Primjena teorema o reziduumima na neprave integrale

Radovčić, Marta

Primjena teorema o reziduumima na neprave integrale

Radovčić, Marta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Radovčić

PRIMJENA TEOREMA O REZIDUUMIMA NA NEPRAVE INTEGRALE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Ani Prlić, na pruženoj pomoći pri izradi ovoga rada.
Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima i bratu. Hvala vam na neizmjernoj podršci.

Sadržaj

Uvod

Mnogi integrali koji nisu elementarno rješivi, pojednostavljuju se zahvaljujući teoremu o reziduumima. U ovom radu prikazat ćemo primjenu teorema o reziduumima na različite tipove nepravih integrala. Pritom je naglasak stavljen na izvod formula po kojima se ti nepravi integrali računaju.

U prvom poglavlju ovoga rada navodimo osnovne pojmove te iskazujemo teoreme koji su povezani s teorijom reziduuma, a koji se koriste u nastavku rada. Također, u prvom poglavlju navodimo definiciju reziduuma u beskonačnosti te izvodimo formulu pomoću koje se računa.

U drugom poglavlju bavimo se primjenom teorema o reziduumima na neprave integrale raznih tipova funkcija. Kao prvi tip promatramo neprave integrale racionalnih funkcija kod kojih je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku. Dio poglavlja u kojem se bavimo racionalnim funkcijama podijeljen je na dva dijela, u kojima promatramo funkcije s i bez singulariteta na realnoj osi. Nakon toga proučavamo Fourierov transformat racionalne funkcije pri čemu detaljno izvodimo formulu prema kojoj se on računa. Taj izvod potreban nam je za drugi tip integrala koji računamo, a to su nepravi integrali funkcija oblika $f(x)\cos px$ i $f(x)\sin px$, gdje je $f(x)$ racionalna funkcija. Posljednja dva tipa funkcija čije neprave integrale računamo su funkcije oblika $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ i $f(x)\ln x$, gdje je $f(x)$ racionalna funkcija. Za svaki od promatranih tipova nepravih integrala dani su riješeni primjeri.

U posljednjem, trećem poglavlju, donosimo povijesni osvrt o nastanku gama funkcije te navodimo njezinu definiciju i dokazujemo njena osnovna svojstva. Među ostalim, dokazujemo da je gama funkcija proširenje funkcije faktorijel. U nastavku poglavlja određujemo područje konvergencije integrala koji ju definira te promatramo proširenje gama funkcije na cijelu kompleksnu ravninu, izuzev cijelih negativnih brojeva i nule. Nakon toga dokazujemo tzv. Eulerovu produktnu formulu koristeći teorem o reziduumima. U konačnici, prikazujemo primjenu gama funkcije u integralnom računu kroz primjere računanja nepravih integrala koji nisu elementarno rješivi.

Sve slike priložene u ovom radu napravljene su samostalno u programu GeoGebra.

Poglavlje 1

Teorem o reziduumima

Na početku rada navest ćemo osnovne pojmove povezane s teorijom reziduuma te iskazati teoreme koji se koriste u nastavku. Pritom smo se koristili izvorima [4] i [10].

Definicija 1.0.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***holomorfna (analitička)*** *ako je derivabilna na Ω i derivacija f' neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je* **holomorfna u točki** *z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna.*

Teorem 1.0.2. ***(Princip jedinstvenosti za analitičke funkcije)*** *Neka su f i g analitičke funkcije na području Ω. Ako se funkcije f i g podudaraju na beskonačnom skupu, koji u području Ω ima gomilište, onda se one podudaraju svuda na Ω, tj. $f = g$.*

Definicija 1.0.3. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija te $\gamma : [a, b] \to \Omega$ gladak put.* ***Integral funkcije f duž puta*** *γ definiramo kao kompleksni broj*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Ako je γ po dijelovima gladak put te $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ točke takve da su $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ za $k = 0, \ldots, n-1$ glatke funkcije, onda se integral funkcije f duž puta γ definira kao

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Teorem 1.0.4. ***(Teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije)*** *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna i integrabilna funkcija na segmentu $I = [a, b]$, onda postoji $c \in I$ takav da je*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = f(c)\,(b - a).$$

Teorem 1.0.5. ***(Taylor)*** *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1.1}$$

gdje su koeficijenti c_n dani formulama

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 polumjera manjeg od r. Red (1.1) *zove se* ***Taylorov red*** *funkcije f u točki z_0.*

Teorem 1.0.6. ***(Laurent)*** *Neka je f holomorfna funkcija na kružnom vijencu $V(z_0; r, R)$. Tada za svaki $z \in V(z_0; r, R)$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1.2}$$

gdje su koeficijenti c_n, $n \in \mathbb{Z}$, dani s

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog polumjera ρ za koji je $r < \rho < R$. Red (1.2) *zove se* ***Laurentov red*** *funkcije f oko točke z_0.*

Definicija 1.0.7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka $z_0 \in Int\ \overline{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$* ***singularitet funkcije*** *f ako u točki z_0 funkcija f nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.*

Definicija 1.0.8. *Za singularitet z_0 kažemo da je* ***izoliran singularitet*** *funkcije f, ako je f holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.*

Definicija 1.0.9. *Točka z_0 je* ***uklonjiv singularitet*** *funkcije f, ako je Laurentov razvoj funkcije f u okolini točke z_0 oblika*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

odnosno ako u Laurentovom razvoju funkcije f u okolini točke z_0 nema negativnih potencija.

Definicija 1.0.10. *Točka z_0 je* ***pol*** *n-tog reda ($n \in \mathbb{N}$) funkcije f, ako je Laurentov razvoj funkcije f u okolini točke z_0 oblika*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + ... , \quad c_{-n} \neq 0,$$

odnosno ako u Laurentovom razvoju funkcije f u okolini točke z_0 postoji barem jedan i ukupno konačno mnogo članova s negativnim potencijama.

Definicija 1.0.11. *Točka z_0 je* ***bitan singularitet*** *funkcije f, ako u Laurentovom razvoju funkcije f u okolini točke z_0 postoji beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama.*

Definicija 1.0.12. *Za funkciju f kažemo da je* ***meromorfna*** *na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ako skup njezinih singulariteta nema gomilište u Ω i ako su svi njeni singulariteti ili uklonjivi ili polovi.*

Definicija 1.0.13. *Neka su R_n, $n \in \mathbb{N}$, meromorfne funkcije na $\mathbb{C}$. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} R_n(z)$* ***lokalno uniformno konvergira****, ako za svaki $r > 0$ postoji prirodan broj m takav da za $n \geq m$ funkcija R_n nema polova u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r)$ i da red $\sum_{n=m}^{\infty} R_n(z)$ uniformno konvergira na tom krugu.*

Propozicija 1.0.14. *Pretpostavimo da red meromorfnih funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} R_n(z)$ konvergira lokalno uniformno. Neka je P skup svih polova u $\mathbb{C}$ svih funkcija R_n, $n \in \mathbb{N}$. Tada skup P nema gomilište u $\mathbb{C}$ i postoji meromorfna funkcija h na $\mathbb{C}$, čiji su polovi sadržani u skupu P i za koju vrijedi*

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus P.$$

Teorem 1.0.15. ***(Weierstrassov kriterij)*** *Ako za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$|u_n(z)| \leq a_n, \quad z \in S \subseteq \mathbb{C}$$

i ako red $\sum a_n$ pozitivnih brojeva a_n konvergira, onda red $\sum u_n$ kompleksnih funkcija na S konvergira uniformno i apsolutno na S.

Definicija 1.0.16. *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ i neka je*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

njezin Laurentov red oko točke z_0. Koeficijent c_{-1} uz član $\frac{1}{z-z_0}$ naziva se ***reziduum (ostatak)*** *funkcije f u točki z_0 i označavamo ga s $Res(f, z_0)$.*

Za reziduum vrijedi

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz \tag{1.3}$$

gdje je $0 < r < R$*, a kružnica* $S(z_0, r)$ *je pozitivno orijentirana.*

Ako je z_0 pol prvog reda za funkciju f, tada reziduum funkcije f u točki z_0 računamo prema formuli:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

Ako je z_0 pol n-tog reda za funkciju f, tada reziduum funkcije f u točki z_0 računamo prema formuli:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z),$$

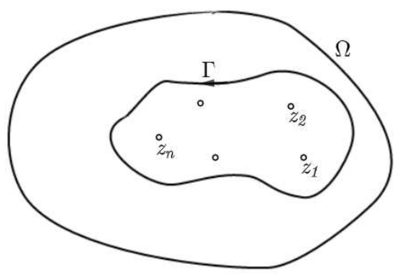
pri čemu je funkcija g zadana s

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z).$$

Sada ćemo iskazati teorem na kojem se zasniva cjelokupan nastavak rada, a koji svoju primjenu ima u integralnom računu.

Teorem 1.0.17. ***(Teorem o reziduumima)*** *Neka je funkcija* f *analitička na području* Ω*, osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta* $z_1, \ldots, z_n$*. Neka je* Γ *pozitivno orijentirana krivulja u* Ω *na kojoj ne leži niti jedan singularitet funkcije* f *i čije unutarnje područje sadrži te izolirane singularitete. Tada je*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$



Slika 1.1: Teorem o reziduumima

Teorem 1.0.18. ***(Cauchyjev teorem)*** *Ako je funkcija f analitička na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i ako je Γ krivulja koja zajedno sa svojim unutarnjim područjem leži u Ω, onda je*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Definicija 1.0.19. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da ima* ***izoliran singularitet u točki*** *∞ ako postoji $R > 0$ takav da je vijenac $V(0; R, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq \Omega$ i da je funkcija f holomorfna na tom vijencu.*

Definicija 1.0.20. *Ako je ∞ izoliran singularitet funkcije f, onda* ***reziduum funkcije f u točki*** *∞ definiramo formulom*

$$Res(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz, \tag{1.4}$$

pri čemu je $R > 0$ takav da kružnica $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ obuhvaća sve singularitete funkcije f u kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$.

Ako je funkcija f analitička na $\mathbb{C}$, osim u konačno mnogo točaka $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ u kojima ima izolirane singularitete, tada prema teoremu o reziduumima vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k), \quad |z_k| < \infty.$$

Iz te činjenice proizlazi važnost reziduuma u beskonačnosti prema kojoj integral $\int_\Gamma f(z)\, dz$ možemo računati i na sljedeći način:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) - 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty),$$

pri čemu se singulariteti $z_k,\ k = 1, \dots, n$, funkcije f nalaze izvan krivulje Γ. Iz tog razloga treba nam pogodniji način za računanje reziduuma u točki ∞ od formule (1.4).

Ako je funkcija f holomorfna na kružnom vijencu $V(0; r, \infty)$, tada se na tom kružnom vijencu može razviti u Laurentov red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > r.$$

Prema definiciji reziduuma vrijedi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1}.$$

Za $|z| < \frac{1}{r}$ vrijedi

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = ... + c_{-2}z^2 + c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + ...$$
$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = ... + c_{-2} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^4} + ... ,$$

iz čega slijedi

$$c_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right),$$

odnosno

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Definirajmo funkciju f_1 s

$$f_1(z) := f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ukoliko funkcija f_1 ima u točki 0 uklonjiv singularitet, postoji jednostavnija formula za računanje reziduuma u točki ∞. Naime, ako funkcija f_1 ima uklonjiv singularitet u nuli, tada je njen Laurentov razvoj oko točke $z_0 = 0$ jednak

$$f_1(z) = c_0 + c_{-1}z + c_{-2}z^2 + ... ,$$

čijim deriviranjem dobivamo

$$f_1'(z) = c_{-1} + 2c_{-2}z + ...$$

Uočimo da vrijedi

$$f_1'(0) = c_{-1},$$

odnosno

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -f_1'(0). \tag{1.5}$$

Iz definicije derivacije slijedi

$$f_1'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f_1(z) - f_1(0)}{z}.$$

Koristeći definiciju funkcije f_1 dobivamo:

$$f_1'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f_1(z) - f_1(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) - f(\infty)\right),$$

gdje zamjenom varijabli dobivamo:

$$f_1'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f_1(z) - f_1(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) - f(\infty)\right) = \lim_{w\to\infty} w(f(w) - f(\infty)). \tag{1.6}$$

Dakle, iz (1.5) i (1.6) slijedi

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

gdje $f(\infty)$ računamo kao

$$f(\infty) = \lim_{z\to 0} f_1(z) = \lim_{z\to\infty} f(z).$$

Poglavlje 2

Primjena teorema o reziduumima na neprave integrale

2.1 Nepravi integral

Teorem o reziduumima primjenjiv je na računanje svih vrsta integrala, a u ovom radu mi ćemo se posebno baviti nepravim integralima koji konvergiraju ili imaju glavnu vrijednost. Stoga navodimo njihovu definiciju.

