Matematički trikovi s brojevima

Kerovec, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Kerovec

MATEMATIčKI TRIKOVI S BROJEVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, veljača, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu objedinit ćemo razne matematičke magične trikove s brojevima koji su primjenjivi u nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama. U zadnjih nekoliko godina u školama se potiče popularizacija matematike, odnosno na zanimljiv način želi se učenicima približiti matematika. Često od učenika i roditelja čujemo da je matematika dosadna, naporna, da se uči puno više nego je potrebno i da je ona sama nezanimljiva. No, nama nastavnicima matematike želja je pokazati da nisu u pravu i da matematika ima puno primjenjivih i zanimljivih sadržaja koji privlače pažnju. Jedna od metoda da to učinimo je upravo koristeći se matematičkim trikovima.

Svaki trik kojeg mađioničar izvodi krije neku tajnu. Uspješnost trika ovisi o sposobnostima izvođača, ali i o samom triku. Dok se kod većine trikova mađioničar služi varanjem, kod matematičkih trikova tajna se krije u matematici, odnosno primjeni njenih rezultata. Stoga kod matematičkih trikova ostaje malo mjesta za pogreške i neuspjele trikove. Naravno, sam izvođač trika mora biti dobro izvježban u njegovu izvođenju, što u pravilu zahtijeva brzo provođenje osnovnih matematičkih operacija. Također, matematički trikovi s brojevima su brzi pa neće oduzeti puno vremena za obradu novog nastavnog sadržaja, a pridonose učeničkoj motivaciji za učenje i mogu se koristiti za provođenje istraživačke nastave (primjerice nakon izvođenja trika učenici mogu istraživati zašto i kako taj trik funkcionira).

Rad je podijeljen na tri poglavlja. Prvo poglavlje opisuje trikove vezane uz aritmetiku, drugo uz teoriju brojeva, a treće uz elementarnu algebru. Svaki trik je detaljno opisan, a funkcioniranje mnogih je opravdano dokazom.

Poglavlje 1

Aritmetika

Aritmetika je grana matematike koja se bavi računanjem s brojevima, u pravilu prirodnim, ali i računanjem unutar većih skupova brojeva. Njen razvoj dugujemo potrebi za prebrojavanjem, mjerenjem i osnovnim matematičkim operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Prve naznake ljudske uporabe aritmetike sežu još u kameno doba, kad još nije bilo razvijeno ni pismo, a kamoli brojevni sustavi. O tome svjedoče razni sačuvani rovaši, od kojih su najpoznatije dvije kosti nađene u Africi, kost iz Lebomba i kost iz Ishanga. Nakon uvođenja pisma, u Sumeriji i starom Egiptu pojavljuju se i prvi brojevni sustavi i zapisani artimetički zadaci. Danas aritmetiku teško možemo zamisliti bez korištenja dekadskog pozicijskog brojevnog sustava, koji je razvijen u Indiji u prvom tisućljeću nove ere, prihvaćen od Arapa i preko njih u srednjem vijeku došao u Europu gdje su simboli znamenki poprimili današnji oblik. U novom vijeku su otkriveni i drugačiji pozicijski brojevni sustavi, među kojima se zbog primjene u suvremenom računarstvu ističe binarni brojevni sustav [4].

U ovom poglavlju opisani su matematički trikovi čije se tajne kriju u osnovnim računskim operacijama s prirodnim brojevima. Učenici se već u osnovnoj školi upoznaju s nekim metodama kako brže množiti ili dijeliti. Kod množenja to su brojevi poput 2, 5 ili 10, dok se kod dijeljenja tom popisu dodaju se 3 i 9. Na primjer, pri množenju s 10 dodajemo 0 s desne strane, odnosno pomičemo decimalnu točku u desno, a pri dijeljenju obrnuto, odnosno decimalna točka pomiče se u lijevo. Analogno tim idejama postoje još neki trikovi za brzo množenje i dijeljenje koji se ne primjenjuju tako često u školama. Takva su prva tri naša trika.

1.1 Brzo množenje s 11

Ovaj trik pokazuje brzu metodu množenja s brojem 11. Učenik ispituje nastavnika koliko brzo množi s 11, a nastavnik „ekspresno” množi zadani broj s 11.

Trik se izvodi na sljedeći način. Prva i zadnja znamenka se prepišu, a u sredinu se piše zbroj znamenaka. U slučaju zbroja znamenaka većeg od 10, kao u klasičnom zbrajanju, prebaci se jedinica na sljedeću lijevu znamenku [11]. Radi kontrole rezultata, zgodno je uočiti da će rezultat uvijek biti 10 puta većeg reda veličine od početnog broja. Kada je trik završen učenici mogu provjeriti rješenje množeći na uobičajeni način i tako uočiti da je ovo u biti isto. Slijedi nekoliko primjera:

a) $12 \cdot 11$:

   Na mjesto stotica upisuje se desetica iz prvog faktora, a na mjesto jedinice jedinica iz faktora: 1_2. Nakon toga zbroje se znamenka na poziciji stotice i jedinice te se dobije sljedeće: $1 + 2 = 3$. Dakle, umnožak je 132.

b) $258 \cdot 11$:

