeni $\mathbb{R}$), stoga je ona bijekcija. Lako se može provjeriti da je inverz funkcije $G$ dan s

$$G^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$$

Prema Teoremu (2.3.3) slijedi da je $G^{-1}(B_k) = B_{k-1}$, odnosno da je $G^{-1}(n)$ prethodnik balansirajućeg broja $n$. Dakle, vrijede sljedeće rekurzivne relacije (prvog reda).

**Korolar 2.3.4.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede relacije*

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2+1},$$
$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2+1}.$$

Kako je $H = G \circ G$, pomoću funkcije $H$ možemo generirati podniz balansirajućih brojeva s parnim, odnosno neparnim indeksom. Inače, balansirajući brojevi s neparnim indeksom su neparni a s parnim indeksom su parni brojevi.

**Korolar 2.3.5.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$B_{n+2} = 17B_n + 6\sqrt{8B_n^2+1}.$$

Pokazali smo da su $F(n), G(n)$ i $H(n)$ balansirajući za neki balansirajući broj $n$. Poopćimo li funkcije $F$, $G$, i $H$ možemo se pitati za koje prirodne brojeve $p$ i $q$ je

$$B = pn + q\sqrt{8n^2+1}$$

balasirajući broj. To vrijedi ako i samo ako je

$$8B^2 + 1 = \left(8qn + p\sqrt{8n^2+1}\right)^2 + 8q^2 - p^2 + 1$$

potpun kvadrat. Ako je $8q^2 - p^2 + 1 = 0$, onda je $8B^2 + 1 = \square$. Primijetimo da je $8q^2 + 1 = p^2$ ako i samo ako je $q$ balansirajući broj. Zato definiramo funkciju

$$f(x, y) = x\sqrt{8y^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}.$$

**Teorem 2.3.6.** *Ako su $m$ i $n$ balansiraći brojevi brojevi, tada je*

$$f(m, n) = m\sqrt{8n^2+1} + n\sqrt{8m^2+1} \tag{2.9}$$

*također balansirajući broj.*

**Napomena 2.3.7.** *Veza funkcije $f(x, y)$ s funkcijama $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ i $K(x)$:*

*(a)* $f(x, x) = F(x)$,

*(b)* $f(x, 1) = G(x)$,

*(c)* $f(x, 6) = H(x)$,

*(d)* $f(x, G(x)) = K(x)$.

Kombinirajući prethodno može se pokazati

**Napomena 2.3.8.** *Ako su $x$, $y$ i $z$ balansirajući brojevi, tada je*

$$x\sqrt{8y^2+1}\cdot\sqrt{8z^2+1}+y\sqrt{8x^2+1}\cdot\sqrt{8z^2+1}+z\sqrt{8x^2+1}\cdot\sqrt{8x^2+1}+8xyz$$

*također balansirajući broj.*

## 2.4 Lucas-balansirajući brojevi

**Definicija 2.4.1.** *Za n-ti balasirajući broj $B_n$, definiramo njemu pripadni n-**ti Lucas bala-sirajući broj***

$$C_n = \sqrt{8B_n^2+1}.$$

Zanimljivo je da niz Lucas balansirajućih brojeva $(C_n)$ zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva.

**Teorem 2.4.2.** *Vrijedi*

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

*uz početne uvjete $C_0 = 1,\ C_1 = 3$.*

*Dokaz.* Prema definiciji Lucas balansirajućeg broja i Korolaru 2.3.4 vrijedi

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 &= 8B_{n+1}^2 + 1 = 8\left(3B_n + \sqrt{8B_n^2+1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2+1} + 8B_n\right)^2 = (3C_n + 8B_n)^2 . \end{aligned}$$

Prema tome,

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n. \tag{2.10}$$

Slično,

$$\begin{aligned} C_{n-1}^2 &= 8B_{n-1}^2 + 1 = 8\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2+1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2+1} - 8B_n\right)^2 = (3C_n - 8B_n)^2 . \end{aligned}$$

Kako je $3C_n - 8B_n > 0$, vrijedi

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n. \tag{2.11}$$

Zbrajanjem (2.10) i (2.11), slijedi

$$C_{n+1} + C_{n-1} = 6C_n. \tag{2.12}$$

□

Prvih nekoliko Lucas-balansirajućih brojeva je

$$1, 3, 17, 99, 577, 3363, 19601, 114243, 665857, \ldots$$

**Teorem 2.4.3.** *Vrijedi*

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n\right),\ n \geq 0.$$

*Dokaz.* Tvrdnju ćemo dokazati tako da ćemo riješiti rekurzivnu relaciju (2.12) uz početne uvjete $C_0 = 1$ i $C_1 = 3$.

