Eksponencijalna funkcija i derivabilnost

Trajbar, Željka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Željka Trajbar

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA I DERIVABILNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mom mentoru izv.prof.dr.sc. Zvonku Iljazović na vodstvu, velikoj pomoći, savjetima te neograničenom strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala mu na ukazanom povjerenju, podršci, razumijevanju i usmjeravanju tijekom ove neobične akademske godine.
Velika hvala mojoj obitelji na svim ovim godinama. Hvala im na bezgraničnoj ljubavi i strpljenju. Hvala im što su vjerovali u mene i moj uspjeh - bez njih ovo ne bih mogla postići.
Hvala mojoj rodbini i prijateljima na svakoj riječi ohrabrenja. Hvala na svakoj molitvi. Hvala na svakom poticaju. Hvala na svakom smijehu. Hvala što su mi pomogli nositi moje terete.
Hvala svim kolegama i profesorima koji su obogatili moje studiranje. Hvala što su mi boravak na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu učinili ugodnim, zabavnim i dragim mjestom.
Hvala svima koje sam susretala u svom školovanju. Hvala svima koji su mi na bilo koji način pomogli u izradi ovog rada.

Od srca hvala!

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo neka svojstva eksponencijalne funkcije s naglaskom na njenu derivabilnost.
U prvom poglavlju definiramo eksponencijalnu funkciju s bazom većom od 1, prvo za $a > 0$ definiramo a^x za sve $x \in \mathbb{N}$, potom za sve $x \in \mathbb{Z}$, onda i za $x \in \mathbb{Q}$, pri čemu dokazujemo da za svaki $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $\sqrt[n]{a}$. Definiramo, za $a > 1$ a^x za sve $x \in \mathbb{R}$. U prvom poglavlju još proučavamo konvergenciju nizova realnih brojeva te omeđene nizove u $\mathbb{R}$.
U drugom poglavlju proučavamo neprekidnost eksponencijalne funkcije te posljedice koje ona ima na svojstva eksponencijalne funkcije. Prvo dokazujemo da je eksponencijalna funkcija neprekidna, zatim proučavamo međuvrijednosti neprekidnih funkcija te koristeći dobivene rezultate dokazujemo da je eksponencijalna funkcija bijekcija, proučavamo pojmove limesa i derivacije funkcija, nadalje dokazujemo da vrijedi tzv. eksponencijalni zakon te definiramo Eulerov broj e. Na kraju definiramo logaritamsku funkciju s bazom većom od 1.
U trećem poglavlju proučavamo derivabilnost eksponencijalne funkcije. Prvo definiramo eksponencijalnu funkciju s bazom manjom od 1, zatim logaritamsku funkciju s bazom manjom od 1 te dokazujemo neka svojstva tih funkcija. Na kraju dokazujemo da je funkcija ln derivabilna u točki 1 te, pomoću toga, dolazimo do glavnog rezultata da je eksponencijalna funkcija derivabilna.

Poglavlje 1

Izgradnja eksponencijalne funkcije

1.1 Cjelobrojni eksponenti

Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Za $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo a^n induktivno na sljedeći način:

$$a^0 = 1$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Dakle, $a^1 = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a \dots$

Propozicija 1.1.1. *Neka je $a > 0$. Tada za sve $i, j \in \mathbb{N}_0$ vrijedi: $a^{i+j} = a^i \cdot a^j$.*

Dokaz. Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}_0$. Dokažimo matematičkom indukcijom po $j \in \mathbb{N}_0$ da je

$$a^{i+j} = a^i \cdot a^j \tag{1.1}$$

Za $j = 0$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $j \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$a^{i+j} = a^i \cdot a^j.$$

Imamo:
$$a^{i+(j+1)} = a^{(i+j)+1} = a^{i+j} \cdot a = (a^i \cdot a^j) \cdot a = a^i \cdot (a^j \cdot a) = a^i \cdot a^{j+1}.$$

Dakle, $a^{i+(j+1)} = a^i \cdot a^{j+1}$. Time smo dokazali da (1.1) vrijedi za svaki $j \in \mathbb{N}_0$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Neka je $a > 0$ te neka je $m \in \mathbb{Z}$, $m \notin \mathbb{N}_0$. Definirajmo $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.
Uočimo da je $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
Nadalje, uočimo da za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Naime, ovo je jasno po definiciji ako je $m \in \mathbb{N}$, nadalje, tvrdnja je očito istinita i za $m = 0$. Ako je $m < 0$, onda imamo

$$\frac{1}{a^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{-m}}} = a^{-m}.$$

Lema 1.1.2. *Neka je $a > 0$ te neka su $i, j \in \mathbb{Z}$ takvi da je $i + j \geq 0$. Tada je $a^{i+j} = a^i \cdot a^j$.*

Dokaz. Ako su $i, j \in \mathbb{N}_0$ tvrdnja slijedi iz propozicije 1.1.1. Inače vrijedi ($i \in \mathbb{N}_0$ i $j \notin \mathbb{N}_0$) ili ($i \notin \mathbb{N}_0$ i $j \in \mathbb{N}_0$). (Zbog $i + j \geq 0$ ne može vrijediti $i, j \notin \mathbb{N}_0$.)
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti: $i \in \mathbb{N}_0$, $j \notin \mathbb{N}_0$.
Označimo: $k = i + j$. Vrijedi $k \in \mathbb{N}_0$ te $i = k + (-j)$. Uočimo da je $-j \in \mathbb{N}_0$. Iz propozicije 1.1.1 slijedi:

$$a^i = a^{k+(-j)} = a^k \cdot a^{-j} = a^k \cdot \frac{1}{a^j}.$$

Dakle, $a^i = a^k \cdot \frac{1}{a^j}$ pa je $a^i \cdot a^j = a^k$, tj. $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$. Time je lema dokazana. □

Propozicija 1.1.3. *Neka je $a > 0$ te neka su $i, j \in \mathbb{Z}$. Tada je $a^{i+j} = a^i \cdot a^j$.*

Dokaz. Ako je $i + j \geq 0$ tvrdnja slijedi iz leme 1.1.2. Pretpostavimo da $i + j \leq 0$.
Tada je $-i + (-j) \geq 0$ pa iz leme 1.1.2 slijedi:

$$a^{-i+(-j)} = a^{-i} \cdot a^{-j}.$$

Dakle, $a^{-(i+j)} = a^{-i} \cdot a^{-j}$ pa slijedi

$$\frac{1}{a^{i+j}} = \frac{1}{a^i} \cdot \frac{1}{a^j},$$

što povlači

$$a^{i+j} = a^i \cdot a^j.$$

□

1.2 Egzistencija n-tog korijena

Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in S$ i $y \in T$ vrijedi $x \leq y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in S$ i $y \in T$ vrijedi $x \leq z \leq y$.

Lema 1.2.1. *Neka su $x, y, a \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \geq 0, y \geq 0, a > 0$. Pretpostavimo da je $x \cdot y < a$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $x \cdot (y + \epsilon) < a$.*

Dokaz. Ako je $x = 0$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $x > 0$. Iz $x \cdot y < a$ slijedi $y < \frac{a}{x}$. Stoga je $\frac{a}{x} - y > 0$. Odredimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \epsilon < \frac{a}{x} - y$. Tada je $y + \epsilon < \frac{a}{x}$ pa je $x \cdot (y + \epsilon) < a$. □

Propozicija 1.2.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \leq x < y$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^n < y^n$.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da je $x^n < y^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.
Tada iz $x < y$ slijedi da je $x^{n+1} < y^{n+1}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.3. *Ako su $x \geq 0, a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x^n < a$, onda postoji $\epsilon > 0$ takav da je $(x + \epsilon)^n < a$.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.
Pretpostavimo da su $x \geq 0, a > 0$ takvi da je $x < a$. Tada je $0 < a - x$. Odaberimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \epsilon < a - x$. Slijedi $x + \epsilon < a$. Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $x \geq 0, a > 0$ takvi da je $x^{n+1} < a$. Tada je $x^n \cdot x < a$ pa prema lemi1.2.1 postoji $\epsilon_1 > 0$ takav da je $x^n \cdot (x + \epsilon_1) < a$. Slijedi

$$x^n < \frac{a}{x + \epsilon_1}.$$

Iz induktivne pretpostavke slijedi da postoji $\epsilon_2 > 0$ takav da je

$$(x + \epsilon_2)^n < \frac{a}{x + \epsilon_1}.$$

Slijedi $(x + \epsilon_2)^n \cdot (x + \epsilon_1) < a$. Neka je $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.
Iz $x + \epsilon \leq x + \epsilon_2$ slijedi $(x + \epsilon)^n \leq (x + \epsilon_2)^n$ (propozicija1.2.2).
Nadalje, vrijedi $x + \epsilon \leq x + \epsilon_1$ pa je $(x + \epsilon)^n (x + \epsilon) \leq (x + \epsilon_2)^n (x + \epsilon_1)$.
Stoga je

$$(x + \epsilon)^{n+1} < a.$$

□

Propozicija 1.2.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Nadalje, ako je $a \neq 0$, tada je $a^n \neq 0$ te je $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ i $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$.*

Dokaz. Ovo se lako dobiva indukcijom. □

Korolar 1.2.5. *Neka su $a, x > 0$ te $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $a < x^n$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $x - \epsilon > 0$ i $a < (x - \epsilon)^n$.*

Dokaz. Iz $a < x^n$ slijedi $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{a}$, tj. prema propoziciji 1.2.4 $\left(\frac{1}{x}\right)^n < \frac{1}{a}$.
Prema propoziciji 1.2.3 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\left(\frac{1}{x} + \delta\right)^n < \frac{1}{a}.$$

Slijedi

$$\frac{(1 + x\delta)^n}{x^n} < \frac{1}{a}$$

pa je

$$a < \frac{x^n}{(1 + x\delta)^n},$$

tj.

$$a < \left(\frac{x}{1 + x\delta}\right)^n. \tag{1.2}$$

Imamo $x\delta > 0$ pa je $1 < 1 + x\delta$ iz čega slijedi

$$\frac{1}{1 + x\delta} < 1.$$

Stoga je

$$\frac{x}{1 + x\delta} < x.$$

Iz propozicije 1.2.3 slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$\frac{x}{1 + x\delta} + \epsilon < x.$$

Slijedi,

$$\frac{x}{1 + x\delta} < x - \epsilon.$$

Zaključujemo da je $x - \epsilon > 0$ te da je

$$\left(\frac{x}{1 + x\delta}\right)^n < (x - \epsilon)^n \text{ (propozicija1.2.3).}$$

Iz (1.2) slijedi da je $a < (x - \epsilon)^n$. □

Teorem 1.2.6. *Neka je $a > 0$ te $n \in \mathbb{N}$. Onda postoji jedinstven $x > 0$ takav da je $x^n = a$.*

Dokaz. Dokažimo prvo da takav x mora biti jedinstven. Pretpostavimo da su $x, y > 0$, takvi da $x^n = a$ i $y^n = a$. Ako je $x < y$, onda iz propozicije 1.2.2 slijedi $x^n < y^n$, tj. $a < a$. što je očigledno nemoguće. Analogno vidimo da $y < x$ vodi do kontradikcije. Prema tome $x = y$.
Dokažimo sada da postoji $x > 0$ takav da je $x^n = a$. Definirajmo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x^n < a\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, a < x^n\}.$$

Vrijedi $S \neq \emptyset$ jer je $0 \in S$. Dokažimo da je $T \neq \emptyset$. Ako je $a < 1$, onda je $a < 1^n$ pa je $1 \in T$. Ako je $a = 1$, onda je $a = 1^n < 2^n$, dakle $2 \in T$.
Pretpostavimo da je $1 < a$. Ako je $n = 1$, onda odaberemo bilo koji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $a < b$ pa je $a < b = b^n$ pa je $b \in T$. Ako je $n \geq 2$, onda iz propozicije 1.2.2 i $1 < a$ slijedi $1^{n-1} < a^{n-1}$, tj. $1 < a^{n-1}$ pa je $a < a^n$ te je stoga $a \in T$.
Zaključimo, $T \neq \emptyset$.
Neka su $x \in S, y \in T$. Tvrdimo da je $x \leq y$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $y < x$ pa iz propozicije 1.2.2 slijedi $y^n < x^n$. Budući je $y \in T$ i $x \in S$ vrijedi $a < y^n$ i $x^n < a$.
Dakle, $a < y^n < x^n < a$, kontradikcija.
Prema tome, S i T su neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in S, y \in T$. Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x \leq z \leq y, \text{ za svaki } x \in S, \text{ za svaki } y \in T. \tag{1.3}$$

Tvrdimo da je $z^n = a$.
Pretpostavimo da je $z^n < a$. Iz (1.3) i činjenice da je $0 \in S$ slijedi $0 \leq z$.
Iz propozicije 1.2.3 slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da je $(z + \epsilon)^n < a$. Ovo povlači da je $z + \epsilon \in S$ pa iz (1.3) slijedi da je $z + \epsilon \leq z$, kontradikcija.
Pretpostavimo da je $a < z^n$. Iz korolara 1.2.5 slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da $z - \epsilon > 0$ i $a < (z - \epsilon)^n$. Stoga je $z - \epsilon \in T$, pa iz (1.3) slijedi $z \leq z - \epsilon$, kontradikcija.
Zaključujemo, $z^n = a$. Očito je $z \neq 0$ pa je $z > 0$.