Definicija 2.1.1. *Nepravi integral realne funkcije realne varijable*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{2.1}$$

konvergira ukoliko u skupu realnih brojeva postoje limesi

$$\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{c} f(x)\, dx, \quad \lim_{B\to\infty}\int_{c}^{B} f(x)\, dx, \tag{2.2}$$

za svaki realni broj c. U tom slučaju postoji limes

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\, dx \tag{2.3}$$

i on je jednak nepravom integralu (2.1).

Ukoliko ne postoje limesi (2.2), odnosno nepravi integral (2.1) ne konvergira, ali postoji limes (2.3), tada se taj limes naziva glavna vrijednost integrala funkcije f i označavamo ga s

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

2.2 Nepravi integrali racionalne funkcije

Neka je funkcija definirana s

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2.4}$$

gdje su P i Q normirani polinomi s kompleksnim koeficijentima, takvi da nemaju zajedničkih nultočaka te neka je stupanj polinoma P jednak n, a stupanj polinoma Q jednak m i $m > n$. Zanima nas kako u tom slučaju izračunati nepravi integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{2.5}$$

ili glavnu vrijednost integrala funkcije f. Za početak ćemo promatrati slučaj kada polinom Q nema realnih nultočaka.

Prvi slučaj: $m \geq n + 2$. Prije svega, pokažimo da u ovom slučaju nepravi integral (2.5) zaista konvergira, tj. da postoje limesi (2.2). Prema definiciji, funkcija f je oblika

$$f(x) = \frac{x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0}{x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_1 x + q_0} = \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \; ... \; + \frac{p_0}{x^n}}{1 + \frac{q_{m-1}}{x} + \; ... \; + \frac{q_0}{x^m}}$$

pa za dovoljno veliki $|x|$ vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{K}{|x|^{m-n}},$$

za neku konstantu $K > 0$. Tada za realni broj c dobivamo

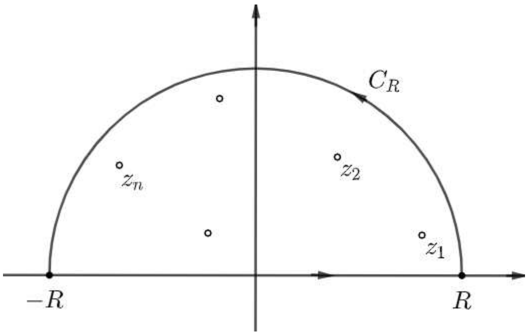
$$\lim_{R\to-\infty} \int_R^c \frac{K}{x^{m-n}}\, dz = \lim_{R\to-\infty} \left[\frac{K}{(m-n-1)R^{m-n-1}} - \frac{K}{(m-n-1)c^{m-n-1}} \right] = -\frac{K}{(m-n-1)c^{m-n-1}} \,.$$

Analogno, za slučaj kada $R \to \infty$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_c^R \frac{K}{x^{m-n}}\, dz = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{K}{(m-n-1)c^{m-n-1}} - \frac{K}{(m-n-1)R^{m-n-1}} \right] = \frac{K}{(m-n-1)c^{m-n-1}} \,.$$

Kako je c realan broj, zaključujemo da gore navedeni limesi postoje. Ovime je dokazana konvergencija integrala (2.5) za funkciju (2.4) čiji polinom u nazivniku nema realnih nultočaka i za koju vrijedi $m \geq n + 2$.

Proširimo funkciju f na gornju poluravninu ($Im\ z > 0$) do funkcije $z \mapsto f(z)$ koja u gornjoj poluravnini ima konačno mnogo singulariteta $z_1, \ldots, z_n$. Za krivulju integracije odaberimo pozitivno orijentiranu zatvorenu krivulju koja se sastoji od polukružnice C_R i segmenta $[-R, R]$ na realnoj osi, tako da za dovoljno veliki R, polukružnica C_R obuhvaća sve singularitete funkcije f u gornjoj poluravnini.



Slika 2.1: Krivulja integracije u gornjoj poluravnini

U tom slučaju iz teorema o reziduumima slijedi

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im\ z_k>0} \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{2.6}$$

Dakle, za rješavanje integrala (2.5) ostaje nam izračunati integral po polukružnici C_R

$$\int_{C_R} f(z)\,dz.$$

Sljedeća lema će nam biti od pomoći u tom računu.

Lema 2.2.1. *Neka je f analitička u gornjoj poluravnini, osim možda u točkama $z_1, \dots, z_n$ koje se ne nalaze na realnoj osi. Označimo*

$$M(R) = \max_{z \in \mathbb{C}_\mathbb{R}} |f(z)|.$$

Ako $R \cdot M(R)$ teži u nulu, kad R teži u beskonačnost, tada $\int_{C_R} f(z)\,dz$ teži u nulu, kad R teži u beskonačnost.

Dokaz. Uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Potrebno je ocijeniti integral po polukružnici C_R.

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right| \\ &\le R\int_0^\pi \left|f(Re^{i\varphi})\right| d\varphi \\ &\le R\cdot M(R)\int_0^\pi d\varphi \\ &= \pi R\cdot M(R).\end{aligned}$$

Iz uvjeta leme slijedi da posljednji izraz teži u nulu, kad R teži u beskonačnost. □

Prema definiciji, funkcija f je oblika

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^n + ... + p_1 z + p_0}{z^m + ... + q_1 z + q_0}.$$

Kako je $m \geq n + 2$, za dovoljno velike R postoji konstanta $K > 0$ takva da vrijedi

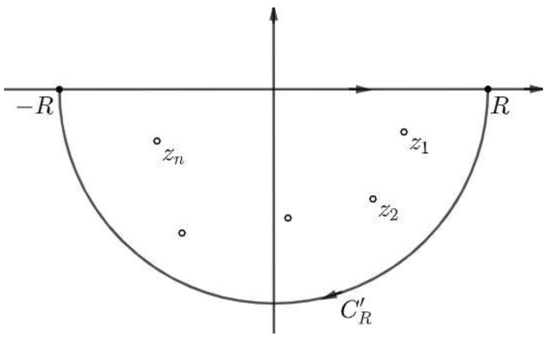
$$M(R) = \max_{z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}} |f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2} = \frac{K}{R^2}.$$

Kad R teži u beskonačnost, tada $R \cdot M(R) \leq \frac{K}{R}$ teži k nuli te je u ovom slučaju ostvaren uvjet leme. Iz prethodne leme i (2.6) zaključujemo da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \mathrm{Res}(f, z_k), \tag{2.7}$$

kad $\int_{C_R} f(z)\, dz$ teži k nuli (kad R teži u beskonačnost).

Analogno, funkciju f mogli smo proširiti i na donju poluravninu ($Im\ z < 0$) do funkcije $z \mapsto f(z)$ koja u donjoj poluravnini ima konačno mnogo singulariteta $z_1, \ldots, z_n$. Tada bismo za krivulju integracije odabrali negativno orijentiranu zatvorenu krivulju koja se sastoji od polukružnice C_R' i segmenta $[-R, R]$ na realnoj osi, tako da za dovoljno veliki R, polukružnica C_R' obuhvaća sve singularitete funkcije f u donjoj poluravnini. Tada bismo,



Slika 2.2: Krivulja integracije u donjoj poluravnini

uz zadovoljenu lemu 2.2.1, integral (2.5) računali prema

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{Im\ z_k < 0} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Drugi slučaj: $m = n + 1$. Proširenje funkcije f na gornju poluravninu i krivulju integracije uzmimo kao u slučaju $m \geq n + 2$. Na taj način dobivamo:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \mathrm{Res}(f, z_k) - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz.$$

Pogledajmo koliko u ovom slučaju iznosi $\int_{C_R} f(z)\, dz$. Uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi}\, d\varphi$$

Prema teoremu srednje vrijednosti 1.0.4, za svaki $R > 0$ postoji $\varphi(R) \in [0, \pi]$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}\, d\varphi &= \int_0^{\pi} \mathrm{Re}\left(f\left(Re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}\right)\, d\varphi + i\int_0^{\pi} \mathrm{Im}\left(f\left(Re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}\right)\, d\varphi \\ &= \pi\left(\mathrm{Re}\left(f\left(Re^{i\varphi(R)}\right)e^{i\varphi(R)}\right)\right) + i\pi\left(\mathrm{Im}\left(f\left(Re^{i\varphi(R)}\right)e^{i\varphi(R)}\right)\right) \\ &= \pi f\left(Re^{i\varphi(R)}\right)e^{i\varphi(R)}.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da za svaki $R > 0$ postoji $z(R) = Re^{i\varphi(R)}$ takav da je

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \pi i z(R) f(z(R)).$$

S obzirom na to da promatramo slučaj kada je $m = n + 1$ te su polinomi P i Q normirani, tada je očito

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 1,$$

iz čega slijedi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = \pi i, \tag{2.8}$$

odnosno

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \mathrm{Res}(f, z_k) - \pi i. \tag{2.9}$$

Primjer 2.2.2. *Izračunajmo integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx.$$

Kako je stupanj polinoma u brojniku za dva manji od stupnja polinoma u nazivniku te polinom u nazivniku nema realnih nultočaka, prema pokazanom na početku odjeljka, ovaj nepravi integral konvergira. Za krivulju integracije odaberimo pozitivno orijentiranu krivulju koja se sastoji od polukružnice C_R s jednadžbom $x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0$ i segmenta $[-R, R]$. Označimo funkciju s

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}.$$

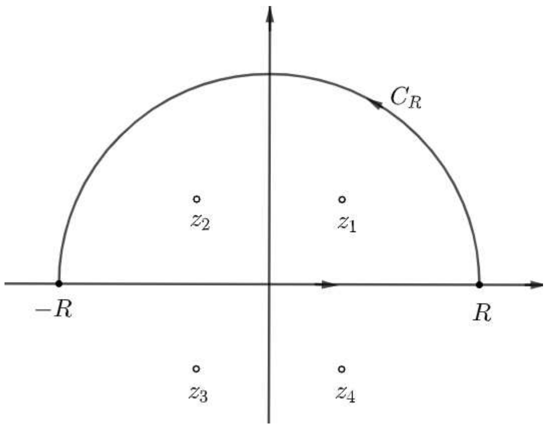
Proširenje funkcije f na kompleksnu ravninu je funkcija kompleksne varijable

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}.$$

Ona je analitička na $\mathbb{C}$, osim u točkama

$$z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = \frac{1 - i}{\sqrt{2}},$$

koje su polovi prvog reda. Uočimo da se za $R > 1$ točke z_1 i z_2 nalaze u unutarnjem, a z_3 i z_4 u vanjskom području od C_R.