Uvrštavanjem $C_n = x^n$ u (2.12) dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$x^{n+1} + x^{n-1} = 6x^n$$

tj.

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Izračunajmo korijene: $3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}$, pa je opće rješenje te rekurzije dano s

$$C_n = \alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

gdje su $\alpha$ i $\beta$ konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno $C_0 = 1, C_1 = 3$. Dakle

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \\ \alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2}) &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Stoga je

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n\right).$$

□

**Korolar 2.4.4.** *Vrijedi*

$$C_n \pm 1 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2} + 1\right)^n \pm \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right)^2, \; n \geq 0$$

*Dokaz.* Očito je $\left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2 = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$. □

**Napomena 2.4.5.** *Uočimo da je za neparan n, $n = 2k + 1$, $C_n + 1$ jednako potpunom kvadratu*

$$C_{2k+1} + 1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} 2\binom{2k+1}{2i+1}(\sqrt{2})^{2i+1}\right)^2 = 4\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i+1}2^i\right)^2.$$

*Stoga je* $\sqrt{C_{2k+1} + 1}$ *paran prirodan broj za svaki* $k \in \mathbb{N}_0$.

*Slično,*

$$C_{2k+1} - 1 = 2\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i+1}2^i\right)^2$$

*pa je* $\sqrt{(C_{2k+1} - 1)/2}$ *neparan prirodan broj za svaki* $k \in \mathbb{N}_0$.

# Poglavlje 3

# Balansirajući brojevi i Pitagorina jednadžba

## 3.1 Pitagorine trojke

**Definicija 3.1.1.** *Uređenu trojku prirodnih brojeva* $(x, y, z)$ *zovemo* ***Pitagorina trojka*** *ako su* $x, y$ *katete, a* $z$ *hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi*

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{3.1}$$

*Ako su* $x,\ y,\ z$ *relativno prosti, onda kažemo da je* $(x, y, z)$ ***primitivna Pitagorina trojka.***
*Diofantska jednadžba* (3.1) *naziva se* ***Pitagorina jednadžba****.*

Uočimo da u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva $x, y$ je paran. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je $y$ paran.

**Teorem 3.1.2.** *Sve primitivne Pitagorine trojke* $(x, y, z)$ *u kojima je* $y$ *paran, dane su formulama*

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

*gdje su* $m, n$ *relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti i* $m > n$*.*

**Korolar 3.1.3.** *Sva rješenja u skupu prirodnih brojeva Pitagorine jednadžbe* (3.1) *su*

$$(x, y, z) = (k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2))$$

*gdje su* $k, m, n$ *prirodni brojevi i* $m > n$*.*

## 3.2 Specijalna Pitagorina jednadžba

U ovom odsječku promatramo Pitagorinu jednadžbu kojoj se katete razlikuju za 1, odnosno jednadžbu
$$x^2 + (x+1)^2 = y^2. \tag{3.2}$$
Uočimo da *egipatski trokut* $(3, 4, 5)$ zadovoljava prethodnu jednadžbu, odnosno $(3, 5)$ je jedno rješenje od (3.2). Naći ćemo vezu između rješenja jednadžbe (3.2) i balansirajućih brojeva.

Pretpostavimo da je $(x, y)$ neko rješenje jednadžbe (3.2) u $\mathbb{N}$. Tada je
$$2x^2 + 2x + 1 = y^2,$$
pa množenjem prethodne relacije s 2 dobivamo
$$2y^2 - 1 = (2x+1)^2.$$
Množenjem s $y^2$ slijedi
$$\frac{(2y^2-1)2y^2}{2} = y^2(2x+1)^2 = \square.$$
Dakle, $y^2(2y^2 - 1)$ je kvadratno trokutasti broj. Kako su $y^2$ i $2y^2 - 1$ neparni, $y^2(2y^2 - 1)$ je neparan kvadratno trokutasti broj. U odsječku 1.4 ustanovili smo da je svaki kvadratno trokutasti broj jednak kvadratu nekog balansirajućeg broja. Budući da je $y^2(2y^2-1)$ neparan (jer je $y$ neparan), slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je
$$B_{2k+1}^2 = y^2(2y^2-1).$$
Stoga je
$$y^2 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$
odnosno
$$y = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}}{2}.$$
Iz
$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$
dobivamo da je
$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1} - 1}{2}} - 1\right).$$