□

Za $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ broj $x > 0$ takav da je $x^n = a$ označimo sa $\sqrt[n]{a}$ i nazovimo n-ti korijen od a. Uočimo da za svaki $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $a > 0$. Tada za sve $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Fiksirajmo $m \in \mathbb{Z}$. Dokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}_0$ da vrijedi (1.4).
Za $n = 0$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da (1.4) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$.
Koristeće propoziciju1.1.3 dobivamo

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Dakle, $(a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)}$.
Time smo dokazali da $(a^m)^n = a^{mn}$ vrijedi za $\forall n \in \mathbb{N}_0$. □

Propozicija 1.2.8. *Neka je $a > 0$ te neka su $m, n \in \mathbb{Z}$. Tada je $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.*

Dokaz. Ako je $n \in \mathbb{N}_0$ tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.7. Pretpostavimo da je $n < 0$. Tada je $-n \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 1.2.7 dobivamo

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{m\cdot(-n)}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{m\cdot n}.$$

Dakle, $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.9. *Neka je $a > 0$ te neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Dokaz. Označimo $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Očito je $x > 0$. Nadalje, po definiciji je $x^m = \sqrt[n]{a}$.
Koristeći propoziciju 1.2.8 dobivamo:

$$x^{mn} = (x^m)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Dakle, $x^{mn} = a$ pa je po definiciji $x = \sqrt[mn]{a}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.2.10. *Neka je $a > 0$ te neka su $p, n \in \mathbb{N}$ te $m \in \mathbb{Z}$. Tada je*

$$\left(\sqrt[pn]{a}\right)^{pm} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Dokaz. Koristeći propozicije 1.2.8 i 1.2.9 dobivamo

$$\left(\sqrt[pn]{a}\right)^{pm} = \left(\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{p}}\right)^p\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

□

Korolar 1.2.11. *Neka je $a > 0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ te pretpostavimo da vrijedi $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$. Tada je*

$$\left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1} = \left(\sqrt[n_2]{a}\right)^{m_2}.$$

Dokaz. Iz $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ slijedi $m_1 n_2 = n_1 m_2$.
Koristeći ovo i prethodni korolar dobivamo:

$$\left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1} = \left(\sqrt[n_2 n_1]{a}\right)^{n_2 m_1} = \left(\sqrt[n_2 n_1]{a}\right)^{n_1 m_2} = \left(\sqrt[n_2]{a}\right)^{m_2}.$$

Time je tvrdnja korolara dokazana. □

1.3 Racionalni eksponenti

Neka je $a > 0$ te neka je $r \in \mathbb{Q}$. Imamo $r = \frac{m}{n}$ za neke $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $a^r = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Uočimo da je prema korolaru 1.2.11 definicija dobra, tj. ne ovisi o izboru m i n.
Nadalje, uočimo da je $a^r > 0$.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $a > 0$ te neka su $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Tada je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.*

Dokaz. Označimo $x = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ i $y = \sqrt[n]{a^m}$.
Treba dokazati da je $x = y$. Imamo:

$$x^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = \text{prop.1.2.8} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m.$$

Dakle, $x^n = a^m$ pa je po definiciji $x = \sqrt[n]{a^m}$. Dakle, $x = y$. □

Propozicija 1.3.2. *Neka je $a > 0$ te neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Tada je $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$.*

Dokaz. Neka su $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $r_1 = \frac{m_1}{n}, r_2 = \frac{m_2}{n}$.
Imamo:

$$a^{r_1+r_2} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m_1+m_2} = \text{prop.1.1.3} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m_1} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Dakle, $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$. □

Propozicija 1.3.3. *Neka je $a > 0$. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $a > 1$, onda $a^n > 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Ako je $a < 1$, onda $a^n < 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $a > 1$. Dokažimo indukcijom da je $a^n > 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
To je očito za $n = 1$. Pretpostavimo da je $a^n > 1$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada iz $a > 1$ slijedi $a^n \cdot a > 1$, tj. $a^{n+1} > 1$.

2. Ova tvrdnja se dokazuje analogno kao i prva.

□

Propozicija 1.3.4. *Neka je $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Pretpostavimo da je $a > 1$. Tada je $\sqrt[n]{a} > 1$.*

2. *Pretpostavimo da je $a < 1$. Tada je $\sqrt[n]{a} < 1$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{a} \leq 1$. Ako je $\sqrt[n]{a} = 1$, onda je $a = 1^n = 1$, a ako je $\sqrt[n]{a} < 1$, onda prema propoziciji1.3.4 vrijedi $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n < 1$, tj. $a < 1$.
U svakom slučaju $a \leq 1$, što je kontradiktorno s činjenicom da je $a > 1$.
Prema tome, $\sqrt[n]{a} > 1$.

2. Tvrdnju dokazujemo analogno.

□

Korolar 1.3.5. *Neka je $a > 0$ i $r \in \mathbb{Q}, r > 0$.*

1. *Pretpostavimo da je $a > 1$. Tada je $a^r > 1$.*

2. *Pretpostavimo da je $a < 1$. Tada je $a^r < 1$.*

Dokaz. 1. Imamo $r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.3.4 vrijedi: $\sqrt[n]{a} > 1$ pa je prema propoziciji 1.3.3 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m > 1$.
Dakle, $a^r > 1$.

2. Dokazujemo analogno.

□

Propozicija 1.3.6. *Neka je $a > 0$ te neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ takvi da je $r_1 < r_2$.*

1. *Ako je $a > 1$, tada je $a^{r_1} < a^{r_2}$.*

2. *Ako je $a < 1$, tada je $a^{r_1} > a^{r_2}$.*

Dokaz. 1. Iz $r_1 < r_2$ slijedi $r_2 - r_1 > 0$.
Stoga je prema korolaru 1.3.5 $a^{r_2 - r_1} > 1$. Množeći ovu nejednakost s brojem a^{r_1} (koji je pozitivan) dobivamo $a^{r_2 - r_1} \cdot a^{r_1} > a^{r_1}$.
Iz propozicije 1.3.2 slijedi $a^{r_2} > a^{r_1}$.

2. Dokazuje se analogno.

□

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $L \in \mathbb{R}$. Za L kažemo da je gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq L$.

Za podskup od $\mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako ima bar jednu gornju među.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L supremum skupa S ako vrijedi sljedeće:

1. L je gornja međa skupa S.

2. Za svaku gornju među L' skupa S vrijedi $L \leq L'$.

Pretpostavimo da su L_1 i L_2 supremumi skupa S. Tada je $L_1 = L_2$.

Naime vrijedi $L_1 \leq L_2$ jer je L_1 supremum skupa S. Analogno, $L_2 \leq L_1$ pa je $L_1 = L_2$.

Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$.

Primjer 1.3.7. *Neka je $S = \langle -\infty, 0\rangle$. Tvrdimo da je 0 supremum skupa S. Očito je 0 gornja međa skupa S. Neka je L gornja međa skupa S. Želimo dokazati da je $0 \leq L$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $L < 0$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $L < x < 0$.*
Slijedi: $x \in S$ i $L < x$ što je u kontradikciji s činjenicom da je L supremum skupa S. Prema tome, $0 \leq L$. Dakle, 0 je supremum skupa S.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $s_0 \in S$. Kažemo da je s_0 maksimum skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq s_0$.

Uočimo sljedeće: ako je s_0 maksimum skupa S, onda je s_0 supremum skupa S.
Naime, očito je s_0 gornja međa skupa S, a ako je L' gornja međa skupa S, onda je $s_0 \leq L'$ jer $s_0 \in S$.

Propozicija 1.3.8. *Neka je S neprazan, odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Vrijedi $T \neq \emptyset$ jer je S odozgo omeđen.
Za svaki $x \in S$ i $y \in T$ vrijedi: $x \leq y$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, z sve $x \in S, y \in T$.
Iz ovoga zaključujemo da je z supremum skupa S. □

1.4 Realni eksponenti

Neka je $a > 1$. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Želimo definirati a^x. Promotrimo skup $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$. Odaberimo $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q$. Tada za sve $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r \leq x$ vrijedi $r < q$ pa propozicija 1.3.6 povlači da je $a^r < a^q$. Ovo znači da je a^q gornja međa skupa $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$. Prema propoziciji 1.3.8 taj skup ima supremum.
Definiramo:

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}. \tag{1.5}$$

Provjerimo prvo da se ova definicija u slučaju $x \in \mathbb{Q}$ podudara s onom od prije.
Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{Q}$. Definirajmo $r_0 = x$. Za svaki $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r \leq x$ vrijedi $r \leq r_0$ pa prema propoziciji 1.3.6 vrijedi $a^r \leq a^{r_0}$. Nadalje, očito je $a^{r_0} \in \{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.
Stoga je a^{r_0} maksimum skupa $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$ pa je i supremum tog skupa.
Dakle, a^x u smislu definiranja (1.5) je upravo a^{r_0}.

Uočimo da iz same definicije slijedi da za sve $r \in \mathbb{Q}$ i $x \in \mathbb{R}$ takve da je $r \leq x$ slijedi $a^r \leq a^x$.
Slijedi da je $a^x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka su $x \in \mathbb{R}$ i $s \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x \leq s$. Tada je $a^x \leq a^s$.
Naime, kao i maloprije zaključujemo da je a^s gornja međa skupa $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.
Stoga je supremum tog skupa manji ili jednak od a^s, tj. $a^x \leq a^s$.

Propozicija 1.4.1. *Neka je $a > 1$ te neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_1 < x_2$. Tada je $a^{x_1} < a^{x_2}$.*

Dokaz. Odaberimo $s \in \mathbb{Q}$ takav da $x_1 < s < x_2$. Nadalje odaberemo $r \in \mathbb{Q}$ takav da $s < r < x_2$.
Dakle, $x_1 \leq s < r \leq x_2$ pa iz prethodne napomene i propozicije1.3.6 slijedi

$$a^{x_1} \leq a^s < a^r \leq a^{x_2}.$$

Stoga, $a^{x_1} < a^{x_2}$. □

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f \colon S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je} x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle, \text{ onda je} f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle. \tag{1.6}$$

Primjer 1.4.2. *Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija je definirana sa $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je funkcija f neprekidna u točki x_0. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberemo bilo koji $\delta > 0$. Za $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$ jer je $f(x) = f(x_0)$.*
Dakle, implikacija (1.6) očito vrijedi.

Primjer 1.4.3. *Neka je* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Neka je $x_0 = 0$. *Tvrdimo da funkcija* f *nije neprekidna u* x_0.
Neka je $\epsilon = 0.1$. *Pretpostavimo da postoji* $\delta > 0$ *takav da za* $\forall x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* (1.6). *Definirajmo* $x = \frac{\delta}{2}$. *Tada je* $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, *tj.* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. *Iz* (1.6) *slijedi da je* $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$, *tj.* $f(x) \in \langle -1 - 0.1, -1 + 0.1 \rangle$ *pa je* $f(x) < -1 + 0.1$, *tj.* $f(x) < -0.9$.
No, $f(x) = 1$ *jer je* $x > 0$. *Dakle.* $1 < -0.9$, *što je očito nemoguće. Dakle, ne postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* (1.6).
Zaključujemo da funkcija f *nije neprekidna u* x_0.

1.5 Konvergencija niza

Neka je X skup te neka je $x\colon \mathbb{N} \to X$ funkcija. Tada za x kažemo da je niz u X.
Za $n \in \mathbb{N}$ sa x_n označimo $x(n)$. Niz x označavamo i sa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira broju L ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$. U tom slučaju pišemo $x_n \to L$.

Primjer 1.5.1. *Neka je* $L \in \mathbb{R}$. *Definirajmo niz* (x_n) *u* $\mathbb{R}$ *sa* $x_n = L$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Neka je* $\epsilon > 0$. *Odaberimo bilo koji* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Tada za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq n_0$ *vrijedi* $x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$ *jer je* $x_n = L$. *Prema tome* $x_n \to L$.

Za niz u $\mathbb{R}$ kažemo da je niz realnih brojeva.