Slika 2.3: Krivulja integracije za Primjer 2.2.2

Za takve R vrijedi

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Zbog

$$|z^4 + 1| \geq |z^4| - 1,$$

za $z \in C_R$ vrijedi $|z| = R$ i

$$|f(z)| = \frac{|z^2+1|}{|z^4+1|} \leq \frac{|z^2|+1}{|z^4|-1} = \frac{R^2+1}{R^4-1}.$$

Odnosno,

$$M(R) = \max_{z \in \mathbb{C}_\mathbb{R}} |f(z)| \leq \frac{R^2+1}{R^4-1}$$

te kada $R \to \infty$ vrijedi

$$0 \leq R \cdot M(R) \leq \frac{R(R^2+1)}{R^4+1} \to 0.$$

Prema lemi 2.2.1 vrijedi $\int_{C_R} f(z)\, dz = 0$ te je stoga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right].$$

Izračunajmo sada reziduum funkcije f u točkama z_1 i z_2.

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{z^2+1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{\sqrt{2}(i+1)}{4i-4}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} \frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{4i+4}$$

Dakle, vrijednost integrala jednaka je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}(i+1)}{4i-4} + \frac{\sqrt{2}(1-i)}{4i+4} \right) = \sqrt{2}\pi.$$

Ovaj primjer mogao se riješiti i tako da smo za krivulju integracije odabrali negativno orijentiranu krivulju koja se sastoji od polukružnice C'_R s jednadžbom $x^2 + y^2 = R^2,\ y \leq 0$ i segmenta $[-R, R]$. Tada se za $R > 1$ točke z_3 i z_4 nalaze u unutarnjem, a z_1 i z_2 u vanjskom području od C'_R. Stoga bi vrijedilo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = -2\pi i\ \left[\mathrm{Res}(f, z_3) + \mathrm{Res}(f, z_4)\right].$$

Primjer 2.2.3. *Izračunajmo glavnu vrijednost integrala*

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1}\, dx.$$

Uočimo da je stupanj brojnika za jedan manji od stupnja nazivnika pa ćemo za računanje glavne vrijednosti integrala koristiti formulu (2.9). Označimo funkciju s

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

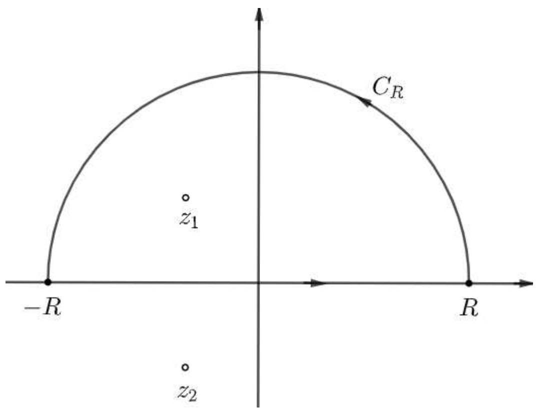
Za krivulju integracije odaberimo pozitivno orijentiranu krivulju koja se sastoji od polukružnice C_R s jednadžbom $x^2 + y^2 = R^2, \ y \geq 0$ i segmenta $[-R, R]$. Proširenje funkcije f na kompleksnu ravninu je funkcija kompleksne varijable

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1}.$$

Ona je analitička na $\mathbb{C}$, osim u točkama

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

koje su polovi prvog reda. Uočimo da se za $R > 1$ točka z_1 nalazi u unutarnjem, a z_2 u vanjskom području od C_R.



Slika 2.4: Krivulja integracije za Primjer 2.2.3

Za takve R vrijedi

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k) - \pi i.$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{z}{z - z_2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}.$$

Dakle, glavna vrijednost danog integrala jednaka je

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1}\, dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_1) - \pi i = 2\pi i \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{6} - \pi i = -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi

U ovom ćemo odjeljku promatrati slučaj kada racionalna funkcija ima izolirani singularitet koji se nalazi na realnoj osi. Neka je funkcija definirana s

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdje su P i Q normirani polinomi s kompleksnim koeficijentima takvi da nemaju zajedničkih nultočaka te neka je stupanj polinoma P jednak n, a stupanj polinoma Q jednak m i $m > n$. Za potrebe računanja integrala, dokazat ćemo sljedeću lemu koristeći [4].

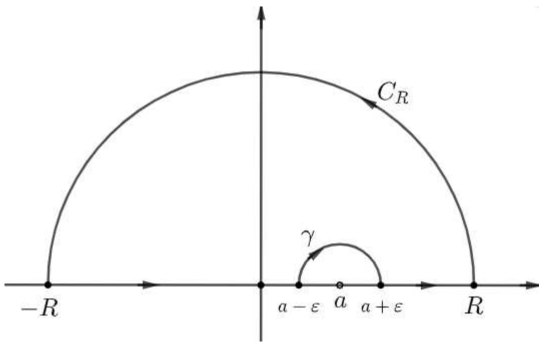
Lema 2.2.4. *Neka je funkcija f definirana s*

$$f(x) = \frac{1}{x-a},$$

za neki $a \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-a} = 0.$$

Dokaz. Neka su $\varepsilon > 0$ i $R > 0$ takvi da vrijedi $|a| < R$ i $\varepsilon < R - |a|$ te neka je Γ pozitivno orijentirana zatvorena krivulja, prikazana na slici 2.5, koja se sastoji od polukružnice C_R, segmenata $[-R, a-\varepsilon]$ i $[a+\varepsilon, R]$ na realnoj osi te negativno orijentirane polukružnice γ.



Slika 2.5: Krivulja integracije

Proširenje funkcije f na kompleksnu ravninu je funkcija kompleksne varijable

$$f(z) = \frac{1}{z-a},$$

koja je analitička na $\mathbb{C}$, osim u točki $z = a$. Prema Cauchyjevom teoremu 1.0.18 vrijedi

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{C_R} \frac{dz}{z-a} + \int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x-a} + \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_{a+\varepsilon}^{R} \frac{dx}{x-a} = 0. \tag{2.10}$$

Kako je polukružnica γ negativno orijentirana te je stupanj polinoma u brojniku za jedan manji od stupnja polinoma u nazivniku, prema (2.8) vrijedi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = -\pi i.$$

Uočimo da vrijedi

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z-a} = \int_{C_R} \frac{dz}{z} + \int_{C_R} \frac{a}{z(z-a)}\, dz.$$

Nadalje, uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$. Imamo

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{Re^{i\varphi} i}{Re^{i\varphi}}\, d\varphi = \pi i.$$

Kako je za racionalnu funkciju $z \mapsto \frac{a}{z(z-a)}$ stupanj polinoma u brojniku za dva manji od stupnja polinoma u nazivniku, prema lemi 2.2.1, vrijedi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{a}{z(z-a)} dz = 0.$$

Iz gornjih računa i (2.10) dobivamo

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{R} \frac{dx}{x-a} \right] = 0,$$

odnosno,

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{R} \frac{dx}{x-a} \right] = 0.$$

□

Neka je $m \ge n+1$ te neka su $z_1, \ldots, z_k$ sve realne jednostruke nultočke polinoma Q. Iz rastava na parcijalne razlomke slijedi da funkciju f možemo zapisati u obliku

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - z_j} + f_1(z), \tag{2.11}$$

za neku funkciju f_1 oblika

$$f_1(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)},$$

pri čemu su polinomi P_1 i Q_1 normirani, stupnja $n-k$, odnosno $m-k$. Funkcija f_1 ima iste polove funkcije f, osim onih koji se nalaze na realnoj osi te, očito, za takve polove vrijedi

$$\mathrm{Res}(f, z) = \mathrm{Res}(f_1, z).$$

Iz zapisa (2.11) funkcije f uočavamo da vrijedi

$$\mathrm{Res}(f, z_j) = c_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dakle, vrijedi

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{x - z_j}\, dx + V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx,$$

odnosno, prema lemi 2.2.4

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Promotrimo Laurentov razvoj funkcije f_1 oko točke 0. Iz defincije funkcije f_1 možemo vidjeti da je taj razvoj oblika

$$f_1(z) = \frac{1}{z^{m-n}} + \frac{a_{m-n+1}}{z^{m-n+1}} + \ldots .$$

Iz formule $\mathrm{Res}(f_1, \infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} f_1\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$ slijedi da za slučaj $m = n + 1$ vrijedi

$$\mathrm{Res}(f_1, \infty) = -1,$$

dok u slučaju $m \geq n + 2$ dobivamo

$$\mathrm{Res}(f_1, \infty) = 0.$$

Iz toga proizlazi da u slučaju $m \geq n+1$ formule (2.7) i (2.9) možemo ekvivalentno zapisati kao

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_j > 0} \mathrm{Res}(f_1, z_j) + \pi i\, \mathrm{Res}(f_1, \infty). \tag{2.13}$$

U prethodnom poglavlju pokazali smo da se reziduum funkcije u beskonačnosti računa prema formuli

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \lim_{z \to \infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

no kako su polinomi kojima je funkcija f definirana normirani te je $m \geq n + 1$, vrijedi

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = 0,$$

odnosno,

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty} zf(z).$$

Iz prikaza (2.11) funkcije f dobivamo

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -c_1 - \ \dots \ - c_k - \lim_{z\to\infty} zf_1(z). \tag{2.14}$$

Kako su polinomi koji tvore funkciju f_1 normirani te je stupanj polinoma u brojniku barem za jedan manji od stupnja polinoma u nazivniku vrijedi

$$\mathrm{Res}(f_1,\infty) = -\lim_{z\to\infty} zf_1(z).$$

Iskoristivši to u (2.14) dobivamo

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\sum_{\mathrm{Im}\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \mathrm{Res}(f_1,\infty),$$

odnosno,

$$\mathrm{Res}(f_1,\infty) = \sum_{\mathrm{Im}\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \mathrm{Res}(f,\infty). \tag{2.15}$$

Sada to uvrstimo u (2.12), odnosno (2.13) te dobivamo:

$$\begin{aligned} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= 2\pi i \sum_{Im\ z_j>0} \mathrm{Res}(f_1,z_j) + \pi i \left[\sum_{\mathrm{Im}\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \mathrm{Res}(f,\infty) \right] \\ &= 2\pi i \left[\sum_{Im\ z_j>0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \frac{1}{2} \sum_{Im\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(f,\infty) \right]. \end{aligned}$$

Prvi slučaj: $m = n + 1$. Iz Laurentovog razvoja funkcije f oko točke 0

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}} + \frac{b_{m-n+1}}{z^{m-n+1}} + \dots$$

i formule $\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$ slijedi $\mathrm{Res}(f,\infty) = -1$. Stoga nepravi integral racionalne funkcije sa singularitetima na realnoj osi računamo prema formuli

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\sum_{Im\ z_j>0} \mathrm{Res}(f,z_j) + \frac{1}{2} \sum_{Im\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) - \frac{1}{2} \right].$$

Drugi slučaj: $m \geq n + 2$. Iz Laurentovog razvoja funkcije f oko točke 0

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}} + \frac{d_{m-n+1}}{z^{m-n+1}} + \dots$$

i formule $\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$ slijedi $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$. Već smo dokazali da u slučaju $m \geq n+2$ vrijedi $\mathrm{Res}(f_1,\infty) = 0$, što prema (2.15) povlači

$$\sum_{Im\ z_j=0} \mathrm{Res}(f,z_j) = 0$$

pa nepravi integral racionalne funkcije sa singularitetima na realnoj osi računamo prema formuli

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_j>0} \mathrm{Res}(f,z_j).$$

Primjer 2.2.5. *Izračunajmo glavnu vrijednost integrala*

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Označimo funkciju s

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.$$

Proširenje funkcije f na kompleksnu ravninu je funkcija kompleksne varijable

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}.$$

Kako je stupanj polinoma u nazivniku za jedan veći od stupnja polinoma u brojniku, glavnu vrijednost integrala ćemo računati prema formuli

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = 2\pi i \left[\sum_{Im\ z_k>0} \mathrm{Res}(f,z_k) + \frac{1}{2}\sum_{Im\ z_k=0} \mathrm{Res}(f,z_k) - \frac{1}{2}\right].$$

Funkcija f analitička je na $\mathbb{C}$, osim u točkama

$$z_1 = 0, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -i,$$

koje su polovi prvog reda. Izračunajmo reziduum funkcije u točkama z_1 i z_2.