Možemo pojednostaviti izraze za $x$ i $y$ tako da upotrijebimo Lucas-balansirajući broj

$$C_{2k+1} = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}.$$

Prema tome, pokazali smo ako je $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ jednadžbe (3.2), onda postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{C_{2k+1} - 1}{2}} - 1),$$
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{C_{2k+1} + 1}.$$

**Teorem 3.2.1.** *Sva rješenja jednadžbe* (3.2) *dana su s*

$$(x, y) = (\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(C - 1)} - 1}{2}, \frac{\sqrt{1 + C}}{2}), \tag{3.3}$$

*gdje* $C = \sqrt{8B^2 + 1}$ *je Lucasov balansirajući broj koji odgovara neparnom balansirajućem broju* $B$.

*Dokaz.* Pokazali smo da ako je $(x, y)$ neko rješenje jednadžbe (3.2), onda postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da za $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$ vrijedi (3.3).

Još se treba uvjeriti da je (3.3) rješenje za $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$ i svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Očito je

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{C + 1}{4} + 1 = y^2.$$

Prema Napomeni 2.4.5 slijedi da su formulama u (3.3) dobro definirani prirodni brojevi. □

Prvih nekoliko rješenja Pitagorine jednadžbe (3.2) su

$$(x, y) = (0, 1), (3, 5), (20, 29), (119, 169), (696, 985), \ldots$$

Zanimljivo je da su rješenja jednadžbe (3.2) u $y$ upravo Pellovi brojevi s neparnim indeksom. *Pellovi brojevi* su $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ a ostali se dobivaju rekurzijom

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \; n \geq 1.$$

# Poglavlje 4

# Kobalansirajući brojevi

## 4.1 Definicija

U Poglavlju 1 smo razmotrili da prirodan broj $n$ je balansirajući broj ako zadovoljava diofantsku jednadžbu

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + r) \tag{4.1}$$

za neki $r \in \mathbb{N}_0$, gdje je $r$ balanser pridružen balansirajućem broju $n$. Modificiramo li relaciju (4.1), dolazimo do sljedeće relacije

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r), \tag{4.2}$$

na koju, ponovo, gledamo kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznanicama $n$ i $r$.

**Definicija 4.1.1.** *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}_0$ brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu* (4.3). *Tada se $n$ naziva* ***kobalansirajući broj****, a $r$ njemu pridružen* ***kobalanser.*** *Oznaka za k-ti kobalansirajući broj je $b_k$.*

Prva tri kobalansirajuća broja su $b_1 = 2, b_2 = 14$ i $b_3 = 84$ s kobalanserima $1, 6$ i $35$, redom.

Jednadžbu (4.1) možemo zapisati kao

$$n(n + 1) = \frac{(n + r)(n + r + 1)}{2}. \tag{4.3}$$

Uočimo da je desna strana u (4.3) jednaka $n + r$-tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

**Propozicija 4.1.2.** *Prirodan broj $n$ je kobalansirajući ako i samo ako je $n(n + 1)$ trokutasti broj.*

Prema prethodnoj propoziciji slijedi da se traženje kobalansirajućih brojeva svodi na traženje trokutastih brojeva koji su jednaki umnošku dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Ako je trokutasti broj $T$ jednak umnošku $n(n+1)$, onda je $\lfloor \sqrt{T} \rfloor$ kobalansirajući broj, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveće cijelo broja $x$. Zaista, vrijedi $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$. Na primjer, $T = 6$ je trokutasti broj koji je umnožak dva uzastopna broja i stoga je $\lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2$ kobalansirajući broj.

Jednadžbu (4.3) možemo shvatiti i kao kvadratnu jednadžbu u $r$:

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 - n = 0.$$

Jasno je da je $n$ kobalansirajući broj ako i samo ako postoji nenegativno cjelobrojno rješenje prethodne jednadžbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{4.4}$$

nenegativan broj. Dakle vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

**Teorem 4.1.3.** *Prirodan broj $n$ je kobalansirajući ako i samo ako je $8n^2 + 8n + 1$ potpuni kvadrat.*

Kako je $8 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$ potpuni kvadrat, niz kobalansirajućih brojeva $(b_n)$ proširujemo s $b_0 = 0$. (Prema definiciji, kobalansirajući brojevi su prirodni brojevi.)