Propozicija 1.5.2. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{R}$ *te* $x_0 \in S$. *Pretpostavimo da je* f *neprekidna u* x_0. *Nadalje pretpostavimo da je* x_n *niz realnih brojeva takav da je* $x_n \in S$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te takav da* $x_n \to x_0$. *Tada* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi (1.6). Zbog $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Iz (1.6) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$. Prema tome $f(x_n) \to f(x_0)$. $\square$

Primjer 1.5.3. *Niz* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *teži prema* 0*. Dokažimo to.*
Neka je $\epsilon > 0$*. Odaberimo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$*. Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq n_0$*. Tada je* $n > \frac{1}{\epsilon}$ *pa je* $\frac{1}{n} < \epsilon$ *iz čega slijedi* $\frac{1}{n} \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle$*.*
Dakle, za svaki $n \geq n_0$ *vrijedi* $\frac{1}{n} \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle$*. Prema tome* $\frac{1}{n} \to 0$*.*

Propozicija 1.5.4. *Pretpostavimo da su* (x_n)*,* (y_n) *i* (z_n) *nizovi realnih brojeva takvi da*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, pretpostavimo da je $L \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to L$ *i* $z_n \to L$*. Tada* $y_n \to L$*.*

Dokaz. Budući da $x_n \to L$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$.
Budući da $z_n \to L$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_1$ vrijedi $z_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$.
Definirajmo $n_2 = max\{n_0, n_1\}$. Neka je $n \geq n_2$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq n_1$ pa je $x_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$ i $z_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$. Iz ovoga i pretpostavke propozicije dobivamo da je

$$L-\epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L+\epsilon$$

pa je

$$L-\epsilon < y_n < L+\epsilon,$$

tj.

$$y_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle.$$

Dakle, za svaki $n \geq n_2$ vrijedi $y_n \in \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$. Time smo dokazali da $y_n \to L$. □

Napomena 1.5.5. *Neka su* $a, b, r \in \mathbb{R}$*. Tada je*

$$|b-a| < r \Leftrightarrow -r < b-a < r \Leftrightarrow a-r < b < a+r \Leftrightarrow b \in \langle a-r, a+r \rangle.$$

Dakle,

$$|b-a| < r \Leftrightarrow b \in \langle a-r, a+r \rangle.$$

Propozicija 1.5.6. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te neka je* $L \in \mathbb{R}$*. Tada* $x_n \to L$ *ako i samo ako* $|x_n - L| \to 0$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x_n \to L$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - L| < \epsilon$, tj. $||x_n - L| - 0| < \epsilon$. Dakle, $|x_n - L| \to 0$.
Analogno dokazujemo da $|x_n - L| \to 0$ povlači $x_n \to L$. □

Teorem 1.5.7. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in S$ *te* $f : S \to \mathbb{R}$*. Pretpostavimo da za svaki niz realnih brojeva* (x_n) *takav da je* $x_n \in S$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *te takav da je* $x_n \to x_0$ *vrijedi* $f(x_n) \to f(x_0)$*. Tada je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $\epsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ i $f(x) \notin \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$ pa postoji $x_n \in S$ takav da je

$$x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle \tag{1.7}$$

i

$$f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle \tag{1.8}$$

Sada imamo niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi (1.7) i (1.8).
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Prema (1.7) vrijedi $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leq |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}.$$

Iz propozicije1.5.4 i primjera1.5.1 slijedi $|x_n - x_0| \to 0$.
Prema propoziciji 1.5.6 $x_n \to x_0$. □

Iz pretpostavke teorema 1.5.7 slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$. Ovo je u kontradikciji s (1.8).
Zaključak: funkcija f je neprekidna u točki x_0.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Kažemo da je f neprekidna funkcija ako je f neprekidna u x_0 za sve $x_0 \in S$.

Primjer 1.5.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$, za svaki $x \in S$.*
Neka je $x_0 \in S$. Kao u primjeru1.4.2 zaključujemo da je f neprekidna u točki x_0. Prema tome funkcija f je neprekidna.

Propozicija 1.5.9. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a \neq b$. Definirajmo $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$. Tada je $\epsilon > 0$.
Tvrdimo:

$$\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle \cap \langle b - \epsilon, b + \epsilon \rangle = \emptyset. \tag{1.9}$$

1. slučaj: $a < b$
   Tada je $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ pa je $2\epsilon = b - a$, tj. $a + \epsilon = b - \epsilon$. Pretpostavimo da postoji $x \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle \cap \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$. Tada je $x < a + \epsilon = b - \epsilon < x$, kontradikcija.
   Dakle, (1.9) vrijedi.

2. slučaj: $b < a$
   Analogno dobivamo da (1.9) vrijedi.

Iz činjenice da $x_n \to a$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$. Isto tako, zbog $x_n \to b$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_1$ vrijedi $x_n \in \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$. Odaberimo $n = n_0 + n_1$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq n_1$ pa je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ i $x_n \in \langle b - \epsilon, b + \epsilon\rangle$, što je u kontradikciji s (1.9). Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Ako je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$, onda kažemo da je a limes niza (x_n).

Napomena 1.5.10. *Prethodna propozicija kaže da je limes niza, ako postoji, jedinstven.*

Lema 1.5.11.

1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada je $|a + b| \leq |a| + |b|$.*
2. *Neka su $u, v \in \mathbb{R}$. Tada $||u| - |v|| \leq |u - v|$.*

Dokaz.

1. Imamo $a+b \leq |a|+|b|$. Nadalje, $-(a+b) = -a+(-b) \leq |-a|+|-b| = |a|+|b|$. Dakle, $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Budući da je $|a + b| = a + b$ ili $|a + b| = -(a + b)$, slijedi tvrdnja.

2. Koristeći 1. dobivamo: $|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$
   pa je
   $$|u| - |v| \leq |u - v|. \tag{1.10}$$
   Isto tako, $|v| = |v - u + u| \leq |v - u| + |u|$ pa je $|v| - |u| \leq |v - u| = |u - v|$.
   Dakle, $-(|u| - |v|) \leq |u - v|$. Iz ovoga i (1.10) slijedi 2.

□

Propozicija 1.5.12. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$, $y_n \to b$. Tada vrijedi:*

1. $-x_n \to -a$
2. $|x_n| \to |a|$
3. $x_n + y_n \to a + b$.

Dokaz. 1. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$.
No za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$|x_n - a| = |-(x_n - a)| = |(-x_n) - (-a)|$. Stoga je $|(-x_n) - (-a)| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$.
Dakle, vrijedi 1.

2. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$.
Prema lemi 1.2.1 za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$. Stoga, za $\forall n \geq n_0$ vrijedi $||x_n| - |a|| < \epsilon$.
Dakle, vrijedi 2.

3. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$.
Budući da $y_n \to b$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ za svaki $n \geq n_1$.
Neka je $M = n_0 + n_1$. Za svaki $n \geq M$ vrijedi: $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ i $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$
pa je
$$|x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon. \tag{1.11}$$
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|,$$
dakle,
$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \tag{1.12}$$
Iz (1.11) i (1.12) slijedi da za svaki $n \geq M$ vrijedi:
$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon.$$
Dakle, dokazali smo 3.

□

Neka je $a > 1$. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Odaberimo $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$. Znamo da je $a^r > 0$, a iz propozicije 1.3.6 slijedi $a^r < a^x$. Stoga je $a^x > 0$. Dakle, $a^x > 0$ za za svaki $x \in \mathbb{R}$.
Definirajmo funkciju $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ sa $\exp_a(x) = a^x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.
Za $\exp_a$ kažemo da je eksponencijalna funkcija s bazom a.
Cilj nam je dokazati da je $\exp_a$ neprekidna funkcija. Pri tome za funkciju $f : S \to T$, gdje su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ smatramo da je neprekidna (u točki x_0) ako je funkcija $g : S \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, za svaki $x \in S$ neprekidna (u točki x_0).

1.6 Omeđeni nizovi

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a donja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $a \leq x$.

Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako S ima bar jednu donju među.

Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je omeđen ako je S odozdo i odozgo omeđen.

Propozicija 1.6.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| \leq m$ za svaki $x \in S$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je S omeđen. Tada S ima i donju i gornju među, dakle, postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a \leq x$, za svaki $x \in S$ i $b \geq x$, za svaki $x \in S$. Iz prve nejednakosti slijedi $-x \leq -a$, $\forall x \in S$. Odaberimo $m \in \mathbb{R}$ takav da $-a \leq m$ i $b \leq m$. Za svaki $x \in S$ tada vrijedi $x \leq m$ i $-x \leq m$ pa je $|x| \leq m$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| \leq m$ za svaki $x \in S$. Vrijedi $x \leq |x|$ pa je $x \leq m$ za svaki $x \in S$. Vrijedi $-x \leq |x|$ pa je $-x \leq m$, tj. $-m \leq x$ za svaki $x \in S$. Dakle, $-m$ je donja, a m je gornja međa od S, stoga je S omeđen. □

Propozicija 1.6.2. *Neka su S i T omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ omeđen skup.*

Dokaz. Iz propozicije 1.6.1 slijedi da postoje $m, m' \in \mathbb{R}$ takvi da $|x| \leq m$ za svaki $x \in S$ i $|x| \leq m'$ za svaki $x \in T$. Odaberimo $m'' \in \mathbb{R}$ takav da $m'' \geq m$ i $m'' \geq m'$. Tada za svaki $x \in S \cup T$ vrijedi $|x| \leq m''$.
Dakle, $S \cup T$ je omeđen skup (prema propoziciji 1.6.1). □

Korolar 1.6.3. *Ako su $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi, onda je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ omeđen skup.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n.
Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $S_1, \ldots, S_{n+1}$ omeđeni skupovi. Tada je $S_1 \cup \ldots \cup S_{n+1} = (S_1 \cup \ldots \cup S_n) \cup S_{n+1}$.
Iz induktivne pretpostavke i propozicije 1.6.2 slijedi da je $S_1 \cup \ldots \cup S_{n+1}$ omeđen skup.
Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je omeđen ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.
Uočimo sljedeće: niz (x_n) realnih brojeva je omeđen ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $|x_n| \leq m$ za sve $n \in \mathbb{N}$. To slijedi iz propozicije 1.6.1.

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.

Napomena 1.6.4. *Ako je S omeđen skup i $T \subseteq S$, onda je T omeđen skup.*

Propozicija 1.6.5. *Neka je (x_n) konvergentan niz. Tada je (x_n) omeđen niz.*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan postoji a takav da $x_n \to a$.
Odaberimo neki $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi
$x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Iz ovoga slijedi: $\{x_n \mid n \geq n_0\} \subseteq \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ pa je $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen skup.
Vrijedi:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_{n_0}\}$$

pa iz korolara 1.6.3 slijedi da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ omeđen skup (svaki jednočlani skup je očito omeđen).
Vrijedi:

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_n \mid n \geq n_0\}$$

pa iz propozicije 1.6.2 slijedi da je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup. Niz (x_n) je omeđen. □

Primjer 1.6.6. *Neka je (x_n) niz prirodnih brojeva definiran sa $x_n = (-1)^n$.*
Tada je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ pa je (x_n) očito omeđen niz.
Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $\epsilon = 1$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$. Posebno imamo $|x_{n_0} - a| < \epsilon$ i $|x_{n_0+1} - a| < \epsilon$. Slijedi:

$$|x_{n_0} - x_{n_0+1}| = |x_{n_0} - a + a - x_{n_0+1}| \leq |x_{n_0} - a| + |a - x_{n_0+1}| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2.$$

Dakle, $|x_{n_0} - x_{n_0+1}| < 2$. Ovo je nemoguće jer je $x_{n_0} - x_{n_0+1} \in \{-2, 2\}$.
Zaključak: niz (x_n) nije konvergentan.

