

# Matematika igre SET

---

**Dragojević, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:073186>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Matematika igre SET

---

**Dragojević, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:073186>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ana Dragojević

**MATEMATIKA IGRE SET**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Igra SET</b>	<b>3</b>
1.1 Povijest . . . . .	3
1.2 Pravila igre . . . . .	4
1.3 "Anti-set" . . . . .	7
<b>2 Matematička interpretacija igre SET</b>	<b>13</b>
2.1 Vektorski prostor $\mathbb{Z}_3^n$ nad poljem $\mathbb{Z}_3$ . . . . .	13
2.2 Koordinatizacija i algebarski opis seta . . . . .	15
2.3 Afini prostor $\mathbb{Z}_3^n$ . . . . .	17
2.4 Geometrijska interpretacija seta . . . . .	21
2.5 Geometrija u $\mathbb{Z}_3^n$ . . . . .	22
<b>3 Maksimalna veličina <math>n</math>-kapice</b>	<b>35</b>
3.1 Maksimalna 1-kapica . . . . .	36
3.2 Maksimalna 2-kapica . . . . .	37
3.3 Maksimalna 3-kapica . . . . .	39
3.4 Maksimalna 4-kapica . . . . .	44
<b>4 Primjena igre SET u nastavi matematike</b>	<b>53</b>
4.1 Kombinatorika i vjerojatnost . . . . .	53
4.2 Teorija skupova . . . . .	59
<b>Bibliografija</b>	<b>63</b>

# Uvod

SET je nevjerojatno zabavna misaona igra kartama najmijenjena djeci i odraslima, a osmislila ju je Marsha Jean Falco 1974. godine. Cilj igre je pronaći tri karte koje čine takozvani "set" unutar kompleta od 81 karte. Na svakoj karti nalaze se simboli koji se razlikuju u četiri karakteristike: broj (jedan, dva i tri), oblik (val, oval i romb), ispunjena (neispunjeno, djelomično i potpuno ispunjeno) i boja (crvena, ljubičasta i zelena). Igra započinje s dvanaest karata okrenutih licem prema gore među kojima igrači traže "set" - tri karte kojima je pojedina karakteristika simbola na svim kartama ista ili na svim različita. Nekad među dvanaest karata nema "seta" pa igrači nadodaju još tri karte. No, moguće je da ni među tih petnaest karata i dalje nema seta. Postavlja se pitanje koliki je maksimalni broj karata među kojima nema "seta".

Igrajući SET mnogi ne bi naslutili da se u pozadini igre krije matematika. Osim što je zabavna, igra se povezuje s mnogim matematičkim problemima iz području afine geometrije, linearne algebre, teorije skupova, kombinatorike i vjerojatnosti.

U ovom diplomskom radu glavni je naglasak na pronalasku maksimalnog skupa karata među kojima nema "seta". U tu svrhu, matematički ćemo interpretirati igru SET pomoću konačnog četverodimenzionalnog afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Analizom svojstava i geometrije afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ , problem pronalaženja skupa karata među kojima nema "seta", svodi se na problem pronalaska podskupa točaka unutar afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$  u kojemu nema pravca, takozvana 4-kapica.

U prvom poglavlju dana je povijest SET-a te su detaljno objašnjena pravila igre. Uvodi se pojam *anti-seta*, skupa karata bez "seta", kao i shematski prikaz igre pomoću  $3 \times 3$  tablice koji ćemo iskoristiti za pronalazak maksimalnog anti-seta.

Drugo poglavlje posvećeno je svojstvima vektorskog i afinog konačnog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$ , posebno geometriji  $\mathbb{Z}_3^n$  za  $n = 1, 2, 3, 4$  te matematičkoj interpretaciji SET-a pomoću tog prostora.

U trećem poglavlju iznosimo provjeru da je pronađeni anti-set u prvom poglavlju zaista skup bez "seta" te matematički dokaz maksimalne veličine tog skupa.

SET je odlična ilustracija afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Broj karakteristika simbola na kartama igre određuje njegovu dimenziju pa tako simboli na kartama mogu općenito imati  $n$  karakteris-

tika. Zanimljivo je da problem pronalaska  $n$ -kapice zapravo nije tako lagan kako se možda čini. Za sada su poznate veličine  $n$ -kapice za  $n \leq 6$ , a za ostale je moguće odrediti samo gornju granicu i to pomoću teorema kojeg iznosimo na kraju trećeg poglavlja.

U posljednjem četvrtom poglavlju bavimo se primjenom igre SET u nastavi matematike. Kako se radi o igri kartama, otvaraju se brojna pitanja iz područja kombinatorike i vjerojatnosti koja možemo postaviti učenicima trećeg razreda srednje škole kako bi uvježbali osnovne principe kombinatorike i vjerojatnosti te razvijali logičko i apstraktno razmišljanje. Isto tako, SET predstavlja konkretan model skupa pa iznosimo i način na koji bi učenici petog razreda osnovne škole i učenici prvog razreda srednje škole pomoću zabavne igre mogli uspješno savladati osnovne operacije sa skupovima.

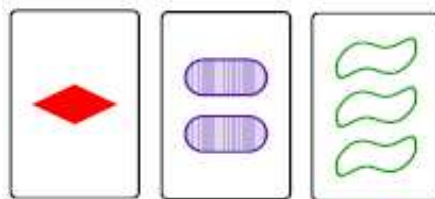
Internetska verzija SET-a može se pronaći na stranici [www.setgame.com/set/puzzle](http://www.setgame.com/set/puzzle). Svima onima koji su tek sad otkrili ovu igru preporučamo da se okušaju u njoj.

# Poglavlje 1

## Igra SET

### 1.1 Povijest

Radeći genetička istraživanja u Cambridgeu u Engleskoj 1974. godine, igru SET osmislila je Marsha Jean Falco, magistra znanosti na području populacijske genetike. Ideja za igru SET nastala je kad je Marsha pokušavala shvatiti je li epilepsija kod njemačkih ovčara nasljedna. Kako bi pratila pojedine osobine pasa, Marsha je kreirala kartice sa skupom informacija za svakog psa. Budući da su određeni skupovi informacija kod mnogih pasa bili isti, Marsha je crtala simbole koji bi predstavljali određeni skup informacija umjesto da ih svaki put nanovo ispisuje. Različiti simboli s različitim svojstvima predstavljali su različite osobine pasa. Dok je veterinarima objašnjavala matematička svojstva koja se kriju u kombinacijama simbola na kartici, Marsha je sinula ideja o zabavnoj kartaškoj igri pronalaženja različitih kombinacija simbola. Uz ohrabrenje prijatelja i obitelji, godinama je razvijala svoju igru koja je konačno 1990. godine objavljena i plasirana na tržište. Od tada je SET postao veliki hit, kako unutar matematičke zajednice tako i izvan nje. [13]

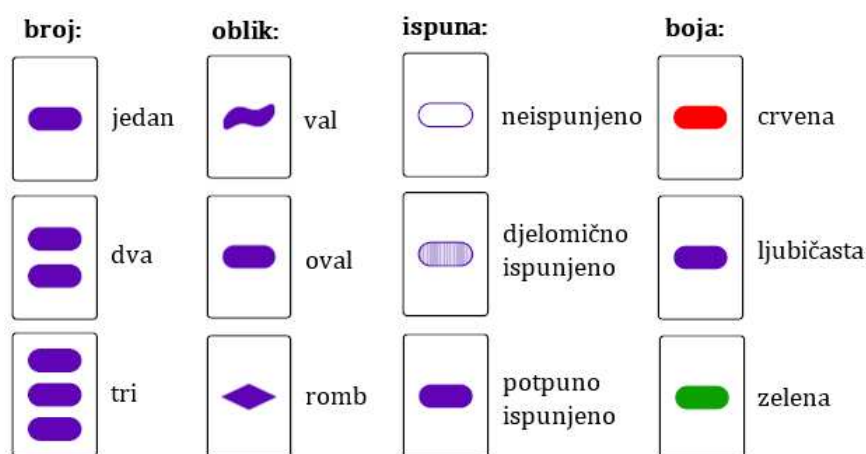


Slika 1.1: Tipične karte SET-a



## 1.2 Pravila igre

SET se sastoji od posebnog kompleta karata (slika 1.1), a pravila su vrlo jednostavna. Svaka karta jedinstveno je određena s četiri karakteristike simbola: broj, oblik, ispuna i boja. Svaka od karakteristika ima tri mogućnosti prikazane na slici 1.2. Budući da za pojedinu karakteristiku postoje tri različite mogućnosti, postoji ukupno  $3^4 = 81$  različitih kombinacija, pa se SET sastoji od ukupno 81 različite karte.



Slika 1.2: Mogućnosti za pojedinu karakteristiku simbola na karti

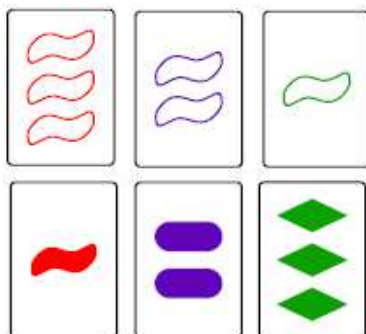
Igra započinje tako da jedan od igrača najprije promiješa snop karata, a zatim na stol složi u obliku pravokutnika ( $3 \times 4$ ) dvanaest karata licem okrenutih prema gore. Cilj igre je pronaći "set". Tri karte čine set ako je pojedina karakteristika likova na svim kartama ista ili na svim kartama različita. Drugim riječima, set čine tri karte ako su istovremeno ispunjeni sljedeći uvjeti [20]:

1. **broj** simbola mora biti **isti** na sve tri karte **ili različit** na sve tri karte
2. **oblik** simbola mora biti **isti** na sve tri karte **ili različit** na sve tri karte
3. **ispuna** simbola mora biti **ista** na sve tri karte **ili različita** na sve tri karte
4. **boja** simbola mora biti **ista** na sve tri karte **ili različita** na sve tri karte.

Tako, na primjer, slika 1.1 prikazuje set jer su simboli na sve tri karte različitog broja, različitog oblika, različite ispune i različite boje. Slika 1.3 prikazuje još dvije trojke karata koje čine set<sup>1</sup>. Prve tri karte čine set jer su simboli na njima istog oblika, iste ispune,

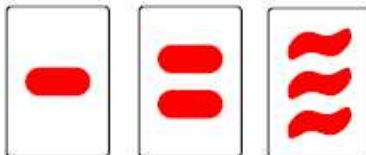
<sup>1</sup>Nadalje u tekstu "set" malim tiskanim slovima označava tri karte koje zadovoljavaju uvjete od 1. do 4., a "SET" velikim tiskanim slovima označava cijeli komplet karata, odnosno samu igru.

različite boje i različitog broja, dok druge tri karte čine set jer su njihovi simboli iste ispune, različitog oblika, različitog broja i različite boje.



Slika 1.3: Primjeri seta

S druge strane, na kartama na slici 1.4 simboli su iste boje, iste ispune te različitog broja, ali na prve dvije karte oblik simbola je oval dok je na trećoj karti oblik simbola val. Dakle, ove karte ne zadovoljavaju uvjet da su simboli na sve tri karte istog ili različitog oblika pa ne čine set.



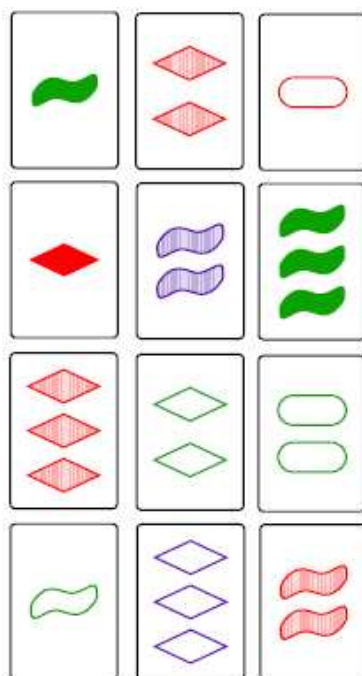
Slika 1.4: Primjer karata koje ne čine set

Nakon što je jedan od igrača na stol posložio dvanaest karata licem prema gore, igrači započinju tražiti set. Prvi igrač koji uoči set najprije mora reći *set*, a zatim uzeti karte sa stola. Nitko od ostalih igrača ne može nastaviti igru dok prvi igrač ne ukloni odgovarajuće karte koje čine uočeni set (karte moraju biti uklonjene u roku od nekoliko sekundi nakon što igrač kaže *set*). Nakon toga, iz snopa preostalih karata na stol se postavljaju nove tri karte te igrači ponovo traže set. Igra završava kada se sve karte podijele i više nije moguće pronaći niti jedan set. Pobjednik je onaj igrač koji pronađe najviše setova. [17]

Potrebno je malo prakse za prepoznavanje setova pa se SET u početku može igrati polako. Međutim, s grupom iskusnih igrača, SET se igra munjevitom brzinom. Kako bi se natjecalo u takvoj grupi, mora se naučiti lako uočiti setove. Najučinkovitiji način brzog prepoznavanja seta je promotriti parove karata jer za svake dvije postoji jedinstvena treća karta koja s njima tvori set. Na primjer, ako simboli na prve dvije karte imaju isti oblik,

tada treća karta koja bi s njima činila set treba imati simbole istog oblika. Isto tako, ako su boje simbola na prve dvije karte različite, treća karta koja bi s njima činila set mora imati simbole različite boje od prvih dviju karata. Slično za ostale karakteristike.

Prirodno se nameće pitanje Možemo li u svakoj kombinaciji dvanaest karata pronaći set? Odgovor je negativan, a slika 1.5 prikazuje jednu takvu kombinaciju. Pogledamo li dvije karte znamo koja treća karta s njima čini set. Primjerice, pogledajmo kartu na kojoj je jedan zeleni potpuno ispunjeni val te kartu na kojoj su dva crvena djelomično ispunjena romba. Simboli na tim kartama imaju različite sve četiri karakteristike pa je treća karta koja s njima čini set ona na kojoj su tri ljubičasta neispunjena ovala. No, među preostalim kartama na slici 1.5 nema takve karte. Stoga za karte koje smo promatrali nema seta. Nastavimo li na taj način tražiti setove uočit ćemo da među kartama nema seta. Dakle,



Slika 1.5: Kombinacija dvanaest karata koje ne sadrže set

može se dogoditi da među dvanaest podijeljenih karata nema niti jednog seta. U tom slučaju pravila zahtijevaju da se podijele još tri karte te se igra nastavlja s ukupno petnaest karata. Ako i dalje među petnaest karata nema seta, podijele se još tri karte i tako dalje sve dok se među kartama ne pojavi barem jedan set. Upravo nas to dovodi do sljedećeg pitanja:

**1. Koliko je najmanje karata potrebno da bi među njima bile tri karte koje čine set?**

Ovo je glavni problem kojim ćemo se baviti u ovom diplomskom radu. Do odgovora bismo mogli doći sustavnim ispitivanjem svih mogućnosti. Međutim, postoji jako puno mogućih kombinacija pa bi taj postupak bio dugotrajan i zamoran. Kao što smo već u uvodu najavili, igru SET možemo matematički interpretirati što uvelike olakšava rješavanje postavljenog problema.

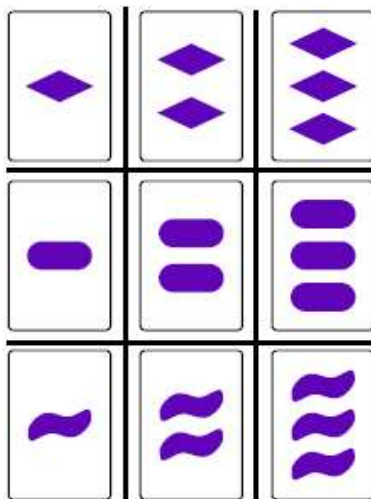
### 1.3 "Anti-set"

U igri SET cilj je prikupiti što više setova. Ali što ako bismo preokrenuli taj cilj? Recimo da želimo pod svaku cijenu izbjeći set i pronaći skup karata koji ne sadrži niti jedan set. S tim ciljem, uvodimo pojam "anti-set" [4] koji označava upravo takav skup karata. Dakle, postavljamo novo pitanje: **"Koliki je najveći mogući anti-set?"**

Na slici 1.5 vidimo primjer anti-seta od 12 karata. Zanima nas koliko najviše karata možemo odabrati, a da ne sadrže set. Na primjer, sigurno znamo da bilo koje dvije karte SET-a čine anti-set. Isto tako, vidjeli smo primjer anti-seta od 12 karata. Kako pronaći anti-set od 18 karata? Je li to uopće moguće? U tu svrhu, započnimo razmatranje nešto jednostavnijeg problema.

#### SET s 9 karata

Najprije izdvojimo samo karte s ljubičastim i potpuno ispunjenim simbolima (slika 1.6).



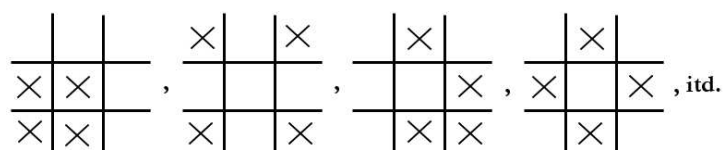
Slika 1.6: SET s dvije karakteristike

Umjesto da promatramo cijeli komplet od 81 karte, promatrat ćemo samo njih 9. U suštini,

od ukupno četiri karakteristike, simboli na kartama razlikuju se u samo dvije i to obliku i broju, dok su boja i ispuna simbola na svim kartama jednake.

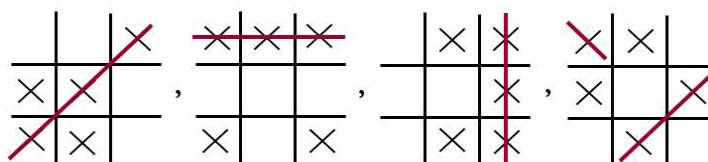
Promatrajući ove karte lako se uoči da je moguće odabrati četiri koje ne sadrže set. Isto tako, postoji više mogućnosti odabira anti-seta veličine 4. Kako bismo zorno prikazali nekoliko takvih mogućnosti koristit ćemo  $3 \times 3$  tablicu. Svako polje tablice odgovara jednoj karti na slici 1.6.

Dodavanjem "x" u pojedinu polje tablice označit ćemo odabranu kartu. Na taj način možemo shematski prikazati nekoliko primjera anti-seta veličine 4 (slika 1.7).



Slika 1.7: Anti-set veličine 4

Primjetimo da ćemo dodavanjem "x" u prazno polje bilo kojeg anti-seta dobiti skup od 5 karata koji sadrži set (slika 1.8). Za svake dvije karte unutar anti-seta postoji jedinstvena treća karta izvan anti-seta koja s njima čini set. Uočimo na slici 1.8 da set čine tri "x" na liniji koja prolazi jednim stupcem ili jednim retkom, na glavnim dijagonalama tablice, ali i na liniji koja "preskače" na suprotni kraj kada dođe do ruba tablice, kao što prikazuje posljednja tablica na slici 1.8. Lako se u to uvjeriti povežemo li karakteristike simbola na

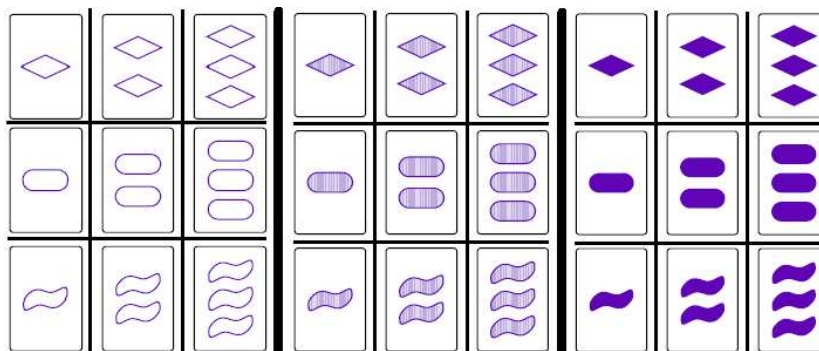


Slika 1.8: Setovi u skupu od 5 karata

karti s retkom i stupcem tablice. Svaki stupac odgovara broju, a redak obliku simbola na karti. Po definiciji seta, tri karte tvore set ako im je pojedina karakteristika ista ili različita. Dakle, u shematskom prikazu sva tri "x" moraju stajati u istom stupcu ili različitim stupcima. Isto vrijedi i za retke. Dokaz našeg opažanja bit će proveden u idućim poglavljima.

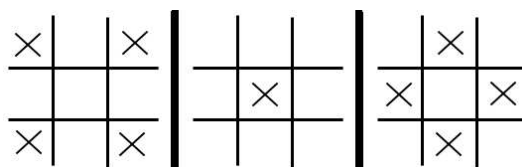
### SET s 27 karata

U prethodnom slučaju ograničili smo se na karte sa samo dvije karakteristike, oblikom i brojem, dok su boja i ispuna bile na svim kartama jednake. Što ako u igru dodamo još jednu



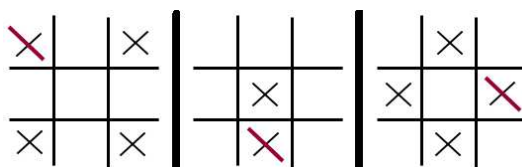
Slika 1.9: SET s tri karakteristike

karakteristiku, na primjer ispunu? U tom slučaju SET se sastoji od 27 karata s ljubičastim simbolima različitog oblika, broja i ispune (slika 1.9). Anti-set veličine 9 možemo odabrati na različite načine od kojih je jedan prikazan na slici 1.10. Ponovo koristimo tablicu kao zgodnu i jednostavnu ilustraciju odabira karata. Pošto sada imamo tri različite karakteristike, osim redaka i stupaca razlikujemo i tri tablice koje određuju pojedinu ispuna likova na kartama. Stoga, set čine tri "x" koja se nalaze u istom ili različitom retku, istom ili različitom stupcu te istoj ili različitoj  $3 \times 3$  tablici.