Zanimljivo je da niz kobalansirajućih brojeva predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva, i obratno niz balansirajućih brojeva predstavlja niz kobalansera kobalansirajućih brojeva. Ako u (4.4) umjesto $n$ uvrstimo balaser $r_B$ balansirajućeg broja $B$ za kojeg prema (1.7) vrijedi

$$r_B = \frac{-2B - 1 + \sqrt{8B^2 + 1}}{2},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} r &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 24B^2 - 8B\sqrt{1 + 8B^2}} \\ &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(4B - \sqrt{1 + 8B^2})^2} \\ &= B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} + 2B - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8B^2} \\ &= 3B - \sqrt{1 + 8B^2}. \end{aligned}$$

Prema Korolaru 2.3.4 je $3B - \sqrt{1 + 8B^2}$ balansirajući broj, i to upravo prethodnik od $B$.

## 4.2 Funkcije povezane s kobalansirajućim brojevima

Definiramo funkcije:

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1, \\ G(x) &= 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8, \\ H(x) &= 8x^2 + 8x + 1 + (2x + 1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1}, \end{aligned}$$

za $x, y \geq 0$. Pokazat ćemo da navedene funkcije uvijek generiraju kobalansirajuće brojeve.

Funkcija $F(x) : [0, \infty\rangle \to [2, \infty\rangle$, je strogo rastuća jer

$$F'(x) = 3 + \frac{4(3 + 1)}{\sqrt{8x^2 + 8x + 1}} > 0.$$

Dakle, $F$ je bijekcija i njena inverzna funkcija $F^{-1}$ je dana s

$$F^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

Također se može provjeriti da je $x < F(x)$ za sve $x \geq 0$.

**Teorem 4.2.1.** *Neka su $n$ i $m$ kobalansirajući brojevi, onda su $F(n)$, $G(n)$, $H(n)$ i $f(n, m)$ također kobalansirajući brojevi.*

*Dokaz.* Koristimo se karakterizacijom kobalansirajućeg broja iz Teorema 4.1.3, $n$ je kobalansirajući pa je $8n^2 + 8n + 1$ jednak potpunom kvadratu i stoga je $F(n) = k$ prirodan broj. Iz činjenjenice da je

$$F^{-1}(k) = k - \sqrt{8k^2 + 8k + 1} + 1,$$

prirodan broj dobivamo da je $8k^2 + 8k + 1$ potpuni kvadrat, što povlači da je $k = F(n)$ kobalansirajući broj.

Budući da je $F(F(n)) = G(n)$, slijedi da je i $G(n)$ kobalansirajući broj.

Direktnom provjerom može se potvrditi da je $8H(n)^2+8H(n)+1$ potpun kvadrat. Zaista,

$$8H(n)^2 + 8H(n) + 1 = \left((8n + 4)\sqrt{8n^2 + 8n + 1} + 16n^2 + 16n + 3\right)^2.$$

□

U sljedećem teoremu ćemo dokazati da $F(n)$ nije bilo koji kobalansirajući broj, već sljedeći kobalansirajući broj broju $n$.

**Teorem 4.2.2.** *Za svaki kobalansirajući broj $n$, $F(n)$ njegov sljedbenik, a $F^{-1}(n)$ njegov prethodnik u nizu kobalasirajućih brojeva.*

*Dokaz.* Već smo pokazali da je $F(n)$ kobalansirajući broj ako je $n$ kobalansirajući. Analogno kao u dokazu Teorema 4.2.1 zaključujemo da je i $F^{-1}(n)$ kobalansirajući.