Propozicija 1.6.7. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.*

Dokaz. Budući da je (y_n) konvergentan niz, (y_n) je omeđen niz (propozicija 1.6.5). Stoga postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $|y_n| \leq m$ za svaki$n \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da je $m > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot b| =$$

$$= |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \leq |x_n - a|m + |a||y_n - b|.$$

Dakle,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq |x_n - a| \cdot m + |a| \cdot |y_n - b|, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Iz $x_n \to a$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2m}. \tag{1.14}$$

Iz $y_n \to b$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki$n \geq n_1$ vrijedi:

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2\,(|a| + 1)}. \tag{1.15}$$

Neka je $M = n_0 + n_1$. Tada za svaki $n \geq M$ vrijedi (1.14) i (1.15). Neka je $n \geq M$. Koristeći (1.13), (1.14) i (1.15) dobivamo:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq |x_n - a|m + |a||y_n - b| < \frac{\epsilon}{2m} \cdot m + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2\,(|a| + 1)} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{|a|}{|a| + 1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \epsilon$, za svaki $n \geq M$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.6.8. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da je $a \neq 0$. Tada postoji $M > 0$ takav da $\frac{1}{|x_n|} \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.12 vrijedi $|x_n| \to |a|$. Neka je $\epsilon = \frac{|a|}{2}$. Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki$n \geq n_0$ vrijedi $|x_n| \in \langle |a| - \epsilon, |a| + \epsilon \rangle$. Slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a| - \epsilon < |x_n|$. No $|a| - \epsilon = \frac{|a|}{2}$. Dakle, $\frac{|a|}{2} < |x_n|$, za svaki $n \geq n_0$. Iz ovoga slijedi

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}, \forall n \geq n_0.$$

Definirajmo

$$M = \max\left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \ldots, \frac{1}{|x_{n_0-1}|}, \frac{2}{|a|}\right\}.$$

Očito je $M > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Ako je $n < n_0$, onda je $\frac{1}{|x_n|} \leq M$ prema definiciji broja M. Ako je $n \geq n_0$, onda je $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$, a $\frac{2}{|a|} \leq M$ (prema definiciji od M) pa je $\frac{1}{|x_n|} < M$. Zaključujemo da je

$$\frac{1}{|x_n|} \leq M, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

□

Propozicija 1.6.9. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da je $a \neq 0$.*
Tada

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}.$$

Dokaz. Prema lemi 1.6.8 postoji $M > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{|x_n|} \leq M. \tag{1.16}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|x_n - a| < \frac{|a| \cdot \epsilon}{M}. \tag{1.17}$$

Neka je $n \geq n_0$. Tada vrijedi (1.16) i (1.17) pa dobivamo:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n| \cdot |a|} = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| \leq \frac{M}{|a|}|x_n - a| < \frac{M}{|a|} \cdot \frac{|a|\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Dakle,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Stoga

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}.$$

□

Poglavlje 2

Neprekidnost i eksponencijalna funkcija

2.1 Neprekidnost eksponencijalne funkcije

Lema 2.1.1. *Neka je* $\epsilon > 0$*. Tada za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$1 + n\epsilon \leq (1 + \epsilon)^n.$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je $1 + n\epsilon \leq (1 + \epsilon)^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.
Imamo:

$$(1+\epsilon)^{n+1} = (1+\epsilon)^n(1+\epsilon) \geq (1+n\epsilon)(1+\epsilon) = 1+n\epsilon+\epsilon+n\epsilon^2 = 1+(n+1)\epsilon+n\epsilon^2 > 1+(n+1)\epsilon.$$

Dakle,

$$(1 + \epsilon)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\epsilon.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Lema 2.1.2. *Neka je* $a > 1$ *te neka je* $M > 0$*. Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $a^n > M$ *za svaki* $n \geq n_0$*.*

Dokaz. Definirajmo $\epsilon = a - 1$. Tada je $\epsilon > 0$ te je $a = 1 + \epsilon$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n_0 > \frac{M - 1}{\epsilon}.$$

Neka je $n \geq n_0$. Tada je $n > \frac{M-1}{\epsilon}$. Slijedi da je $1 + n\epsilon > M$. Iz leme 2.1.1 slijedi

$$(1 + \epsilon)^n > M.$$

Dakle, $a^n > M$, za svaki $n \geq n_0$. □

Lema 2.1.3. *Neka je $a > 0$ te neka je $n \in \mathbb{N}$. Ako je $a > 1$, onda je $\sqrt[n]{a} > 1$. Ako je $a < 1$, onda je $\sqrt[n]{a} < 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a > 1$. Kada ne bi vrijedilo $\sqrt[n]{a} > 1$, tada bi $\sqrt[n]{a} \leq 1$ pa bi iz 1.2.2 slijedilo $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leq 1^n$, tj. $a \leq 1$.
Dakle, $\sqrt[n]{a} > 1$. □

Posve analogno, kao propoziciju1.3.4 dokazujemo sljedeću lemu.

Lema 2.1.4. *Neka su $x, y > 0$ te $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $x < y$.
Tada je*

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}.$$

Propozicija 2.1.5. *Neka je $a > 1$. Tada*

$$\sqrt[n]{a} \to 1.$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $1 + \epsilon > 1$ pa iz leme 2.1.2 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$a < (1 + \epsilon)^n.$$

Prema lemi 2.1.4 vrijedi

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon, \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Prema lemi 2.1.3 za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 < \sqrt[n]{a}$$

pa posebno vrijedi

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{a}.$$

Dakle, za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon,$$

tj.

$$\sqrt[n]{a} \in \langle 1 - \epsilon, 1 + \epsilon \rangle .$$

Time smo dokazali da

$$\sqrt[n]{a} \to 1.$$

□

Lema 2.1.6. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

te

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Dokaz. Označimo $x = \sqrt[n]{a \cdot b}$ i $y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Očito je $x > 0$ i $y > 0$.
Nadalje vrijedi $x^n = a \cdot b$ te $y^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$, pri čemu smo koristili propoziciju 1.2.9
Dakle, $x^n = y^n$. Iz teorema 1.2.6 slijedi $x = y$, tj.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Analogno dokazujemo da je

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

□

Korolar 2.1.7. *Neka je* $a \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < a < 1$. *Tada*

$$\sqrt[n]{a} \to 1.$$

Dokaz. Imamo $\frac{1}{a} > 1$ pa iz propozicije 2.1.5 slijedi $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$. Prema lemi 2.1.6 vrijedi

$$\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} \to 1,$$

tj.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1.$$

Iz propozicije 1.6.9 slijedi da

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \to \frac{1}{1},$$

tj.

$$\sqrt[n]{a} \to 1.$$

□

Lema 2.1.8. *Neka je $a > 1$ te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $r, q \in \mathbb{Q}$ takve da $r < x_0 < q$ i $q - r < \frac{1}{n}$ vrijedi*

$$a^q - a^r < \epsilon.$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Prema propoziciji 2.1.5 vrijedi $a^{\frac{1}{n}} \to 1$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}.$$

Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$. Imamo, dakle,

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da su $r, q \in \mathbb{Q}$ takvi da $r < x_0 < q$ i $q - r < \frac{1}{n}$. Imamo:

$$0 < q - r < \frac{1}{n}$$

pa je

$$a^0 < a^{q-r} < a^{\frac{1}{n}},$$

tj.

$$1 < a^{q-r} < a^{\frac{1}{n}}.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$0 < a^{q-r} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1.$$

S druge strane iz $r < x_0$ slijedi $a^r < a^{x_0}$. Množenjem zadnjih dviju nejednakosti dobivamo:

$$a^r \cdot (a^{q-r} - 1) < a^{x_0}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right). \tag{2.2}$$

Koristeći (2.1) dobivamo:

$$a^{x_0}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq a^{x_0}\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < a^{x_0} \cdot \frac{\epsilon}{a^{x_0}} = \epsilon.$$

Dakle, $a^{x_0}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \epsilon$ pa iz (2.2) slijedi

$$a^r \cdot (a^{q-r} - 1) < \epsilon. \tag{2.3}$$

S druge strane, koristeći propoziciju 1.3.2 dobivamo:

$$a^r \cdot (a^{q-r} - 1) = a^r \cdot a^{q-r} - a^r = a^q - a^r.$$

Stoga, prema (2.3) vrijedi:

$$a^q - a^r < \epsilon.$$

Zaključak: za svaki $r, q \in \mathbb{Q}$ takve da je $r < x_0 < q$ i $q - r < \frac{1}{n}$ vrijedi

$$a^q - a^r < \epsilon.$$

□

Napomena 2.1.9. *Ako su $a, u, v, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a < u < v < b$, onda je $v - u < b - a$.*

Teorem 2.1.10. *Neka je $a > 1$. Tada je $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $\epsilon > 0$. Prema lemi 2.1.8 postoji $n \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: ako su $r, q \in \mathbb{Q}$ takvi da je $r < x_0 < q$ i $q - r < \frac{1}{n}$, onda je

$$a^q - a^r < \epsilon. \tag{2.4}$$

Definirajmo $\delta = \frac{1}{2n}$. Neka je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Tvrdimo da je

$$a^x \in \langle a^{x_0} - \epsilon, a^{x_0} + \epsilon\rangle.$$

To je očito ako je $x = x_0$. Pretpostavimo stoga da $x \neq x_0$. Imamo dva slučaja.

1. slučaj: $x < x_0$.
   Imamo:

   $$x_0 - \delta < x < x_0 < x_0 + \delta.$$

   Odaberimo $r, q \in \mathbb{Q}$ takve da

   $$x_0 - \delta < r < x < x_0 < q < x_0 + \delta. \tag{2.5}$$

   Iz napomene2.1.9 slijedi da je

   $$q - r < (x_0 + \delta) - (x_0 - \delta) = 2\delta = \frac{1}{n}.$$

   Dakle, $q - r < \frac{1}{n}$ pa prema (2.4) vrijedi

   $$a^q - a^r < \epsilon.$$

   Iz (2.5) i propozicije 1.4.1 slijedi

   $$a^r < a^x < a^{x_0} < a^q$$

pa napomena povlači da je

$$a^{x_0} - a^x < a^q - a^r.$$

Stoga je

$$a^{x_0} - a^x < \epsilon.$$

Očito je

$$0 < a^{x_0} - a^x$$

pa je

$$|a^{x_0} - a^x| < \epsilon,$$

tj.

$$a^x \in \langle a^{x_0} - \epsilon, a^{x_0} + \epsilon \rangle .$$

2. slučaj: $x_0 < x$.
   Analogno s 1. slučajem dobivamo

$$a^x \in \langle a^{x_0} - \epsilon, a^{x_0} + \epsilon \rangle .$$

Time smo dokazali da za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ vrijedi

$$a^x \in \langle a^{x_0} - \epsilon, a^{x_0} + \epsilon \rangle .$$

Drugim riječima, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi implikacija:

$$\text{ako je} x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{, onda je} \exp_a(x) \in \left\langle \exp_a(x_0) - \epsilon, \exp_a(x_0) + \epsilon \right\rangle .$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.2 Međuvrijednosti neprekidnih funkcija

Propozicija 2.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je L gornja međa skupa S. Tada je L supremum od S ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $L - \epsilon < x$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je L supremum skupa S. Neka je $\epsilon > 0$. Pretpostavimo da ne postoji $x \in S$ takav da $L - \epsilon < x$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $L - \epsilon \geq x$. Ovo znači da je $L - \epsilon$ gornja međa skupa S. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je L supremum skupa S. Stoga postoji $x \in S$ takav da $L - \epsilon < x$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da $L - \epsilon < x$. Tvrdimo da je L supremum skupa S. Znamo da je L gornja međa od S, stoga je dovoljno dokazati da je $L \leq M$ za svaku gornju među M od S. Neka je M gornja međa od S. Pretpostavimo da ne vrijedi $L \leq M$. Tada je $M < L$. Definirajmo $\epsilon = L - M$. Vrijedi $\epsilon > 0$ i $L - \epsilon = M$. Prema pretpostavci postoji $x \in S$ takav da $L - \epsilon < x$. Slijedi $M < x$, što je u kontradikciji s činjenicom da je M gornja međa od S.
Prema tome, $L \leq M$ i time smo dokazali da je L supremum od S. □

Lema 2.2.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u x_0.*

1. *Pretpostavimo da je $f(x_0) > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ sa svojstvom $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) > 0$.*

2. *Pretpostavimo da je $f(x_0) < 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ sa svojstvom $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) < 0$.*

Dokaz.

1. Označimo $\epsilon = f(x_0)$. Tada je $\epsilon > 0$ pa prema definiciji neprekidnosti funkcije u točki postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle\,.$$

Uvrštavajući $\epsilon = f(x_0)$ dobivamo da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle 0, 2f(x_0)\rangle\,.$$

Time je prva tvrdnja dokazana.

2. Dokazuje se analogno, s tim da uzmemo $\epsilon = -f(x_0)$.

□

Teorem 2.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b$ te da je $[a, b] \subseteq S$.Pretpostavimo da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da $f(x_0) = 0$.*

Dokaz. Definirajmo $T = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$. Imamo $a \in T$, dakle $T \neq \emptyset$.
Uočimo da je b gornja međa skupa T. Prema propoziciji 1.3.8 T ima supremum. Neka je $x_0 = \sup T$. Zbog $a \in T$ vrijedi $a \leq x_0$. Iz činjenice da je b gornja međa slijedi $x_0 \leq b$.
Dakle, $a \leq x_0 \leq b$, tj. $x_0 \in [a, b]$.
Tvrdimo $f(x_0) = 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada imamo 2 slučaja: $f(x_0) > 0$ i $f(x_0) < 0$.

1. slučaj: $f(x_0) > 0$.
Prema lemi 2.2.2 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ sa svojstvom $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) > 0$. Nadalje, prema propoziciji 2.2.1 postoji $x \in T$ takav da $x_0 - \delta < x$. Očito je $x \leq x_0$ pa imamo $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Nadalje, očito je $T \subseteq [a, b] \subseteq S$ pa je $x \in S$. Zaključujemo da je $f(x) > 0$. S druge strane iz $x \in T$ slijedi $f(x) < 0$. Kontradikcija.

2. slučaj: $f(x_0) < 0$.
Prema lemi 2.2.2 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ sa svojstvom $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) < 0$. Iz $f(x_0) < 0$ i $f(b) > 0$ slijedi $x_0 \neq b$ pa je $x_0 < b$.
Odaberimo $x_1 \in \mathbb{R}$ takav da $x_0 < x_1 < b$. Odaberimo $x_2 \in \mathbb{R}$ takav da $x_0 < x_2 < x_0+\delta$.