Slika 1.10: Anti-set veličine 9

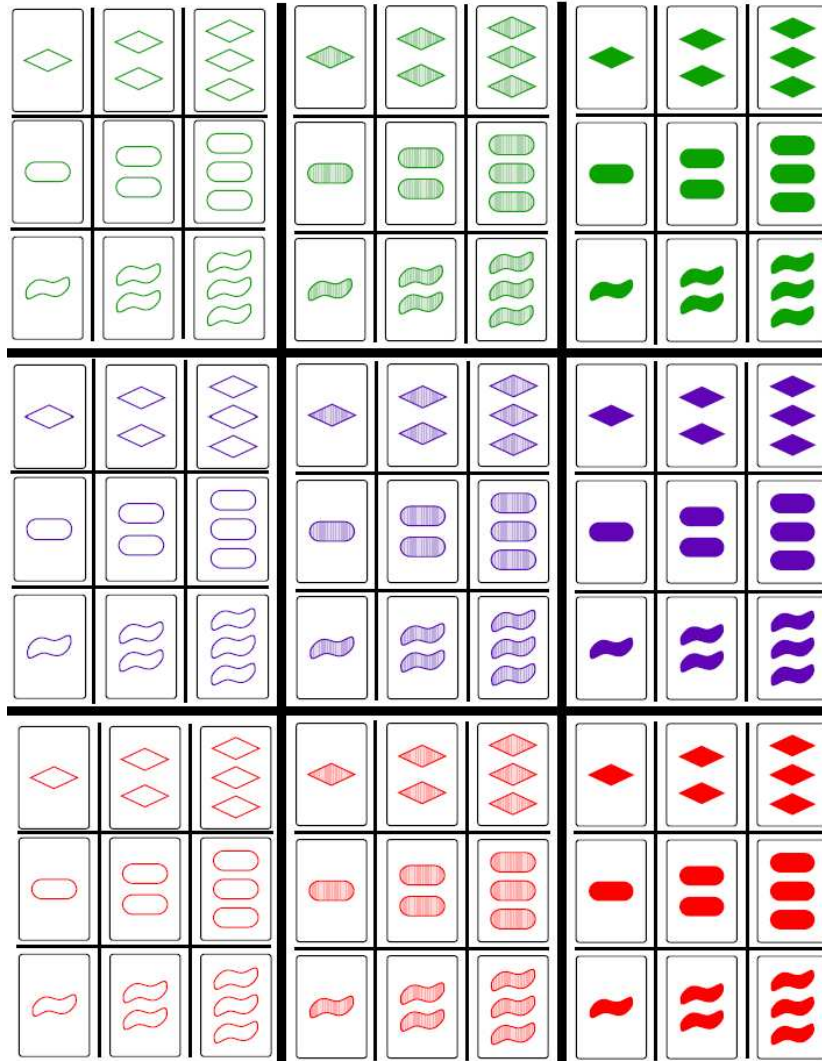
Primjetimo da ćemo dodavanjem "x" u bilo koje prazno polje dobiti skup od 10 karata koji sadrži set, a jedan takav primjer prikazuje slika 1.11. Dokaz ovog opažanja bit će proveden nešto kasnije.



Slika 1.11: Set u skupu od 10 karata

**SET od 81 karte**

Sada ovaj model možemo primijeniti na slučaj u kojemu nema fiksnih karakteristika tj. na cijeli komplet od 81 karte. Poredajmo ih na način da predhodnu formu od 27 karata kopiramo tri puta jednu ispod druge u tri različite boje (slika 1.12). Prikažemo li to pomoću



Slika 1.12: SET

tablice, možemo uočiti veliku tablicu čije su ćelije ispunjene malim tablicama. Redak velike tablice odgovara boji, a stupac velike tablice ispuni simbola na kartama. Redovi male tablice odgovaraju obliku, a stupci broju simbola na kartama. Dakle, tri će karte

činiti set ako se nalaze u istom ili različitim stupcima velike tablice te istom ili različitim stupcima male tablice. Isto vrijedi i za retke velike i male tablice.

Na slici 1.13 shematski je prikazan anti-set veličine 20. Dodavanjem "x" u bilo koje prazno

x		x					x	
				x		x		x
x		x					x	
	x						x	
	x					x		x
x		x		x				
	x					x		x

Slika 1.13: Anti-set veličine 20

polje dobit ćemo skup od 21 karte koji sadrži set. Na primjer, kao na slici 1.14. Nešto kasnije ćemo se uvjeriti da je to zaista tako.

x		x					x	
				x		x		x
x		x					x	
	x			x			x	
	x					x		x
x		x		x				
	x					x		x

Slika 1.14: Set u skupu od 21 karte

Dakle, mogli bismo pretpostaviti da je iz kompleta karata s dvije karakteristike moguće podijeliti maksimalno 4, iz kompleta karata s tri karakteristike maksimalno 9, a iz kompleta



karata s četiri karakteristike maksimalno 20 karata među kojima nema seta. Na temelju nekoliko prethodno promotrenih primjera ne možemo zaključiti je li naša pretpostavka ispravna. Potrebno je utvrditi je li pronađeni skup karata zaista anti-set te da ne postoji veći anti-set u bilo kojem od navedenih slučajeva. S ciljem rješavanja tog problema, igru SET opisat ćemo na matematički način te ćemo matematičkim "alatima" formalno dokazati da su gore navedeni anti-setovi zaista najveći mogući.

## Poglavlje 2

# Matematička interpretacija igre SET

### 2.1 Vektorski prostor $\mathbb{Z}_3^n$ nad poljem $\mathbb{Z}_3$

Za početak prisjetimo se osnovnih pojmova *polja* i *vektorskog prostora* [19, 18].

**Definicija 1.** Neka je  $\mathbb{F}$  neprazan skup na kojem su definirane binarne operacije zbrajanja  $+$  i množenja  $\cdot$ . Kažemo da je uređena trojka  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  **polje** ako vrijedi

1.  $(\mathbb{F}, +)$  Abelova grupa
2.  $(\mathbb{F}^*, \cdot)$  Abelova grupa ( $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ )
3. svojstvo distributivnosti operacije  $\cdot$  obzirom na operaciju  $+$ :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \text{za sve } x, y, z \in \mathbb{F}.$$

Pritom je  $0$  neutralni element za zbrajanje, a  $1$  neutralni element za množenje.

Radi jednostavnosti, često se sam skup  $\mathbb{F}$  naziva polje. Najpoznatiji primjeri polja s kojima se neprestano susrećemo su  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ . *Konačna polja* su polja s konačno mnogo elemenata. Važan primjer takvog polja je  $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$  gdje je  $p$  prost broj,  $\mathbb{Z}_p$  konačan skup  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , a  $+_p$  i  $\cdot_p$  binarne operacije zbrajanja i množenja definirane na sljedeći način:

$$a +_p b = c \text{ ako } a + b \equiv c \pmod{p}, \quad \text{i}$$
$$a \cdot_p b = d \text{ ako } a \cdot b \equiv d \pmod{p}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p.$$

Elemente bilo kojeg polja često zovemo *skalari*, osobito u kontekstu vektorskog prostora nad poljem.

**Definicija 2.** Neka je  $(V, +)$  Abelova grupa, zatim  $\mathbb{F}$  polje. Ako postoji preslikavanje  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$  koje zadovoljava sljedeća svojstva:

1.  $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ , za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ,  $a \in V$  (kvaziasocijativnost)
2.  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ , za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ,  $a \in V$   
(distributivnost operacije  $\cdot$  u odnosu na zbrajanje u  $\mathbb{F}$ )
3.  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ , za sve  $\alpha \in \mathbb{F}$ ,  $a, b \in V$   
(distributivnost operacije  $\cdot$  u odnosu na zbrajanje u  $V$ )
4.  $1 \cdot a = a$ , za sve  $a \in V$ ,

tada se uređena trojka  $(V, +, \cdot)$  naziva **vektorski ili linearni prostor nad poljem  $\mathbb{F}$** . Elemente skupa  $V$  zovemo **vektorima**, a neutralni element Abelove grupe  $(V, +)$  **nulvektor** i označavamo s  $0_V$ . Operaciju  $\cdot$  nazivamo **množenje vektora skalarom**, a radi jednostavnosti umjesto  $\alpha \cdot a$  pišemo  $\alpha a$ .

Ako je  $\mathbb{F}$  konačno polje sa  $p$  elemenata (skalara), onda je i vektorski prostor  $\mathbb{F}^n$  konačan skup i sadrži  $p^n$  elemenata (vektora). Posebno, za  $n = 1$  dobivamo da je polje  $\mathbb{F}$  vektorski prostor *nad samim sobom*. Pri tome, elementi polja imaju dvostruku ulogu - oni su i vektori i skalari, a operacija množenja iz polja ujedno je i operacija množenja skalarom u vektorskom prostoru.

Za matematički opis igre SET od interesa će nam biti konačni vektorski prostor  $(\mathbb{Z}_3^n, +_3, \cdot_3)$ . Polje  $\mathbb{Z}_3$  sastoji se od točno tri skalara  $\{0, 1, 2\}$  pa u čitavom vektorskom prostoru  $\mathbb{Z}_3^n$  postoji  $3^n$  vektora. Binarna operacija  $+_3$  na skupu  $\mathbb{Z}_3$  svakom uređenom paru  $(x, y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  pridružuje ostatak pri dijeljenju broja  $x + y$  brojem 3. Isto tako, binarna operacija  $\cdot_3$  na skupu  $\mathbb{Z}_3$  svakom uređenom paru  $(x, y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  pridružuje ostatak pri dijeljenju broja  $xy$  brojem 3. Rezultate operacija na svakom uređenom paru zapisujemo *Cayleyevim tablicama*:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Iz tablice se vidi da su elementi 1 i 2 međusobno suprotni za zbrajanje pa se često umjesto 2 piše  $-1$  te se umjesto 1 piše  $-2$ . Svaki od elemenata 1 i 2 sam je sebi inverz za množenje (elementi 1 i  $p - 1$  uvijek su inverzi sami sebi za množenje u  $\mathbb{Z}_p$ ).

Elementi vektorskog prostora  $(\mathbb{Z}_3^n, +_3, \cdot_3)$  su vektori prikazani kao uređene  $n$ -torke  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

gdje su  $x_i \in \mathbb{Z}_3$  za  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Na tom prostoru definirano je zbrajanje  $n$ -torki  $+_3$  i množenje  $n$ -torki skalarom  $\cdot_3$  po koordinatama tj.

$$\vec{x} +_3 \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) +_3 (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 +_3 y_1, x_2 +_3 y_2, \dots, x_n +_3 y_n)$$

$$\text{i } \alpha \cdot_3 \vec{x} = \alpha \cdot_3 (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot_3 x_1, \alpha \cdot_3 x_2, \dots, \alpha \cdot_3 x_n), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{Z}_3^n, \alpha \in \mathbb{Z}_3.$$

Na primjer, neka su  $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0, 0, 2)$  i  $\vec{y} = (2, 0, \dots, 0, 1, 2)$  elementi vektorskog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$ , njihov zbroj jednak je

$$\begin{aligned} \vec{x} +_3 \vec{y} &= (1, 0, \dots, 0, 0, 2) +_3 (2, 0, \dots, 0, 1, 2) \\ &= (1 +_3 2, 0 +_3 0, \dots, 0 +_3 0, 0 +_3 1, 2 +_3 2) \\ &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Pomnožimo li vektor  $\vec{x}$  skalarom  $\alpha = 2$  iz polja  $\mathbb{Z}_3$  dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} 2 \cdot_3 \vec{x} &= 2 \cdot_3 (1, 0, \dots, 0, 0, 2) \\ &= (2 \cdot_3 1, 2 \cdot_3 0, \dots, 2 \cdot_3 0, 2 \cdot_3 0, 2 \cdot_3 2) \\ &= (2, 0, \dots, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

## 2.2 Koordinatizacija i algebarski opis seta

Prisjetimo se da su karte SET-a određene s četiri karakteristike: broj, oblik, ispuna i boja, a svaka od njih ima tri mogućnosti. Upravo sama konstrukcija karata indicira da igru SET možemo modelirati pomoću konačnog četverodimenzionalnog vektorskog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$  koji se sastoji od  $3^4 = 81$  elementa. Dakle, karte SET-a predstavljaju vektore, odnosno elemente tog vektorskog prostora. Svakoj karakteristici pridružiti ćemo po jednu koordinatu:  $x_1$  označava broj,  $x_2$  oblik,  $x_3$  ispunu i  $x_4$  boju simbola na karti. Budući da se nalazimo nad poljem  $\mathbb{Z}_3$  koordinate poprimaju vrijednosti 0, 1 i 2 što je ekvivalentno činjenici da pojedina karakteristika može poprimiti tri mogućnosti. Stoga, svaku kartu SET-a možemo prikazati kao uređenu četvorku  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  u vektorskom prostoru  $\mathbb{Z}_3^4$  nad poljem  $\mathbb{Z}_3$ . Model prema kojem ćemo karti pridružiti uređenu četvorku prikazan je tablicom 2.1. Tako, na primjer, karte na slici 1.1 koje čine set, odgovaraju četvorkama  $(0, 2, 2, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 1)$  i  $(2, 0, 0, 2)$ . Promatrajući karte na ovaj način postavlja se pitanje kako prepoznati set. Zbrojimo li prethodne četvorke u  $\mathbb{Z}_3^4$  dobivamo sljedeće

$$(0, 2, 2, 0) +_3 (1, 1, 1, 1) +_3 (2, 0, 0, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Pogledajmo primjere na slici 1.3, prikažimo karte kao uređene četvorke te ih zbrojimo:

$$(2, 0, 0, 0) +_3 (1, 0, 0, 1) +_3 (0, 0, 0, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

koordinata	0	1	2
broj - $x_1$	jedan	dva	tri
oblik - $x_2$	val	oval	romb
ispuna - $x_3$	neispunjeno	djelomično ispunjeno	potpuno ispunjeno
boja - $x_4$	crvena	ljubičasta	zelena

Tablica 2.1: Prijelaz na koordinatni prikaz

$$(0, 0, 2, 0) +_3 (1, 1, 2, 1) +_3 (2, 2, 2, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Uočimo da zbrajanjem triju četvorki koje čine set u svakom od ovih slučajeva kao rezultat dobivamo  $(0, 0, 0, 0)$ . S druge strane, zbrojimo li četvorke koje odgovaraju kartama na slici 1.4 koje ne čine set, dobivamo:

$$(0, 1, 2, 0) +_3 (1, 1, 2, 0) +_3 (2, 0, 2, 0) = (0, 2, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Dakle, naslućujemo da set predstavljaju tri vektora kojima je zbroj jednak nulvektoru. Pokažimo da je uistinu to tako i promotrimo samo jednu koordinatu uređene četvorke  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Da bismo imali set pojedina karakteristika na sve tri karte mora biti ili ista ili različita. Primjetimo da je rezultat zbrajanja bilo koja tri ista elementa iz polja  $\mathbb{Z}_3$  jednak nuli:

$$x + x + x = 3x \equiv 0 \pmod{3},$$

tj.

$$x +_3 x +_3 x = 0.$$

Isto tako, zbroj tri elementa iz  $\mathbb{Z}_3$  od kojih se svaki razlikuje od ostalih jednak je nuli:

$$0 + 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3},$$

odnosno

$$0 +_3 1 +_3 2 = 0.$$

Drugim riječima, zbroj tri elementa polja  $\mathbb{Z}_3$ , koji su svi isti ili svi različiti iznosi 0. Suprotno tome, pretpostavimo da su  $x$  i  $y$  različiti elementi iz  $\mathbb{Z}_3$ . Tada je

$$x + x + y = 2x + y \equiv y - x \pmod{3} \neq 0.$$

Primjenimo li ove argumente na zbrajanje sve četiri koordinate možemo zaključiti da set prestavlja tri vektora čiji je zbroj jednak nulvektoru.

Iz ovih opažanja dobivamo jednostavan algebarski opis koji nam govori kada tri karte čine set:

**Svojtvo 1.** Karte  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  i  $\vec{k}_3$  u  $\mathbb{Z}_3^4$  čine set ako i samo ako je  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0_V$ .

Iz ovog svojstva direktno slijedi da par karata  $\vec{k}_1$  i  $\vec{k}_2$  jedinstveno određuje treću kartu koja s njima tvori set:

$$\vec{k}_3 = -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = 2(\vec{k}_1 + \vec{k}_2).$$

Radi jednostavnosti, od sada pa na dalje za zbrajanje u  $\mathbb{Z}_3^n$  umjesto  $+_3$  pisat ćemo samo znak  $+$  za koji ćemo podrazumijevati da se odnosi na zbrajanje modulo 3.

### 2.3 Afini prostor $\mathbb{Z}_3^n$

Vektorski prostor  $\mathbb{Z}_3^n$  također možemo promatrati kao  $n$ -dimenzionalni *afini prostor nad samim sobom*. Elementi afinog prostora su *točke* pa u ovom slučaju uređene  $n$ -torke imaju ulogu vektora i točke. Prije nego što se pozabavimo sa  $\mathbb{Z}_3^n$  prisjetit ćemo se definicije afinog prostora. [2, 6, 15, 22]

**Definicija 3.** Neka je  $\mathcal{A}$  neprazan skup,  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ , te neka je definirano preslikavanje  $v : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ . Uređena trojka  $(\mathcal{A}, V, v)$  naziva se **afinim prostorom nad  $V$** , a elementi skupa  $\mathcal{A}$  *točkama tog prostora* ako vrijedi:

(A1) za svaki  $A \in \mathcal{A}$  i svaki  $x \in V$  postoji jednoznačno određena točka  $B \in \mathcal{A}$  tako da je  $v(A, B) = x$ ;

(A2) za sve  $A, B, C \in \mathcal{A}$  vrijedi  $v(A, B) + v(B, C) = v(A, C)$  (Charlesova jednakost).

Često se, radi jednostavnosti, sam sup  $\mathcal{A}$  naziva *afinim prostorom*.

Kako je  $\mathbb{Z}_3$  polje, a  $\mathbb{Z}_3^n$  vektorski prostor, za  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_3^n$  i  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_3^n$  definiramo preslikavanje  $v : \mathbb{Z}_3^n \times \mathbb{Z}_3^n \rightarrow \mathbb{Z}_3^n$  sa

$$v(X, Y) = \overrightarrow{XY} = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n).$$

Uz tako definirano preslikavanje  $v$ ,  $\mathbb{Z}_3^n$  je *konačno-dimenzionalni afini prostor nad samim sobom*. Elementi tog prostora su  $k$ -dimenzionalne ravnine ili  $k$ -ravnine gdje je  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Posebno se 0-ravnina naziva *točka*, 1-ravnina *pravac*, 2-ravnina *ravnina*, a  $(n-1)$ -ravnina *hiperravnina*. Svaka  $k$ -ravnina je  $k$ -dimenzionalni afini potprostor afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$ .

**Točke u  $\mathbb{Z}_3^n$** 

Točke u  $\mathbb{Z}_3^n$  su uređene  $n$ -torke  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gdje su  $x_i \in \mathbb{Z}_3$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dakle,  $\mathbb{Z}_3^n$  se sastoji od  $3^n$  točaka. Točke  $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{Z}_3^n$  su linearno zavisne ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \quad (2.1)$$

i barem jedan od  $\alpha_i \neq 0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ . Posebno za tri linearno zavisne točke kažemo da su *kolinearne*, odnosno da leže na istom pravcu. Za četiri linearno zavisne točke kažemo da su *komplanarne* ili da pripadaju istoj ravnini.

**Pravci u  $\mathbb{Z}_3^n$** 

Pravac određen točkom  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  i vektorom smjera  $\vec{a} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  ima *parametarsku jednadžbu* u koordinatnom obliku

$$(a_1 + \alpha v_1, a_2 + \alpha v_2, \dots, a_n + \alpha v_n),$$

pri čemu je parametar  $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ . Ako je pravac određen dvjema različitim točkama  $A$  i  $B$ , tada je njegov vektor smjera jednak vektoru  $\vec{AB} = B - A$ . Budući da parametar  $\alpha$  može poprimiti samo vrijednosti 0, 1 ili 2, svaki se pravac u  $\mathbb{Z}_3^n$  sastoji od samo 3 različite točke:  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \dots, a_n + v_n)$  i  $(a_1 + 2v_1, a_2 + 2v_2, \dots, a_n + 2v_n)$ . Dakle, za svake dvije različite točke postoji jedinstvena treća točka koja s njima tvori pravac u  $\mathbb{Z}_3^n$ . Za prvu točku možemo odabrati bilo koju od njih  $3^n$ , za drugu bilo koju od njih  $3^n - 1$ , dok je treća točka jedinstvena. Kako redoslijed točaka na pravcu nije bitan, prema principu prebrojavanja postoji ukupno

$$\frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3^n \cdot (3^n - 1)}{6}$$

različitih pravaca u  $\mathbb{Z}_3^n$ .