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2-1}{z^2+1} = -1$$
$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2-1}{z(z+i)} = \frac{-2}{2i^2} = 1$$

Dakle, glavna vrijednost integrala jednaka je

$$
\begin{aligned}
V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\, dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,i) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}(f,0) - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2.3 Fourierov transformat racionalne funkcije

Fourierova analiza nastala je na ideji kako se svaka periodička funkcija može prikazati kao suma sinusa različitih frekvencija, faza te amplituda. Takva se suma naziva Fourierov red. Poseban dio te analize kojim ćemo se u ovom odjeljku baviti jest Fourierov transformat koji je nastao kao rezultat proučavanja Fourierovih redova. Njegova uloga je da određenu funkciju prevede u drugi oblik pomoću integralnog operatora, što se primjenjuje u rješavanju brojnih fizikalnih problema. Pri pisanju ovog dijela koristili smo se izvorima [2], [4] i [5].

Definicija 2.3.1. *Fourierov transformat $\hat{f}$ funkcije f definira se kao funkcija*

$$
\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} f(t)\, dt, \quad p \in \mathbb{R}.
$$

U prethodnom smo dijelu vidjeli kako se za racionalnu funkciju može izračunati vrijednost Fourierovog transformata u nuli, no sada nas zanima kako ga izračunati i u preostalim točkama. Za računanje Fourierovog transformata potrebno je izračunati integral

$$
\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz \tag{2.16}
$$

ili glavnu vrijednost integrala za funkciju

$$
F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ipz}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0, \tag{2.17}
$$

pri čemu su P i Q normirani polinomi, takvi da je stupanj polinoma P jednak n, a stupanj polinoma Q jednak m i $m > n$. Pretpostavimo da Q nema realnih nultočaka. Za krivulju integracije odaberimo pozitivno orijentiranu zatvorenu krivulju koja se sastoji od polukružnice C_R i segmenta $[-R, R]$, tako da za dovoljno veliki R, polukružnica C_R obuhvaća sve singularitete funkcije F u gornjoj poluravnini. U tom slučaju prema teoremu o reziduumima vrijedit će

$$
\int_{-R}^{R} F(x)\, dx + \int_{C_R} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \operatorname{Res}(F, z_k).
$$

U svrhu računanja nepravog integrala (2.16) dokazat ćemo sljedeću lemu.

Lema 2.3.2. ***(Jordanova lema)*** *Neka je funkcija f analitička na skupu za koji vrijedi $\operatorname{Im} z \geq 0$, osim možda u konačno mnogo izoliranih singulariteta $z_1, \ldots, z_n$. Označimo*

$$M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|.$$

Ako je $p > 0$ i $M(R)$ teži u nulu, kad R teži u beskonačnost, tada $\int_{C_R} f(z)\, e^{ipz}$ teži u nulu, kad R teži u beskonačnost.

Dokaz. Dokaz ove leme bazira se na rezultatu koji je poznat kao Jordanova nejednakost koja kaže da vrijedi

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.18}$$

Uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} f(z)\, e^{ipz}\, dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi})\, e^{ipRe^{i\varphi}} Rie^{i\varphi}\, d\varphi \right| \\
&\leq R \int_0^\pi \left| f(Re^{i\varphi}) \right| \cdot \left| e^{ipR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| d\varphi \\
&\leq R \cdot M(R) \int_0^\pi e^{-pR\sin\varphi}\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Sada, iz Jordanove nejednakosti (2.18) i toka eksponencijalne funkcije slijedi

$$e^{-pR\sin\varphi} \leq e^{-pR\frac{2\varphi}{\pi}}, \quad R > 0, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

te iz simetričnosti s obzirom na $\varphi = \frac{\pi}{2}$ funkcije sinus za $\varphi \in [0, \pi]$ dobivamo

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, e^{ipz}\, dz \right| \leq 2R \cdot M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\frac{2\varphi}{\pi}}\, d\varphi.$$

Preostaje nam izračunati integral iz posljednjeg izraza.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\frac{2\varphi}{\pi}}\, d\varphi &= \begin{bmatrix} t = -pR\dfrac{2\varphi}{\pi} & \varphi \to 0 & t \to 0 \\ dt = \dfrac{-2pR}{\pi} d\varphi & \varphi \to \dfrac{\pi}{2} & t \to -p \cdot R \end{bmatrix} \\
&= -\int_0^{-pR} \frac{\pi}{2p \cdot R} e^t\, dt \\
&= \frac{-\pi}{2p \cdot R} \left(e^{-pR} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\left| \int_{C_R} f(z)e^{ipz}\, dz \right| \leq \frac{\pi \cdot M(R)}{p} \cdot \left(1 - e^{-pR}\right),$$

gdje posljednji izraz u gornjoj nejednakosti teži prema nuli, kada R teži prema beskonačnosti.

□

Prema definiciji, funkcija f je oblika

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^n + ... + p_1 z + p_0}{z^m + ... + q_1 z + q_0}.$$

Kako je $m \geq n + 1$, postoji konstanta $K > 0$ takva da vrijedi

$$M(R) = \max_{z \in \mathbb{C}_\mathbb{R}} |f(z)| \leq \frac{K}{|z|} = \frac{K}{R}.$$

Uočimo da posljednji izraz teži u nulu, kad R teži u beskonačnost. Time su svi uvjeti Jordanove leme ostvareni pa slijedi da je za $p > 0$ integral (2.16) funkcije (2.17) jednak

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ipx}\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_k > 0} \operatorname{Res}(F, z_k),$$

pri čemu za $m = n + 1$ računamo glavnu vrijednost integrala.

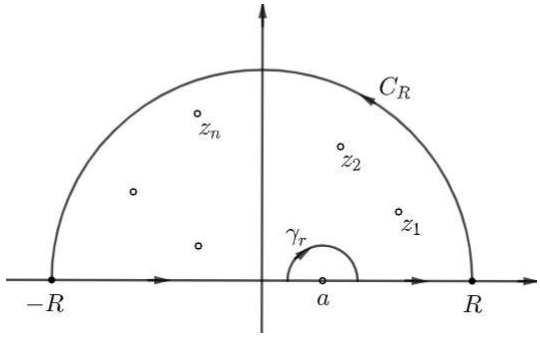
Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi

U prethodnom odjeljku vidjeli smo kako se računa nepravi integral racionalne funkcije koja ima singularitet na realnoj osi. Sada ćemo odrediti integral za funkcije oblika (2.17). Neka je $R > r > 0$. Za krivulju integracije odaberimo krivulju koja se sastoji od pozitivno orijentirane polukružnice C_R polumjera R koja sadrži sve singularitete funkcije F u gornjoj poluravnini, polukružnica γ_r proizvoljno malog polumjera r koje sadrže singularitete funkcije F na realnoj osi te dijelova realne osi koji se nalaze unutar segmenta $[-R, R]$, a izvan polukružnica γ_r. Neka je funkcija F definirana s

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ipz},$$

pri čemu su P i Q normirani polinomi stupnja n, odnosno m, za koje vrijedi $m \geq n + 1$. Neka su $a_1, \ldots, a_k$ sve jednostruke realne nultočke polinoma Q. Iz rastava na parcijalne razlomke slijedi da funkciju F možemo zapisati u obliku

$$F(z) = \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{z - a_j} + f_1(z) \right] \cdot e^{ipz}, \tag{2.19}$$



Slika 2.6: Krivulja integracije za slučaj jednog singulariteta na realnoj osi

za neku funkciju f_1 oblika

$$f_1(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)},$$

pri čemu su polinomi P_1 i Q_1 normirani, stupnja $n-k$, odnosno $m-k$. Tada za funkciju

$$F_1(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} e^{ipz}$$

vrijedi da ona ima iste polove funkcije F, osim onih koji se nalaze na realnoj osi te, očito, za takve polove a vrijedi

$$\operatorname{Res}(F, a) = \operatorname{Res}(F_1, a).$$

Iz zapisa (2.19) funkcije F uočavamo da vrijedi

$$\operatorname{Res}(F, a_j) = c_j e^{ipa_j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Neka je $p > 0$. Tada vrijedi

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_j}{x - a_j} e^{ipx}\, dx + V.P. \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\, dx. \tag{2.20}$$

Znamo da je

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im\ z_j > 0} \operatorname{Res}(F_1, z_j),$$

stoga da bismo izračunali integral u (2.20) potrebno je izračunati integral

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{x - a} e^{ipx}\, dx.$$

U tu svrhu izračunat ćemo dva integrala koja će nam biti od pomoći u računu. Prvo izračunajmo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x}\, dx.$$

Kako je podintegralna funkcija analitička unutar krivulje integracije, prema Cauchyjevom teoremu 1.0.18 vrijedi

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{ipz}}{z}\, dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ipx}}{x}\, dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{ipz}}{z}\, dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ipx}}{x}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z}\, dz = 0.$$

Označimo funkciju g s

$$g(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Vrijedi

$$M(R) = \max_{z \in C_R} |g(z)| = \max_{z \in C_R} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R}\,.$$

Uočimo da posljednji izraz teži u nulu, kad R teži u beskonačnost. Tada je, prema Jordanovoj lemi,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z}\, dz = 0.$$

Integral funkcije po manjoj polukružnici γ_r iznosi

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{ipz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}(e^{ipz} - 1)\, dz.$$

Uočimo sljedeće

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\left(e^{ipz} - 1\right)\, dz \right| \le \max_{z \in \gamma_r} \left| \frac{1}{z}\left(e^{ipz} - 1\right) \right| \cdot \left| \int_{\gamma_r} dz \right| = \max_{|z|=r} \left| \frac{1}{z}\left(e^{ipz} - 1\right) \right| \cdot \pi r = \max_{|z|=r} \left| e^{ipz} - 1 \right|,$$

no taj izrez teži prema nuli kad r teži prema nuli. Uvedimo parametrizaciju $z = re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Tada je

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\pi}^{0} \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\, d\varphi = -i\pi. \tag{2.21}$$

Dakle, prema gornjem računu, kad $R \to \infty$ i $r \to 0$ vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x}\, dx = i\pi. \tag{2.22}$$

Izračunajmo sada integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x-a}\, dx.$$

Kako je podintegralna funkcija analitička unutar krivulje integracije, prema Cauchyjevom teoremu 1.0.18 vrijedi

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz = \int_{-R}^{a-r} \frac{e^{ipx}}{x-a}\,dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz + \int_{a+r}^{R} \frac{e^{ipx}}{x-a}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz = 0.$$

Označimo funkciju h s

$$h(z) = \frac{1}{z-a}\,.$$

Uočimo da je

$$M(R) = \max_{z\in C_R} |h(z)| \leq \max_{z\in C_R} \frac{1}{\big||z|-|a|\big|} = \frac{1}{\big|R-|a|\big|}\,.$$

Kako posljednji izraz teži u nulu, kad R teži u beskonačnost, prema Jordanovoj lemi je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz = 0.$$

Potrebno je još izračunati integral po polukružnici γ_r. Vrijedi

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz = e^{ipa} \int_{\gamma_r} \frac{e^{ip(z-a)}}{z-a}\,dz.$$

Iz (2.21) slijedi

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{ipz}}{z-a}\,dz = -i\pi e^{ipa}.$$

Dakle, naš traženi integral, kad $R\to\infty$, i $r\to 0$, jednak je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x-a}\,dx = i\pi e^{ipa}. \tag{2.23}$$

Sada ćemo to iskoristiti u jednakosti (2.20).

$$\begin{aligned} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx &= i\pi \sum_{j=1}^{k} c_j e^{ipa_j} + 2\pi i \sum_{Im\ z_j>0} \operatorname{Res}(F_1, z_j) \\ &= 2\pi i \left[\sum_{Im\ z_j>0} \operatorname{Res}(F_1, z_j) + \frac{1}{2} \sum_{Im\ z_j=0} \operatorname{Res}(F, z_j) \right] \end{aligned}$$