Neka je $x = \min\{x_1, x_2\}$. Očito je $x_0 < x$. Nadalje, vrijedi: $x < b$ i $x < x_0 + \delta$. Kako je $x_0 < x$ i $x < b$ vrijedi $x \in [a, b]$, tj. $x \in S$. Iz $x_0 < x$ i $x < x_0 + \delta$ slijedi $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ pa je $f(x) < 0$. Stoga je $x \in T$, no to je u kontradikciji s činjenicom da $x_0 = \sup T$ i $x_0 < x$.

Oba slučaja vode na kontradikciju pa zaključujemo da je $f(x_0) = 0$. □

Propozicija 2.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u x_0. Tada je funkcija $-f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Za svaki $x \in S$ očito vrijedi

$$|f(x) - f(x_0)| = |(-f)(x) - (-f)(x_0)|\,.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takva da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Dakle, za svaki$x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |(-f)(x) - (-f)(x_0)| < \epsilon.$$

Prema tome, $-f$ je neprekidna u x_0. □

Korolar 2.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je $-f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

Korolar 2.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b$ te da je $[a, b] \subseteq S$. Pretpostavimo da je $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da $f(x_0) = 0$.*

Dokaz. Prema korolaru 2.2.5 funkcija $-f : S \to \mathbb{R}$ je neprekidna. Očito je $-f(a) < 0$ i $-f(b) > 0$, tj. $(-f)(a) < 0$ i $(-f)(b) > 0$. Prema teoremu 2.2.3 postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da je $(-f)(x_0) = 0$. Dakle, $-f(x_0) = 0$ pa je $f(x_0) = 0$. □

Propozicija 2.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $x_0 \in S$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki x_0. Tada je funkcija $f + g : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Budući da je g neprekidna u x_0 postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada je $\delta > 0$. Pretpostavimo da je $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$. Tada je $|x - x_0| < \delta_1$ i $|x - x_0| < \delta_2$ pa prema (2.6) i (2.7) vrijedi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

i

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Imamo:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| =$$
$$= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \epsilon.$$

Time smo dokazali da za sve $x \in S$ vrijedi implikacija:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \epsilon.$$

Zaključujemo da je funkcija $f + g$ neprekidna u x_0. □

Korolar 2.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada je funkcija $f + g\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna.*

Korolar 2.2.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da je $[a, b] \subseteq S$. Pretpostavimo da je $y \in R$ takav da je $f(a) < y < f(b)$ ili $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(a) < y < f(b)$.
Definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$. Funkcija $h\colon S \to \mathbb{R}$ definirana sa $h(x) = -y$ je neprekidna prema primjeru. Tada je zbog $g = f + h$ i g neprekidna prema korolaru 2.2.8.
Iz definicije od g očito je da je $g(a) < 0$ i $g(b) > 0$. Prema teoremu 2.2.3 postoji $x \in [a, b]$ takav da je $g(x) = 0$. Dakle, $f(x) - y = 0$, tj. $f(x) = y$.
Pretpostavimo sada $f(a) > y > f(b)$. Analogno kao i u prethodnom slučaju, koristeći korolar 2.2.6, dobivamo da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$. □

2.3 Bijektivnost eksponencijalne funkcije

Lema 2.3.1. *Neka je $a > 1$ te neka je $y \in \langle 0, +\infty\rangle$. Tada postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_1 < x_2$ te da je $a^{x_1} < y < a^{x_2}$.*

Dokaz. Prema lemi 2.1.2 postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $y < a^n$. Nadalje, prema istoj lemi postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{y} < a^m$, iz čega slijedi $\frac{1}{a^m} < y$, tj. $a^{-m} < y$.
Stoga za $x_1 = -m$ i $x_2 = n$ vrijedi $a^{x_1} < y < a^{x_2}$ i $x_1 < x_2$. □

Teorem 2.3.2. *Neka je $a > 1$. Tada je funkcija $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ bijekcija.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Tada je $x_1 < x_2$ ili $x_2 < x_1$.
Ako je $x_1 < x_2$, onda prema propoziciji 1.4.1 vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$, a ako je $x_2 < x_1$, onda prema istoj propoziciji vrijedi $a^{x_2} < a^{x_1}$.
U svakom slučaju $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, tj. $\exp_a(x_1) \neq \exp_a(x_2)$. Prema tome $\exp_a$ je injekcija.

Dokažimo sada da je $\exp_a$ surjekcija. Funkcija $\exp_a$ je neprekidna prema teoremu 2.1.10. To znači da je funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp_a(x)$ neprekidna. Neka je $y \in \langle 0, +\infty \rangle$. Prema lemi 2.3.1 postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_1 < x_2$ te da je $a^{x_1} < y < a^{x_2}$. Dakle, $f(x_1) < y < f(x_2)$. Prema korolaru 2.2.9 postoji $x \in [x_1, x_2]$ takav da je $f(x) = y$.
Dakle, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\exp_a(x) = y$.
Time smo dokazali da je $\exp_a$ surjekcija. □

2.4 Limes i derivacija funkcije

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f \colon S \to T$funkcija te $x_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L **limes funkcije** f u x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq x_0$ vrijedi sljedeća implikacija

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle\,, \text{ onda je } f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle\,. \tag{2.8}$$

Primjer 2.4.1. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, neka je $c \in T$ te neka $f \colon S \to T$ funkcija definirana sa $f(x) = c$ za svaki $x \in S$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je c limes od f u x_0. Naime, za svaki $\epsilon > 0$ i svaki $\delta > 0$ te svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi implikacija* (2.8) *($L = c$) jer je $f(x) = c$ za svaki $x \in S$.*

Propozicija 2.4.2. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f \colon S \to T$ funkcija te $x_0 \in \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes od f u x_0 te da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da $x_n \to x_0$. Tada $f(x_n) \to L$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle\,. \tag{2.9}$$

Znamo da $x_n \to x_0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi:

$$x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \,.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Imamo $x_n \in S$, $x_n \neq x_0$ i $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ pa iz (2.9) slijedi da je $f(x_n) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$.
Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, vrijedi $f(x_n) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$.
Time smo dokazali da $f(x_n) \to L$. □

Primjer 2.4.3. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Tvrdimo da ne postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je L limes od f u 0. Pretpostavimo da takav L postoji.
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 1.5.3 vrijedi da $x_n \to 0$. Očito je $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz prethodne propozicije slijedi $f(x_n) \to L$. No $f(x_n) = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz primjera 1.5.1 slijedi $f(x_n) \to 1$. Iz propozicije1.5.9 slijedi da je $L = 1$.
Prema propoziciji 1.5.12 vrijedi $-x_n \to -0$, tj. $-x_n \to 0$. Očito je $-x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa propozicija 2.4.2 povlači da $f(-x_n) \to L$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(-x_n) = -1$. Stoga $f(-x_n) \to -1$ pa propozicija 1.5.9 povlači da je $L = -1$. Kontradikcija.
Prema tome, ne postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da f ima limes L u 0.

Primjer 2.4.4. *Neka je $f\colon \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Neka je $L \in \mathbb{R}$ bilo koji realni broj. Tada je L limes od f u točki 1.*
Dokažimo to. Neka je $\epsilon > 0$. Definirajmo $\delta = 1$. Tada je $\langle 1 - \delta, 1 + \delta \rangle = \langle 0, 2 \rangle$ pa ne postoji $x \in \langle -\infty, 0]$ takav da je $x \in \langle 1 - \delta, 1 + \delta \rangle$. Stoga za svaki $x \in \langle -\infty, 0] \backslash\{1\}$ (trivijalno) vrijedi sljedeća implikacija:

$$x \in \langle 1 - \delta, 1 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle \,.$$

Dakle, L je limes od f u točki 1.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $x_0 \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x_0 **gomilište skupa** S ako za svaki $r > 0$ postoji $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \cap S$ takav da je $x \neq x_0$.

Primjer 2.4.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tada je a gomilište skupa $\langle a, b \rangle$. Naime, neka je $r > 0$. Vrijedi $a < \min\{a + r, b\}$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da $a < x < \min\{a + r, b\}$. Slijedi, $a < x < a + r$ i $a < x < b$ pa je $x \in \langle a - r, a + r \rangle \cap \langle a, b \rangle$. Očito je $x \neq a$. Dakle, za svaki $r > 0$ postoji $x \in \langle a - r, x + a \rangle \cap \langle a, b \rangle$ takav da je $x \neq a$. Prema tome, a je gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.*
Na sličan način vidimo da je b gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.

Propozicija 2.4.6. *Neka je x_0 gomilište skupa S te neka je $T \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $S \subseteq T$. Tada je x_0 gomilište skupa T.*

Dokaz. Neka je $r > 0$. Tada postoji $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap S$ takav da je $x \neq x_0$. Zbog $S \subseteq T$ vrijedi $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap T$.
Dakle, za svaki $r > 0$ postoji $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap T$ takav da je $x \neq x_0$. □

Primjer 2.4.7. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je a gomilište skupa $[a, b\rangle$. To slijedi iz propozicije2.4.6 i primjera2.4.5. Također vrijedi da je a gomilište skupa $[a, b]$.*
Neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Tada je x_0 gomilište skupa $\langle a, b\rangle$. Naime, prema primjeru2.4.5 imamo da je x_0 gomilište od $\langle x_0, b\rangle$, a vrijedi $\langle x_0, b\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ pa iz propozicije2.4.6 slijedi da je x_0 gomilište od $\langle a, b\rangle$.

Primjer 2.4.8. 1 *nije gomilište skupa* $\langle -\infty, 0]$.
To vidimo na sljedeći način, neka je $r = 0.1$. Očito je $r > 0$, a vrijedi
$\langle 1 - r, 1 + r\rangle = \langle 0.9, 1.1\rangle$ *pa je jasno da je* $\langle 1 - r, 1 + r\rangle \cap \langle -\infty, 0] = \emptyset$.

Propozicija 2.4.9. *Neka je x_0 gomilište skupa S. Tada postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S\setminus\{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada prema definiciji gomilišta postoji

$$x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right\rangle \cap S$$

takav da je $x_n \neq x_0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $x_n \in S\setminus\{x_0\}$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right\rangle,$$

tj.

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leq |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}.$$

Iz propozicije1.5.4 i primjera1.5.3 slijedi da $|x_n - x_0| \to 0$. Sada iz propozicije1.5.6 slijedi da $x_n \to x_0$. □

Propozicija 2.4.10. *Pretpostavimo da je x_0 gomilište skupa S. Neka je $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f\colon S \to T$ funkcija. Nadalje, pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je L_1 limes od f u x_0 te da je L_2 limes od f u x_0. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Prema propoziciji2.4.9 postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in \mathbb{R} \backslash \{x_0\}$ te takav da $x_n \to x_0$. Iz propozicije2.4.2 slijedi da $f(x_n) \to L_1$ i $f(x_n) \to L_2$. Iz propozicije1.5.9 slijedi da je $L_1 = L_2$. □

Teorem 2.4.11. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $f: S \to T$ funkcija te neka su $x_0, L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \backslash \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $f(x_n) \to L$. Tada je L limes funkcije f u x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S \backslash \{x_0\}$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \ \text{i} f(x) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle .$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$ pa postoji $x_n \in S \backslash \{x_0\}$ takav da je

$$x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle \ \text{i} \ f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle .$$

Sada imamo niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S \backslash \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle \ \text{i} f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle .$$

Analogno kao u propoziciji2.4.9 zaključujemo da $x_n \to x_0$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to L$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da $f(x_n) \notin \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Zaključak: L je limes funkcije f. □

Napomena 2.4.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi sljedeće: x_0 je gomilište od S ako i samo ako je x_0 gomilište od $S \backslash \{x_0\}$.*
To je jasno iz same definicije gomilišta skupa.

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f: S \to T$. Pretpostavimo da je x_0 gomilište skupa S. Neka je $F: S \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}) \tag{2.10}$$

za svaki $x \in S \backslash \{x_0\}$. Pretpostavimo da je L limes funkcije F u x_0. Tada za L kažemo da je derivacija funkcije f u x_0.

Pretpostavimo da su L_1 i L_2 derivacije funkcije f u x_0. Tada su L_1 i L_2 limesi funkcije F u x_0, domena od F je $S\setminus\{x_0\}$, a x_0 je gomilište od $S\setminus\{x_0\}$ prema napomeni2.4.12. Iz propozicije2.4.10 slijedi da je $L_1 = L_2$. Dakle, derivacija funkcije f u točki x_0, ako postoji, je jedinstvena i označavamo je sa $f'(x_0)$.

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f\colon S \to T$. Za funkciju f kažemo da je **derivabilna** u x_0 ako postoji derivacija od f u x_0.

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te $f\colon S \to T$. Za funkciju f kažemo da je derivabilna ako je f derivabilna u x_0 za svaki $x_0 \in S$. U tom slučaju funkciju $S \to \mathbb{R}$ koja svakom $x \in S$ pridružuje derivaciju od f u x, tj. $f'(x)$ nazivamo **derivacija funkcije** f i označavamo sa f'.