**Ravnina u  $\mathbb{Z}_3^n$** 

Ravnina određena točkom  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  i s dva nekolinearna vektora  $\vec{a} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  i  $\vec{b} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  ima *parametarsku jednadžbu* u koordinatnom obliku

$$(a_1 + \alpha v_1 + \beta w_1, a_2 + \alpha v_2 + \beta w_2, \dots, a_n + \alpha v_n + \beta w_n),$$

pri čemu su parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ . Ako je ravnina određena s tri nekolinearne točke  $A$ ,  $B$  i  $C$ , tada za vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  možemo uzeti vektore  $\vec{AB} = B - A$  i  $\vec{AC} = C - A$ . Budući da

parametri  $\alpha$  i  $\beta$  mogu poprimiti samo vrijednosti 0, 1 ili 2, svaka se ravnina u  $\mathbb{Z}_3^n$  sastoji od  $3 \cdot 3 = 9$  različitih točaka. Dakle, za svake tri nekolinearne točke postoji šest jedinstvenih točaka koje s njima tvore ravninu u  $\mathbb{Z}_3^n$ . Za prvu točku možemo odabrati bilo koju od njih  $3^n$ , a za drugu bilo koju od njih  $3^n - 1$ . Budući da treća točka mora biti nekolinearna s prve dvije, postoji  $3^n - 3$  mogućnosti odabira treće točke. Ostale točke su jedinstvene pa prema principu prebrojavanja, uzimajući u obzir da redosljed točaka na ravnini nije bitan, postoji ukupno

$$\frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot (3^n - 3) \cdot 1^6}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1^6} = \frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot (3^n - 3)}{432}$$

različitih ravnina u  $\mathbb{Z}_3^n$ .

### **$k$ -ravnina u $\mathbb{Z}_3^n$**

Općenito je bilo koja  $k$ -ravnina određena točkom  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  i sa  $k$  linearno nezavisnih vektora  $\vec{a}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$ ,  $\vec{a}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$ , ...,  $\vec{a}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn})$ . Parametarska jednadžba  $k$ -ravnine u koordinatnom obliku je

$$(a_1 + \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{21} + \dots + \alpha_k v_{k1}, a_2 + \alpha_1 v_{12} + \alpha_2 v_{22} + \dots + \alpha_k v_{k2}, \dots, a_n + \alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} + \dots + \alpha_k v_{kn}),$$

pri čemu su parametri  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_3$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Isto tako,  $k$ -ravnina je određena s  $k + 1$  linearno nezavisne točke  $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ . U tom slučaju za linerno nezavisne vektore možemo uzeti vektore

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = A_2 - A_1, \overrightarrow{A_1 A_3} = A_3 - A_1, \dots, \overrightarrow{A_1 A_{k+1}} = A_{k+1} - A_1.$$

Budući da parametri  $\alpha_i$  mogu poprimiti samo vrijednosti 0, 1 ili 2, svaka se  $k$ -ravnina u  $\mathbb{Z}_3^n$  sastoji od  $3^k$  različitih točaka. Dakle, za svake  $k + 1$  linearno nezavisne točke postoji  $3^k - k - 1$  jedinstvenih točaka koje s njima tvore  $k$ -ravninu u  $\mathbb{Z}_3^n$ . Na sličan način kao što smo prebrojali sve pravce i ravnine u  $\mathbb{Z}_3^n$ , prebrojimo koliko ima  $k$ -ravnina. Za prvu točku možemo odabrati bilo koju od njih  $3^n$ , za drugu bilo koju od njih  $3^n - 1$ , a za treću bilo koju od njih  $3^n - 3$ . Sada četvrta točka ne smije biti komplanarna s prethodne tri pa postoji ukupno  $3^n - 9$  mogućnosti odabira četvrte točke. Isto tako, svaka slijedeća točka mora biti linearno nezavisna s prethodno odabranim točkama. Tako se posljednja  $k + 1$  točka može odabrati na  $3^n - 3^{k-1}$  načina. Preostale točke su jedinstvene pa prema principu prebrojavanja, uz zanemarivanje redosljeda točaka na  $k$ -ravnini, postoji ukupno

$$\frac{3^n \cdot (3^n - 1) \cdot (3^n - 3) \cdot \dots \cdot (3^n - 3^{k-1}) \cdot 1^{3^k - k - 1}}{3^k \cdot (3^k - 1) \cdot (3^k - 3) \cdot \dots \cdot (3^k - 3^{k-1}) \cdot 1^{3^k - k - 1}} = \frac{3^n (3^n - 1) \cdot \dots \cdot (3^n - 3^{k-1})}{3^k (3^k - 1) \cdot \dots \cdot (3^k - 3^{k-1})} \quad (2.2)$$

različitih  $k$ -ravnina u  $\mathbb{Z}_3^n$ .



### Hiperravnina

Izdvojimo posebno jednadžbu hiperravnine. Osim parametarskom jednadžbom, svaka se hiperravnina u afinom prostoru  $\mathbb{Z}_3^n$  može analitički predstaviti jednom linearnom jednadžbom oblika

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_0$$

pri čemu nisu svi  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_3$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  jednaki nula. Ova jednadžba naziva se *opći oblik jednadžbe hiperravnine*.

Promotrimo li izraz  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$  možemo uočiti da je za svaku točku  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_3^n$  njegova vrijednost jednaka 0, 1 ili 2. Dakle, svaka točka afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  leži na jednoj od tri paralelene hiperravnine:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 1$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 2.$$

Drugim riječima, afini prostor  $\mathbb{Z}_3^n$  može se rastaviti na tri paralelne hiperravnine.

Specijalno razmotrimo u kakvom su odnosu gore navedene paralelne hiperravnine i točke nekog pravca u  $\mathbb{Z}_3^n$ .

Neka je  $p$  pravac u  $\mathbb{Z}_3^n$  određen s točkama  $T_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $T_2(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \dots, a_n + v_n)$  i  $T_3(a_1 + 2v_1, a_2 + 2v_2, \dots, a_n + 2v_n)$ , gdje je  $\vec{a} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vektor smjera pravca  $p$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da točka  $T_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$  pripada hiperravnini  $\Pi_1^{n-1} \dots \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ . Tada vrijedi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

Sada pogledajmo gdje se nalazi točka  $T_2(a_1 + v_1, a_2 + v_2, \dots, a_n + v_n)$ . Uvrštavanjem koordinata točke  $T_2$  u izraz  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n &= \alpha_1 a_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \alpha_n v_n \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= 0 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Kako se nalazimo u polju  $\mathbb{Z}_3$ , vrijednosti koje dobiveni izraz može poprimiti su 0, 1 i 2, što znači da  $T_2$  pripada jednoj od paralelnih ravnina. Ako  $T_2$  pripada hiperravnini  $\Pi_1^{n-1}$  tada je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Preostaje nam provjeriti kojoj hiperravnini u tom slučaju pripada točka  $T_3$ . Uvrštavanjem koordinata točke  $T_3$  u izraz  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$  dobivamo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n &= \alpha_1 a_1 + 2\alpha_1 v_1 + \alpha_2 a_2 + 2\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n a_n + 2\alpha_n v_n \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) + 2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= 0 + 2 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dakle, točka  $T_3$  također pripada ravnini  $\Pi_1^{n-1}$ .

Ako točka  $T_2$  pripada ravnini  $\Pi_2^{n-1} \dots \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 1$ . Tada je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 1.$$

Sada za točku  $T_3$  vrijedi:

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n &= \alpha_1 a_1 + 2\alpha_1 v_1 + \alpha_2 a_2 + 2\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n a_n + 2\alpha_n v_n \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) + 2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= 0 + 2 \cdot 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Slijedi da se točka  $T_3$  nalazi u hiperravnini  $\Pi_3^{n-1} \dots \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 2$ .

U posljednjem slučaju, ako se  $T_2$  nalazi u hiperravnini  $\Pi_3^{n-1}$  tada je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 2,$$

a za točku  $T_3$  vrijedi:

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n &= \alpha_1 a_1 + 2\alpha_1 v_1 + \alpha_2 a_2 + 2\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n a_n + 2\alpha_n v_n \\ &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) + 2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= 0 + 2 \cdot 2 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Slijedi da točka  $T_3$  pripada hiperravnini  $\Pi_2^{n-1}$ .

Analogno se dobiva i za slučajeve kada se točka  $T_1$  nalazi u hiperravnini  $\Pi_2^{n-1}$  i  $\Pi_3^{n-1}$ . Dakle, možemo zaključiti da se točke pravca  $p$  u  $\mathbb{Z}_3^n$  nalaze sve u istoj ili svaka u različitoj paralelnoj hiperravnini  $\Pi_i^{n-1}$ , gdje je  $i = 1, 2, 3$  te je  $\mathbb{Z}_3^n = \Pi_1^{n-1} \cup \Pi_2^{n-1} \cup \Pi_3^{n-1}$ .

## 2.4 Geometrijska interpretacija seta

U odjeljku 2.2 karte SET-a prikazali smo kao vektore u vektorskom prostoru  $\mathbb{Z}_3^4$  te smo algebarski opisali kada tri karte čine set. Osim toga, set možemo interpretirati i geometrijski pomoću afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ .

Kako je  $\mathbb{Z}_3^n$  afini prostor nad samim sobom, točke tog prostora kao uređene  $n$ -torke imaju dvostruku ulogu: one su točke, ali i vektori. Stoga, karte SET-a možemo promatrati kao točke u četverodimenzionalnom afinom prostoru  $\mathbb{Z}_3^4$ . U tom slučaju, ako su  $K_1, K_2$  i  $K_3$  različite točke u  $\mathbb{Z}_3^4$ , svojstvo 1 možemo pisati kao:

**Svojstvo 2.** Karte  $K_1, K_2$  i  $K_3$  u  $\mathbb{Z}_3^4$  čine set ako i samo ako je  $K_1 + K_2 + K_3 = (0, 0, 0, 0) = 0$ .

To upravo odgovara uvjetu (2.1) kolinearnosti tri točke gdje su  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  te je  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 0$ . Znamo da tri različite kolinearne točke u  $\mathbb{Z}_3^n$  čine jedan pravac pa prema tome, u geometrijskoj interpretaciji, set možemo poistovjetiti s pravcem u  $\mathbb{Z}_3^4$  čije točke predstavljaju karte seta. Iz svojstva 2 direktno slijedi da dvije točke jedinstveno određuju treću točku koja je s njima kolinearna:

$$K_3 = 2(K_1 + K_2). \quad (2.3)$$

U odjeljku 2.2 (str. 16) vidijeli smo da se zbrajanjem tri iste ili tri različite vrijednosti u  $\mathbb{Z}_3$  dobiva 0. Dakle, svaka koordinata točaka  $K_1, K_2$  i  $K_3$  u  $\mathbb{Z}_3^n$  mora biti svakoj točki ista ili svakoj točki različita kako bi  $K_1, K_2$  i  $K_3$  pripadale istom pravcu. Upravo to odgovara uvjetu seta da tri karte čine set ako su pojedine karakteristike simbola na svim kartama iste ili na svim kartama različite. Sjetimo se da pojedina koordinata točke u  $\mathbb{Z}_3^4$  predstavlja jednu od karakteristika simbola na kartama SET-a.

Ne zaboravimo da je naš cilj pronaći najveći mogući anti-set, odnosno skup karata među kojima nema niti jednog seta. Sada naš cilj možemo usmjeriti na traženje najvećeg podskupa točaka u  $\mathbb{Z}_3^4$  koji ne sadrži niti jedan pravac što ujedno odgovara traženom anti-setu. Prije nego što se time pozabavimo, osvrnut ćemo se na nekoliko činjenica i svojstava iz geometrije unutar afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  i to za  $n = 1, 2, 3, 4$ .

## 2.5 Geometrija u $\mathbb{Z}_3^n$

- $n = 1$

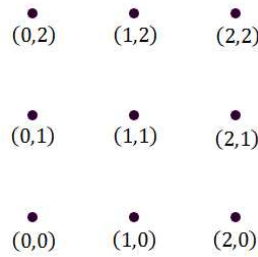
$\mathbb{Z}_3$  je jednodimenzionalni afini prostor koji se sastoji od tri elementa: 0, 1 i 2. Dakle,  $\mathbb{Z}_3$  je pravac koji se sastoji od samo tri točke (slika 2.1).



Slika 2.1: Afini prostor  $\mathbb{Z}_3$

- $n = 2$

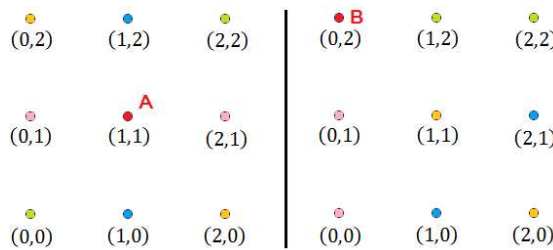
$\mathbb{Z}_3^2$  je dvodimenzionalni afini prostor, odnosno ravnina koja se sastoji od  $3^2 = 9$  točaka kao što prikazuje slika 2.2.



Slika 2.2: Afini prostor  $\mathbb{Z}_3^2$

Na svakom pravcu u  $\mathbb{Z}_3^2$  leže tri različite točke. Presjek dvaju pravaca je točka. Pogledajmo koliko pravaca prolazi kroz neku točku prostora  $\mathbb{Z}_3^2$ .

Neka je  $T$  bilo koja fiksna točka u  $\mathbb{Z}_3^2$ , tada postoji još 8 različitih točaka od kojih svaka određuje pravac s točkom  $T$ . Međutim, svaki od njih osim točke  $T$  sadrži dvije preostale točke pa imamo  $\frac{8}{2} = 4$  pravca kroz točku  $T$ . Tako na primjer točkom  $A(1, 1)$  prolaze pravci  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_1 + x_2 = 2$  i  $x_1 + 2x_2 = 0$ , a točkom  $B(0, 2)$  pravci  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_1 + x_2 = 2$  i  $x_1 + 2x_2 = 1$  kao što je prikazano na slici 2.3. Osim točke  $A$ , točke obojane istom bojom pripadaju istom pravcu. Analogno za pravce kroz točku  $B$ .



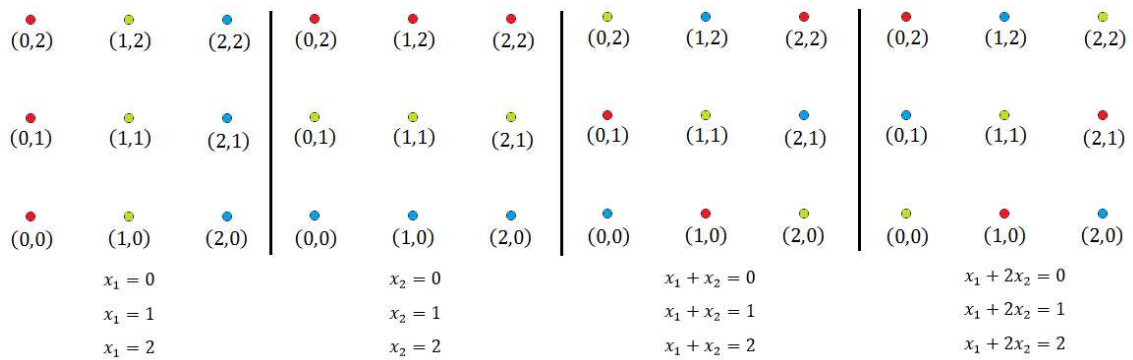
Slika 2.3: Pravci kroz točke  $A$  i  $B$  u  $\mathbb{Z}_3^2$

Za svaki od četiri pravca koji prolaze nekom točkom postoje dva različita pravca koja su s njime paralelna. To je upravo zbog toga jer se afini prostor  $\mathbb{Z}_3^n$  može na nekoliko načina rastaviti na tri paralelne hiperravnine, a u ovom slučaju pravci su hiperravnine unutar  $\mathbb{Z}_3^2$ . Stoga, u  $\mathbb{Z}_3^2$  postoji ukupno  $4 \cdot 3 = 12$  različitih pravaca. Isto se dobije ako u izraz (2.2)

uvrstimo  $n = 2$  i  $k = 1$ :

$$\frac{3^2 \cdot (3^2 - 1)}{3^1 \cdot (3^1 - 1)} = \frac{9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 12.$$

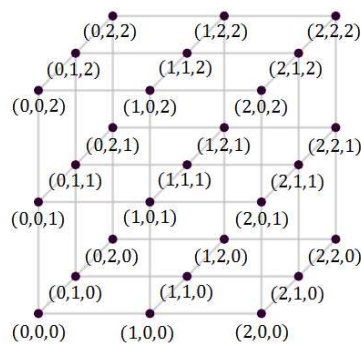
Svi pravci i njihove jednačbe prikazani su na slici 2.4. Točke koje pripadaju istom pravcu obojene su istom bojom.



Slika 2.4: Paralelni pravci u  $\mathbb{Z}_3^2$

•  $n = 3$

$\mathbb{Z}_3^3$  je trodimenzionalni afini prostor koji se sastoji od  $3^3 = 27$  točaka prikazanih na slici 2.5.



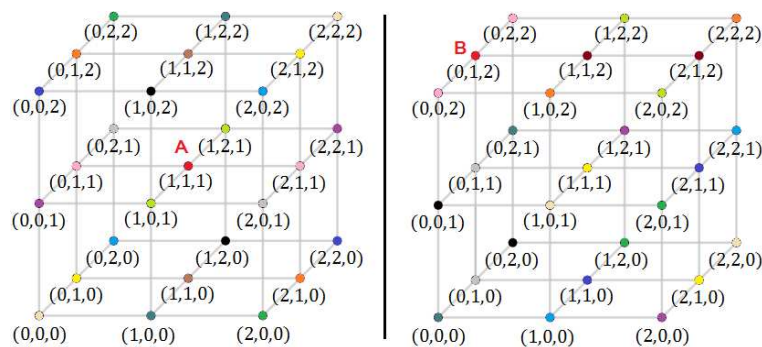
Slika 2.5: Afini prostor  $\mathbb{Z}_3^3$

Na svakom pravcu u  $\mathbb{Z}_3^3$  leže tri, a na svakoj ravnini devet točaka. Presjek dvaju pravaca je točka, a presjek dviju ravnina je pravac.

Slično kao i ranije, promotrimo koliko pravaca prolazi nekom fiksnom točkom  $T$ . Kako se  $\mathbb{Z}_3^3$  sastoji od 27 točaka, kroz bilo koju fiksnu točku  $T$  prolazi

$$\frac{27 - 1}{2} = 13$$

pravaca. Na slici 2.6 prikazano je trinaest pravaca koji prolaze kroz točku  $A$  i točku  $B$ . Osim točke  $A$ , točke obojene istom bojom pripadaju istom pravcu. Isto vrijedi za pravce kroz točku  $B$ .



Slika 2.6: Pravci kroz točke  $A$  i  $B$  u  $\mathbb{Z}_3^3$

Točkom  $A(1, 1, 1)$  prolazi sljedećih trinaest pravaca:

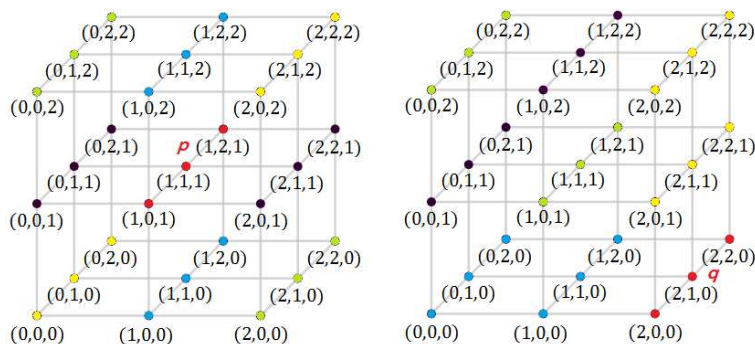
$$(1 + 2\alpha, 1, 1), (1, 1 + 2\alpha, 1), (1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha, 1), (1 + 2\alpha, 1 + \alpha, 1), (1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha), \\ (1, 1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha), (1 + \alpha, 1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha), (1 + 2\alpha, 1, 1 + \alpha), (1, 1, 1 + 2\alpha), \\ (1 + 2\alpha, 1, 1 + 2\alpha), (1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha, 1 + \alpha), (1, 1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \text{ i } (1 + 2\alpha, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha), \alpha \in \mathbb{Z}_3.$$

Točkom  $B(0, 1, 2)$  prolaze pravci:

$$(\beta, 1 + \beta, 2 + \beta), (\beta, 1, 2 + \beta), (\beta, 1 + 2\beta, 2 + \beta), (0, 1 + \beta, 2), (\beta, 1 + \beta, 2), (\beta, 1, 2), \\ (\beta, 1 + 2\beta, 2), (2\beta, 1 + 2\beta, 2 + \beta), (0, 1 + 2\beta, 2 + \beta), (0, 1, 2 + \beta), (\beta, 1, 2 + 2\beta), \\ (0, 1 + 2\beta, 2 + 2\beta), (\beta, 1 + 2\beta, 2 + 2\beta), \beta \in \mathbb{Z}_3.$$

Isto tako, možemo pogledati koliko ravnina prolazi nekim fiksnim pravcem u  $\mathbb{Z}_3^3$ . Neka je  $p$  bilo koji pravac u  $\mathbb{Z}_3^3$ , tada postoji  $27 - 3 = 24$  točke koje nisu na pravcu  $p$ . U svakoj ravnini koja sadrži pravac  $p$  postoji 6 točaka koje ne leže na  $p$ .