Dalje dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

**Baza:** Direktnom provjerom za $b_0 = 0$ i $b_1 = 2$ vidimo da vrijedi $F(b_0) = b_1$.

**Pretpostavka:** Neka je $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo je $F(b_{k-1}) = b_k$

**Korak:** Trebamo pokazati da je $F(b_k) = b_{k+1}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $F(b_k) > b_{k+1}$. (Drugih "suprotnih" pretpostavki nema jer je $F(b_k)$ kobalansirajući broj i $F$ strogo rastuća funkcija). Tada je

$$b_k < b_{k+1} < F(b_k),$$

te budući da je funkcija $F$ rastuća vrijedi

$$F^{-1}(b_k) < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Prema pretpostavci indukcije je $F^{-1}(b_k) = b_{k-1}$ i stoga je

$$b_{k-1} < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Kako je $F^{-1}(b_{k+1})$ kobalansirajući broj, prethodna nejednakost nije moguća jer su $b_{k-1}$ i $b_k$ dva uzastopna kobalansirajuća broja. Dakle, $F(b_k) = b_{k+1}$.

Očito je $F^{-1}(n)$ prethodnik kobalansirajućeg broja $n$. $\square$

## Rekurzivna formula

Prema Teoremu 4.2.2 vrijedi $F(b_n) = b_{n+1}$, $F^{-1}(b_n) = b_{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno malo drugačije zapisano pokazali smo da vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Korolar 4.2.3.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede relacije*

$$b_{n+1} = 3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1,$$
$$b_{n-1} = 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1.$$

Zbrajanjem prethodnih dviju relacija dolazimo do rekurzivne linearne relacije drugog reda za niz kobalansirajućih brojeva.

**Teorem 4.2.4.** *Vrijedi*

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \tag{4.5}$$

*za $k \in \mathbb{N}$, uz početne uvjete $b_0 = 0, b_1 = 2$.*

Prvih nekoliko članova niza kobalansirajućeg niza brojeva je

$$0, 2, 14, 84, 492, 2870, 16730, 97512, \ldots$$

Direktna posljedica Teorema 4.2.4 je

**Teorem 4.2.5.** *Svaki kobalansirajući broj je paran.*

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Prva dva kobalansirajuća broja $b_0 = 0$ i $b_1 = 2$ su parna.

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da je $b_n$ paran za sve $n \leq k$.

**Korak:** Prema relaciji (4.5) lako se vidi da je i $b_{k+1}$ također paran broj. □

## Lucas-kobalansirajući brojevi

**Definicija 4.2.6.** *Za svaki n-ti kobalansirajući broj $b_n$ definiramo njemu pripadni n-ti* ***Lucas-kobalansirajući broj***

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

U odsječku 2.4 vidjeli smo da niz Lucas-balansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva. Prema tome, očekujemo da niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz kobalansirajućih brojeva. No, to nije istina. Niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao niz balansirajućih brojeva.

**Teorem 4.2.7.** *Vrijedi*

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

*uz početne uvjete $c_0 = 1, c_1 = 7$.*

*Dokaz.* Prema definiciji Lucas-kobalansirajućeg broja i Korolaru 4.2.3 slijedi

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= 8b_n^2 + 8b_n + 1 \\ &= 8\left(3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1\right)^2 + 8b_{n+1} + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 8b_n + 4\right)^2 \\ &= (3c_n + 8b_n + 4)^2. \end{aligned}$$

Prema tome

$$c_{n+1} = 3c_n + 8b_n + 4. \tag{4.6}$$

Koristeći

$$c_{n-1}^2 = 8b_{n-1}^2 + 8b_{n-1} + 1$$

na sličan način, može se pokazati da vrijedi

$$c_{n-1} 3c_n - 8b_n - 4. \tag{4.7}$$

Zbrajanjem (4.6) i (4.7), slijedi

$$c_{n+1} + c_{n-1} = 6c_n.$$

□

Navodimo prvih nekoliko članova Lucas-kobalansirajućeg niza brojeva:

$$1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, \ldots$$

## Eksplicitna formula

Izvest ćemo eksplicitnu formulu za kobalansirajući broj $b_n$ tako da ćemo riješiti rekurziju (4.5). Linearna rekurzija koju zadovoljava niz kobalansirajućih brojeva

$$b_{k+1} - 6b_n + b_{n-1} - 2 = 0 \tag{4.8}$$

nije homogena i zato ju najprije trebamo homogenizirati. Definiramo niz

$$d_n = b_n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

pa supstitucijom u (4.8) dobivamo

$$d_{k+1} - \frac{1}{2} - 6\left(d_n - \frac{1}{2}\right) + d_{n-1} - \frac{1}{2} - 2 = 0,$$

odnosno homogenu linearnu rekurziju

$$d_{k+1} - 6d_n + d_{n-1} = 0. \tag{4.9}$$

Njena karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0. \tag{4.10}$$

Korijeni $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ i $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ jednadžbe (4.10) su realni i različiti pa prema tome $n$-ti član niza $(d_n)$ zadan rekurzijom (4.9) ima oblik

$$d_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \tag{4.11}$$

gdje su $\alpha$ i $\beta$ konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno iz $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{5}{2}$. Dakle,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2},\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = \frac{5}{2}. \tag{4.12}$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left(-\frac{\lambda_2 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \frac{\lambda_1 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\right),$$

odnosno

$$(\alpha, \beta) = (\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} + 1), \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} - 1)).$$