Propozicija 2.4.13. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, neka je $x_0 \in S$ te $f\colon S \to T$. Pretpostavimo da je x_0 gomilište skupa S te da je $L \in \mathbb{R}$ broj sa sljedećim svojstvom:*
Za svaki niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S\setminus\{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \to L.$$

Tada je L derivacija od f u x_0.

Dokaz. Neka je $F\colon S\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa (2.10) za svaki $x \in S\setminus\{x_0\}$. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in (S\setminus\{x_0\})\setminus\{x_0\}$ (tj. $x_n \in S\setminus\{x_0\}$) za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Prema pretpostavci propozicije vrijedi $F(x_n) \to L$. Prema teoremu2.4.11 je L limes funkcije F u x_0.
Znači da je L derivacija od f u x_0. □

2.5 Eksponencijalni zakon

Lema 2.5.1. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz (q_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $q_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $q_n \to x$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji racionalan broj q_n takav da je

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Na taj način dobili smo niz (q_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $q_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da je $q_n \in \left\langle x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Slijedi:

$$|x - q_n| < \frac{1}{n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji1.5.4 slijedi da $|x - q_n| \to 0$, a iz propozicije1.5.6 slijedi $q_n \to x$. □

Teorem 2.5.2 (Eksponencijalni zakon)**.** *Neka je $a > 1$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Dokaz. Prema lemi2.5.1 postoje nizovi (q_n) i (p_n) u $\mathbb{R}$ takvi da je $q_n \in \mathbb{Q}$, $p_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takvi da $q_n \to x$ i $p_n \to y$. Prema teoremu2.1.10 funkcija $exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je neprekidna pa iz propozicije1.5.2 slijedi da

$$exp_a(q_n) \to exp_a(x),$$

tj.

$$a^{q_n} \to a^x.$$

Analogno zaključujemo da

$$a^{p_n} \to a^y.$$

Dakle, $a^{q_n} \to a^y$, $a^{p_n} \to a^y$ pa iz propozicije1.6.7 slijedi da $a^{q_n} \cdot a^{p_n} \to a^x \cdot a^y$. No za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a^{q_n} \cdot a^{p_n} = a^{q_n+p_n}$ (propozicija1.3.2).
Dakle,

$$a^{q_n+p_n} \to a^x \cdot a^y. \tag{2.11}$$

Iz $q_n \to x$ i $p_n \to y$ te iz propozicije 1.5.12 slijedi

$$q_n + p_n \to x + y$$

pa neprekidnost funkcije exp_a i propozicija 1.5.2 povlače da

$$a^{q_n+p_n} \to a^{x+y}. \tag{2.12}$$

Iz (2.11) i (2.12) i propozicije 1.5.9 slijedi da je $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. □

2.6 Eulerov broj

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je rastući ako je $x_n \leq x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.6.1. *Neka je (x_n) rastući niz realnih brojeva. Tada za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leq m$ vrijedi $x_n \leq x_m$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po $m \geq n$ da je $x_n \leq x_m$.
Za $m = n$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $m \geq n$ vrijedi $x_n \leq x_m$.
Budući da je niz rastući, imamo $x_m \leq x_{m+1}$ pa slijedi $x_n \leq x_{m+1}$. Time smo dokazali tvrdnju propozicije. □

Propozicija 2.6.2. *Neka je (x_n) rastući niz realnih brojeva. Pretpostavimo da je L supremum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to L$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Prema propoziciji2.2.1 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $L - \epsilon < x_{n_0}$.
Neka je $n \geq n_0$. Iz propozicije1.3.6 slijedi $x_{n_0} \leq x_n$. S druge strane, očito je $x_n \leq L$ stoga imamo

$$L - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \epsilon$$

pa je

$$x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle \,.$$

Prema tome, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$.
Time smo dokazali da $x_n \to L$. □

Korolar 2.6.3. *Neka je (x_n) omeđen i rastući niz u $\mathbb{R}$. Tada je (x_n) konvergentan niz.*

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz, skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen. Prema propoziciji1.3.8 postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je L supremum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Iz propozicije2.6.2 slijedi da $x_n \to L$. Dakle, (x_n) je konvergentan niz. □

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo broj $n!$ induktivno:

$$1! = 1$$

$$(n + 1)! = (n + 1)n!$$

Dakle, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, itd.

Neka je (s_k) niz realnih brojeva definiran sa:

$$s_k = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!}.$$

Očito je (s_k) rastući niz.

Lema 2.6.4. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$2^{k-1} \leq k! \tag{2.13}$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom.
Za $k = 1$ (2.13) očito vrijedi.
Pretpostavimo da (2.13) vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.
Iz (2.13) i $2 \leq k + 1$ slijedi

$$2 \cdot 2^{k-1} \leq (k + 1)k!,$$

tj.

$$2^{(k+1)-1} \leq (k+1)!.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $k = 1$ ta ako vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, onda vrijedi i za $k + 1 \in \mathbb{N}$. Prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$. □

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada prema lemi 2.6.4 za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$ vrijedi

$$\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Stoga je

$$s_k = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \leq 1 + \frac{1}{2^{1-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2\left(\frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) =$$

$$= 1 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) = 1 + 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) = 1 + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) - 2 =$$

$$= -1 + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \leq -1 + 4 \cdot 1 = 3.$$

Dakle, $s_k \leq 3$ za svaki $k \leq \mathbb{N}$. Očito je $2 \leq s_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome niz (s_k) je omeđen.

Iz korolara2.6.3 slijedi da je niz (s_k) konvergentan. Limes tog niza označavamo sa e i nazivamo **Eulerov broj**.

Iz dokaza korolara2.6.3 vidimo da je e supremum skupa $\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
Posebno za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo $2 \leq s_k \leq e$, dakle,

$$2 \leq e.$$

S druge strane, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $s_k \leq 3$, dakle, 3 je gornja međa skupa $\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, a e je najmanja gornja međa tog skupa pa je

$$e \leq 3.$$

Dakle,

$$2 \leq e \leq 3.$$

Posebno, $e > 1$. Funkciju $exp_e \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ označavamo sa exp i nazivamo **eksponencijalna funkcija**.

Može se pokazati [3] da niz

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

teži prema e. Čak, štoviše, vrijedi sljedeći teorem, za dokaz vidjeti [3].

Teorem 2.6.5. *Neka je* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *niz u* $\mathbb{R}$ *takav da je* $n_k \in \mathbb{N}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te takav da niz* $\left(\frac{1}{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *teži prema* 0.

1. *Niz* $\left(\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *teži prema e.*

2. *Ako je* $n_k \geq 2$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$*, onda niz* $\left(\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{-n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *teži prema* 0.

2.7 Logaritamska funkcija

Neka je $a > 1$. Znamo da je funkcija $exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ bijekcija (teorem2.3.2). Inverznu funkciju te funkcije označavamo sa log_a i nazivamo **logaritamska funkcija** s bazom a. Dakle,

$$log_a \colon \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}, log_a(a^x) = x, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

$$a^{log_a y} = y, \text{ za svaki } y \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f \colon S \to T$ funkcija. Za f kažemo da je rastuća funkcija ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.
Za funkciju f kažemo da je padajuća ako za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$.

Propozicija 2.7.1. *Neka je* $f \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ *neprekidna dunkcija. Pretpostavimo da je* f *rastuća te da je* f *bijekcija. Tada je* $f^{-1} \colon \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Nadalje,* f^{-1} *je rastuća funkcija.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$ takvi da je $y_1 < y_2$. Tvrdimo da je

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Pretpostavimo suprotno. Tada je $f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1)$, no $f^{-1}(y_2) \neq f^{-1}(y_1)$ (jer je $y_1 \neq y_2$, f^{-1} je injekcija) pa je $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$.
Iz činjenice da je f rastuća funkcija slijedi da je

$$f\left(f^{-1}(y_2)\right) < f\left(f^{-1}(y_1)\right),$$

tj.

$$y_2 < y_1.$$

Kontradikcija.
Dakle,

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Prema tome, f^{-1} je rastuća funkcija.
Neka je $y_0 \in \langle 0, +\infty \rangle$. Neka je $\epsilon > 0$. Označimo

$$x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Označimo

$$y_1 = f(x_0 - \epsilon), y_2 = f(x_0 + \epsilon).$$

Imamo

$$x_0 - \epsilon < x_0 < x_0 + \epsilon$$

pa iz činjenice da je f rastuća funkcija slijedi da je

$$f(x_0) - \epsilon < f(x_0) < f(x_0 + \epsilon),$$

tj.

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Neka je

$$\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0.\}$$

Tada je $\delta > 0$. Iz

$$\delta \leq y_0 - y_1 \text{ slijedi } y_1 \leq y_0 - \delta,$$

a iz

$$\delta \leq y_2 - y_0 \text{ slijedi } y_0 + \delta \leq y_2.$$

Dakle,

$$y_1 \leq y_0 - \delta < y_0 + \delta \leq y_2$$

pa je

$$\langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle \subseteq \langle y_1, y_2 \rangle .$$

Neka je $y \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta\rangle$. Tada je $y \in \langle y_1, y_2\rangle$, tj. $y_1 < y < y_2$.
Tvrdimo sljedeće:

$$f^{-1}(y) \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle .$$

Pretpostavimo suprotno.
Imamo dva slučaja.

1. $f^{-1}(y) \leq x_0 - \epsilon$.
   Iz činjenice da je f rastuća funkcija slijedi da je $f\left(f^{-1}(y)\right) \leq f(x - \epsilon)$, tj. $y \leq y_1$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $y_1 < y$.

2. $x_0 + \epsilon \leq f^{-1}(y)$.
   Tada je $f(x_0 + \epsilon) \leq y$ pa je $y_2 \leq y$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $y < y_2$.

Zaključujemo da je

$$f^{-1}(y) \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle .$$

Dakle, za svaki y takav da je $y \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f^{-1}(y) \in \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\rangle$, tj.

$$f^{-1}(y) \in \left\langle f^{-1}(y_0) - \epsilon, f^{-1}(y_0) + \epsilon \right\rangle .$$

Zaključak: funkcija f^{-1} je neprekidna u točki y_0. Dakle, f^{-1} je neprekidna funkcija. □

Korolar 2.7.2. *Neka je $a > 1$. Funkcija $log_a \colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je rastuća i neprekidna.*

Dokaz. Funkcija $exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je rastuća (propozicija1.4.1) i neprekidna (teorem2.1.10) pa iz $log_a = exp_a^{-1}$ i propozicije2.7.1 slijedi tvrdnja korolara. □

Poglavlje 3

Derivabilnost eksponencijalne funkcije

3.1 Eksponencijalna funkcija s bazom manjom od 1

Propozicija 3.1.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Neka je $r \in \mathbb{Q}$. Tada je $a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$.*

Dokaz. Imamo $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.Koristeći lemu2.1.6 i propoziciju1.2.8 dobivamo:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{-m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{(-1)m} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^{-1}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = a^{\frac{m}{n}} = a^r.$$

Dakle,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = a^r.$$

□

Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < a < 1$. Neka je $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Uočimo da je $\frac{1}{a} > 1$, definirajmo $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. Na ovaj način imamo definirano za a^x za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

naime, za $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ po definiciji, a za $x \in \mathbb{Q}$ prema propoziciji3.1.1.

Neka je $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$. Uočimo da je $a^x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.
Definirajmo funkciju $exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ sa

$$exp_a(x) = a^x.$$

Za exp_a kažemo da je **eksponencijalna funkcija** s bazom a.

Propozicija 3.1.2. *Neka su $S, T, V \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to V$. Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ takav da je f neprekidna u x_0 te da je g neprekidna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f\colon S \to V$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je g neprekidna u točki $f(x_0)$ postoji $\delta' > 0$ takav da za svaki $y \in T$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$y \in \langle f(x_0) - \delta', f(x_0) + \delta' \rangle \Rightarrow g(y) \in \langle g(f(x_0)) - \epsilon, g(f(x_0)) + \epsilon \rangle . \tag{3.1}$$

Nadalje, budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \delta', f(x_0) + \delta' \rangle . \tag{3.2}$$

Neka je $x \in S$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle .$$

Tada iz (3.2) slijedi da je

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \delta', f(x_0) + \delta' \rangle$$

pa iz (3.1) slijedi da je

$$g(f(x)) \in \langle g(f(x_0)) - \epsilon, g(f(x_0)) + \epsilon \rangle .$$

Dakle, za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow (g \circ f)(x) \in \langle (g \circ f)(x_0) - \epsilon, (g \circ f)(x_0) + \epsilon \rangle .$$

Time smo dokazali da je funkcija $g \circ f$ neprekidna u x_0. □

Korolar 3.1.3. *Neka su $S, T, V \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to V$. Pretpostavimo da su f i g neprekidne funkcije. Tada je $g \circ f$ neprekida funkcija.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz propozicije3.1.2. □

Primjer 3.1.4. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = -x$. Dokažimo da je f neprekidna funkcija.*
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $\epsilon > 0$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$|f(x) - f(x_0)| = |-x - (-x_0)| = |-x + x_0| = |x - x_0|.$$

Dakle, $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$.
Definirajmo $\delta = \epsilon$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi implikacija:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon,$$

tj.