Stoga, postoji  $\frac{24}{6} = 4$  ravnine u  $\mathbb{Z}_3^3$  koje prolaze pravcem  $p$ . Primjerice na slici 2.7 pravcem  $p \dots (1, 1 + \alpha, 1), \alpha \in \mathbb{Z}_3$  prolaze ravnine s jednačbama  $x_1 = 1, x_3 = 1, x_1 + x_3 = 2$  i  $2x_1 + x_3 = 0$ , dok pravcem  $q \dots (2, 1 + \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{Z}_3$  prolaze ravnine čije su jednačbe  $x_1 = 2, x_3 = 0, x_1 + x_3 = 2$  i  $2x_1 + x_3 = 1$ . Osim točaka na pravcu  $p$ , točke obojene istom


 Slika 2.7: Ravnine kroz pravce  $p$  i  $q$  u  $\mathbb{Z}_3^3$ 

bojom pripadaju istoj ravnini. Isto vrijedi i za ravnine kroz pravac  $q$ .

Sada bismo se još mogli zapitati koliko ravnina prolazi nekom fiksnom točkom  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^3$ . Ustanovili smo da kroz točku  $T$  prolazi 13 pravaca, a svaki je od njih sadržan u 4 ravnine. Budući da u svakoj ravnini postoje 4 pravca kroz točku  $T$ , postoji

$$\frac{13 \cdot 4}{4} = 13$$

ravnina koje sadrže točku  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^3$ . Tako na primjer točkom  $T(1, 0, 2)$  prolazi sljedećih trinaest ravnina:

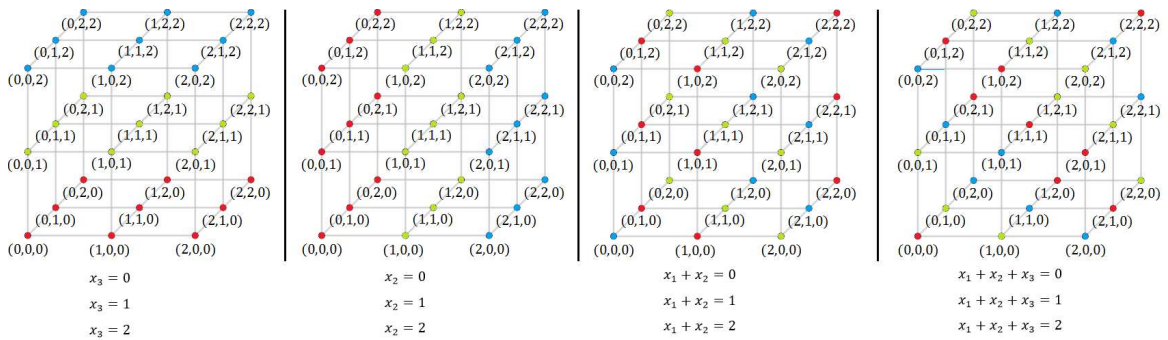
$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_1 + x_2 = 1, & 2x_1 + x_2 = 2, & 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 = 0, & x_1 + x_3 = 0, & 2x_1 + x_3 = 1, & x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 2, & x_2 + x_3 = 2, & 2x_2 + x_3 = 2, & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Afini prostor  $\mathbb{Z}_3^3$  može se rastaviti na tri paralelne ravnine pa za svaku od 13 ravnina koje prolaze nekom točkom prostora postoje dvije različite ravnine koje su s njom paralelne (ravnine su hiperravnine u  $\mathbb{Z}_3^3$ ). Dakle, u  $\mathbb{Z}_3^3$  postoji ukupno  $13 \cdot 3 = 39$  ravnina. Isto se dobije ako u izraz (2.2) uvrstimo  $n = 3$  i  $k = 2$ :

$$\frac{3^3 \cdot (3^3 - 1) \cdot (3^3 - 3)}{3^2 \cdot (3^2 - 1) \cdot (3^2 - 3)} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 24}{9 \cdot 8 \cdot 6} = 39.$$

Nekoliko ravnina i njihove jednačbe prikazane su na slici 2.8. Točke obojene istom bojom pripadaju istoj ravnini.



Slika 2.8: Paralelne ravnine u  $\mathbb{Z}_3^3$

Utvdili smo da u  $\mathbb{Z}_3^3$  postoji ukupno 39 ravnina, a u svakoj ravnini ukupno 12 pravaca. Svaki je pravac sadržan u 4 različite ravnine pa je ukupan broj pravaca u  $\mathbb{Z}_3^3$  jednak

$$\frac{39 \cdot 12}{4} = 117.$$

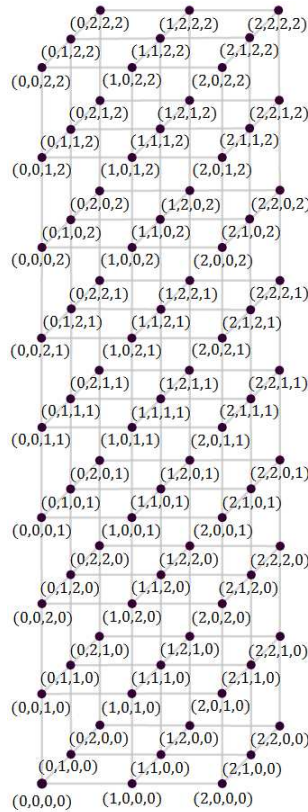
Iskoristimo li izraz (2.2) za  $n = 3$  i  $k = 1$  dobivamo isti rezultat:

$$\frac{3^3 \cdot (3^3 - 1)}{3^1 \cdot (3^1 - 1)} = \frac{27 \cdot 26}{3 \cdot 2} = 117.$$



- $n = 4$

$\mathbb{Z}_3^4$  je četverodimenzionalni afini prostor koji se sastoji od  $3^4 = 81$  točke koje su prikazane na slici 2.9. Na svakom pravcu u  $\mathbb{Z}_3^4$  leže tri, na svakoj ravnini devet, a na svakoj hiperravnini 27 točaka. Presjek dvaju pravaca je točka, presjek dviju ravnina je pravac, a presjek dviju hiperravnina je ravnina.



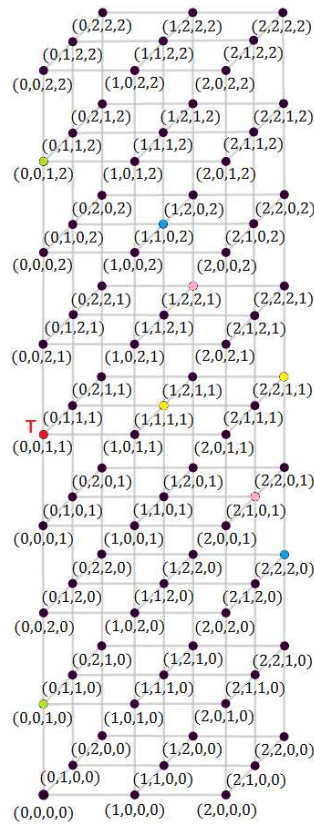
Slika 2.9: Afini prostor  $\mathbb{Z}_3^4$

Za početak, promotrimo koliko pravaca prolazi nekom fiksnom točkom  $T$ . Osim točke  $T$  pravci sadrže još dvije točke prostora pa kako se  $\mathbb{Z}_3^4$  sastoji od 81 točke, kroz fiksnu točku  $T$  prolazi

$$\frac{81 - 1}{2} = 40$$

pravaca. Na primjer, točkom  $T(0, 0, 1, 1)$  prolaze sljedeća četiri pravca:

$$(\alpha, \alpha, 1 + 2\alpha, 1 + \alpha), (0, 0, 1, 1 + \alpha), (\alpha, \alpha, 1, 1) \text{ i } (\alpha, 2\alpha, 1 + \alpha, 1), \alpha \in \mathbb{Z}_3.$$



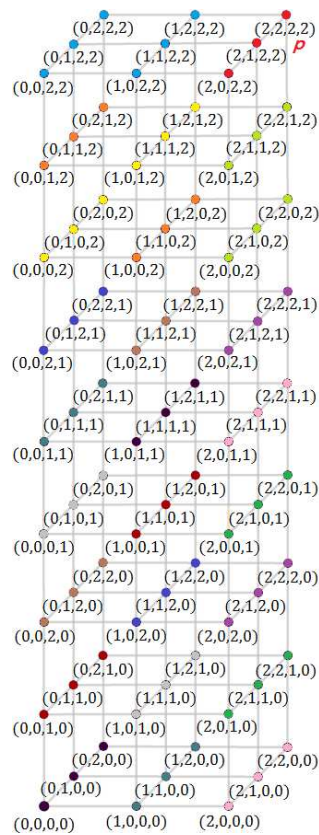
Slika 2.10: Pravci kroz točku  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^4$

Pravci su prikazani na slici 2.10. Osim točke  $T$ , točke obojene istom bojom pripadaju istom pravcu.

Pogledajmo sada koliko ravnina prolazi nekim fiksnim pravcem u  $\mathbb{Z}_3^4$ . Neka je  $p$  bilo koji pravac u  $\mathbb{Z}_3^4$ , tada postoji  $81 - 3 = 78$  točaka koje nisu na pravcu  $p$ . U svakoj ravnini koja sadrži pravac  $p$  postoji 6 točaka koje ne leže na  $p$ . Stoga, postoji  $\frac{78}{6} = 13$  ravnina u  $\mathbb{Z}_3^4$  koje prolaze pravcem  $p \dots (2, \alpha, 2, 2)$ :

$$\begin{aligned}
 & (2 + \alpha, 2\beta, 2, 2), (2, 2\beta, 2 + \alpha, 2), (2 + \alpha, 2\beta, 2 + \alpha, 2), (2 + 2\alpha, 2\beta, 2 + \alpha), \\
 & (2, 2\beta, 2 + \alpha, 2 + \alpha), (2, 2\beta, 2, 2 + \alpha), (2, 2\beta, 2 + 2\alpha, 2 + \alpha), (2 + \alpha, 2\beta, 2, 2 + \alpha), \\
 & (2 + \alpha, 2\beta, 2 + \alpha, 2 + \alpha), (2 + 2\alpha, 2\beta, 2, 2 + \alpha), (2 + 2\alpha, 2\beta, 2 + 2\alpha, 2 + \alpha), (2 + 2\alpha, 2\beta, 2 + \alpha, 2 + \alpha) \\
 & \text{i } (2 + \alpha, 2\beta, 2 + 2\alpha, 2 + \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3
 \end{aligned}$$

Osim pravca  $p$ , točke obojene istom bojom pripadaju istoj ravnini.



Slika 2.11: Ravnine kroz pravac  $p$  u  $\mathbb{Z}_3^4$

Pogledajmo koliko ravnina prolazi nekom fiksnom točkom  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^4$ . Ustanovili smo da kroz točku  $T$  prolazi 40 pravaca, a svaki je od njih sadržan u 13 ravnina. Budući da u svakoj ravnini postoje 4 pravca kroz točku  $T$ , postoji ukupno

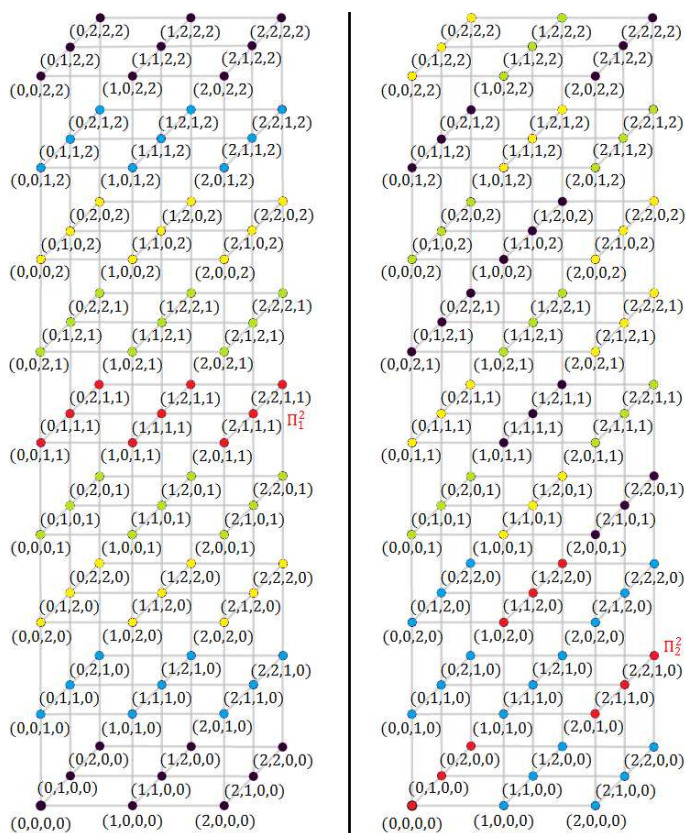
$$\frac{40 \cdot 13}{4} = 130$$

ravnina koje sadrže točku  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^4$ .

Primjerice, sljedeće ravnine prolaze točkom  $T(0, 0, 1, 1)$ :

$$(0, 2\beta, 1 + \alpha, 1), (2\alpha, 0, 1, 1 + \beta), (2\beta, 0, 1 + \alpha + \beta, 1 + 2\beta) \text{ i } (\beta, \beta, 1, 1 + 2\alpha + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3.$$

Osim točkaca, pravaca i ravnina, afini prostor  $\mathbb{Z}_3^4$  sastoji se od 3-ravnine, koje su u ovom slučaju hiperravnine. Stoga se možemo zapitati koliko hiperravnina prolazi fiksnom



Slika 2.12: Hiperravnine kroz ravnine  $\Pi_1^2$  i  $\Pi_2^2$  u  $\mathbb{Z}_3^4$

točkom, fiksnim pravcem te fiksnom ravninom u  $\mathbb{Z}_3^4$ .

Pogledajmo najprije koliko hiperravnina prolazi fiksnom ravninom  $\Pi^2$ . Postoji  $81 - 9 = 72$  točaka koje nisu na ravnini  $\Pi^2$ . U svakoj hiperravnini koja prolazi ravninom  $\Pi^2$  postoji  $27 - 9 = 18$  točaka koje nisu u  $\Pi^2$ . Dakle, postoje  $\frac{72}{18} = 4$  hiperravnine koje prolaze ravninom  $\Pi^2$ . Na slici 2.12 vidimo da ravninom  $\Pi_1^2 \dots (\alpha, \beta, 1, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$  prolaze hiperravnine  $x_3 = 1, x_4 = 1, x_3 + x_4 = 2$  i  $2x_3 + x_4 = 0$ , a ravninom  $\Pi_2^2 \dots (2\alpha + \beta, \beta, \alpha + 2\beta, 0)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$  hiperravnine  $x_4 = 2, x_1 + x_3 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0$  i  $x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$ . Osim ravnina  $\Pi_1^2$  i  $\Pi_2^2$  točke obojene istom bojom pripadaju istoj hiperravnini.

Utvdili smo da kroz fiksni pravac  $p$  prolazi 13 ravnina, a svaka je od njih sadržana u 4 hiperravnine. Premda u svakoj hiperravnini postoje 4 ravnine koje prolaze pravac  $p$ , postoji ukupno

$$\frac{13 \cdot 4}{4} = 13$$

hiperravnina koje prolaze pravcem  $p$  u  $\mathbb{Z}_3^4$ . Kroz pravac  $p \dots (2, \alpha, 2, 2)$  prolazi sljedećih nekoliko hiperravnina:

$$x_1 = 2, x_3 = 2, x_4 = 2, x_1 + x_3 = 1, x_1 + x_4 = 1, x_1 + x_3 + x_4 = 0.$$

Još nam preostaje odrediti koliko hiperravnina sadrži neku fiksnu točku  $T$  prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Ustanovili smo da kroz točku  $T$  prolazi 130 ravnina, a svaka je od njih sadržana u 4 hiperravnine. Budući da se u svakoj hiperravnini nalazi 13 ravnina koje prolaze točkom  $T$ , postoji ukupno

$$\frac{130 \cdot 4}{13} = 40$$

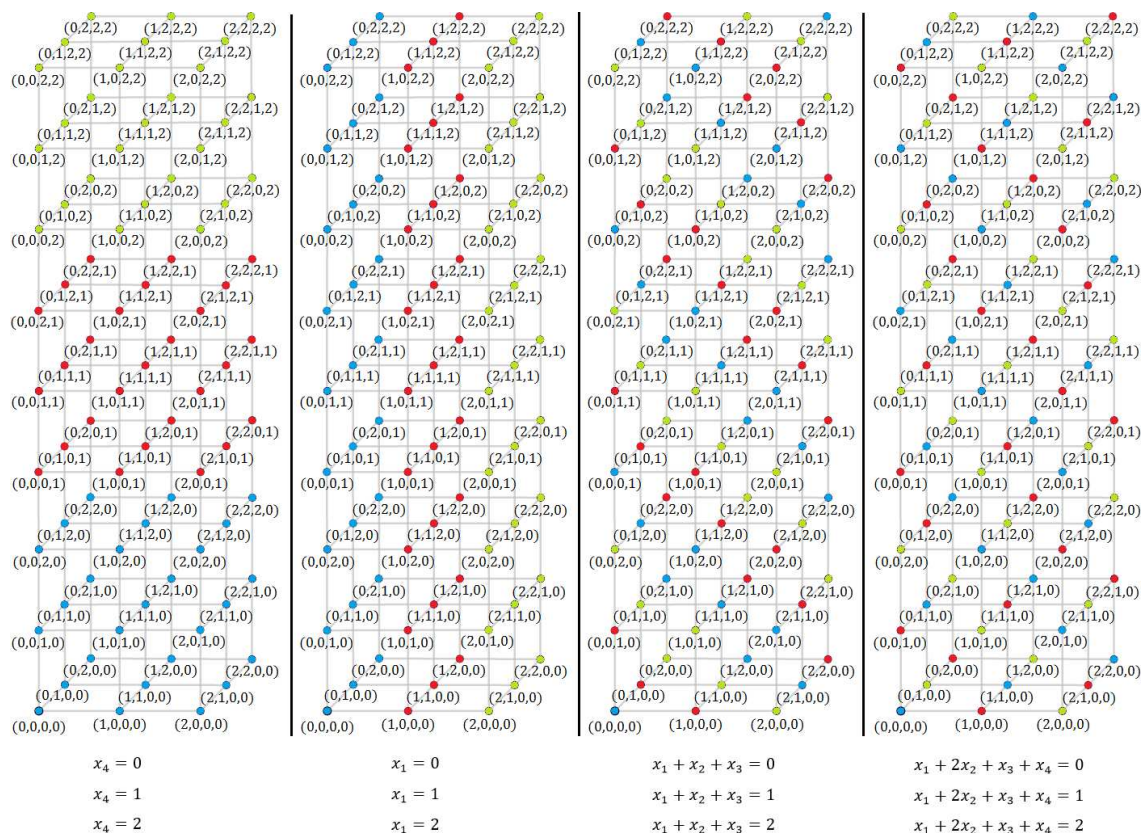
hiperravnina koje sadrže točku  $T$  u  $\mathbb{Z}_3^4$ . Primjerice točkom  $T(0, 0, 1, 1)$  prolaze hiperravnine:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_3 + x_4 = 2, 2x_3 + x_4 = 0.$$

Afini prostor  $\mathbb{Z}_3^4$  može se rastaviti na tri paralelne hiperravnine pa za svaku od 40 hiperravnina koje prolaze nekom točkom prostora postoje dvije različite hiperravnine koje su s njom paralelne. Dakle, u  $\mathbb{Z}_3^4$  postoji ukupno  $40 \cdot 3 = 120$  hiperravnina. Isto se dobije ako u izraz (2.2) uvrstimo  $n = 4$  i  $k = 3$ :

$$\frac{3^4 \cdot (3^4 - 1) \cdot (3^4 - 3) \cdot (3^4 - 9)}{3^3 \cdot (3^3 - 1) \cdot (3^3 - 3) \cdot (3^3 - 9)} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 78 \cdot 72}{27 \cdot 26 \cdot 24 \cdot 18} = 120.$$

Nekoliko hiperravnina i njihove jednadžbe prikazane su na slici 2.13. Točke obojene istom bojom pripadaju istoj hiperravnini.