No, budući da je reziduum funkcije F_1 u singularitetima koji ne leže na realnoj osi jednak reziduumima funkcije F, vrijednost integrala računamo prema

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \left[\sum_{Im\ z_j>0} \operatorname{Res}(F, z_j) + \frac{1}{2} \sum_{Im\ z_j=0} \operatorname{Res}(F, z_j) \right] \tag{2.24}$$

2.4 Nepravi integrali funkcija oblika $f(x)\cos px$ i $f(x)\sin px$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = f(z)e^{ipz},$$

pri čemu je funkcija f oblika

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdje su P i Q normirani polinomi stupnja n, odnosno m, za koje vrijedi $m \geq n + 1$. U prethodnom odjeljku vidjeli smo kako se računa nepravi integral te funkcije, no pogledajmo čemu je ta funkcija još jednaka. Vrijedi

$$F(z) = f(z)e^{ipz} = f(z)(\cos pz + i \sin pz)$$

Stoga integral funkcije $F(z)$ možemo napisati na sljedeći način

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos pz\,dz + i\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin pz\,dz.$$

Iz ovoga zaključujemo da integrale oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,dx,$$

svodimo na oblik

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{ipz}\,dz$$

te ih računamo na sljedeći način

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos pz\,dz = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz, \tag{2.25}$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin pz\,dz = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz. \tag{2.26}$$

Primjer 2.4.1. *Izračunajmo integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2}\,dx.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}$$

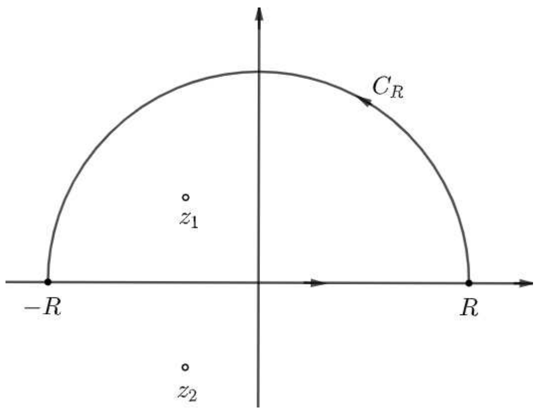
te neka je

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+2}.$$

Uočimo da traženi integral računamo prema (2.26) za $p = 2$. Funkcija F ima singularitete u točkama

$$z_1 = -1+i, \quad z_2 = -1-i,$$

koje su polovi prvog reda, od kojih se unutar krivulje integracije nalazi točka z_1.



Slika 2.7: Krivulja integracije za Primjer 2.4.1

Izračunajmo reziduum funkcije F u točki z_1.

$$\mathrm{Res}(F, z_1) = \mathrm{Res}(F, -1+i) = \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i))F(z) = \lim_{z\to -1+i}\frac{(z+1)e^{2iz}}{z-(-1-i)} = \frac{e^{-2i}}{2e^2}.$$

Dakle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(F, -1+i) = 2\pi i\cdot\frac{e^{-2i}}{2e^2} = \frac{\pi i\cos 2 + \pi\sin 2}{e^2}.$$

Traženi integral jednak je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = \frac{\pi\cos 2}{e^2}.$$

Primjer 2.4.2. *Izračunajmo integral*

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx, \quad a, b > 0.$$

Uočimo da je

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx,$$

zbog parnosti podintegralne funkcije. Kako vrijedi

$$\left|\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2+b^2}\right|, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+b^2} < \infty,$$

prema usporednom testu zaključujemo da integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$ konvergira. Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$$

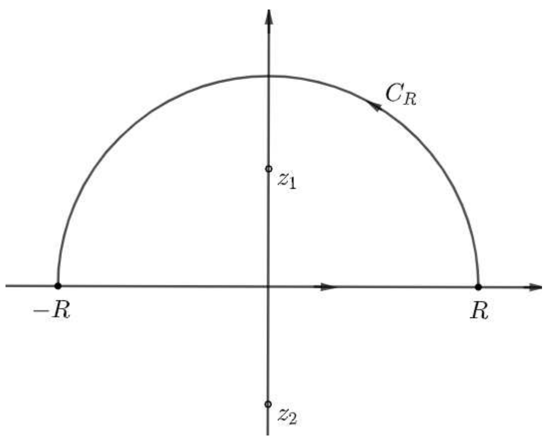
te neka je

$$f(z) = \frac{1}{z^2+b^2}.$$

Traženi integral računamo prema (2.25) za $p = a$. Funkcija F ima singularitete u točkama

$$z_1 = bi, \quad z_2 = -bi$$

koje su polovi prvog reda, od kojih se samo točka z_1 nalazi unutar krivulje integracije.



Slika 2.8: Krivulja integracije za Primjer 2.4.2

Izračunajmo reziduum funkcije F u točki z_1.

$$\operatorname{Res}(F, z_1) = \operatorname{Res}(F, bi) = \lim_{z\to bi}(z-bi)F(z) = \lim_{z\to bi}\frac{e^{iaz}}{z+bi} = \frac{e^{-ab}}{2bi} = -\frac{i\cdot e^{-ab}}{2b}.$$

Dakle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F, bi) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i \cdot e^{-ab}}{2b}\right) = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

Traženi integral jednak je

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}.$$

Primjer 2.4.3. *Izračunajmo glavnu vrijednost integrala*

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$$

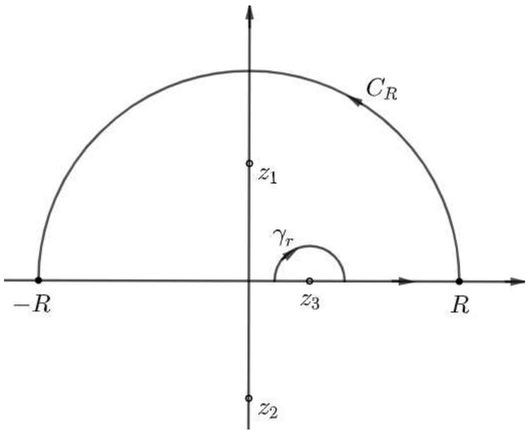
te neka je

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}.$$

Funkcija F ima singularitete u točkama

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = 1$$

koje su polovi prvog reda, od kojih se z_1 nalazi u gornjoj poluravnini, a z_3 na realnoj osi. Stoga dani integral računamo prema (2.24).



Slika 2.9: Krivulja integracije za Primjer 2.4.3

Imamo,

$$\mathrm{Res}(F, z_1) = \mathrm{Res}(F, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)F(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)} = \frac{e^{-2}}{-8-4i} = \frac{(-8+4i)e^{-2}}{80}$$

$$\mathrm{Res}(F, z_3) = \mathrm{Res}(F, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{z\to 1}\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{e^{i}}{1-4i^2} = \frac{e^{i}}{5}\,.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(F, 2i) + \pi i\,\mathrm{Res}(F, 1) \\ &= 2\pi i\cdot\frac{(-8+4i)\,e^{-2}}{80} + \pi i\cdot\frac{e^{i}}{5} \\ &= -\frac{\pi e^{-2}}{5}\left(i+\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi i}{5}(\cos 1 + i\sin 1) \\ &= -\left(\frac{\pi e^{-2}}{10} + \frac{\pi}{5}\sin 1\right) + i\left(\frac{-\pi e^{-2}}{5} + \frac{\pi}{5}\cos 1\right). \end{aligned}$$

Traženi integral jednak je

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right).$$

2.5 Nepravi integrali funkcija oblika $f(x)/x^{\alpha}$

U ovom odjeljku promatrat ćemo integrale oblika

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x^{\alpha}}\,dx, \quad 0<\alpha<1, \tag{2.27}$$

gdje je f racionalna funkcija bez singulariteta na pozitivnom dijelu realne osi. Kako bi ovaj nepravi integral konvergirao, potrebno je još pretpostaviti da je stupanj polinoma u brojniku funkcije f manji od stupnja polinoma u nazivniku. Tada postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi

$$|f(x)| \le \frac{M}{|x|^{m-n}}, \quad m-n\ge 1, \tag{2.28}$$

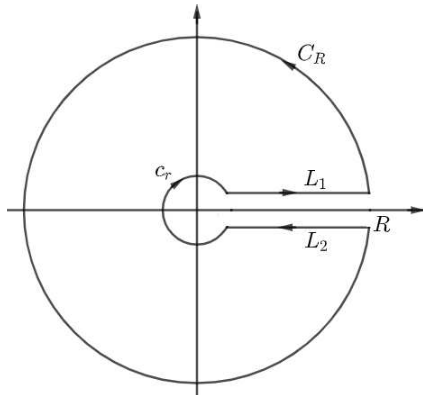
za svaki dovoljno veliki $|x|$, pri čemu je stupanj polinoma u brojniku funkcije f jednak n, a stupanj polinoma u nazivniku jednak je m.

Proširimo podintegralnu funkciju s

$$F(z) = \frac{f(z)}{|z|^{\alpha}\,e^{i\alpha\cdot\arg z}}\,.$$

Funkcija F analitička je na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$, osim u konačno mnogo polova $z_1, \ldots, z_n$.

Neka se put integracije $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ (Slika 2.10) sastoji od pozitivno orijentirane kružnice C_R s jednadžbom $z = Re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete funkcije F, negativno orijentirane kružnice c_r s jednadžbom $z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$, koja ne obuhvaća niti jedan singularitet funkcije F, intervala $[r, R]$ u gornjoj poluravnini koji je paralelan s realnom osi na udaljenosti $\frac{\varepsilon}{2}$ te intervala $[R, r]$ u donjoj poluravnini koji je paralelan s realnom osi na udaljenosti $\frac{\varepsilon}{2}$.



Slika 2.10: Krivulja integracije

Ovakva krivulja integracije zbog svog je izgleda poznata pod nazivom ključanica (engl. keyhole contour).

Kad z teži k $x \in [r, R]$, gdje je $\operatorname{Im} z > 0$, njegov argument $\arg z$ tada teži u nulu pa vrijedi

$$z^\alpha = |z|^\alpha \, e^{i\alpha \cdot \arg z} \to x^\alpha. \tag{2.29}$$

Kad z teži k $x \in [R, r]$, gdje je $\operatorname{Im} z < 0$, njegov argument $\arg z$ tada teži u 2π pa vrijedi

$$z^\alpha = |z|^\alpha \, e^{i\alpha \cdot \arg z} \to x^\alpha e^{i\alpha 2\pi}. \tag{2.30}$$

Prema teoremu o reziduumima vrijedi

$$\int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{Res}(F, z_k).$$

Kad ε teži u nulu, prema (2.29) i (2.30) dobivamo

$$2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{Res}(F, z_k) = \int_r^R \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz + \int_R^r \frac{f(x)}{x^\alpha e^{i\alpha 2\pi}}\, dx + \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^\alpha}\, dz. \tag{2.31}$$

Ocijenimo integral po kružnici C_R. Uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$.