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0.
Zaključak: funkcija f je neprekidna.

Propozicija 3.1.5. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f \colon S \to T$ i $g \colon T \to V$ funkcije.*

1. *Pretpostavimo da su f i g injekcije. Tada je $g \circ f$ injekcija.*

2. *Pretpostavimo da su f i g surjekcije. Tada je $g \circ f$ surjekcija.*

3. *Pretpostavimo da su f i g bijekcije. Tada je $g \circ f$ bijekcija.*

Dokaz.

1. Neka su $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Tada je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (jer je f injekcija) te je $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (jer je g injekcija), tj.

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2).$$

   Dakle, $g \circ f$ je injekcija.

2. Neka je $z \in V$. Tada postoji $y \in T$ takav da je $z = g(y)$ te nadalje postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$. Dakle,

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

   Dakle, $g \circ f$ je surjekcija.

3. Ovo slijedi iz 1. i 2.

□

Teorem 3.1.6. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < a < 1$. Tada je funkcija $exp_a \colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ padajuća, neprekidna i bijektivna.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$.
Tada je $-x_2 < -x_1$ pa je

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_2} < \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_1} \text{ (propozicija1.4.1).}$$

Dakle, $a^{x_2} < a^{x_1}$. Dakle, za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $exp_a(x_1) > exp_a(x_2)$.
Prema tome exp_a je padajuća funkcija.
Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

tj.

$$exp_a(x) = exp_{\frac{1}{a}}(-x). \tag{3.3}$$

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = -x$. Iz (3.3) slijedi da

$$exp_a(x) = exp_{\frac{1}{a}}(f(x)) \Leftrightarrow exp_a(x) = (exp_{\frac{1}{a}} \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prema tome $exp_a = exp_{\frac{1}{a}} \circ f$.
Iz teorema2.1.10, primjera3.1.4 i korolara3.1.3 slijedi da je exp_a neprekidna funkcija. Funkcija f je očito bijekcija, a funkcija $exp_{\frac{1}{a}}$ je bijekcija prema teoremu2.3.2. Iz propozicije3.1.5 slijedi da je exp_a bijekcija. □

Propozicija 3.1.7. *Neka je $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y. \tag{3.4}$$

Dokaz. Koristeći teorem2.5.2 imamo:

$$a^{x+y} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(x+y)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x+(-y)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-y}.$$

Dakle, (3.4) vrijedi.

□

3.2 Logaritamska funkcija s bazom manjom od 1

Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < a < 1$. Prema teoremu3.1.6 $exp_a\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je bijekcija. Inverznu funkciju te funkcije označavamo sa log_a i nazivamo **logaritamska funkcija** s bazom a. Dakle,

$$log_a\colon \langle 0, +\infty\rangle, log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

i

$$a^{log_a x} = x, \forall x \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

Propozicija 3.2.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$. Tada za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi*

$$log_a x = -log_{\frac{1}{a}} x.$$

Dokaz. Označimo

$$r = log_a x. \tag{3.5}$$

Slijedi

$$a^r = a^{log_a x},$$

tj.

$$a^r = x.$$

Dakle,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = x$$

pa je

$$log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} = log_{\frac{1}{a}}x,$$

tj.

$$-r = log_{\frac{1}{a}}x. \tag{3.6}$$

Iz (3.5) i (3.6) slijedi tvrdnja propozicije. □

Korolar 3.2.2. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < a < 1$. Tada je funkcija $log_a \colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna.*

Dokaz. Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = -x$. Neka je $x \in \langle 0, +\infty\rangle$. Tada je prema propoziciji3.2.1

$$log_a x = -log_{\frac{1}{a}}x,$$

tj.

$$log_a x = f\left(Log_{\frac{1}{a}}x\right).$$

Zaključujemo da je

$$log_a = f \circ log_{\frac{1}{a}}.$$

Iz korolara2.7.2, primjera3.1.4 i korolar3.1.3 slijedi da je log_a neprekidna funkcija. □

Propozicija 3.2.3. *Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Neka su $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$. Tada je*

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y.$$

Dokaz. Označimo $u = log_a(x \cdot y)$ i $v = log_a x + log_a y$.
Imamo,

$$a^u = a^{log_a(x \cdot y)} = x \cdot y.$$

Dakle,

$$a^u = x \cdot y. \tag{3.7}$$

S druge strane vrijedi

$$a^v = a^{log_a x + log_a y} = a^{log_a x} \cdot a^{log_a y} = x \cdot y.$$

Dakle,

$$a^v = x \cdot y. \tag{3.8}$$

Iz (3.7) i (3.8) slijedi $a^u = a^v$. Iz činjenice da je exp_a injektivna funkcija (teorem2.3.2 i teorem3.1.6) slijedi da je $u = v$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 3.2.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada*

$$c \cdot x_n \to c \cdot a.$$

Dokaz. Definirajmo niz realnih brojeva (y_n) sa $y_n = c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema primjeru1.5.1 vrijedi $y_n \to c$. Iz propozicije1.6.7 slijedi da je

$$y_n \cdot x_n \to c \cdot a.$$

Dakle,

$$c \cdot x_n \to c \cdot a.$$

□

Teorem 3.2.5. *Neka su $a, b \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$log_a b^x = x log_a b. \tag{3.9}$$

Dokaz. Iz $a^0 = 1$ slijedi $0 = log_a 1$, stoga (3.9) vrijedi za $x = 0$.
Dokažimo prvo indukcijom da (3.9) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Za $x = 1$ (3.9) očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $log_a b^n = n log_a b$. Koristeći propoziciju3.2.3 dobivamo:

$$log_a b^{n+1} = log_a(b^n \cdot b) = log_a b^n + log_a b = n log_a b + log_a b = (n+1) log_a b,$$

dakle,

$$log_a b^{n+1} = (n+1) log_a b.$$

Time smo dokazali da (3.9) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći dokazano i propoziciju3.2.3 dobivamo:

$$0 = log_a 1 = log_a \left(b^n \cdot b^{-n}\right) = log_a b^n + log_a^{-n} = n log_a b + log_a b^{-n},$$

dakle,

$$0 = n log_a b + log_a b^{-n}$$

pa je

$$log_a b^{-n} = -n log_a b.$$

Prema tome (3.9) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
Neka je $r \in \mathbb{Q}$. Tada je $r = \frac{-m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Prema dokazanom vrijedi:

$$nlog_a \sqrt[n]{b} = log_a \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = log_a b,$$

dakle,

$$nlog_a \sqrt[n]{b} = log_a b$$

pa je

$$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} log_a b.$$

Množenjem ove jednakosti s m dobivamo:

$$mlog_a \sqrt[n]{b} = \frac{m}{n} log_a b. \tag{3.10}$$

Prema dokazanom vrijedi

$$mlog_a \sqrt[n]{b} = log_a (\sqrt[n]{b})^m = log_a b^{\frac{m}{n}} = log_a b^r.$$

Dakle,

$$mlog_a \sqrt[n]{b} = log_a b^r,$$

što zajedno sa (3.10) daje

$$log_a b^r = rlog_a b.$$

Time smo dokazali da (3.9) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Q}$.
Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada prema lemi2.5.1 postoji niz (r_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $r_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $r_n \to x$.
Iz činjenice da je exp_b neprekidna funkcija i prema propoziciji 1.5.2 slijedi da

$$exp_b(x_n) \to exp_b x, \text{ tj. } b^{r_n} \to b^x.$$

Nadalje, iz činjenice da je log_a neprekidna funkcija slijedi da $log_a b^{r_n} \to log_a b^x$. No prema dokazanom,

$$log_a b^{r_n} = r_n log_a b \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

pa prema tome

$$r_n log_a b \to log_a b^x. \tag{3.11}$$

S druge strane iz $r_n \to x$ i leme3.2.4 slijedi

$$r_n log_a b \to xlog_a b. \tag{3.12}$$

Iz (3.11), (3.12) i propozicije 1.5.9 slijedi

$$log_a b^x = xlog_a b.$$

Dakle, (3.9) vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. □

Za $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ definiramo $1^x = 1$.
Dakle, $1^x = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Derivabilnost eksponencijalne funkcije

Propozicija 3.3.1. *Neka su $a, b > 0$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \tag{3.13}$$

i

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \tag{3.14}$$

Dokaz. (3.13) očito vrijedi za $x = 0$. Dokažimo indukcijom

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za $n = 1$ ova tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Imamo:

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n (a \cdot b) = (a^n \cdot b^n)(a \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1},$$

dakle,

$$(a \cdot b)^{n+1} = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

Prema tome (3.13) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$.
Koristeći tu činjenicu dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a \cdot b)^{-n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n},$$

dakle,

$$(a \cdot b)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

Prema tome (3.13) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$.
Neka je $r \in \mathbb{Q}$. Tada je $r = \frac{m}{n}$ za neke $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$(a \cdot b)^r = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^m =$$

$$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r \cdot b^r,$$

dakle,

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r.$$

Prema tome (3.13) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Q}$.
Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz (r_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $r_n \in \mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $r_n \to x$. Iz činjenice da je eksponencijalna funkcija neprekidna slijedi

$$(a \cdot b)^{r_n} \to (a \cdot b)^x \tag{3.15}$$

(ovo očito vrijedi i ako je $a \cdot b = 1$).
Također iz $r_n \to x$ slijedi

$$a^{r_n} \to a^x \text{ i } b^{r_n} \to b^x.$$

Iz propozicije1.6.7 slijedi

$$a^{r_n} \cdot b^{r_n} \to a^x \cdot b^x \tag{3.16}$$

. Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a \cdot b)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n} \tag{3.17}$$

pa iz (3.15), (3.16), (3.17) i propozicije1.5.9 slijedi da je

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$$

Zaključak: (3.13) vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$.
Neka je $x \in \mathbb{R}$. Prema (3.13) vrijedi:

$$\left(b \cdot b^{-1}\right)^x = b^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x$$

tj.

$$1 = b^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x$$

pa je

$$\frac{1}{b^x} = \left(b^{-1}\right)^x.$$

Sada imamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(a \cdot b^{-1}\right)^x = a^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Dakle, (3.14) vrijedi. □

Propozicija 3.3.2. *Neka je $a > 0$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Dokaz. Ako je $a = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da $a \neq 1$. Označimo $u = (a^x)^y$ i $v = a^{x \cdot y}$. Koristeći teorem3.2.5 dobivamo:

$$log_a u = log_a (a^x)^y = y log_a a^x = y \cdot x,$$

dakle,

$$log_a u = y \cdot x.$$

Očito je

$$log_a v = log_a a^{x \cdot y} = x \cdot y.$$

Dakle,

$$log_a u = log_a v$$

pa je $u = v$ (jer je log_a injekcija).
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 3.3.3. *Neka su $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Pretpostavimo da je $1 < a \leq b$ te $0 \leq x \leq y$. Tada je $a^x \leq b^y$.*
2. *Pretpostavimo da je $0 < a \leq b < 1$ te $x \leq y \leq 0$. Tada je $b^y \leq a^x$.*

Dokaz. 1. Iz $x \leq y$ slijedi $a^x \leq a^y$. Ako je $a = b$, očito je $a^x \leq b^y$.
Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada je $a < b$ pa $\frac{b}{a} > 1$. Sada iz $0 \leq y$ slijedi

$$\left(\frac{b}{a}\right)^0 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^y \text{ (propozicija1.3.6).}$$

Stoga je

$$1 \leq \frac{b^y}{a^y} \text{ (propozicija3.3.1).}$$

Dakle, $a^y \leq b^y$ pa iz $a^x \leq a^y$ slijedi $a^x \leq b^y$.

2. Imamo

$$1 < b^{-1} < a^{-1} \text{ i } 0 \leq -y \leq -x$$

pa prema 1. vrijedi

$$\left(b^{-1}\right)^{-y} \leq \left(a^{-1}\right)^{-x}.$$

Iz propozicije3.3.2 slijedi

$$b^y \leq a^x.$$

Dakle, 2. vrijedi.

□

Teorem 3.3.4. *Neka je $S = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Tada je e limes od f u 0.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati sljedeće:

(i) e je limes od $f\,|_{\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle}$ u 0.

(ii) e je limes od $f\,|_{\langle 0,1\rangle}$ u 0.