 Slika 2.13: Paralelne hiperravnine u  $\mathbb{Z}_3^4$ 

Sada znamo da u  $\mathbb{Z}_3^4$  postoji ukupno 120 hiperravnina, a u svakoj hiperravnini ukupno 39 ravnina. Svaka je ravnina sadržana u 4 različite hiperravnine pa je ukupan broj ravnina u  $\mathbb{Z}_3^4$  jednak

$$\frac{120 \cdot 39}{4} = 1170.$$

Iskoristimo li izraz (2.2) za  $n = 4$  i  $k = 2$  dobivamo isti rezultat:

$$\frac{3^4 \cdot (3^4 - 1) \cdot (3^4 - 3)}{3^2 \cdot (3^2 - 1) \cdot (3^2 - 3)} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 78}{9 \cdot 8 \cdot 6} = 1170.$$

Prebrojimo još pravce unutar prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Dakle,  $\mathbb{Z}_3^4$  sadrži ukupno 120 hiperravnina, a u svakoj se hiperravnini nalazi 117 pravaca. Kako je svaki pravac u  $\mathbb{Z}_3^4$  sadržan u 13 različitih hiperravnina, ukupan broj pravaca u  $\mathbb{Z}_3^4$  jednak je

$$\frac{120 \cdot 117}{13} = 1080.$$

Isto se dobije uvrstimo li u izraz (2.2)  $n = 4$  i  $k = 1$ :

$$\frac{3^4 \cdot (3^4 - 1)}{3^1 \cdot (3^1 - 1)} = \frac{81 \cdot 80}{3 \cdot 2} = 1080.$$

Povežimo sada neke od rezultata s igrom SET. Prostor  $\mathbb{Z}_3^4$  predstavlja jedan komplet SET-a, a svaka točka tog prostora jednu kartu. Dimenzija prostora određuje broj karakteristika simbola, a skalari iz polja  $\mathbb{Z}_3$  mogućnost za pojedinu karakteristiku. Utvrdili smo da set odgovara pravcu u  $\mathbb{Z}_3^4$  pa je ukupan broj setova u kompletu SET-a jednak ukupnom broju pravaca unutar  $\mathbb{Z}_3^4$ . Dakle, prema posljednjem rezultatu ovog odjeljka, postoji ukupno 1080 različitih setova. Četrdeset pravaca prolazi fiksnom točkom prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ , odnosno u terminima SET-a, 40 različitih setova sadrži jednu kartu SET-a. Hiperravnina u  $\mathbb{Z}_3^4$  predstavlja skup od 27 karata među kojima posotji 117 setova. U takvom skupu, pojedina karta nalazi se u 13 različita seta. Ravnina je skup od 9 karata SET-a među kojima se nalazi 12 setova, a svaka karta tog skupa nalazi se u 4 različita seta.

Ovi i ostali rezultati koje smo dobili za pojedine dimenzije prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  bit će nam od koristi u sljedećem poglavlju prilikom dokazivanja maksimalne veličine anti-seta.

## Poglavlje 3

# Maksimalna veličina $n$ -kapice

Nakon što smo se upoznali s nekoliko osnovnih pojmova i svojstava afinog prostora i geometrije u  $\mathbb{Z}_3^n$ , možemo u potpunosti igri SET pristupiti geometrijski te u nekoliko koraka doći do željenog odgovora na pitanje 1: *"Koliko je najmanje karata potrebno da bi među njima bile tri karte koje čine set?"*.

S ciljem rješavanja postavljenog problema, u prvom poglavlju ograničili smo igru SET na nekoliko manjih skupova karata izostavljajući pojedine karakteristike. Isto tako, uveli smo pojam anti-seta kao skup karata koji ne sadrži set pa smo prethodno pitanje oblikovali u ekvivalentno: *"Koliko je najveći mogući anti-set?"*. Promatrajući najprije karte koje se razlikuju u dvije karakteristike, pomoću  $3 \times 3$  tablice pronašli smo mogući maksimalni anti-set. Na isti način promatrali smo karte s tri karakteristike i na kraju cijeli snop karata SET-a. Postupnim dodavanjem pojedine karakteristike te uočavanjem veze s anti-setom SET-a s manjim brojem karakteristika, pronašli smo anti-set od 20 karata. Primjetili smo da dodavanjem bilo koje karte dobivamo set pa smo naslutili da bi pronađeni anti-setovi mogli biti maksimalni. No, kako bi to zaista i dokazali potrebno je ispitati sve moguće kombinacije. Kod SET-a s manjim brojem karakteristika to i nije tako veliki problem, ali porastom broja karakteristika raste i broj kombinacija pa potraga postaje iznimno komplikirana. Tako iz kompleta SET-a možemo na

$$\binom{81}{21} = 13\,636\,219\,405\,675\,529\,520$$

načina odabrati skup od 21 karte. Srećom, u pozadini igre SET krije se matematika. Kao što smo već uočili, igra SET se može interpretirati kao četverodimenzionalni afini prostor  $\mathbb{Z}_3^4$ , a set od tri karte predstavlja pravac u tom prostoru. U tom slučaju, anti-set odgovara podskupu točaka u  $\mathbb{Z}_3^4$  koji ne sadrži pravac. Takav skup u matematici ima poseban naziv preuzet iz [10], a definira se ovako:



**Definicija 4.** Podskup od  $\mathbb{Z}_3^n$  koji ne sadrži pravac naziva se  **$n$ -kapica**. Najveći mogući  $n$ -kapica nazivamo **maksimalni  $n$ -kapica**, a njegovu veličinu označavamo sa  $m_n$ .

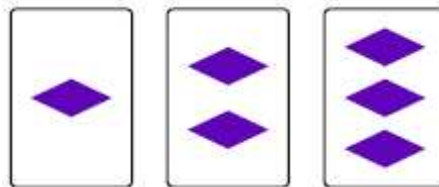
Dakle, zanima nas kolika je veličina maksimalne 4-kapice. Slično kao u drugom poglavlju, prvo ćemo promatrati affine prostore manjih dimenzija ( $n = 1, 2, 3$ ) te njihovu najveću moguću  $n$ -kapicu. Povezanost koju smo uočili između anti-setova s manjim i većim brojem karakteristika dolazi od činjenice da za svaki  $k \leq n$  vrijedi da je  $\mathbb{Z}_3^k \leq \mathbb{Z}_3^n$  pa je bilo koja  $k$ -kapica sadržana u  $n$ -kapici.

Prije samog prelaska na razmatranje pojedine  $n$ -kapice, prisjetit ćemo se *Dirichletovog principa* [11] koji će nam biti od koristi kod dokaza maksimalne veličine 2-kapica i 3-kapica.

**Dirichletov princip.** Neka je  $n$  prirodan broj. Ako  $n + 1$  predmeta rasporedimo bilo kako u  $n$  praznih kutija, onda postoji bar jedna kutija koja sadrži bar 2 predmeta.

### 3.1 Maksimalna 1-kapica

U ovom slučaju, igra se sastoji od samo tri karte koje se razlikuju u samo jednoj karakteristici. Na primjer, neka su to karte koje imaju isti oblik, boju i ispunu, a razlikuju se u broju simbola. Jedan takav SET prikazan je na slici 3.1. Na svakoj karti prikazani su ljubičasti



Slika 3.1: SET u  $\mathbb{Z}_3$

potpuno ispunjeni rombovi, a razlika je u njihovom broju.

Zamislimo li karte kao točke u  $\mathbb{Z}_3$ , sve tri točke leže na istom pravcu (slika 2.1). Prema geometrijskom opisu seta, jasno je da takve tri karte čine set. Zanima nas najveći broj karata među kojima nema seta tj. maksimalna veličina 1-kapice, podskupa od  $\mathbb{Z}_3$  koji ne sadrži pravac. Lako zaključujemo da je

$$m_1 = 2.$$

$\mathbb{Z}_3$  sastoji se od tri kolinearne točke 0, 1 i 2, a znamo da ove tri karte tvore set. Dakle, maksimalni podskup koji ne sadrži pravac je bilo koji dvočlani skup  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$  ili  $\{1, 2\}$ .

## 3.2 Maksimalna 2-kapica

Promatrajmo sada sve karte s ljubičastim potpuno ispunjenim simbolima (slika 1.6). Sada se SET sastoji od ukupno 9 karata. Sve karte imaju istu boju i ispunu, a razlikuju se u obliku i broju simbola. Dakle, SET predstavlja dvodimenzionalni afini prostor  $\mathbb{Z}_3^2$ , a karte uređene parove oblika  $(x_1, x_2)$  gdje koordinata  $x_1$  označava broj, a koordinata  $x_2$  oblik likova na karti.

$3 \times 3$  tablicu, koju smo koristili u Poglavlju 1 (str. 8) kao shematski prikaz anti-seta, možemo zamisliti kao prostor  $\mathbb{Z}_3^2$ , odnosno ravninu u čijim su poljima smještene točke koje predstavljaju karte SET-a. Koordinate točke određuju retci i stupci rešetke. Stupac određuje koordinatu  $x_1$ , a redak koordinatu  $x_2$ . Svaki "x" označava odabranu točku u  $\mathbb{Z}_3^2$  pa tako slika 1.7 prikazuje nekoliko podskupova točaka u  $\mathbb{Z}_3^2$  koji ne sadrže pravac:

$$\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\}, \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 2)\}, \\ \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2)\}, \text{ itd.}$$

Iskoristimo li svojstvo 2, lako se možemo uvjeriti da su navedeni poskupovi zaista 2-kapice. Za  $C_2^1 = \{(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\}$  vrijedi:

$$\begin{aligned} (0, 0) + (0, 2) + (2, 2) &= (2, 1) \neq (0, 0) \\ (0, 0) + (2, 0) + (0, 2) &= (2, 2) \neq (0, 0) \\ (0, 0) + (2, 0) + (2, 2) &= (1, 2) \neq (0, 0) \\ (2, 0) + (0, 2) + (2, 2) &= (1, 1) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Isto tako, za  $C_2^2 = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2)\}$  vrijedi:

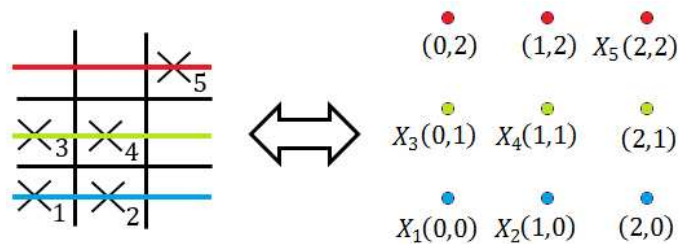
$$\begin{aligned} (1, 0) + (0, 1) + (2, 1) &= (0, 2) \neq (0, 0) \\ (1, 0) + (2, 1) + (1, 2) &= (1, 0) \neq (0, 0) \\ (1, 0) + (0, 1) + (1, 2) &= (2, 0) \neq (0, 0) \\ (0, 1) + (2, 1) + (1, 2) &= (0, 1) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Vidimo da nikoje tri točke unutar pojedinog podskupa nisu kolinearne, drugim riječima niti jedan od ta dva podskupa ne sadrži pravac. Na isti način možemo se uvjeriti da su ostali navedeni podskupovi zaista 2-kapice. Dakle, sigurni smo da je  $m_2 \geq 4$ . Pomoću shematskog prikaza opazili smo da dodavanjem pete točke u bilo koji od navedenih poskupova dobivamo set (slika 1.8) pa smo naslutili da bi najveća moguća 2-kapica mogla biti veličine  $m_2 = 4$ .

Sljedećom propozicijom dokazat ćemo ispravnost našeg opažanja.

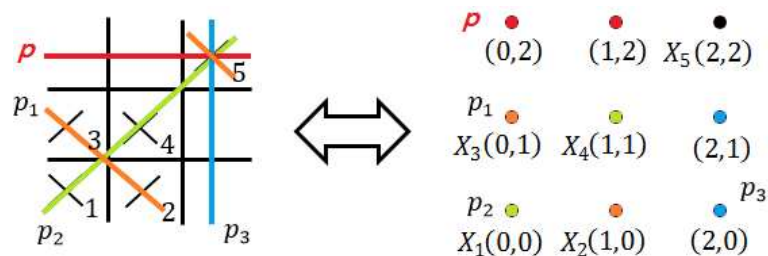
**Propozicija 3.2.1.** *Maksimalna veličina 2-kapice je 4.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno tj. da postoji 2-kapica veličine 5 koja sadrži točke  $X_1, X_2, X_3, X_4$  i  $X_5$ .  $\mathbb{Z}_3^2$  možemo rastaviti na tri paralelna pravca kao na slici 3.2. Svaki pravac prolazi najviše kroz dvije točke 2-kapice. Prema tome, dva paralelna pravca prolaze dvjema



Slika 3.2:  $\mathbb{Z}_3^2$  kao unija tri paralelna pravca

točkama 2-kapice, dok treći pravac, nazovimo ga sa  $p$ , prolazi samo jednom točkom 2-kapice. Bez smanjenja općenitosti, neka je to točka  $X_5$ . U prethodnom poglavlju (str. 21) pokazali smo da kroz fiksnu točku od  $\mathbb{Z}_3^2$  prolaze točno 4 različita pravca. Stoga, osim pravca  $p$  kroz točku  $X_5$  prolaze još tri pravca koja ćemo označiti s  $p_1, p_2$  i  $p_3$  (slika 3.3).  $\mathbb{Z}_3^2 = p \cup p_1 \cup p_2 \cup p_3$  što znači da svaka od točaka  $X_1, X_2, X_3, X_4$  i  $X_5$  mora ležati na nekom od tih pravaca.



Slika 3.3: Četiri pravca koja prolaze točkom  $X_5$

Budući da pravac  $p$  ne sadrži niti jednu od točaka  $X_1, X_2, X_3$  i  $X_4$ , prema Dirichletovom principu barem dvije od njih leže na nekom pravcu  $p_i, i \in \{1, 2, 3\}$ . Dakle, taj pravac  $p_i$  sadrži tri točke (te dvije i točku  $X_5$ ). Dakle, pokazali smo da u promatranoj 2-kapici veličine 5 postoji pravac, što je u kontradikciji s definicijom kapice. Slijedi da je

$$m_2 \leq 4.$$

No, pronašli smo primjere 2-kapice veličine 4 pa znamo da je  $m_2 \geq 4$ . Konačno slijedi da je

$$m_2 = 4.$$

□

### 3.3 Maksimalna 3-kapica

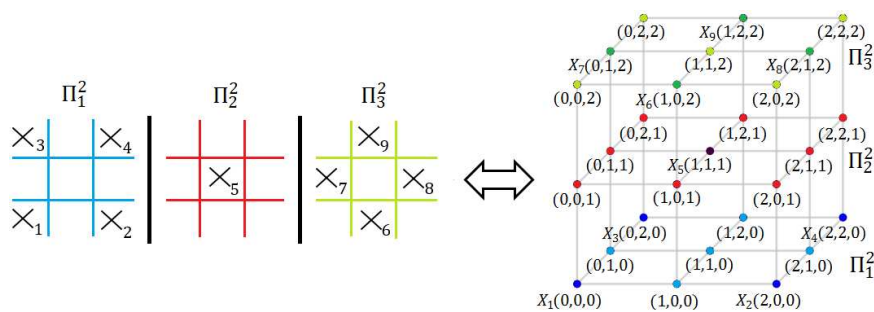
Uzimimo sada u obzir i ispunu simbola na karti. U tom slučaju SET se sastoji od 27 ljubičstih karata prikazanih na slici 1.9. Sve karte imaju istu boju, ali se razlikuju u preostale tri karakteristike simbola. Zamišljamo ih kao točke prostora  $\mathbb{Z}_3^3$  koje su uređene trojke oblika  $(x_1, x_2, x_3)$ , gdje  $x_1$  označava broj,  $x_2$  oblik, a  $x_3$  ispunu simbola na karti.

U shematskom prikazu iz prvog poglavlja (str. 9), tri uzastopne  $3 \times 3$  tablice predstavljaju tri paralelne ravnine od kojih se sastoji čitav afini prostor  $\mathbb{Z}_3^3$ . Jednadžbe tih ravnina su:  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = 1$  i  $x_3 = 2$ . Dok su retci i stupci tablice prikaz dvije dimenzije, red uzastopnih tablica prikazuje treću dimenziju prostora  $\mathbb{Z}_3^3$  pa tako pojedina tablica određuje vrijednost koordinate  $x_3$ .

Promatrajući karte na taj način, odabirom pojedinih točaka prostora  $\mathbb{Z}_3^3$ , pronašli smo 3-kapicu veličine 9 (slika 1.10):

$$C_3 = \{(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}.$$

Pokažimo da je to zaista 3-kapica. Prema razmatranjima iz drugog poglavlja (str. 20), tri točke u  $\mathbb{Z}_3^3$  koje pripadaju istom pravcu, nalaze se sve u istoj ili svaka u različitoj hiperravnini. U ovom slučaju hiperravnina je ravnina. Pogledajmo najprije tri paralelne ravnine  $\Pi_1^2 \dots x_3 = 0$ ,  $\Pi_2^2 \dots x_3 = 1$  i  $\Pi_3^2 \dots x_3 = 2$  te točke iz  $C_3$  koje im pripadaju (slika 3.4).



Slika 3.4:  $\mathbb{Z}_3^3$  kao unija tri paralelne ravnine

Točke  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  i  $(2, 2, 0)$  nalaze se u istoj ravnini  $\Pi_1^2$  pa je dovoljno promatrati prve dvije koordinate točaka. Uočimo da su te točke ekvivalentne točkama 2-kapice

$C_2^1$ . Dakle, nikoje tri među njima nisu kolinearne.

Slično, točke  $(1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 2)$  i  $(1, 2, 2)$  pripadaju ravnini  $\Pi_3^2$  i ekvivalentne su točkama 2-kapice  $C_2^2$  pa ni među njima ne postoje tri kolinearne točke.

Samo točka  $(1, 1, 1)$  pripada ravnini  $\Pi_2^2$  pa ni u toj ravnini nema pravca čije su točke unutar  $C_3$  (pravac se u  $\mathbb{Z}_3^n$  sastoji od tri točke).

Još preostaje provjeriti postoji li pravac u  $C_3$  kojem svaka od točaka pripada različitoj ravni  $\Pi_1^2$ ,  $\Pi_2^2$  i  $\Pi_3^2$ . Uzmemo li jednu točku iz ravnine  $\Pi_1^2$  i točku  $(1, 1, 1)$  iz ravnine  $\Pi_2^2$  treća točka koja je s njima kolinearna mora biti u ravnini  $\Pi_3^2$ . Prema (2.3) dvije točke jedinstveno određuju treću točku pa vrijedi:

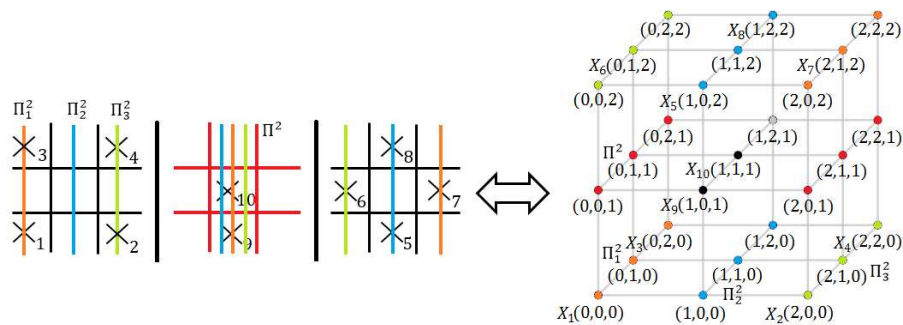
$$\begin{aligned} 2[(0, 0, 0) + (1, 1, 1)] &= 2(1, 1, 1) = (2, 2, 2) \notin C_3 \\ 2[(2, 0, 0) + (1, 1, 1)] &= 2(0, 1, 1) = (0, 2, 2) \notin C_3 \\ 2[(0, 2, 0) + (1, 1, 1)] &= 2(1, 0, 1) = (2, 0, 2) \notin C_3 \\ 2[(2, 2, 0) + (1, 1, 1)] &= 2(0, 0, 1) = (0, 0, 2) \notin C_3. \end{aligned}$$

Sve dobivene točke nalaze se u ravnini  $\Pi_3^2$ , ali niti jedna nije unutar podskupa  $C_3$ . Dakle, možemo zaključiti da  $C_3$  ne sadrži niti jedan pravac, odnosno da je  $C_3$  zaista 3-kapica. Sada smo sigurni da je  $m_3 \geq 9$ .

Nadalje, koristeći se propozicijom 3.2.1, dokazat ćemo da se u trodimenzionalnom afinom prostoru  $\mathbb{Z}_3^3$  najveća moguća 3-kapica sastoji upravo od 9 točaka.

**Propozicija 3.3.1.** *Maksimalna veličina 3-kapice je 9.*

*Dokaz 1.* Pretpostavimo suprotno tj. da postoji 3-kapica veličine 10 koja sadrži točke  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ .  $\mathbb{Z}_3^3$  možemo rastaviti na tri paralelne ravnine kao na slici 3.4. Svaka je ravnina u 3-kapici zapravo 2-kapica pa prema propoziciji 3.2.1 ravnina u 3-kapici ne može imati više od 4 točke. Na raspolaganju imamo 10 točaka pa sve tri ravnine sigurno ne sadrže 4 točke, inače bi ukupan broj točaka bio najmanje 12.



Slika 3.5: Četiri ravnine koje prolaze točkama  $X_9$  i  $X_{10}$

Neka je  $\Pi^2$  jedna od paralelnih ravnina s najmanjim brojem točaka. Lako se vidi da  $\Pi^2$  ne može imati manje od 2 točke (0 ili 1) jer bi tada 3-kapica sadržavala najviše 9 točaka. Dakle,  $\Pi^2$  sadrži 2 ili 3 točke. Bez smanjenja općenitosti neka  $\Pi^2$  sadrži točke  $X_9$  i  $X_{10}$ .

U prethodnom poglavlju (str. 24) pokazali smo da kroz neki fiksni pravac u  $\mathbb{Z}_3^3$  prolaze točno 4 različite ravnine. Stoga, osim ravnine  $\Pi^2$  točke  $X_9$  i  $X_{10}$  sadrže još tri ravnine koje ćemo označiti s  $\Pi_1^2$ ,  $\Pi_2^2$  i  $\Pi_3^2$  kao na slici 3.5.