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})}{(Re^{i\varphi})^\alpha} iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right|$$

Sada iskoristimo (2.28) pa dobivamo

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m}\frac{1}{R^\alpha} R\,d\varphi = \frac{2M\pi}{R^{m+\alpha-1}},$$

gdje posljednji izraz teži u nulu kad R teži u beskonačnost. Nadalje, ocijenimo integral po manjoj kružnici c_r. Uvedimo parametrizaciju $z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$. Imamo

$$\left|\int_{c_r} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^\alpha} ire^{i\varphi}\,d\varphi\right|.$$

Kako je funkcija f analitička u nuli, to postoji konstanta K kojom je funkcija f omeđena na okolini točke 0 pa vrijedi

$$\left|\int_{c_r} \frac{f(z)}{z^\alpha}\,dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{K}{r^\alpha} r\,d\varphi = 2\pi K \cdot r^{1-\alpha},$$

gdje posljednji izraz teži u nulu kad r teži u nulu. Sada pustimo $R \to \infty,\ r \to 0$ te iz (2.31) dobivamo

$$\begin{aligned}2\pi i \sum_{z_k\in D} \operatorname{Res}(F, z_k) &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx + \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}} \int_\infty^0 \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx - e^{-2\pi i\alpha} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx,\end{aligned}$$

odakle dobivamo formulu za računanje integrala (2.27)

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{z_k\in D} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k\right). \tag{2.32}$$

Primjer 2.5.1. *Izračunajmo integral*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x^2+4)}.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{z}\,(z^2+4)}$$

te neka je

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4}.$$

Uočimo da funkcija f zadovoljava nužni uvjet za korištenje formule (2.32), odnosno nema singularitete na pozitivnom dijelu realne osi. Također, stupanj polinoma u brojniku funkcije f manji je od stupnja polinoma u nazivniku pa nepravi integral konvergira. Funkcija F je analitička na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$, osim u točkama

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i,$$

koje su polovi prvog reda. Za put integracije odaberimo prethodno opisani put $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ pa prema (2.32) za $\alpha = \frac{1}{3}$ vrijedi:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x^2+4)} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\cdot\frac{1}{3}}}\left[\mathrm{Res}\,(F,2i) + \mathrm{Res}\,(F,-2i)\right].$$

Izračunajmo reziduum funkcije F u točkama z_1 i z_2.

$$\mathrm{Res}(F,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)F(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{\sqrt[3]{z}\,(z+2i)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2i}\cdot 4i} = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

$$\mathrm{Res}(F,-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)F(z) = \lim_{z\to -2i}\frac{1}{\sqrt[3]{z}\,(z-2i)} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2i}\cdot(-4i)} = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x^2+4)} &= \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\cdot\frac{1}{3}}}\left[\mathrm{Res}\,(F,2i) + \mathrm{Res}\,(F,-2i)\right] \\
&= \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\cdot\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\cdot\left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}}+1\right) \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1+e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-1} \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{6\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

2.6 Nepravi integrali funkcija oblika $f(x)\ lnx$

U ovom odjeljku promatrat ćemo integrale oblika

$$\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx, \tag{2.33}$$

gdje je f racionalna funkcija bez polova na pozitivnom dijelu realne osi. Kako za $x > 0$ vrijedi $\ln x < \sqrt{x}$, da bi ovaj nepravi integral konvergirao, potrebno je još pretpostaviti da je stupanj polinoma u brojniku funkcije f barem za dva manji od stupnja polinoma u nazivniku. Tada postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{m-n}}, \quad m - n \geq 2, \tag{2.34}$$

za svaki dovoljno veliki $|x|$, pri čemu je stupanj polinoma u brojniku funkcije f jednak n, a stupanj polinoma u nazivniku jednak je m.

Definirajmo funkciju

$$F(z) = f(z)\ (\ln z)^2$$

i neka je $\ln z = \ln |z| + i \arg z,\ 0 < \arg z < 2\pi$, grana logaritamske funkcije. Funkcija f analitička je na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$, osim u konačno mnogo polova $z_1, \ldots, z_n$.

Neka se put integracije $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$, prikazan na slici 2.10, sastoji od pozitivno orijentirane kružnice C_R s jednadžbom $z = Re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete funkcije F, negativno orijentirane kružnice c_r s jednadžbom $z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$, koja ne obuhvaća niti jedan singularitet funkcije F, intervala $[r, R]$ u gornjoj poluravnini koji je paralelan s realnom osi na udaljenosti $\frac{\varepsilon}{2}$ te intervala $[R, r]$ u donjoj poluravnini koji je paralelan s realnom osi na udaljenosti $\frac{\varepsilon}{2}$.

Kad z teži k $x \in [r, R]$, gdje je $\operatorname{Im} z > 0$, njegov argument $\arg z$ tada teži u nulu pa vrijedi

$$\ln z \to \ln x. \tag{2.35}$$

Kad z teži k $x \in [R, r]$, gdje je $\operatorname{Im} z < 0$, njegov argument $\arg z$ tada teži u 2π pa vrijedi

$$\ln z \to \ln x + 2\pi i. \tag{2.36}$$

Prema teoremu o reziduumima vrijedi

$$\int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{Res}(F, z_k).$$

Kad ε teži u nulu, prema (2.35) i (2.36) dobivamo

$$2\pi i \sum_{z_k \in D} \operatorname{Res}(F, z_k) = \int_r^R f(x)\,(\ln x)^2\ dx + \int_{C_R} F(z)\, dz + \int_R^r f(x)\,(\ln x + 2\pi i)^2\ dx + \int_{c_r} F(z)\, dz. \tag{2.37}$$

Ocijenimo integral po kružnici C_R. Uvedimo parametrizaciju $z = Re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$.

$$\left|\int_{C_R} F(z)\, dz\right| = \left|\int_{C_R} f(z)\ (\ln z)^2\ dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\varphi}\right)\left(\ln\left(Re^{i\varphi}\right)\right)^2 iRe^{i\varphi}\ d\varphi\right|$$

Kako vrijedi

$$|\ln z| = \big|\ln|z| + i \arg z\big| \leq \big|\ln|z|\big| + \big|i \arg z\big| \leq \ln R + 2\pi \tag{2.38}$$

iz (2.34) slijedi

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} F(z)\, dz\right| &\leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} (\ln R + 2\pi)^2 \cdot R\, d\varphi \\ &= \frac{2M\pi}{R^{m-1}} (\ln R + 2\pi)^2 .\end{aligned}$$

Pogledajmo čemu teži posljednji izraz u gornjoj jednakosti kad R teži u beskonačnost. Uzastopnom primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{2M\pi}{R^{m-1}}(\ln R + 2\pi)^2\right] = \lim_{R\to\infty}\frac{4M\pi\,(\ln R + 2\pi)\cdot\frac{1}{R}}{(m-1)\,R^{m-2}} = \lim_{R\to\infty}\frac{4M\pi\cdot\frac{1}{R}}{(m-1)^2\,R^{m-2}},$$

što teži u nulu, kad R teži u beskonačnost. Nadalje, ocijenimo integral po manjoj kružnici c_r. Uvedimo parametrizaciju $z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi$. Imamo

$$\left|\int_{c_r} F(z)\, dz\right| = \left|\int_{c_r} f(z)\ (\ln z)^2\ dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right)\left(\ln\left(re^{i\varphi}\right)\right)^2 ire^{i\varphi}\, d\varphi\right|.$$

Kako je f analitička u nuli, to postoji konstanta K kojom je funkcija f omeđena na okolini točke 0 te iz (2.38) slijedi

$$\begin{aligned}\left|\int_{c_r} F(z)\, dz\right| &\leq \int_0^{2\pi} K\,(\ln r + 2\pi)^2\, r\, d\varphi \\ &= 2\pi K\cdot r\,(\ln r + 2\pi)^2 .\end{aligned}$$

Pogledajmo čemu teži posljednji izraz u gornjoj jednakosti, kad r teži u nulu. Uzastopnom primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{r\to 0}\left[2\pi K\cdot r\,(\ln r + 2\pi)^2\right] = \lim_{r\to 0}\frac{2\pi K\,(\ln r + 2\pi)^2}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0}\frac{4\pi K\,(\ln r + 2\pi)\cdot\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{4\pi K\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2}},$$

što teži u nulu kad r teži u nulu. Sada pustimo $R \to \infty,\ r \to 0$ te iz (2.37) dobivamo

$$\begin{aligned}2\pi i\sum_{z_k\in D}\mathrm{Res}(F, z_k) &= \int_0^{\infty} f(x)\,(\ln x)^2\ dx + \int_{\infty}^{0} f(x)\,(\ln x + 2\pi i)^2\ dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)\,(\ln x)^2\ dx - \int_0^{\infty} f(x)\,(\ln x + 2\pi i)^2\ dx \\ &= 4\pi^2\int_0^{\infty} f(x)\, dx - 4\pi i\int_0^{\infty} f(x)\ln x\, dx,\end{aligned}$$

odnosno,

$$\int_0^\infty f(x) \ln x \, dx = -\pi i \int_0^\infty f(x) \, dx - \frac{1}{2} \sum_{z_k \in D} \mathrm{Res}(F, z_k).$$

Izjednačavanjem realnih dijelova u gornjoj jednakosti dobivamo formulu za računanje nepravih integrala oblika (2.33):

$$\int_0^\infty f(x) \ln x \, dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\sum_{z_k \in D} \mathrm{Res} \left(f(z) \, (\ln z)^2 \, , z_k \right) \right]. \tag{2.39}$$

Primjer 2.6.1. *Izračunajmo integral*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+2)^4} \, dx.$$

Definirajmo funkciju

$$F(z) = \frac{(\ln z)^2}{(z+2)^4}$$

te neka je

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^4}.$$

Uočimo da funkcija f zadovoljava nužni uvjet za korištenje formule (2.39), odnosno nema singularitet na pozitivnom dijelu realne osi. Također, stupanj polinoma u brojniku funkcije f za četiri je manji od stupnja polinoma u nazivniku pa nepravi integral konvergira. Funkcija F analitička je na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$, osim u točki $z = -2$, koja je pol četvrtog reda. Za put integracije odaberimo prethodno opisani put $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$. Prvo izračunajmo reziduum funkcije F u točki $z = -2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F(z), -2) &= \frac{1}{3!} \lim_{z \to -2} \frac{d^3}{dz^3} \left((z+2)^4 \, \frac{(\ln z)^2}{(z+2)^4} \right) \\
&= \frac{1}{6} \lim_{z \to -2} \frac{d^2}{dz^2} \left(2 \ln z \cdot \frac{1}{z} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{z \to -2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2} - \ln z \frac{1}{z^2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{z \to -2} \left(\frac{-2}{z^3} - \frac{1}{z^3} + 2 \ln z \frac{1}{z^3} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi i}{4} \right).
\end{aligned}$$

Prema (2.39) vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+2)^4} \, dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\mathrm{Res}(F(z), -2) \right] = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} \ln 2 \right).$$

Poglavlje 3

Gama funkcija

Specijalne funkcije su vrsta funkcija koje su nastale kao rezultat rješavanja različitih matematičkih problema. U tu skupinu spada i gama funkcija o kojoj će biti riječ u ovom poglavlju. Ona je nastala kao odgovor na problem koji su postavili Daniel Bernoulli [1] i Christian Goldbach [2], a to je proširenje funkcije faktorijel sa skupa prirodnih brojeva na skup realnih brojeva. Odgovor u obliku integrala

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\, dt$$

dao je švicarski matematičar Leonhard Euler [3] koji je svojim istraživanjem postao najzaslužnijim za otkriće gama funkcije. Navedimo još kako je notaciju i naziv za gama funkciju koji se danas koriste uveo Legendre [4] početkom 19. stoljeća.

3.1 Definicija gama funkcije

Definicija 3.1.1. *Funkcija Γ kompleksne varijable definirana integralom*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{3.1}$$

gdje je $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$, $t > 0$ i $\ln t$ realan broj, naziva se gama funkcija, a integral koji ju definira naziva se Eulerovim integralom druge vrste.

Gama funkcija definirana je za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje nepravi integral (3.1) konvergira. U nastavku poglavlja pokazat ćemo da to vrijedi za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $\operatorname{Re} z > 0$.

[1] Daniel Bernoulli (1700.-1782.) - švicarski matematičar i fizičar
[2] Christian Goldbach (1690.-1764.) - njemački matematičar
[3] Leonhard Euler (1707.-1783.) - švicarski matematičar, fizičar i astronom
[4] Adrien-Marie Legendre (1752.-1833.) - francuski matematičar i astronom

3.2 Nepravi integrali ovisni o parametru

Integral (3.1) koji definira gama funkciju spada u posebnu vrstu nepravih integrala, a to su nepravi integrali ovisni o parametru. Stoga, navodimo njihovu definiciju.