Stoga je

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{8})^n + (\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{8})^n\right),$$

ili

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}\right),$$

Ovaj rezultat dokazuje sljedeći teorem.

**Teorem 4.2.8.** *Vrijedi*

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}\right) + \frac{1}{2}, \tag{4.13}$$

*za* $n \in \mathbb{N}_0$.

Relacija (4.13) se ponekad naziva *Binetova formula za kobalansirajuće brojeve.*

## Funkcija izvodnica

Neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{4.14}$$

**Teorem 4.2.9.** *Funkcija izvodnica niza kobalansirajućih brojeva* $(b_n)$ *je*

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1 - x)(1 - 6x + x^2)}.$$

*Dokaz.* Rekurzija (4.5) može se zapisati kao

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n = 2.$$

Pomnožimo li obje strane rekurzije s $x^{n+2}$, dobivamo

$$b_{n+2}x^{n+2} - 6b_{n+1}x^{n+2} + b_n x^{n+2} = 2x^{n+2}.$$

Sumiranjem po $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2},$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n} = 2x^2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n}.$$

Prema (4.14) je

$$(f(x) - 2x^2) - 6xf(x) + x^2 f(x) = \frac{2x^3}{1-x}.$$

tj.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

# Bibliografija


[1] A. Behera and G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fib. Quart., 37 (1999), 98–105.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] G. K. Panda, *Sequence balancing and cobalancing numbers*, Fibonacci Quar- terly, 45 (2007), 265–271.

[4] G. K. Panda, *Some fascinating properties of balancing numbers*, Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, Cong. Numer. 194 (2009), 185–189.

[5] M. Penn, *Balancing Numbers*, video predavanje, `https://www.youtube.com/watch?v=jMfZ9jRsHSI`

[6] P. K. Ray, *Balancing and cobalancing numbers*, dissertation, Department of mathematics, National Institute of Technology Rourkela, India, 2009.

[7] *Funkcije izvodnice*, `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-04.pdf`

# Sažetak


U ovom radu definiramo *balansirajući* broj $n \in \mathbb{N}$ kao rješenje diofantske jednadžbe

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

gdje je $r \in \mathbb{N}_0$ *balanser* pridružen broju $n$. Na primjer, $1, 6, 35$ i $204$ su balansirajući brojevi s balanserima $0, 2, 14$ and $84$, redom. Zanimljivo je da balansirajući brojevi zadovoljavaju linearnu rekurzivnu relaciju

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pokazat ćemo neka svojstva balansirajućih brojeva i ustanoviti povezanost s nekim klasičnim diofanstskim jednadžbama. Također, definirat ćemo *kobalansirajuće* brojeve malo modificirajući jednadžbu za balansirajuće brojeve i promatrat ćemo njihova svojstva.

# Summary

In this thesis we define *balancing* numbers $n \in \mathbb{N}$ as a solution of the Diophantine equation

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

calling $r \in \mathbb{N}_0$ the *balancer* corresponding to $n$. For example, $1, 6, 35$ and $204$ are balancing numbers with balancers $0, 2, 14$ and $84$, respectively. It is interesting that the balancing numbers satisfy linear recurrence relation

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

We show properties of balancing numbers and establish relation to some classic Diophantine equation. Also, we define the *cobalancing* numbers by slightly modifying equation for balancing numbers and observe their properties.

# Životopis

Rođena sam 16. prosinca 1995. godine u Varaždinu. Završila sam OŠ Podrute, PŠ Završje u Završju Podbelskom, a zatim sam upisala prirodoslovno-matematički smjer Prve gimnazije Varaždin. Nakon srednje škole upisala sam Prorodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, tijekom kojeg radim kao kreator matematičkog sadržaja u Photomath-u.