$\mathbb{Z}_3^2 = \Pi^2 \cup \Pi_1^2 \cup \Pi_2^2 \cup \Pi_3^2$  što znači da točke  $X_1, \dots, X_8$  moraju ležati u nekoj od tih ravnina. U  $\Pi^2$  nalaze se točke  $X_9$  i  $X_{10}$  koje određuju pravac s 3 različite točke. Stoga se u  $\Pi^2$  može nalaziti još jedna točka te bez smanjenja općenitosti neka je to  $X_8$ . Budući da  $\Pi^2$  ne sadrži niti jednu od točaka  $X_1, \dots, X_7$ , prema Dirichletovom principu barem tri od njih leže u istoj ravnini  $\Pi_i^2$ , za neki  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Uz njih su i  $X_9$  i  $X_{10}$  pa  $\Pi_i^2$  sadrži 5 točaka što je u kontradikciji s propozicijom 3.2.1. Slijedi da je

$$m_3 \leq 9.$$

No, pronašli smo primjer 3-kapice veličine 9 pa znamo da je  $m_3 \geq 9$ . Konačno slijedi da je

$$m_3 = 9.$$

□

Zbog sličnosti dokaza propozicija 3.2.1 i 3.3.1, moglo bi se očekivati da se dokaz maksimalne veličine  $n$ -kapice za dimenzije  $n > 3$  provodi na analogan način. Nažalost, ova metoda nije dovoljno jaka za veće dimenzije jer broj načina raspodjele točaka  $n$ -kapice na različitim hiperravninama znatno raste s porastom dimenzije kao i broj različitih ravnina kroz dvije točke. Stoga ćemo propoziciju 3.3.1 ponovo dokazati na nešto malo drugačiji način koristeći se algebrom i kombinatorikom. Prije dokaza uvodimo neke oznake i dva nova pojma.

**Definicija 5.** Neka su  $\Pi_1^{n-1}$ ,  $\Pi_2^{n-1}$  i  $\Pi_3^{n-1}$  tri paralelne hiperravnine čija je unija čitav afini prostor  $\mathbb{Z}_3^n$  te neka je  $C_n \subset \mathbb{Z}_3^n$   $n$ -kapica. Raspodjela broja točaka  $n$ -kapice na tim paralelnim ravninama naziva se **neuređena trojka broja točaka  $n$ -kapice**, a definirana je na sljedeći način:

$$\left( |C_n \cap \Pi_1^{n-1}|, |C_n \cap \Pi_2^{n-1}|, |C_n \cap \Pi_3^{n-1}| \right),$$

gdje je  $|C_n \cap \Pi_i^{n-1}|$  veličina skupa  $C_n \cap \Pi_i^{n-1}$ .

Promotrimo paralelne ravnine  $\Pi_1^2 \dots x_3 = 0$ ,  $\Pi_2^2 \dots x_3 = 1$  i  $\Pi_3^2 \dots x_3 = 2$  u  $\mathbb{Z}_3^3$  te prethodno navedeni primjer 3-kapice:

$$C_3 = \{(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}.$$

Vrijedi da je

$$\begin{aligned} C_3 \cap \Pi_1^2 &= \{(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 0)\}, & |C_3 \cap \Pi_1^2| &= 4 \\ C_3 \cap \Pi_2^2 &= \{(1, 1, 1)\}, & |C_3 \cap \Pi_2^2| &= 1 \\ C_3 \cap \Pi_3^2 &= \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}, & |C_3 \cap \Pi_3^2| &= 4. \end{aligned}$$

Jedna neuređena trojka 3-kapice  $C_3$  oblika je  $(4, 1, 4)$ .

Neka je sada  $\Pi_1^2 \dots x_1 + x_2 = 0$ ,  $\Pi_2^2 \dots x_1 + x_2 = 1$  i  $\Pi_3^2 \dots x_1 + x_2 = 2$ . Tada je

$$\begin{aligned} C_3 \cap \Pi_1^2 &= \{(0, 0, 0), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}, & |C_3 \cap \Pi_1^2| &= 3 \\ C_3 \cap \Pi_2^2 &= \{(2, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2)\}, & |C_3 \cap \Pi_2^2| &= 3 \\ C_3 \cap \Pi_3^2 &= \{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1)\}, & |C_3 \cap \Pi_3^2| &= 3. \end{aligned}$$

U tom slučaju, neuređena trojka 3-kapice  $C_3$  oblika je  $(3, 3, 3)$ .

Trojku zovemo neuređenom jer su sve permutacije trojke  $(i, j, k)$  istog tipa. Na primjer,  $(4, 4, 1)$ ,  $(4, 1, 4)$  i  $(1, 4, 4)$  su trojke istog tipa.

**Definicija 6.** Neka je  $\Pi^{n-1}$  hiperravnina afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  te neka je  $C_n \subset \mathbb{Z}_3^n$   $n$ -kapica, a  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  bilo koji  $k$ -člani podskup skupa  $\Pi^{n-1} \cap C_n$ . Uređeni par

$$\left( \Pi^{n-1}, \{X_1, X_2, \dots, X_k\} \right)$$

naziva se  **$k$ -označena hiperravnina**.

Ponovno za primjer uzmimo hiperravninu  $\Pi^2 \dots x_1 + x_2 = 0$  u  $\mathbb{Z}_3^3$  i 3-kapicu  $C_3 = \{(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$ . Skup  $\{(0, 0, 0)\}$  je jednočlani podskup skupa  $C_3 \cap \Pi^2 = \{(0, 0, 0), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$  pa je uređeni par  $(x_1 + x_2 = 0, \{(0, 0, 0)\})$  1-označena hiperravnina.

Skup  $\{(0, 0, 0), (2, 1, 2)\}$  je dvočlani podskup skupa  $C_3 \cap \Pi^2 = \{(0, 0, 0), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$  pa je uređeni par  $(x_1 + x_2 = 0, \{(0, 0, 0), (2, 1, 2)\})$  2-označena hiperravnina.

*Drugi dokaz propozicije 4.3.1.* Pretpostavimo suprotno tj. da postoji 3-kapica veličine 10. Prostor  $\mathbb{Z}_3^3$  možemo na različite načine rastaviti na tri paralelne ravnine  $\Pi_1^2$ ,  $\Pi_2^2$  i  $\Pi_3^2$ . Kako je najveća 2-kapica veličine 4, uz pretpostavku da 3-kapica sadrži 10 točaka, moguće neuređene trojke broja točaka 3-kapice su tipa  $(4, 4, 2)$  i  $(4, 3, 3)$ . Primjerice, ako je trojka tipa  $(5, 4, 1)$  to znači da se na jednoj od paralelnih hiperravnina, koja je u ovom slučaju ravnina, nalezi 5 točaka 3-kapice, odnosno da u ravnini postoji 2-kapica veličine 5, što je nemoguće. Dakle, jedine moguće trojke su tipa  $(4, 4, 2)$  i  $(4, 3, 3)$ . Neka je

$$x_{442} = \text{broj trojki tipa } (4, 4, 2) \text{ i}$$

$$x_{433} = \text{broj trojki tipa } (4, 3, 3).$$

U tom slučaju,  $x_{442}$  i  $x_{433}$  su nenegativni cijeli brojevi.

Na koliko se različitih načina prostor  $\mathbb{Z}_3^3$  može rastaviti na tri paralelne hiperravnine? S jedne strane, postoji  $x_{442} + x_{433}$  različitih načina. S druge strane, znamo iz drugog poglavlja (str. 24) da kroz fiksnu točku prostora  $\mathbb{Z}_3^3$  prolazi 13 različitih ravnina, a za svaku od njih postoje još dvije različite ravnine koje su s njima paralelne. Dakle, postoji ukupno 13 različitih načina na koje se prostor  $\mathbb{Z}_3^3$  može rastaviti na tri paralelne hiperravnine. Slijedi da je

$$x_{442} + x_{433} = 13.$$

Kako bismo došli do još jedne jednadžbe s nepoznicama  $x_{442}$  i  $x_{433}$ , prebrojat ćemo 2-označene hiperravnine unutar  $\mathbb{Z}_3^3$ . Vidjeli smo u Poglavlju 2 (str. 24) da postoje točno 4 ravnine u  $\mathbb{Z}_3^3$  koje sadrže neki fiksni pravac, a svaki je pravac određen dvjema točkama. Na raspolaganju imamo 10 točaka pa je ukupan broj 2-označenih hiperravnina jednak

$$4 \cdot \binom{10}{2} = 180.$$

Isto tako, za svaku trojku tipa  $(4, 4, 2)$  postoji  $\binom{4}{2}$  2-označenih hiperravnina  $\Pi_1^2$  kao i  $\Pi_2^2$  te  $\binom{2}{2}$  2-označenih hiperravnina  $\Pi_3^2$ . Dakle, ukupno

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 13.$$

Analogno za svaku trojku tipa  $(4, 3, 3)$  postoji

$$\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 12.$$

2-označenih hiperravnina. Stoga, druga jednadžba glasi

$$13x_{442} + 12x_{433} = 180.$$

Sada imamo sustav jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} x_{442} + x_{433} &= 13 \\ 13x_{442} + 12x_{433} &= 180 \end{aligned}$$

čije je jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} x_{442} &= 24 \\ x_{433} &= -11 \end{aligned}$$



No, to je u kontradikciji s time da  $x_{442}$  i  $x_{433}$  mogu biti samo nenegativni cijeli brojevi. Slijedi da je

$$m_3 \leq 9.$$

No, pronašli smo primjer 3-kapice veličine 9 pa znamo da je  $m_3 \geq 9$ . Konačno slijedi da je

$$m_3 = 9.$$

□

### 3.4 Maksimalna 4-kapica

Prethodno smo promatrali samo ljubičaste karte koje su se razlikovale u tri karakteristike pa su interpretirane kao uređene trojke afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^3$ . Pogledajmo sad cijeli komplet od 81 karte SET-a prikazane na slici 1.12. U tom slučaju karte se razlikuju u četiri karakteristike pa SET poprima četvrtu dimenziju te predstavlja četverodimenzionalni afini prostor  $\mathbb{Z}_3^4$ . Svaka se karta može interpretirati kao točka prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ , odnosno uređena četvorka  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , gdje koordinata  $x_1$  označava broj,  $x_2$  oblik,  $x_3$  ispuna, a  $x_4$  boju likova na karti.

Na slici 1.12 karte su posložene na način da u shematskom prikazu četverodimenzionalnog prostora možemo uočiti veliku  $3 \times 3$  tablicu u čijim se poljima nalaze male  $3 \times 3$  tablice. Redak i stupac male tablice određuju prve dvije koordinate, dok redak i stupac velike tablice određuju treću i četvrtu koordinatu točaka prostora.

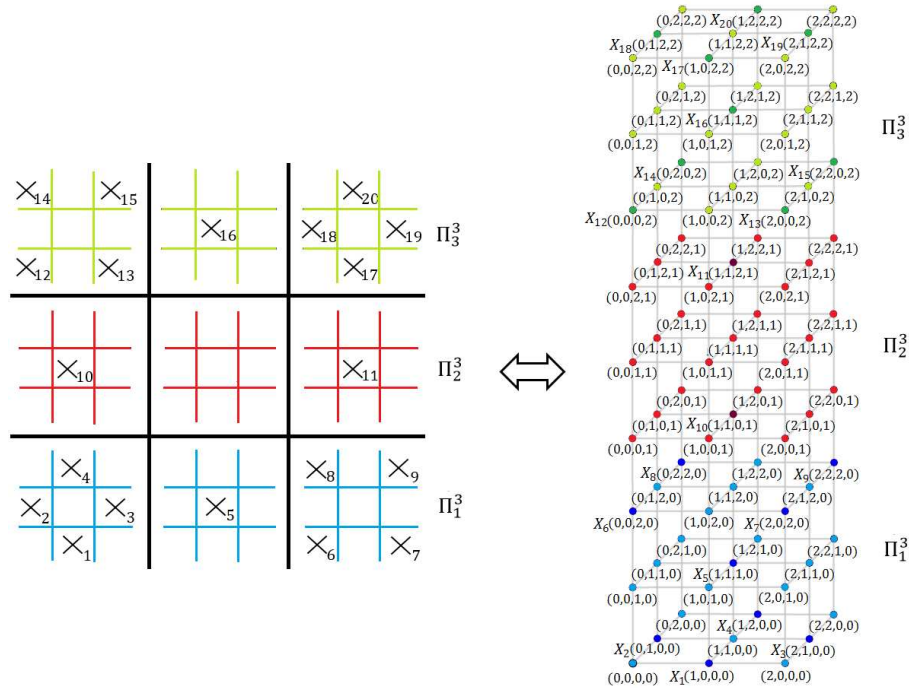
Naš je glavni cilj doznati koliko je najviše karata među kojima nema seta moguće podijeliti tokom igre ili drugim riječima, kolika je maksimalna 4-kapica. Shematskim prikazom na slici 1.13 pronašli smo anti-set od 20 karata koji u geometrijskoj interpretaciji odgovara sljedećem podskupu točaka u  $\mathbb{Z}_3^4$ :

$$C_4 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 2, 0), (2, 0, 2, 0), \\ (0, 2, 2, 0), (2, 2, 2, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 2, 1), (0, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 2), (2, 2, 0, 2), \\ (1, 1, 1, 2), (1, 0, 2, 2), (0, 1, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2)\}.$$

Uvjerimo se da je to zaista 4-kapica. Tri točke u  $\mathbb{Z}_3^4$ , koje pripadaju istom pravcu, nalaze se u istoj ili u različitoj hiperravnini. Prvo promotrimo tri paralelne hiperravnine  $\Pi_1^3 \dots x_4 = 0$ ,  $\Pi_2^3 \dots x_4 = 1$  i  $\Pi_3^3 \dots x_4 = 2$  te točke iz  $C_4$  koje im pripadaju (slika 3.6).

Točke  $(0, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 2), (2, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 2, 2),$

$(0, 1, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2)$  nalaze se u istoj hiperravnini  $\Pi_3^3$  pa četvrtu koordinatu točaka možemo zanemariti. Primjetimo da su te točke ekvivaletne točkama 3-kapice  $C_3$ . Stoga, među njima nema pravca.



Slika 3.6:  $\mathbb{Z}_3^4$  kao unija 3 paralelne hiperravnine

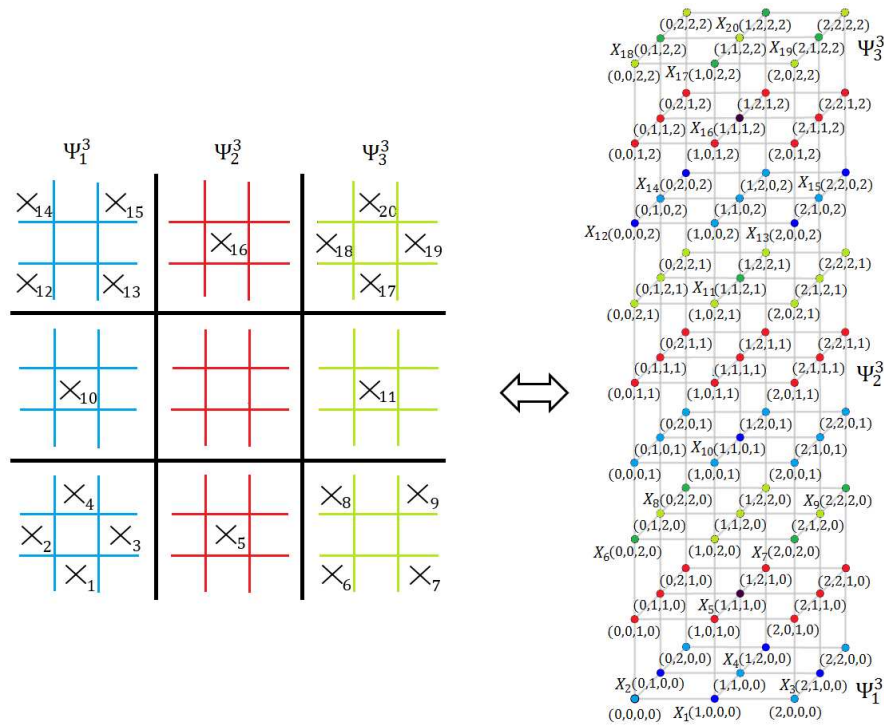
Točke  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 2, 0)$ ,  $(2, 2, 2, 0)$  pripadaju hiperravnini  $\Pi_1^3$ . Na slici 3.6 možemo uočiti da hiperravnine  $\Pi_1^3$  i  $\Pi_3^3$  imaju sličan raspored točaka podskupa  $C_4$ . Tri uzastopne male  $3 \times 3$  tablice predstavljaju tri paralelne ravnine unutar jedne hiperravnine. Zamijenimo li mjesta prvoj i trećoj ravnini u  $\Pi_1^3$  dobit ćemo isti raspored točaka podskupa  $C_4$  kao i u  $\Pi_3^3$ . Prema tome, ni među tim točkama nema pravca.

Samo točke  $(1, 1, 0, 1)$  i  $(1, 1, 2, 1)$  pripadaju hiperravnini  $\Pi_2^3$  pa sigurno među njima nema pravca.

Pogledajmo sad tri paralelne hiperravnine  $\Psi_1^3 \dots x_3 = 0$ ,  $\Psi_2^3 \dots x_3 = 1$  i  $\Psi_3^3 \dots x_3 = 2$  te točke iz  $C_4$  koje im pripadaju (slika 3.7).

Točke  $(0, 0, 0, 2)$ ,  $(2, 0, 0, 2)$ ,  $(0, 2, 0, 2)$ ,  $(2, 2, 0, 2)$ ,  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 2)$ ,  $(2, 0, 0, 2)$ ,  $(0, 2, 0, 2)$ ,  $(2, 2, 0, 2)$  nalaze se u hiperravnini  $\Psi_1^3$ , a točke  $(0, 0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 2, 0)$ ,  $(2, 2, 2, 0)$ ,  $(1, 1, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 2, 2)$ ,  $(0, 1, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 2, 2)$ ,  $(1, 2, 2, 2)$  pripadaju hiperravnini  $\Psi_3^3$ . Na slici 3.7 možemo uočiti da hiperravnine  $\Psi_1^3$  i  $\Psi_3^3$  imaju isti raspored točaka podskupa  $C_4$  kao i ravnine  $\Pi_1^3$  i  $\Pi_3^3$ . Prema tome, među točkama podskupa  $C_4$  koje su u  $\Psi_1^3$  i  $\Psi_3^3$  nema pravca.

Analogno kao za  $\Pi_2^3$ , jedine točke unutar hiperravnine  $\Psi_2^3$  su  $(1, 1, 1, 0)$  i  $(1, 1, 1, 2)$  pa među njima sigurno nema pravca.



Slika 3.7:  $\mathbb{Z}_3^4$  kao unija 3 paralelne hiperravnine

Još preostaje provjeriti postoji li pravac u  $C_4$  kojem svaka od točaka pripada različitoj hiperravnini  $\Pi_1^3$ ,  $\Pi_2^3$  i  $\Pi_3^3$  te različitoj hiperravnini  $\Psi_1^3$ ,  $\Psi_2^3$  i  $\Psi_3^3$ . Na primjer, ako je jedna točka unutar hiperravnina  $\Pi_1^3$  i  $\Psi_1^3$ , a druga točka unutar  $\Pi_2^3$  i  $\Psi_3^3$ , tada treća točka koja je s njima kolinearna pripada hiperravninama  $\Pi_3^3$  i  $\Psi_2^3$ . Iz činjenice da dvije točke jedinstveno određuju treću točku, prema (2.3) vrijedi:

$$2[(1, 0, 0, 0) + (1, 1, 2, 1)] = 2(2, 1, 2, 1) = (1, 2, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(0, 1, 0, 0) + (1, 1, 2, 1)] = 2(1, 2, 2, 1) = (2, 1, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(2, 1, 0, 0) + (1, 1, 2, 1)] = 2(0, 2, 2, 1) = (0, 1, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(1, 2, 0, 0) + (1, 1, 2, 1)] = 2(2, 0, 2, 1) = (1, 0, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(1, 1, 1, 0) + (1, 1, 2, 1)] = 2(2, 2, 0, 1) = (1, 1, 0, 2) \notin C_4$$

$$2[(1, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 1)] = 2(2, 2, 1, 1) = (1, 1, 2, 2) \notin C_4$$

$$2[(0, 0, 2, 0) + (1, 1, 0, 1)] = 2(1, 1, 2, 1) = (2, 2, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(2, 0, 2, 0) + (1, 1, 0, 1)] = 2(0, 1, 2, 1) = (0, 2, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(0, 2, 2, 0) + (1, 1, 0, 1)] = 2(1, 0, 2, 1) = (2, 0, 1, 2) \notin C_4$$

$$2[(2, 2, 2, 0) + (1, 1, 0, 1)] = 2(0, 0, 2, 1) = (0, 0, 1, 2) \notin C_4.$$

Niti jedna od dobivenih točaka nije unutar podskupa  $C_4$  pa možemo zaključiti da  $C_4$  ne sadrži niti jedan pravac, odnosno da je  $C_4$  zaista 4-kapica. Sada smo sigurni da je  $m_4 \geq 20$ .

Idućom propozicijom dokazat ćemo da u četverodimenzionalnom afinom prostoru  $\mathbb{Z}_3^4$  ne postoji 4-kapica veličine veće od 20. Dokaz provodimo metodom kojom smo proveli drugi dokaz propozicije 3.3.1.