Definicija 3.2.1. *Neka je $-\infty < a < b \leq \infty$. Integral oblika*

$$\int_a^b f(t,z)\, dt \tag{3.2}$$

nazivamo nepravim integralom ovisnim o parametru z.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoreni skup. Ako za svaki $z \in \Omega$, integral (3.2) konvergira, onda on na Ω definira funkciju

$$g(z) = \int_a^b f(t,z)\, dt, \quad z \in \Omega.$$

Definicija 3.2.2. *Kažemo da integral* (3.2) *konvergira uniformno na skupu $K \subseteq \Omega$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $B_0 \in [a, b\rangle$ za koji vrijedi*

$$z \in K,\ B \geq B_0,\ B < b \Rightarrow \left| g(z) - \int_a^B f(t,z)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Kažemo da integral (3.2) *konvergira lokalno uniformno na Ω, ako konvergira uniformno na svakom kompaktnom skupu $K \subseteq \Omega$.*

S obzirom da nas zanima područje konvergencije integrala (3.1), u tu svrhu navest ćemo lemu i propoziciju koje će nam biti od koristi u daljnjem računu. Njihovi dokazi mogu se pronaći u [4].

Lema 3.2.3. *Neka je $-\infty < a < b \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : [a, b\rangle \times \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da je za svaki $z \in \Omega$ funkcija $t \mapsto f(t,z)$ lokalno integrabilna na $[a, b\rangle$. Ako za dani skup $K \subseteq \Omega$ postoji nenegativna funkcija $F : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$, takva da je*

$$\int_a^b F(t)\, dt < \infty, \quad |f(t,z)| \leq F(t), \quad t \in [a, b\rangle, \quad z \in K,$$

tada $\int_a^b f(t,z)\, dt$ konvergira uniformno na K.

Propozicija 3.2.4. *Neka je $-\infty < a < b \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $h : [a, b\rangle \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, takva da je za svaki $t \in [a, b\rangle$ funkcija $z \mapsto h(t,z)$ analitička na Ω, $k : [a, b\rangle \to \mathbb{C}$ lokalno integrabilna funkcija i $f(t,z) = h(t,z)\, k(t)$. Pretpostavimo da nepravi integral $\int_a^b f(t,z)\, dt$ konvergira lokalno uniformno na Ω. Tada je funkcija g definirana tim integralom analitička na Ω.*

3.3 Područje definicije i svojstva gama funkcije

U ovom ćemo poglavlju navesti i dokazati neka bitna svojstva gama funkcije, od kojih je temeljno ono da je gama funkcija proširenje funkcije faktorijel.

Teorem 3.3.1. *Za* $z \in \mathbb{R},\ z \geq 1$ *vrijedi*

$$\Gamma(1) = 1, \tag{3.3}$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{3.4}$$

Dokaz. Dokažimo prvo (3.3).

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1}\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-t}\,dt = \lim_{M\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \left(1 - e^{-M}\right) = 1.$$

Sada dokažimo (3.4).

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-t} t^z\,dt = \begin{bmatrix} u = t^z & dv = e^{-t}dt \\ du = zt^{z-1}dt & v = -e^{-t} \end{bmatrix} \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[-t^z e^{-t}\Big|_0^M - \int_0^M -zt^{z-1}e^{-t}\,dt \right] = -\lim_{M\to\infty} M^z e^{-M} + \lim_{M\to\infty} z \int_0^M t^{z-1}e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{M\to\infty} z \int_0^M t^{z-1}e^{-t}\,dt.
\end{aligned}$$

Uočimo

$$\lim_{M\to\infty} z \int_0^M t^{z-1}e^{-t}\,dt = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt = z\,\Gamma(z).$$

Stoga vrijedi

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

□

Iz (3.3) i (3.4) proizlazi sljedeći korolar.

Korolar 3.3.2. *Za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{3.5}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ prema (3.3) imamo

$$\Gamma(1) = 1 = (1-1)!$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. Koristeći (3.4) te pretpostavku indukcije, dobivamo

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Iz prethodnog korolara možemo zaključiti da je gama funkcija proširenje funkcije $n \mapsto (n-1)!$, sa skupa prirodnih brojeva na skup kompleksnih brojeva za koje integral (3.1) postoji. Definirajmo sljedeće dvije funkcije:

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Tada je očito $\Gamma = P + Q$. Najprije uočimo da funkcija P nije definirana za $z = 0$, odnosno da njen integral tada divergira. Kako je $t > 0$ vrijedi

$$P(0) = \int_0^1 e^{-t} t^{-1} dt \geq \int_0^1 e^{-1} t^{-1}\, dt = \infty.$$

Prema usporednom testu zaključujemo da funkcija P nije definirana za $z = 0$ pa stoga ni funkcija Γ nije definirana u toj točki. Kroz sljedeća dva teorema pokazat ćemo da je gama funkcija definirana za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $\text{Re}\, z > 0$.

Teorem 3.3.3. *Funkcija P analitička je za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $Re\, z > 0$.*

Dokaz. Neka je $K \subset \mathbb{C}$ kompaktan skup koji je sadržan u desnoj poluravnini. Kako je on ujedno i ograničen te je funkcija $z \mapsto \text{Re}\, z$ neprekidna funkcija, tako postoji

$$x = \min\{\text{Re}\, z : z \in K\} > 0.$$

Definirajmo nenegativnu neprekidnu funkciju $F : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ s

$$F(t) = t^{x-1}.$$

Kako je

$$\left|t^{z-1}\right| = \left|e^{(z-1)\ln t}\right| = e^{(\text{Re} z - 1)\ln t} = t^{\text{Re} z - 1},$$

za $t \in \langle 0, 1]$ i $z \in K$ vrijedi

$$\left|t^{z-1}\right| = t^{\text{Re} z - 1} \leq t^{x-1} \quad \text{i} \quad e^{-t} \leq 1,$$

iz čega slijedi

$$\left|e^{-t} t^{z-1}\right| \leq t^{x-1} = F(t). \tag{3.6}$$

Pokažimo da integral koji definira funkciju F konvergira. Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Tada vrijedi

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\,t^x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^x}{x}\,.$$

Kako je $x > 0$ slijedi

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{x} < \infty. \tag{3.7}$$

Iz (3.6) i (3.7), prema lemi 3.2.3 i propoziciji 3.2.4, slijedi da je funkcija P analitička za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi *Re* $z > 0$. □

Teorem 3.3.4. *Funkcija Q analitička je na cijeloj kompleksnoj ravnini.*

Dokaz. Funkcija

$$f : [1,\infty\rangle \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(t,z) = e^{-t}t^{z-1} = e^{-t+(z-1)\ln t}$$

je neprekidna te je za svaki $z \in \mathbb{C}$ funkcija $z \mapsto f(t,z)$ cijela funkcija. Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ kompaktan skup. Kako je on ujedno i ograničen, tako postoji prirodan broj m za kojeg vrijedi

$$z \in K \Rightarrow \operatorname{Re} z \le m$$

Definirajmo nenegativnu neprekidnu funkciju $F : [1,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s

$$F(t) = e^{-t}t^{m-1}.$$

Za $t \in [1,\infty\rangle$ i $z \in K$ vrijedi

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\operatorname{Re} z-1} \le e^{-t}t^{m-1} = F(t). \tag{3.8}$$

Pokažimo da integral koji definira funkciju F konvergira. Imamo

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{m-1}\,dt < \int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}\,dt = \Gamma(m) = (m-1)! < \infty \tag{3.9}$$

Iz (3.8) i (3.9), prema lemi 3.2.3 i propoziciji 3.2.4, slijedi da je funkcija Q analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini. □

Iz prethodna dva teorema zaključujemo da je gama funkcija definirana za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi Re $z > 0$.

Korolar 3.3.5. *Za svaki kompleksni broj z takav da je Re $z > 0$ vrijedi*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{3.10}$$

Dokaz. U teoremu 3.3.1 pokazali smo da jednakost (3.10) vrijedi za sve $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 1$, no obje strane te jednakosti su analitičke funkcije za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $\operatorname{Re} z > 0$. Stoga, prema principu jedinstvenosti za analitičke funkcije 1.0.2, tvrdnja vrijedi za sve $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. □

Propozicija 3.3.6. *Za svaki prirodan broj n i kompleksni broj z takav da je $\operatorname{Re} z > 0$ vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\,(z+n-2)\cdots(z+1)\,z\,\Gamma(z). \tag{3.11}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ vrijedi

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. Koristeći (3.10) dobivamo

$$\Gamma(z+(n+1)) = (z+n)\,\Gamma(z+n),$$

odnosno, prema pretpostavci indukcije vrijedi

$$\Gamma(z+(n+1)) = (z+n)\,(z+n-1)\,(z+n-2)\cdots(z+1)\,z\,\Gamma(z).$$

Prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

3.4 Proširenje gama funkcije

Sada kada znamo na kojem području je gama funkcija definirana, logično je zapitati se može li se to područje proširiti. Za početak ćemo pokazati da gama funkciju nije moguće proširiti na negativne cijele brojeve i nulu.

Lema 3.4.1. *Neka je funkcija $F : \Omega \to \mathbb{C}$ analitičko proširenje gama funkcije, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje koje sadrži desnu poluravninu. Funkcija F nije definirana za negativne cijele brojeve i nulu.*

Dokaz. Prema principu jedinstvenosti za analitičke funkcije 1.0.2, iz dokazane jednakosti (3.11), za sve $z \in \Omega$ za koje vrijedi $z+n \in \Omega$ dobivamo

$$F(z+n) = (z+n-1)\cdots(z+1)\cdot z\cdot F(z).$$

Suprotno tvrdnji leme, pretpostavimo da je $-k \in \Omega$ za $k \in \mathbb{N}_0$. U gornji izraz uvrstimo $z = -k$ i $n = k+1$ te dobivamo

$$F(1) = 0\cdot(-1)\cdots(-k+1)\cdot(-k)\cdot F(-k) = 0.$$

Kako je $F(1) = \Gamma(1)$, a dokazali smo da vrijedi $\Gamma(1) = 1$, dolazimo do kontradikcije pa zaključujemo da se gama funkcija ne može proširiti na negativne cijele brojeve i nulu. □

Pokazali smo da je funkcija

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini, stoga nas zanima može li se funkcija

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

osim desne poluravnine na kojoj je definirana, proširiti na neki veći dio. Ako je $\operatorname{Re} z > 0$, iz definicije funkcije P slijedi

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \cdot \frac{t^k}{k!} \right] t^{z-1}\, dt,$$

što ekvivalentno možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 t^{z-1}\, dt + \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1} \right] dt \\ &= \frac{1}{z} + \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1} \right] dt. \end{aligned}$$

Za $t \in [0, 1]$ i $k \geq 1$ vrijedi

$$\left| t^{z+k-1} \right| = \left| e^{(z+k-1)\ln t} \right| = t^{\operatorname{Re} z+k-1} \leq 1$$

pa red iz definicije funkcije P možemo odozgo ograničiti s redom

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} = e - 1 < \infty.$$

Iz toga slijedi da red

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^{z+k-1}$$

konvergira apsolutno i uniformno po $t \in [0, 1]$ pa dobivamo

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{z+k-1}\, dt \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}. \end{aligned}$$

Sljedeći cilj nam je pokazati da red iz posljednjeg izraza konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$, jer će tada prema propoziciji 1.0.14, suma tog reda biti meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ čiji su polovi sadržani u skupu $\{0, \ -1, \ -2, \ ... \}$, a ta funkcija se upravo podudara s funkcijom P.

Teorem 3.4.2. *Red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$.