Zašto? Pretpostavimo da vrijedi (i) i (ii). Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle$ vrijedi sljedeća implikacija

$$|x-0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - e| < \epsilon. \tag{3.18}$$

Također postoji $\delta_2 > 0$ takav da za sve $x \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi sljedeće:

$$|x-0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - e| < \epsilon. \tag{3.19}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{2}\}$.
Neka je $x \in S$. Pretpostavimo da je $|x-0| < \delta$. Tada je

$$|x-0| < \delta_1,\ |x-0| < \delta_2 \text{ i } |x-0| < \frac{1}{2}$$

pa je

$$|x| < \frac{1}{2}.$$

Slijedi:

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle \text{ ili } x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle.$$

Ako je $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle$ slijedi iz (3.18) $|f(x) - e| < \epsilon$.
Ako je $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ slijedi iz (3.19) $|f(x) - e| < \epsilon$.
Dakle, za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija

$$|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - e| < \epsilon.$$

Prema tome, e je limes od f u 0.
Dokažimo sada da vrijede (i) i (ii).
Dokažimo prvo tvrdnju (ii). Pretpostavimo da je (x_k) niz realnih brojeva takav da je $x_k \in \langle 0, 1\rangle$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ te takav da $x_k \to 0$. Želimo dokazati da $f(x_k) \to e$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Iz $x_k < 1$ slijedi $1 < \frac{1}{x_k}$ pa možemo odabrati $n_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_k \leq \frac{1}{x_k} \leq n_k + 1. \tag{3.20}$$

Dakle, imamo niz prirodnih brojeva n_k takav da je

$$\frac{1}{n_k+1} \leq x_k \leq \frac{1}{n_k}, \text{ za sve } k \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Stoga za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$1 + \frac{1}{n_k+1} \leq 1 + x_k \leq 1 + \frac{1}{n_k}. \tag{3.22}$$

Iz (3.20) i (3.22) i leme3.3.3 slijedi

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \leq (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{3.23}$$

Iz (3.21) slijedi

$$0 \leq \frac{1}{n_k+1} \leq x_k \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije1.5.4 slijedi

$$\frac{1}{n_k+1} \to 0.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{n_k} \leq \frac{2}{n_k+1}$$

pa iz propozicije1.5.4 slijedi da

$$\frac{1}{n_k} \to 0.$$

Iz teorema2.6.5 1. slijedi

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e \text{ i } \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e.$$

No,

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} \to e \cdot 1^{-1} = e.$$

Također,

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \to e \cdot 1 = e.$$

Sada iz (3.23) i propozicije1.5.4 slijedi da

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_k}} \to e.$$

Dakle,

$$f(x_k) \to e.$$

Iz teorema2.4.11 zaključujemo da vrijedi tvrdnja (*ii*).
Dokažimo sada (*i*). Neka je (x_k) niz realnih brojeva takav da je $x_k \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ za sve $k \in \mathbb{N}$ te takav da $x_k \to 0$. Neka je $k \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$0 < -x_k < \frac{1}{2}$$

pa je

$$2 < \frac{1}{-x_k}.$$

Stoga postoji $x_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_k \leq \frac{1}{-x_k} \leq n_k + 1. \tag{3.24}$$

Uočimo da je $n_k \geq 2$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-(n_k + 1) \leq \frac{1}{x_k} \leq -n_k. \tag{3.25}$$

Nadalje, iz (3.24) slijedi

$$\frac{1}{n_k + 1} \leq -x_k \leq \frac{1}{n_k}. \tag{3.26}$$

Iz (3.26) slijedi

$$-\frac{1}{n_k} \leq x_k \leq -\frac{1}{n_k + 1}$$

pa je

$$1 - \frac{1}{n_k} \leq 1 + x_k \leq 1 - \frac{1}{n_k + 1}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Iz (3.27), (3.25) i leme3.3.3 2. slijedi:

$$\left(1 - \frac{1}{n_k + 1}\right)^{-n_k} \leq (1 + x_k)^{\frac{1}{x_n}} \leq \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{-n_k+1}. \tag{3.28}$$

Kao i maloprije vidimo da (3.26) povlači

$$\frac{1}{n_k + 1} \to 0 \text{ i } \frac{1}{n_k} \to 0.$$

Iz teorema2.6.5 2. slijedi da

$$\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{-n_k} \to e \text{ i } \left(1-\frac{1}{n_k+1}\right)^{-(n_k+1)} \to e.$$

Iz ovoga lako zaključimo da

$$\left(1-\frac{1}{n_k+1}\right)^{-n_k} \to e \text{ i } \left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{-n_k+1} \to e.$$

Sada iz (3.28) i propozicije1.5.4 slijedi da

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \to e,$$

tj.

$$f(x_n) \to e.$$

Iz ovoga i teorema2.4.11 zaključujemo da vrijedi tvrdnja (i).
Time je tvrdnja dokazana.

□

Za logaritamsku funkciju s bazom e kažemo da je **prirodni logaritam** i inače tu funkciju označimo sa ln.
Dakle, $ln = log_e$.

Teorem 3.3.5. *Funkcija* $ln\colon \langle 0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *je derivabilna u točki* 1 *i* $ln'(1) = 1$.

Dokaz. Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je

$$x_n \in \langle 0,+\infty\rangle \setminus \{1\}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to 1$.
Želimo dokazati da

$$\frac{lnx_n - ln1}{x_n - 1} \to 1,$$

ako to dokažemo onda će iz propozicije2.4.13 slijediti tvrdnja teorema.
Imamo:

$$ln1 = log_e 1 = log_e e^0 = 0.$$

Dokažimo, dakle, da

$$\frac{lnx_n}{x_n - 1} \to 1. \tag{3.29}$$

Neka je (t_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa

$$t_n = x_n - 1 \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$t_n \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle\,,$$

a iz propozicije1.5.12 slijedi

$$t_n \to 0.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, koristeći teorem3.2.5 dobivamo:

$$\frac{ln x_n}{x_n - 1} = \frac{ln(1 + t_n)}{t_n} = \frac{1}{t_n} ln(1 + t_n) = ln\,(1 + t_n)^{\frac{1}{t_n}}\,,$$

tj.

$$\frac{ln x_n}{x_n - 1} = ln\,(1 + t_n)^{\frac{1}{t_n}}\,. \tag{3.30}$$

Iz propozicije2.4.2 i teorema3.3.4 slijedi

$$(1 + t_n)^{\frac{1}{t_n}} \to e.$$

Sada iz (3.30) slijedi (3.29).
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za bilo koji od sljedećih skupova kažemo da je **otvoreni interval**:

$$\langle a,\ b\rangle\,,\ \langle -\infty, b\rangle\,,\ \langle a, +\infty\rangle\,,\ \mathbb{R}.$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, dokaz se može naći u [2].

Teorem 3.3.6. *Neka su I i J otvoreni intervali te neka je $f\colon I \to J$ bijekcija. Pretpostavimo da su f i f^{-1} neprekidne funkcije. Nadalje, pretpostavimo da je $c \in I$ takav da je f derivabilna u c te da je $f'(c) \neq 0$. Tada je funkcija f^{-1} derivabilna u točki $f(c)$ i vrijedi*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Korolar 3.3.7. *Funkcija $exp\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je derivabilna u točki 0 i vrijedi*

$$exp'(0) = 1.$$

Dokaz. Znamo da je $ln\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna u 1 te da je $ln'(1) = 1$.
Nadalje, ln je bijekcija i $ln^{-1} = exp$. Uočimo da su $\langle 0, +\infty\rangle$ i $\mathbb{R}$ otvoreni intervali.
Nadalje, znamo da su ln i exp neprekidne funkcije. Iz teorema3.3.6 slijedi da je exp derivabilna u točki $ln(1)$ te da je $exp'\,(ln(1)) = \frac{1}{ln'(1)}$.
No, $ln(1) = 0$ pa je exp derivabilna u 0 i $exp'(0) = 1$. □

Propozicija 3.3.8. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te $f\colon S \to T$ funkcija. Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ takav da je f derivabilna u x_0.*
Nadalje, pretpostavimo da je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S\backslash\{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada
$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Dokaz. Neka je $F\colon S\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa
$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Po definiciji derivacije imamo da je $f'(x_0)$ limes od F u x_0.
Iz propozicije2.4.2 slijedi
$$F(x_n) \to f'(x_0),$$
tj.
$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$
□

Korolar 3.3.9. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to 0$. Tada*
$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1.$$

Dokaz. Iz korolara3.3.7 i propozicije3.3.8 slijedi
$$\frac{exp(x_n) - exp(0)}{x_n - 0} \to exp'(0),$$
tj.
$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1.$$
□

Teorem 3.3.10. *Funkcija* $exp\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ *je derivabilna i* $exp' = exp$*.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Želimo dokazati da je exp derivabilna u x_0 te da je $exp'(x_0) = exp(x_0)$.
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$.
Koristeći propoziciju3.1.7 dobivamo:

$$\frac{exp(x_n) - exp(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{x_n - x_0} = \frac{e^{x_0} \cdot e^{x_n - x_0} - e^{x_0}}{x_n - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0},$$

tj.

$$\frac{exp(x_n) - exp(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{e^{x_0} \cdot (e^{x_n - x_0} - 1)}{x_n - x_0}. \tag{3.31}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n - x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ te također vrijedi $x_n - x_0 \to 0$.
Iz korolara3.3.9 slijedi:

$$\frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to 1.$$

Slijedi:

$$e^{x_0} \cdot \frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Iz (3.31) slijedi

$$\frac{exp(x_n) - exp(x_0)}{x_n - x_0} \to exp(x_0).$$

Iz propozicije2.4.13 slijedi da je exp derivabilna u x_0 te da je

$$exp'(x_0) = exp(x_0).$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] V. Kirin, *Uvod u matematičku analizu*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 1976.

[4] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

Ukratko, u ovom diplomskom radu proučavali smo neka svojstva eksponencijalne funkcije s naglaskom na njenu derivabilnost.
Najprije smo definirali eksponencijalnu funkciju s bazom većom od 1, prvo smo za $a > 0$ definirali a^x za sve $x \in \mathbb{N}$, potom za sve $x \in \mathbb{Z}$, onda i za $x \in \mathbb{Q}$, pri čemu smo dokazali da za svaki $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $\sqrt[n]{a}$. Nadalje, definirali smo za $a > 1$ a^x za sve $x \in \mathbb{R}$, proučavali smo konvergenciju nizova realnih brojeva te omeđene nizove u $\mathbb{R}$. Potom smo proučavali neprekidnost eksponencijalne funkcije te posljedice koje ona ima na svojstva eksponencijalne funkcije. Također, dokazali smo da je eksponencijalna funkcija neprekidna, zatim smo došli do međuvrijednosti neprekidnih funkcija te koristeći dobivene rezultate dokazali smo da je eksponencijalna funkcija bijekcija, proučavali smo i pojmove limesa i derivacije funkcija te smo dokazali da vrijedi tzv. eksponencijalni zakon i definirali broj e. Definirali smo logaritamsku funkciju s bazom većom od 1, proučavali smo derivabilnost eksponencijalne funkcije pa smo potom definirali eksponencijalnu funkciju s bazom manjom od 1, zatim logaritamsku funkciju s bazom manjom od 1 te smo dokazali neka svojstva tih funkcija. Na kraju smo dokazali da je funkcija ln derivabilna u točki 1 te, pomoću toga, došli smo do glavnog rezultata, a to je da je eksponencijalna funkcija derivabilna.

Summary

In short, in this thesis we have studied some properties of the exponential function, with an emphasis on its derivability.
Foremost, we defined an exponential function with a base greater than 1, we first defined a^x for$a > 0$ for all $x \in \mathbb{N}$, then for all $x \in \mathbb{Z}$, and then for $x \in \mathbb{Q}$, by which we have proved that for every $a > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ there exists a unique $\sqrt[n]{a}$. Furthermore, we defined for $a > 1$ a^x for all $x \in \mathbb{R}$, we studied the convergence of sequences of real numbers, as well as bounded sequences in $\mathbb{R}$. Then we studied the continuity of the exponential function and consequences which it has on the properties of the exponential functions. Also, we proved that the exponential function is continuous, then we came to the intermediate value of continuous functions and, using the obtained results, proved that the exponential function is a bijection, we studied the concepts of limes and derivatives, proved that the so-called exponential law is valid and defined the number e. We defined the logarithmic function with a base greater than 1, studied the derivability of the exponential function and then defined an exponential function with a base less than 1, then a logarithmic function with a base less than 1 and proved some properties of those functions. In the end, we proved that the function ln is derivable in the point 1 and, using that, came to the main result, which is that the exponential function is derivable.

Životopis

Zovem se Željka Trajbar, rođena sam 3.9.1989. u Zagrebu. Odrastam u Radakovu, Kraljevec na Sutli, gdje i dalje živim. Nakon završetka Osnovne škole Pavla Štoosa u Kraljevcu na Sutli upisujem Srednju školu *Ban Josip Jelačić* u Zaprešiću, smjer: opća gimnazija. Potom nakon studiranja na drugom Sveučilištu upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, najprije Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički te po završetku upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Po stjecanju akademskog naziva sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike počinjem raditi u struci, najprije u Osnovnoj školi Antuna Mihanovića, Klanjec, zatim u Srednjoj školi *Ženska opća gimnazija Družbe sestara milosrdnica s pravom javnosti*, Zagreb te u Osnovnoj školi Grigora Viteza, Zagreb, gdje i dalje radim.