**Propozicija 3.4.1.** *Maksimalna veličina 4-kapice je 20.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno tj. da postoji 4-kapica veličine 21 i neka je to  $\{X_1, X_2, \dots, X_{21}\}$ . Na različite načine, prostor  $\mathbb{Z}_3^4$  možemo rastaviti na tri paralelne hiperravnine  $\Pi_1^3$ ,  $\Pi_2^3$  i  $\Pi_3^3$ . Jedan od načina shematski je prikazan na slici 3.6.

Neka je  $x_{ijk}$  broj neuređenih trojki broja točaka 4-kapice tipa  $(i, j, k)$ ,  $x_{ijk} \in \mathbb{Z}^+$ . Budući da na raspolaganju imamo 21 točku te da je najveća moguća 3-kapica veličine 9, postoji sedam mogućih tipova trojki:

$$(i, j, k) = (9, 9, 3), (9, 8, 4), (9, 7, 5), (9, 6, 6), (8, 8, 5), (8, 7, 6), (7, 7, 7).$$

Analogno kao i u drugom dokazu propozicije 3.3.1, broj načina na koje se prostor  $\mathbb{Z}_3^4$  može rastaviti na tri paralelne hiperravnine jednak je broju svih neuređenih trojki kao i broju hiperravnina koje prolaze kroz fiksnu točku prostora. Znamo iz drugog poglavlja (str.30) da 40 različitih hiperravnina prolazi fiksnom točkom prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Dakle, prva jednačba glasi

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40.$$

Drugu ćemo jednačbu dobiti prebrojavanjem 2-označenih hiperravnina unutar  $\mathbb{Z}_3^4$ . Dvije različite točke određuju pravac u  $\mathbb{Z}_3^4$  pa prema rezultatim iz drugog poglavlja (str. 30) postoji 13 različitih hiperravnina koje sadrže te dvije točke. Na raspolaganju imamo 21 točku pa je ukupan broj 2-označenih hiperravnina jednak

$$13 \cdot \binom{21}{2} = 2730.$$

Kao i kod drugog dokaza propozicije 3.3.1, za svaku trojku tipa  $(i, j, k)$  postoji

$$\binom{i}{2} + \binom{j}{2} + \binom{k}{2}$$

2-označenih hiperravnina. Stoga, druga jednačba glasi

$$\left[ \binom{9}{2} + \binom{9}{2} + \binom{3}{2} \right] x_{993} + \dots + \left[ \binom{7}{2} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2} \right] x_{777} = 2730$$

$$75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730.$$

Isto tako, možemo prebrojati 3-označene hiperravnine unutar  $\mathbb{Z}_3^4$  i dobiti treću jednadžbu. Prema definiciji 4-kapice nikoje tri točke ne mogu biti kolinearne pa tri nekolinearne točke određuju jednu ravninu. U drugom poglavlju (str. 29) utvrdili smo da postoje 4 hiperravnine koje sadrže fiksnu ravninu prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Prema tome, ukupan broj 3-označenih hiperravnina jednak je

$$4 \cdot \binom{21}{3} = 5320.$$

Kao i ranije, za svaku trojku tipa  $\{i, j, k\}$  postoji

$$\binom{i}{3} + \binom{j}{3} + \binom{k}{3}$$

3-označenih hiperravnina. Stoga, treća jednadžba ima oblik

$$\left[ \binom{9}{3} + \binom{9}{3} + \binom{3}{3} \right] x_{993} + \dots + \left[ \binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3} \right] x_{777} = 5320$$

$$169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5320.$$

Sada imamo sustav tri jednadžbe sa sedam nepoznanica:

$$\begin{aligned} x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} &= 40 \\ 75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} &= 2730 \\ 169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} &= 5320 \end{aligned}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sa 693, drugu sa  $-16$ , a treću sa 3 dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 693x_{993} + 693x_{984} + 693x_{975} + 693x_{966} + 693x_{885} + 693x_{876} + 693x_{777} &= 27720 \\ -1200x_{993} - 1120x_{984} - 1072x_{975} - 1056x_{966} - 1056x_{885} - 1024x_{876} - 1008x_{777} &= -43680 \\ 507x_{993} + 432x_{984} + 387x_{975} + 372x_{966} + 366x_{885} + 333x_{876} + 315x_{777} &= 15960 \end{aligned}$$

Zbrajanjem te tri jednadžbe dobivamo jednadžbu oblika

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0.$$

Obzirom da su svi  $x_{ijk} \geq 0$ , jedino moguće rješenje dobivene jednadžbe je

$$x_{984} = x_{975} = x_{966} = x_{885} = x_{876} = 0.$$

Time smo sustav tri jednadžbe sa sedam nepoznanica sveli na sustav tri jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned}x_{993} + x_{777} &= 40 \\75x_{993} + 63x_{777} &= 2730 \\169x_{993} + 105x_{777} &= 5320\end{aligned}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sa  $-63$ , a zatim ju dodamo drugoj jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned}12x_{993} &= 210 \\x_{993} &= \frac{35}{2} \notin \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

čime smo došli do kontradikcije s time da svi  $x_{ijk}$  moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Možemo zaključiti da je naša pretpostavka o postojanju 4-kapice s 21 točkom bila pogrešna te da je maksimalna veličina 4-kapice

$$m_4 \leq 21.$$

No, pronašli smo primjer 4-kapice veličine 20 pa znamo da je  $m_4 \geq 21$ . Konačno slijedi da je

$$m_4 = 20.$$

□

Ovime smo došli do traženog odgovora na postavljeno pitanje 1 iz prvog poglavlja. Dokazali smo da je u igri SET moguće najviše podijeliti 20 karata među kojima nema seta ili drugim riječima, potrebno je podijeliti najmanje 21 kartu SET-a kako bismo bili sigurni da se među njima nalazi barem jedan set.

Problem pronalaženja maksimalne  $n$ -kapice mogli bismo proširiti i na veće dimenzije afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$ . Promatrajući igru SET kao  $n$ -dimenzionalni afini prostor, svaka karta određena je sa  $n$  karakteristika.

Kako bismo utvrdili maksimalnu veličinu  $n$ -kapice za  $n \geq 5$  koristeći metodu kojom smo dokazali propoziciju 3.4.1, moramo najprije imati neku pretpostavku o maksimalnoj veličini  $n$ -kapice te znati maksimalnu veličinu kapica manjih dimenzija. Nažalost, metoda kojom smo dokazali da je  $m_4 \leq 20$  nije primjenjiva za veće dimenzije. Naime, dokaz ovisi o broju jednadžbi i nepoznanica  $x_{ijk}$ . U propoziciji 3.4.1, dvije smo jednadžbe dobili brojanjem 2-označene i 3-označene hiperravnine. Primjerice za  $n = 5$ , dodatnu jednadžbu možemo dobiti brojanjem 4-hiperravnine. No, upravo tu nailazimo na problem. U prethodnom slučaju bili smo sigurni da su tri točke nekolinearne zbog definicije  $n$ -kapice,

međutim za četiri točke ne možemo biti sigurni da su nekomplanarne. Stoga, moramo razlikovati dva slučaja, kada su četiri točke komplanarne tj. nalaze se u istoj ravnini te kada četiri točke nisu komplanarne pa jedinstveno određuju 3-ravninu. Kako se dimenzija prostora povećava tako se povećava i broj slučajeva koje je potrebno razlikovati kada je određen broj točaka linearno zavisano, odnosno nezavisano. Iz tog razloga prebrojavanje načina odabira točaka na hiperravnini postaje komplicirano, kao i rješavanje jednadžbi jer se broj nepoznanica znatno povećava.

Pokazalo se da je ovaj problem pronalazjenja maksimalne veličine  $n$ -kapice za veće dimenzije vrlo složen. Za sada su poznate samo maksimalne veličine  $n$ -kapice za  $n \leq 6$  dok se za veće dimenzije zna nešto malo. Naime, najbolje što je do sada dokazano o maksimalnoj veličini  $n$ -kapice daje poseban teorem pomoću kojeg možemo odrediti gornju granicu za  $m_n$ . Pomoću tog teorema, Y. Edel i suradnici dokazali su 2002. godine u svom radu [9] da je  $m_5 = 45$ . Spomenimo samo još da je A. Potechin 2008. godine u svom radu [16] dokazao da je  $m_6 = 112$ . Za dimenzije  $n \geq 7$  afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  još nije poznato koliko točno iznosi  $m_n$ .

### Gornja granica maksimalne veličine $n$ -kapice u $\mathbb{Z}_3^n$

Ovaj dio poglavlja posvetit ćemo već spomenutom teoremu pomoću kojeg možemo odrediti gornju granicu za  $m_n$ . Prije navođenja teorema, uvedimo jednu definiciju.

**Definicija 7.** *Neka je  $m_n(p)$  maksimalna veličina  $n$ -kapice u afinom prostoru  $\mathbb{Z}_p^n$ , gdje je  $p$  prost ili prim broj. **Gustoća  $n$ -kapice** je omjer broja točaka  $n$ -kapice i ukupnog broja točaka afinog prostora  $\mathbb{Z}_p^n$  tj.*

$$c_n(p) = \frac{m_n(p)}{p^n}.$$

**Teorem 3.4.2.** *Neka je  $p > 2$  prost broj. Ako je  $n \geq 3$ , tada vrijedi*

$$c_n(p) \leq \frac{p^{-n} + c_{n-1}(p)}{1 + c_{n-1}(p)}.$$

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [3]. Naš je fokus na prostoru  $\mathbb{Z}_3^n$  pa ćemo teorem 3.4.2 promatrati za poseban slučaj kada je  $p = 3$ .

**Teorem 3.4.3.** *Ako je  $n \geq 3$ , tada vrijedi*

$$c_n \leq \frac{3^{-n} + c_{n-1}}{1 + c_{n-1}}.$$

Kako bismo odredili gornju granicu maksimalne veličine  $n$ -kapice u  $\mathbb{Z}_3^n$  potrebno je teorem 3.4.3 interpretirati pomoću maksimalne veličine  $m_n$  umjesto gustoće  $c_n$ . Znamo da je gustoća  $n$ -kapice definirana kao  $c_n = \frac{m_n}{3^n}$  pa uvrštavanjem dobivamo rezultat koji daje sljedeći korolar:

**Korolar 1.** *Ako je  $n \geq 2$ , tada je*

$$m_n \leq \frac{1 + 3m_{n-1}}{1 + \frac{m_{n-1}}{3^{n-1}}}.$$

Sada se za pojedine dimenzije prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  može dobiti gornja granica maksimalne veličine  $n$ -kapice. Ako krenemo s činjenicom da je  $m_1 = 2$  (to sigurno znamo pošto u  $\mathbb{Z}_3^n$  na svakom pravcu leže točno tri točke) i uzmemo u obzir poznate veličine  $m_n$  za  $n \leq 6$ , možemo induktivno primjeniti korolar 1 te dobiti gornju granicu maksimalne veličine za prvih nekoliko  $n$ -kapica.

$$m_2 \leq \frac{1 + 3 \cdot 2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7}{\frac{5}{3}} = \frac{21}{5} = 4.2$$

$$m_3 \leq \frac{1 + 3 \cdot 4}{1 + \frac{9}{27}} = \frac{13}{\frac{13}{9}} = 9$$

$$m_4 \leq \frac{1 + 3 \cdot 9}{1 + \frac{9}{27}} = \frac{28}{\frac{4}{3}} = 21$$

$$m_5 \leq \frac{1 + 3 \cdot 20}{1 + \frac{20}{81}} = \frac{61}{\frac{101}{81}} = \frac{4941}{101} = 48.92$$

$$m_6 \leq \frac{1 + 3 \cdot 45}{1 + \frac{45}{243}} = \frac{136}{\frac{32}{27}} = \frac{459}{4} = 114.75$$

$$m_7 \leq \frac{1 + 3 \cdot 112}{1 + \frac{112}{729}} = \frac{337}{\frac{841}{729}} = \frac{245673}{841} = 292.12$$

Kako je  $m_n \in \mathbb{Z}^+$ , desnu stranu nejednakosti zaokružujemo na najbliži manji cijeli broj. Rezultati su prikazani u tablici 3.1.



$n$	1	2	3	4	5	6	7
<b>Poznati <math>m_n</math></b>	2	4	9	20	45	112	?
<b>Gornja granica za <math>m_n</math></b>	2	4	9	21	48	114	292

Tablica 3.1: Maksimalna veličina  $n$ -kapice

Ako se prisjetimo odakle smo krenuli, čudesno je koliko smo daleko došli. Uzeli smo igru SET, nešto što se činilo konkretnim i opipljivim, a na kraju smo došli do nečeg apstraktnog što se čini znatno složenijim od onoga s čime smo krenuli. Uočivši povezanost između matematike i obične društvene igre namjenjene djeci i odraslima, na vrlo zanimljiv način upoznali smo se s apstraktnim matematičkim pojmom afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  te njegovim svojstvima kao i svojstvima njegovih potprostora. Matematičkom interpretacijom došli smo do odgovora na pitanje koje se nameće igračima nakon nekoliko odigranih partija SET-a. Osim toga, tijekom igre pojavljuju se još mnoga druga pitanja matematičkog tipa posebno vezana uz kombinatoriku i vjerojatnost, što nije čudno pošto se radi o igri kartama. Nekoliko takvih pitanja razmotrit ćemo u sljedećem poglavlju te ćemo se osvrnuti na primjenu igre SET u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.

## Poglavlje 4

# Primjena igre SET u nastavi matematike

SET je zabavna i vrlo zarazna igra kartama koja ima bogatu matematičku strukturu. Kroz nekoliko prethodnih poglavlja bavili smo se vezom s afinom geometrijom te smo pomoću nje odgovorili na pitanje direkto vezano uz pravila igre. Sada ćemo se posvetiti rješavanju nekih problema koje igra nameće iz područja kombinatorike i vjerojatnosti, a mogu se primijeniti u nastavi matematike u srednjoj školi kako bi se učenike potaknulo na logičko i apstraktno razmišljanje.

Osim toga, igra SET izvrstan je način za uvođenje osnovne teorije skupova. Predstavlja konkretan model, odnosno alat za razumijevanje osnovnih pojmova i operacija sa skupovima: veličina skupa (kardinalitet), prazan skup, unija, presjek, razlika i komplement skupa. Stoga ćemo opisati način na koji možemo u petom razredu osnovne škole, ali i kasnije u prvom razredu srednje škole na zanimljiv način pomoću igre SET uvesti osnovne operacije sa skupovima.

### 4.1 Kombinatorika i vjerojatnost

SET je igra kartama koja otvara mnoga kombinatorna i vjerojatnosna pitanja koja bismo mogli iskoristiti u nastavi matematike kod ostvarivanja ishoda

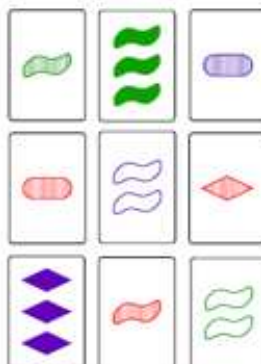
*MAT SŠ E.3.1. Bira strategiju i rješava problem rabeći kombinatoriku*

u trećem razredu srednje škole (od 105 do 245 sati nastave matematike godišnje) [8]. Pomoću igre SET učenici na zabavan način mogu uvježbati principe prebrojavanja, permutacija, varijacija, kombinacija te izračunavanja vjerojatnosti pojedinih događaja. Prije svega, SET se temelji na misaonim procesima pa kroz igru i zabavu učenici razvijaju logičko, matematičko i apstraktno razmišljanje. Isto tako, kroz igru učenici razvijaju prostorno vizualne vještine percepcije te socijalne vještine igrajući SET u skupinama i poštujući određena pravila igre.

Sada ćemo opisati način na koji možemo uvesti igru SET u razredu te ćemo razmotriti neka kombinatorna i vjerojatnosna pitanja koja možemo postaviti učenicima i potaknuti ih na razmišljanje [12]. Za početak, razred podijelimo u grupe od 3 do 5 učenika. Nakon što učenicima detaljno objasnimo pravila uz nekoliko primjera i budemo sigurni da su učenici shvatili pravila igre, svakoj grupi podijelimo listić na kojem je prikazano 9 karata (slika 4.1). Zadatak učenika je da među 9 karata pronađu 6 setova. Jedan od učenika iz

Nastavni listić

**Zadatak:** Pronađite 6 setova među sljedećih 9 kartica. Svaki pronađeni set upišite u donju tablicu tako da u pojedino polje upisujete karakteristike odgovarajuće karte: broj-oblik-ispuna-boja.



SET			
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Slika 4.1: Nastavni listić

grupe upisuje svaki pronađeni set u prazna polja na listiću tako da u pojedino polje upisuje karakteristike odgovarajuće karte (broj-oblik-ispuna-boja). Svaki red od tri prazna polja

odgovara jednom setu, a jedno polje jednoj karti. Pobjeđuje ona grupa koja prva pronađe svih 6 setova.

Nakon što su se okušali u pronalaženju setova, pred učenike možemo postaviti nekoliko problema vezanih uz igru. Njihovo rješavanje kod učenika će potaknuti logičko i matematičko razmišljanje te će im pomoći u savladavanju osnovnih principa kombinatorike i vjerojatnosti. Razmotrimo sada neke od tih problema.

1. Koliko je karata sadržano u jednom kompletu SET-a?

Budući da se karte SET-a razlikuju u četiri karakteristike (oblik, broj, ispuna i boja), a za svaku karakteristiku postoje tri različite mogućnosti, prema principu umnoška jedan komplet SET-a sadrži  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$  kartu.

2. Koliko setova ukupno postoji?

Sličnim razmatranjima kao iz prvog poglavlja na stranici 5 i 6 učenici mogu doći do zaključka da svake dvije kartice jedinstveno određuju treću karticu koja s njima čini set. Stoga, za odabir prve kartice imamo ukupno 81 mogućnost, za odabir druge karte preostalih 80, dok je treća karta jedinstvena. Dakle, postoji ukupno

$$\frac{\binom{81}{2}}{3} = 1080$$

različitih setova.

3. Koliko setova sadrži jednu odabranu kartu?

Odgovor na ovo pitanje slijedi iz činjenice da bilo koje dvije karte pripadaju točno jednom setu. Odabrana kartica formira set s bilo kojom od preostalih 80 karata te jedinstvenom trećom karticom. Stoga, broj načina na koje možemo odabrati još dvije karte jednak je  $80 \cdot 1 = 80$ . No, redoslijed odabranih karti nije bitan pa je ukupan broj setova koji sadrži jednu odabranu kartu jednak  $\frac{80}{2!} = 40$ . To možemo lako provjeriti. Imamo 81 kartu, a svaka je u 40 različitih setova. U svakom setu su tri različite karte pa setova ima ukupno

$$\frac{81 \cdot 40}{3} = 1080,$$

što je zaista jednako ranije dobivenom rezultatu.

4. Ako iz jednog kompleta SET-a izvučemo tri karte, kolika je vjerojatnost da smo dobili set?

Znamo da u jednom kompletu SET-a postoji ukupno 1080 setova. Tri karte možemo odabrati na  $\binom{81}{3} = 85320$  načina pa je vjerojatnost jednaka  $\frac{1080}{85320} \cdot 100\% \approx 1.3\%$ .

5. Koliki je najvjerojatniji broj setova među 12 nasumično odabranih kartica?

Budući da je ukupan broj načina odabira tri karte od ukupno dvanaest karata jednak

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = 220,$$

a vjerojatnost da bilo koje tri odabrane karte tvore set jednaka je  $\frac{1080}{85320}$ , najvjerojatniji broj setova među 12 nasumično odabranih karata iznosi

$$220 \cdot \frac{1080}{85320} = \frac{237600}{85320} \approx 2.78.$$

Dakle, možemo zaključiti da najvjerojatnije postoje 2 seta među 12 nasumično odabranih karata.

6. Koja je vrsta seta najvjerojatnija?

Najprije razmotrimo koje sve vrste setova možemo stvoriti obzirom na postojeće karakteristike karata. Pravilo SET-a nalaže da tri karte tvore set ako je pojedina karakteristika simbola na svim kartama ista ili na svim različita. Prema tome, možemo razlikovati četiri vrste seta obzirom na broj "različitih/istih" karakteristika: 4/0, 3/1, 2/2 i 1/3.