Dokaz. Za $R > 0$ odaberimo prirodan broj m za koji vrijedi $m > R$. Članovi našeg reda za $k \geq m$ nemaju polove u zatvorenom krugu $\overline{K}(0, R)$. Za takve k i točke z koje pripadaju tom krugu vrijedi

$$|z+k| \geq \Big| |z| - |k| \Big| \geq k - |z| \geq m - R$$

pa red možemo odozgo ograničiti na sljedeći način

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} \right| \leq \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{m-R} \, .$$

Kako je red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

red s pozitivnim članovima, to vrijedi

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{m-R} < \frac{1}{m-R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e}{m-R} < \infty.$$

Odnosno, prema Weierstrassovom kriteriju 1.0.15, red

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}$$

konvergira uniformno na krugu $\overline{K}(0, R)$. Stoga, prema definiciji lokalno uniformne konvergencije, red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}$$

konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C}$. □

Dakle, iz prethodnog teorema i propozicije 1.0.14 zaključujemo da je suma reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}$$

meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$, čiji su polovi sadržani u skupu $\{0, -1, -2, \dots\}$. Prema prethodno pokazanom, suma tog reda jednaka je funkciji P pa zaključujemo da je funkcija

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} \tag{3.12}$$

analitička na području $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, odnosno ona je analitičko proširenje gama funkcije definirane s (3.1).

Korolar 3.4.3. *Gama funkcija ima polove prvog reda u točkama $z = -n,\ n \in \mathbb{N}_0$. Reziduumi gama funkcije u tim točkama iznose*

$$Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz formule (3.12). □

3.5 Produktna formula

U ovom ćemo odjeljku dokazati tzv. Eulerovu produktnu formulu.

Teorem 3.5.1. *Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Tada vrijedi*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{3.13}$$

Formula (3.13) *naziva se produktna formula.*

Dokaz. Dokaz ove formule može se provesti na više načina. Mi ćemo provesti dokaz koristeći teorem o reziduumima. Dokaz ćemo najprije provesti za $z = x \in \langle 0, 1\rangle$. Imamo

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = \begin{bmatrix} t = u^2 & t \to 0 & u \to 0 \\ dt = 2u\, du & t \to \infty & u \to \infty \end{bmatrix} = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1}\, du$$

$$\Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-x}\, ds = \begin{bmatrix} s = v^2 & s \to 0 & v \to 0 \\ ds = 2v\, dv & s \to \infty & v \to \infty \end{bmatrix} = 2\int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{1-2x}\, dv.$$

Množenjem gornjih izraza dobivamo

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{1-2x}\, du\, dv.$$

Prelaskom na polarni koordinatni sustav

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \quad dudv = rdrd\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) &= 4\int_0^\infty re^{-r^2}\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2x-1}\,(\sin\varphi)^{1-2x}\,d\varphi \\
&= \begin{bmatrix} r^2 = l & r\to 0 & l\to 0 \\ 2r\,dr = dl & r\to\infty & l\to\infty \end{bmatrix} \\
&= 2\int_0^\infty e^{-l}\,dl\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2x-1}\,(\sin\varphi)^{1-2x}\,d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2x-1}\,(\sin\varphi)^{1-2x}\,d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2\varphi)^x}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{(\sin^2\varphi)^x}\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Uvođenjem supstitucije $p = \sin^2\varphi,\ dp = 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) &= \int_0^1(1-p)^{x-1}p^{-x}\,dp \\
&= \int_0^1\left(\frac{1-p}{p}\right)^x\cdot\frac{dp}{1-p} \\
&= \begin{bmatrix} y = \dfrac{1-p}{p} & & \\ p = \dfrac{1}{1+y} & p\to 0 & y\to\infty \\ 1-p = py = \dfrac{y}{1+y} & p\to 1 & y\to 0 \\ dp = -\dfrac{dy}{(1+y)^2} & & \end{bmatrix} \\
&= -\int_\infty^0 y^x\cdot\frac{1+y}{y}\cdot\frac{dy}{(1+y)^2} \\
&= \int_0^\infty\frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy \\
&= \int_0^\infty\frac{\frac{1}{1+y}}{y^{1-x}}\,dy.
\end{aligned}$$

Uočimo da je ovaj integral oblika (2.27), za $\alpha = 1 - x$. Definirajmo funkciju kompleksne varijable

$$F(w) = \frac{w^{x-1}}{1+w}$$

te neka je

$$f(w) = \frac{1}{1+w}\ .$$

Iz (2.32) slijedi

$$\int_0^\infty \frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+y}}{y^{1-x}}\,dy = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i(1-x)}} \cdot \mathrm{Res}\,(F(w),-1) = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i x}}\mathrm{Res}\,(F(w),-1)\,.$$

Izračunajmo reziduum funkcije F u točki $w = -1$.

$$\mathrm{Res}\,(F(w),-1) = \lim_{w\to-1}\,(w+1)\frac{w^{x-1}}{1+w} = \left(e^{\pi i}\right)^{x-1} = -e^{\pi i x}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i x}} \cdot \left(-e^{\pi i x}\right)\\ &= \frac{2\pi i}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\ .\end{aligned}$$

Konačno, iz gornjih računa dobivamo

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \tag{3.14}$$

te smo na ovaj način dokazali produktnu formulu za $z \in \langle 0,1\rangle$. Budući da su s obje strane jednakosti (3.14) kompleksne funkcije analitičke na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, a skup $\langle 0,1\rangle$ ima gomilište na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, prema principu jedinstvenosti za analitičke funkcije 1.0.2, slijedi da produktna formula vrijedi za svaki $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. □

Jedna od posljedica produktne formule je sljedeći korolar.

Korolar 3.5.2. *Funkcija* Γ *nema nultočaka na* $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Gamma(z) = 0$, za neki $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$. Tada prema produktnoj formuli (3.13) vrijedi

$$\pi = \sin(\pi z)\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = 0,$$

što nije istina. Dakle, funkcija Γ nema nultočaka na području svoje definicije. □

Pogledajmo kako pomoću produktne formule možemo izračunati vrijednost gama funkcije u nekim razlomcima.

Primjer 3.5.3. *Izračunajmo vrijednost* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Koristeći produktnu formulu (3.13) dobivamo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}},$$

tj. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$. Kako je prema definiciji gama funkcije

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt > 0,$$

slijedi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Primjer 3.5.4. *Dokažimo da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom koristeći produktnu formulu te (3.4). Za $n = 1$ imamo

$$\frac{(2-1)!!}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. Tada iz (3.4) slijedi

$$\Gamma\left((n+1) + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Primjer 3.5.5. *Dokažimo da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n\frac{2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo produktnu formulu te tvrdnju iz prethodnog primjera. Uočimo najprije da je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Gamma\left(1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Sada iskoristimo produktnu formulu za $z=n+\frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Gamma\left(1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Na posljednju jednakost primjenimo tvrdnju iz prethodnog primjera. Dobivamo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi}{(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}}=(-1)^n\frac{2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

Prema [6], za točke oblika $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>2$, nisu pronađene točne vrijednosti gama funkcije. Poznato je jedino da su $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ i $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ transcedentni brojevi.

3.6 Primjena gama funkcije

Gama funkcija ima primjenu u raznim područjima matematike; počevši od teorije brojeva, teorije vjerojatnosti pa do primjene u integralnom računu. U ovom ćemo odjeljku kroz primjere pokazati kako se mnogi nepravi integrali mogu vrlo lako riješiti svođenjem na gama funkciju.

Primjer 3.6.1. *Izračunajmo vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Supstitucijom $x^2=t$ početni integral svodimo na vrijednost gama funkcije u nekoj konkretnoj točki. Imamo

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{rcc} x^2=t & & \\ 2xdx=dt & x\to 0 & t\to 0 \\ dx=\dfrac{dt}{2x}=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} & x\to\infty & t\to\infty \end{array}\right]=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Uočimo da je posljednji integral upravo jednak integralu (3.1) za $z = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Primjer 3.6.2. *Izračunajmo vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[8]{x}}\, dx.$$

Supstitucijom $x = t^8$ početni integral svodimo na vrijednost gama funkcije u nekoj točki. Imamo

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[8]{x}}\, dx = \begin{bmatrix} x = t^8 & x \to 0 & t \to 0 \\ dx = 8t^7 dt & x \to \infty & t \to \infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty 8t^4 e^{-t} t^7\, dt = 8 \int_0^\infty e^{-t} t^{11}\, dt.$$

Uočimo da je posljednji integral upravo jednak integralu (3.1) za $z = 12$. Dakle,

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[8]{x}}\, dx = 8 \cdot \Gamma(12) = 8 \cdot 11! = 319334400.$$

Primjer 3.6.3. *Izračunajmo vrijednost integrala*

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\frac{-1}{2}} dx.$$

Uvođenjem supstitucije $-\ln x = t$ dobivamo

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\frac{-1}{2}} dx = \begin{bmatrix} -\ln x = t & & \\ x = e^{-t} & x \to 0 & t \to \infty \\ dx = -e^{-t} dt & x \to 1 & t \to 0 \end{bmatrix} = \int_\infty^0 -e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt.$$

Uočimo da je posljednji integral upravo jednak integralu (3.1) za $z = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\frac{-1}{2}}\, dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Bibliografija

[1] J. Bak i D.J. Newman, *Complex analysis*, Springer, 2010.

[2] N. Elezović, *Kompleksna analiza, Račun ostataka*, Element, Zagreb, 2012.

[3] T. Gamelin, *Complex analysis*, Springer Science & Business Media, 2003.

[4] H. Kraljević i S. Kurepa, *Matematička analiza, 4. dio, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[5] D. Matijević i S. Poljak, *Fourierov red i Fourierova transformacija*, Math. e **19** (2011), 33–47.

[6] M. Ribičić Penava i D. Škrobar, *Gama i beta funkcije*, Osječki matematički list **15** (2015), br. 2, 93–111.

[7] G. Rainwater, *Residue theorems and their applications: computing integrals once thought impossible to evaluate analytically*, (2007), `https://digitalcommons.csumb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1360&context=caps_thes`, (srpanj 2020.).

[8] I. Smolić, *Matematičke metode fizike*, PMF, Sveučilište u Zagrebu (2020), `https://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/MMFk.pdf`, (srpanj 2020.).

[9] M. Stojić, Vježbe, Kompleksna analiza, PMF, Sveučilište u Zagrebu (2019), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~stojic/KA-3.pdf`, (srpanj 2020.).

[10] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, Skripta, PMF-matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu (2009), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf`, (srpanj 2020.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo primjenu teorema o reziduumima na različite tipove nepravih integrala. Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi te iskazani teoremi povezani s teorijom reziduuma koji se koriste u radu. U drugom poglavlju promatrali smo primjenu teorema o reziduumima na neprave integrale. Pritom smo kao podintegralne funkcije promatrali racionalne funkcije te funkcije oblika: $f(x)\cos px$, $f(x)\sin px$, $\frac{f(x)}{x^\alpha}$, $f(x)\ln x$, gdje je $f(x)$ racionalna funkcija. Za svaki od navedenih tipova dan je detaljan izvod formule prema kojoj se računaju nepravi integrali. U sklopu tog poglavlja promatrali smo kako se računa Fourierov transformat racionalne funkcije. U posljednjem poglavlju proučavali smo kompleksnu gama funkciju, područje na kojem je definirana, glavna svojstva te njezinu primjenu u integralnom računu.

Summary

In this thesis we studied the applications of the residue theorem on various types of improper integrals. The thesis is divided into three chapters. In the opening chapter we defined the basic concepts and we stated theorems related to the residue theory used in this thesis. In the second chapter we studied the applications of the residue theorem to improper integrals. We studied integrals of rational functions and functions like: $f(x)\cos px$, $f(x)\sin px$, $\frac{f(x)}{x^\alpha}$, $f(x)\ln x$, where $f(x)$ is a rational function. For each of these types we gave formulas for calculating improper integrals. Also, in this chapter we studied a Fourier transform of a rational function. In the last chapter, we studied the complex Gamma function, its domain, the main properties and applications in integral calculus.

Životopis

Rođena sam 15. svibnja 1997. u Zadru, gdje sam pohađala Osnovnu školu Smiljevac te Gimnaziju Jurja Barakovića, opći smjer. U srpnju 2015. godine, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički koji završavam 2018. godine. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Na posljednjoj godini diplomskog studija nagrađena sam za izniman uspjeh na studiju od Vijeća Matematičkog odsjeka.