Sada prebrojimo koliko setova postoji od svake vrste u kompletu od 81 karte. Za svaku vrstu seta prva se karta može odabrati na 81 načina, druga karta ovisi o broju različitih, odnosno istih karakteristika, dok je treća karta uvijek jedinstvena. Za vrstu 4/0 (set u kojem se karte razlikuju u svim karakteristikama) možemo odabrati na  $\binom{4}{4} = 1$  način četiri karakteristike koje se razlikuju. Drugu kartu možemo odabrati na  $2^4 = 16$  načina jer je za svaku karakteristiku moguće izabrati po dvije mogućnosti. Kako je treća karta jedinstveno određena, a redosljed karata nije bitan, ukupan broj setova vrste 4/0 jednak je

$$\frac{\binom{4}{4} \cdot 81 \cdot 2^4}{3!} = 216.$$

Za vrstu 3/1 (set u kojem su tri karakteristike različite, a jedna ista za sve tri karte) možemo odabrati na  $\binom{4}{3} = 4$  načina tri karakteristike u kojima se karte razlikuju. Drugu kartu

možemo odabrati na  $2^3 = 8$  načina jer se druga karta mora razlikovati od prve u tri karakteristike pa za svaku od njih preostaju dvije mogućnosti. Kao i prije, treća karta je jedinstvena, a redosljed karata nije bitan pa je ukupan broj setova vrste 3/1 jednak

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot 81 \cdot 2^3}{3!} = 432.$$

Kod treće vrste 2/2 (set u kojem su dvije karakteristike različite, a dvije iste za sve tri karte) možemo odabirati na  $\binom{4}{2} = 6$  načina dvije karakteristike u kojima se karte razlikuju. Sada se karte razlikuju u dvije karakteristike pa je broj mogućnosti za drugu kartu jednak  $2^2 = 4$ . Uz činjenicu da je treća karta jedinstvena te zanemarivanjem redosljeda karata dobivamo ukupan broj setova vrste 2/2 koji iznosi

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot 81 \cdot 2^2}{3!} = 324.$$

Konačno za četvrtu vrstu 1/3 (set u kojem je jedna karakteristika različita, a tri su iste za sve tri karte) možemo odabrati na  $\binom{4}{1} = 4$  načina jednu karakteristiku u kojoj se karte razlikuju. Drugu kartu moguće je odabrati na  $2^1 = 2$  načina pošto se karte razlikuju u samo jednoj karakteristici. Treća je karta jedinstvena, a redosljed karata i dalje nije bitan pa ukupno postoji

$$\frac{\binom{4}{1} \cdot 81 \cdot 2^1}{3!} = 108$$

setova vrste 1/3. Zbrojimo li sve vrijednosti ukupnog broja setova za svaku vrstu dobivamo

$$216 + 432 + 324 + 108 = 1080,$$

što odgovara ukupnom broju setova u cijelom špilu. Sada kada znamo broj setova za svaku vrstu, možemo utvrditi koja je od njih najvjerojatnija. Budući da je  $432 > 324 > 216 > 108$ , možemo zaključiti da je vrsta seta 3/1 najvjerojatnija. Lako možemo izračunati kolika je vjerojatnost postojanja pojedine vrste. Vjerojatnost vrste 4/0 jednaka je  $\frac{216}{1080} = 20\%$ , vrste 3/1  $\frac{432}{1080} = 40\%$ , vrste 2/2  $\frac{324}{1080} = 30\%$  i vrste 1/3  $\frac{108}{1080} = 10\%$ . Kako bi imali zorniji prikaz dobivenih rezultata, prikazat ćemo ih tablicom 4.1. Dakle, najvjerojatnije je set vrste 3/1, odnosno tri karte koje se razlikuju u tri karakteristike simbola, a jedna je svim kartama ista.

7. Mogu li na kraju igre ostati samo 3 karte koje ne čine set?

Kako bismo došli do odgovora na ovo pitanje, promotrit ćemo najprije broj likova na karti. Na svakoj se karti nalazi jedan, dva ili tri lika, a u cijelom kompletu postoji 27 karata s jednim likom, 27 karata s dva lika i 27 karata s tri lika. Dakle, ukupno u kompletu SET-a ima

Vrsta seta	Broj načina odabira karakteristika koje se razlikuju	Broj načina odabira prve karte	Broj načina odabira druge karte	Broj načina odabira treće karte	Ukupan broj setova jedne vrste	Vjerojatnost
4/0	$\binom{4}{4} = 1$	81	$2^4 = 16$	1	$\frac{\binom{4}{4} \cdot 81 \cdot 2^4}{3!} = 216$	$\frac{216}{1080} = 20\%$
3/1	$\binom{4}{3} = 4$	81	$2^3 = 8$	1	$\frac{\binom{4}{3} \cdot 81 \cdot 2^3}{3!} = 432$	$\frac{432}{1080} = 40\%$
2/2	$\binom{4}{2} = 6$	81	$2^2 = 4$	1	$\frac{\binom{4}{2} \cdot 81 \cdot 2^2}{3!} = 324$	$\frac{324}{1080} = 30\%$
1/3	$\binom{4}{1} = 4$	81	$2^1 = 2$	1	$\frac{\binom{4}{1} \cdot 81 \cdot 2^1}{3!} = 108$	$\frac{108}{1080} = 10\%$
<b>Ukupno</b>					1080	

Tablica 4.1: Vjerojatnost za pojedinu vrstu seta

$27 \cdot 1 + 27 \cdot 2 + 27 \cdot 3 = 6 \cdot 27 = 162$  likova. Tri karte čine set obzirom na broj ako i samo ako je zbroj njihovih likova višekratnik broja tri. To je upravo zbog toga jer broj likova na kartama mora biti svima isti ili svima različit pa su jedine mogućnosti zbroja

$$1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{i} \quad x + x + x = 3x, \quad x \in \{1, 2, 3\}$$

o čemu je već govora bilo u drugom poglavlju. Tijekom igre, svaki put kada neki od igrača uoči set, karte se uklanjaju sa stola čime se broj simbola smanjuje za višekratnik broja tri. Stoga, na kraju igre preostaje  $162 - 3k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  simbola na kartama što je također višekratnik broja tri  $162 - 3k = 3(57 - k)$ . Dakle, ako su na stolu ostale posljednje tri karte, tada te karte sigurno čine set obzirom na broj simbola. Analogno vrijedi i za ostale karakteristike: oblik, ispunu i boju. Stoga, igra ne može završiti s tri karte na stolu.

## 4.2 Teorija skupova

U nastavi matematike igru SET također možemo iskoristiti u petom razredu osnovne škole kako bi učenici savladali ishod *MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema*, kao i u prvom razredu srednje škole (od 105 do 210 sati nastave matematike godišnje) kod ishoda *MAT SŠ B.1.7. Prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi s pomoću intervala* [8]. SET pruža konkretan model pomoću kojeg učenici mogu lakše usvojiti i savladati osnovne operacije sa skupovima. U tu svrhu opisat ćemo način na koji možemo iskoristiti igru SET za uvođenje i uvježbavanje tih operacija [12, 7, 1]. Najprije uvedimo oznake za pojedine skupove od kojih se igra sastoji.

*K* - komplet karata SET-a

*R* - skup karata sa simbolom romba

*O* - skup karata sa simbolom ovala

*S* - skup karata sa simbolom vala

*I* - skup karata s jednim simbolom

*II* - skup karata s dva simbola

*III* - skup karata s tri simbola

■ - skup karata s potpuno ispunjenim simbolima

▣ - skup karata s djelomično ispunjenim simbolima

□ - skup karata s neispunjenim simbolima

*C* - skup crvenih karata

*LJ* - skup ljubičastih karata

*Z* - skup zelenih karata

Sada ćemo uvesti neke osnovne pojmove i operacije sa skupovima te ih povezati sa SET-om. Nakon toga slijedi jedan zadatak s nekoliko primjera za uvježbavanje.

### Kardinalnost ili veličina skupa

Jedna od osnovnih karakteristika nekog skupa je **kardinalnost** ili **veličina** skupa. Za konačne skupove to je jednostavno broj elemenata nekog skupa. Ako je *A* skup, kardinalnost skupa *A* označavamo sa  $k(A)$ . Primjerice, s *K* smo označili skup koji se sastoji od cijelog kompleta karata SET-a pa je njegova kardinalnost  $k(K) = 81$ .

*Z* je skup svih karata sa zelenim simbolima pa njegovu kardinalnost možemo odrediti prebrojavanjem svih takvih karata ili jednostavno iskoristiti ono što znamo o karakteristikama svake karte SET-a. Dakle,  $k(Z) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$  jer zeleni simboli na kartama mogu imati 3 različita oblika po 3 različita broja i 3 različite ispune. Također, mogli smo zaključiti da je  $81 : 3 = 27$  karata unutar skupa *Z* jer je točno jedna trećina karata zelene boje.

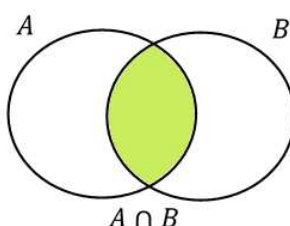


## Presjek dvaju skupova

*Presjek* skupova  $A$  i  $B$  je skup  $A \cap B$  koji sadrži zajedničke elemente tih dvaju skupova:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

Inače skupove zorno prikazujemo pomoću *Euler-Vennovog dijagrama* pa je na taj način na slici 4.2 prikazan presjek skupova  $A$  i  $B$ .



Slika 4.2: Euler-Vennov dijagram za presjek skupova  $A$  i  $B$

Na primjer, skup  $R \cap \blacksquare$  je skup koji sadrži karte sa simbolima koji su u obliku romba i potpuno su ispunjeni. Simboli na tim kartama mogu biti u tri različita broja i tri različite boje pa je kardinalnost ovog skupa  $k(R \cap \blacksquare) = 9$ .

Za skupove  $A$  i  $B$  koji nemaju zajedničkih elemenata kažemo da su *disjunkt*. Njihov je presjek  $A \cap B$  *prazan* i pišemo  $A \cap B = \emptyset$ .  $\emptyset$  je oznaka za *prazan skup* koji nema niti jedan element.

Primjerice,  $(R \cap C) \cap (O \cap C) = \emptyset$  jer skupovi  $(R \cap C)$  i  $(O \cap C)$  nemaju zajedničkih elemenata. Skup  $(R \cap C)$  sadrži karte na kojima su crveni rombovi dok se u skupu  $(O \cap C)$  nalaze karte na kojima su crveni ovali.

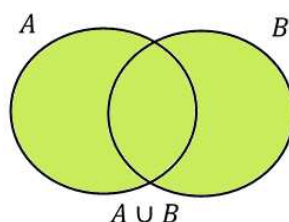
## Unija dvaju skupova

*Unija* skupova  $A$  i  $B$  je skup  $A \cup B$  koji sadrži one elemente koji se nalaze u barem jednom od tih dvaju skupova:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}.$$

Na slici 4.3 Euler-Vennovim dijagramom prikazana je unija skupova  $A$  i  $B$ .

Na primjer, skup  $II \cup LJ$  sadrži sve karte na kojima su dva simbola ili karte na kojima su ljubičasti simboli (ili oboje). Kardinalnost ovog skupa je  $k(II \cup LJ) = 45$ . Ovo se lako može utvrditi primjenom formule uključivanja-isključivanja [14]:

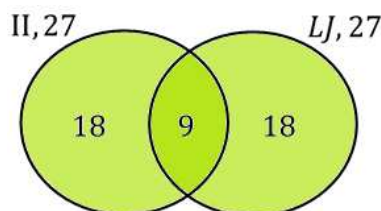
Slika 4.3: Euler-Vennov dijagram za uniju skupova  $A$  i  $B$ 

**Teorem 4.2.1.** (Formule ukljičivanja-isključivanja) *Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konačni skupovi tada je broj elemenata njihove unije dan formulom*

$$k\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n k(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} k(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} k\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

Postoji 27 karata s dva simbola i 27 karata s ljubičastim simbolima što daje zbroj 54. Međutim, 9 je karata s dva ljubičasta simbola koja se nalaze u presjeku skupova II i LJ pa smo te karte brojali dva puta. Stoga je prema formuli ukljičivanja-isključivanja kardinalnost skupa  $II \cup LJ$  jednaka  $k(II \cup LJ) = 27 + 27 - 9 = 45$ .

No, učenicima se prvog razreda srednje škole ne spominje formula ukljičivanja-isključivanja već se  $k(A \cup B)$  određuje pomoću Euler-Vennovog dijagrama (slika 4.4). Skup II sastoji



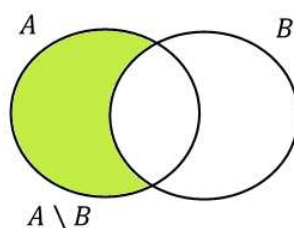
Slika 4.4: Euler-Vennov dijagram za skupove II i LJ

se od 27 karata među kojima je 9 ljubičastih (tri različita simbola s tri različite ispune). Ljubičastih karata izvan skupa II ima 18 (devet karata s brojem 1 i devet karata s brojem 3) pa je ukupan broj elemenata skupa  $II \cup LJ$  jednak  $27 + 18 = 45$ .

### Razlika skupova

**Razlika** skupova  $A$  i  $B$  je skup svih elemenata skupa  $A$  koji nisu elementi skupa  $B$ :

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

Slika 4.5: Euler-Vennov dijagram za razliku skupova  $A$  i  $B$ 

Razlika skupova  $A$  i  $B$  zorno je prikazana Euler-Vennovim dijagramom na slici 4.5.

Na primjer,  $S \setminus \square$  je skup karata na kojima su likovi oblika vala i koji nisu prazni. Ukupno postoji 27 karata sa simbolima oblika vala te 9 karata s neispunjenim simbolima oblika vala pa je kardinalnost skupa  $S \setminus \square$  jednaka  $k(S \setminus \square) = 27 - 9 = 18$ . Isto tako, skup  $S \setminus \square$  možemo promatrati kao skup u kojemu se nalazi 9 karata s potpuno ispunjenim simbolima vala i 9 karata s djelomično ispunjenim simbolima vala, što je ukupno 18 karata.

Za kraj navodimo jedan primjer zadatka za učenike kroz koji mogu pomoću igre SET uvježbati gore navedene osnovne operacije sa skupovima.

**Zadatak.** Riječima opiši od čega se pojedini skup sastoji i odredi mu kardinalnost.

- |                           |   |   |  |
|---------------------------|---|---|--|
| 1) $LJ \cap I$            | 2) $\boxplus \cap O$                    | 3) $1 \cap 2 \cap 3$                        | 4) $\square \cap LJ \cap S$                  |
| 5) $C \cup S$             | 6) $\text{III} \cup O$                  | 7) $Z \cup R \cup \square$                  | 8) $\blacksquare \cup \boxplus \cup \square$ |
| 9) $Z \setminus \boxplus$ | 10) $I \setminus O$                     | 11) $(R \cup S) \setminus 2$                | 12) $S \setminus (\blacksquare \cap C)$      |
| 13) $(C \cup I) \cap S$   | 14) $\boxplus \cap (\text{III} \cup O)$ | 15) $(O \cup R) \setminus (\square \cap Z)$ | 16) $(I \setminus LJ) \cap (Z \cup R)$       |

# Bibliografija

- [1] S. Antoliš, A. Copic, *Matematika 4, 1. dio; udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno-matematičku gimnaziju*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.
- [2] D. Austin, *Game.SET.Line.*, dostupno na <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2015-08> (kolovoz, 2020.).
- [3] J. Bierbrauer, Y. Edel, *Bounds on Affine Caps*, *Journal of Combinatorial Designs* **10** (2002.), br. 2, 111–115.
- [4] C. Chan, *SETs and Anti-SETs: The Math Behind the Game of SET*, dostupno na <http://web.math.princeton.edu/~charchan/SET.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [5] B. Conrey, B. Donaldson, *SET*, dostupno na <https://www.mathteacherscircle.org/assets/session-materials/BConreyBDonaldsonSET.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [6] D. Crnković, M. Bombardelli, M. Polonijo, R. Sušan, T. Ban Krigin, Z. Franušić, Z. Iljazović, *Euklidski prostori*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eukl/literatura/EP.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, 1. dio; udžbenik za 1. razred gimnazija i strukovnih škola (za 5 sati nastave tjedno)*, Element, Zagreb, 2019.
- [8] ———, *Kurikulum nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, dostupno na [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html) (kolovoz, 2020.).
- [9] I. Landjev, L. Storme, S. Ferret, Y. Edel, *The Classification of the Largest Caps in  $AG(5, 3)$* , *Journal of Combinatorial Theory A* (2002.), br. 99, 95–110.
- [10] B. Lent Davis, D. Maclagan, *The card game set*, *The Mathematical Intelligencer*, **25** (2003.), br. 3, 33–40.

- [11] S. Majstorović, *Dirichletov princip*, Osječki matematički list, **6** (2006.), br. 2, 99–105.
- [12] ———, *Mathematics Workbook; How to use SET in the classroom*, dostupno na [https://www.setgame.com/sites/default/files/teacherscorner/mathworkbook\\_0.pdf](https://www.setgame.com/sites/default/files/teacherscorner/mathworkbook_0.pdf) (kolovoz, 2020.).
- [13] M. Meehan, *Interview with game designer Marsha Jean Falco*, dostupno na <https://www.entertainmentvine.com/games/interview-with-game-designer-marsha-jean-falco/> (kolovoz, 2020.).
- [14] M. Mikić, *Osnovni principi kombinatorike u teoriji vjerojatnosti*, Diplomski rad, Osijek, 2019.
- [15] I. Novosel, *Konačne geometrije i primjene*, Diplomski rad, Zagreb, 2019.
- [16] A. Potechin, *Maximal caps in AG (6, 3)*, Designs, Codes and Cryptography (2008.), br. 46, 243–259.
- [17] ———, *Set instructions*, dostupno na <https://www.setgame.com/sites/default/files/instructions/SET%20INSTRUCTIONS%20-%20ENGLISH.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [18] J. Šiftar, Z. Franušić, *Linearna algebra 1; skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [19] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije; Predavanja*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf> (kolovoz, 2020.).
- [20] T. Tadić, *Igra SET i matematika vezana uz nju*, Playmath **1** (2003), br. 1, 43–45.
- [21] C. Tucker, *Geometric Models of the Card Game SET*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, **8** (2007.), br. 10.
- [22] N. D. Versluis, *On the cap set problem upper bounds on maximal cardinalities of caps in dimensions seven to ten*, dostupno na <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:6818b21f-038d-4700-afcd-e6dac79e7e82/datastream/OBJ> (kolovoz, 2020.).
- [23] V. B. Vertregt, *Affine Caps*, dostupno na <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:dec75689-1a6e-4818-992a-2d5fd2112da7/datastream/OBJ> (kolovoz, 2020.).

# Sažetak

SET je iznimno zabavna misaona igra kartama najmijenjena djeci i odraslima. Igrajući SET mnogi ne bi naslutili da se u pozadini igre krije matematika. Osim što je zabavna i vrlo zarazna, igra se povezuje s mnogim matematičkim problemima iz područja afine geometrije, linearne algebre, teorije skupova, kombinatorike i vjerojatnosti. Ovaj se rad temelji na geometrijskoj interpretaciji igre SET pomoću konačnog vektorskog i afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$ . Tokom igre pojavljuju se mnoga pitanja do čijih se odgovora dolazi matematičkim "alatima". Glavni je problem rada doći do odgovora na jedno od tih pitanja.

U matematičkoj interpretaciji SET-a rješavanje postavljenog problema svodi se na pronalasku maksimalne veličine podskupa točaka unutar afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^4$  koji ne sadrži pravac, takozvana 4-kapica. Općenito, maksimalna veličina  $n$ -kapice u  $\mathbb{Z}_3^n$  poznata je za  $n \leq 6$ , a za ostale dimenzije moguće je odrediti samo gornju granicu i to pomoću teorema koji iznosimo u radu. Za prve četiri dimenzije pomoću igre SET pronalazimo primjer maksimalne  $n$ -kapice, a zatim matematički dokazujemo da je veličina pronađene  $n$ -kapice zaista maksimalna moguća. Osim toga, rad se bavi i nekim osnovnim svojstvima afinog prostora  $\mathbb{Z}_3^n$  i posebno geometrijom u  $\mathbb{Z}_3^n$  za  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Posljednje poglavlje posvećeno je primjeni igre SET u nastavi matematike. SET je igra kartama pa otvara mnoga kombinatorna i vjerojatnosna pitanja koja možemo postaviti učenicima srednje škole i potaknuti ih na logičko i apstraktno razmišljanje. Isto tako, SET predstavlja konkretan model skupa pa iznosimo i način na koji bi učenici osnovne i srednje škole pomoću zabavne igre mogli uspješno savladati osnovne operacije sa skupovima.

# Summary

SET is an extremely fun thoughtful card game intended for children and adults. What many wouldn't assume while playing SET is the fact that mathematics is hidden in the core of the game. Apart from being fun and highly addictive, the game associates with many mathematical problems from the field of affine geometry, linear algebra, set theory, combinatorics and probability. This paper is based on the geometric interpretation of the game SET with the help of finite vector and affine space  $\mathbb{Z}_3^4$ . During the course of the game, many problems arise for which the answers are found by mathematical "tools". The main problem of the paper is getting an answer to one of those questions.

In the mathematical interpretation of SET, solving a set problem comes down to finding the maximum value of a subset of points inside affine space  $\mathbb{Z}_3^4$  which doesn't contain a line, the so-called 4-cap. Generally, the maximum value of an  $n$ -cap in  $\mathbb{Z}_3^n$  is known for  $n \leq 6$ , whereas for other dimensions it's possible only to determine the upper limit, which is done with the help of the theorem we're stating in the paper. For the first four dimensions with the help of the game SET we are coming across an example of a maximum  $n$ -cap, then we mathematically prove that the value of found  $n$ -cap is indeed the highest possible. Besides that, the paper deals with some basic properties of affine space  $\mathbb{Z}_3^n$  and especially the geometry in  $\mathbb{Z}_3^n$  for  $n = 1, 2, 3, 4$ .

The last chapter is dedicated to the application of the game SET in mathematics classes. SET is a card game so it opens many combinatorial and probabilistic questions which can be presented to high school students and encourage them to think logically and abstractly. SET also presents a concrete model of sets so we are presenting a way in which elementary and high school students would be able to grasp basic set operations with the help of a fun game.

# Životopis

Moje ime je Ana Dragojević i rođena sam 9.6.1996. u Dubrovniku, a živim u mjestu Vela Luka na otoku Korčuli. Svoje školovanje započela sam 2003. godine u Osnovnoj školi Vela Luka, a nakon završene osnovne škole pohađala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Vela Luka. Nakon položene državne mature 2015. godine upisala sam Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematike i fizike nastavničkog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.