   Na mjesto tisućice upisuje se 2, a na mjesto jedinice 8: 2_ _8. Srednje znamenke dobivaju se tako da se oba broja zbroje s 5. Prvo odrediti deseticu tako da se zbroje 5 i 8: $5 + 8 = 13$, dakle, na mjesto desetice se upisuje 3, a jedinica se pribraja stotici. Preostalo je još zbrojiti 2 i 5: $2 + 5 = 7$, tom broju još se još pribroji 1 te je onda umnožak 2838.

c) $345678 \cdot 11$:

$$
\begin{gathered}
3\_\_\_\_\_8, \\
8+7=13 \ldots\ 3\_\_\_\_38, \\
7+6+1=14 \ldots 3\_\_\_438, \\
6+5+1=12 \ldots 3\_\_2438, \\
5+4+1=10 \ldots 3\_02438, \\
4+3+1=8 \ldots 3802438.
\end{gathered}
$$

Primijetimo da iz primjera navedenog pod c) vidimo da ovaj trik baš i nije izvediv „u glavi” za brojeve s puno znamenki.

Dokaz. Uočimo da je za svaki broj n vrijedi

$$n \cdot 11 = n \cdot (10 + 1) = 10n + n.$$

□

1.2 Brza petica

U ovom triku demonstriramo brzo dijeljenje s 5. Ponovno kao u prethodnom triku učenik kaže neki broj, a nastavnik ga brzo podijeli s 5.

Koraci izvođenja su sljedeći:

1. Zadani broj se pomnoži s dva,

2. decimalna točka se pomakne za jedno mjesto u lijevo [1].

Pokažimo to na dva primjera:

a) $58 : 5$: $58 \cdot 2 = 116$, dakle rezultat je 11.6.

b) $12345678 : 5$: $12345678 \cdot 2 = 24691356$, pa je rezultat 2469135.6.

Primijetimo, da kao i u brzom množenju s 11, ovaj trik nije tako impresivno izvediv u glavi za brojeve s puno znamenki jer njih nije tako lako napamet množiti s 2.

Dokaz. Dijeljenje s 5 je isto što i dijeljenje s $\frac{10}{2}$, dakle kao množenje s $\frac{2}{10} = 2 \cdot \frac{1}{10}$. □

1.3 Aritmetika prstiju

Ovim se trikom množenje bilo koja dva jednoznamenkasta broja svodi na zbrajanje i množenje brojeva od 1 do 5. Trik je namijenjen nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole kada se učenici po prvi put susreću s pojmom množenja dva broja. Trik je zabavan, ali također potiče napredak u svladavanju gradiva.

Pri množenju bilo koja dva jednoznamenkasta broja, osim tablice množenja, koju učenici u tom trenutku uče, može se pokazati i ovaj trik. Trik je namijenjen množenju brojeva između 6 i 10, uključujući ta dva broja. U triku mali prsti predstavljaju 6, te dalje redom svaki prst predstavlja jedan broj između 7 i 10. Spajaju se prsti koji predstavljaju faktore, brojevi koji su predstavljeni prstima iznad spoja se pomnože, a oni ispod, uključujući spojene, se prebroje i pomože s 10. Na kraju se ta dva broja zbroje te je to rješenje produkta.

Opisana metoda se primjenjuje i za množenje brojeva od 11 do 15. U tom slučaju se ponovno odabere mali prst kao predstavnik broja 11, te onda ostali redom za 12, 13, 14, i 15. Za razliku od osnovne verzije, ignoriraju se gornji prsti i množe se jedinice u svakom broju. Što se tiče donjih prstiju, njih koristimo kao u prethodnoj verziji, te na kraju se još dodamo 100.

Također, slično se računaju umnošci dvaju brojeva od 16 do 20. U ovoj verziji na kraju se pribraja 200, umjesto 100, a donji prsti se ne množe s 10, nego s 20. Što se tiče gornjih prstiju, koristi se metoda opisana za brojeve od 6 do 10, odnosno samo se pomnoži broj tih prstiju [7]. Slijedi nekoliko primjera u kojima se koriste opisane metode.

a) Potrebno je izračunati koliko je $7 \cdot 9$. Spoje se prstenjak lijeve ruke i kažiprst desne ruke kao na slici 1.1. Na lijevoj ruci se iznad spoja nalaze 3 prsta, a na desnoj 1. Pomnože se ta dva broja i dobiva se 3. Ispod spoja lijeve ruke, uključivo samog spoja, nalaze se 2 prsta, a na desnoj ruci 4. Ta dva broja se zbroje i pomnože s 10: $(2 + 4) \cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$. Dakle, umnožak iznosi

$$60 + 3 = 63.$$

Slika 1.1: Prikaz spoja prstiju

b) Potrebno je izračunati koliko je $13 \cdot 14$. Spoje se srednjak lijeve ruke i kažiprst desne ruke. Na lijevoj ruci ispod spoja se nalaze 3 prsta, a na desnoj 4, zajedno 7 prstiju. Taj broj se pomnoži s 10 i dobiva se 70. Što se nalazi iznad spoja sad nas ne zanima već se samo pomnoži $3 \cdot 4$ i dobiva se 12. Preostaje još sve to zbrojiti sa 100

$$100 + 70 + 12 = 182.$$

c) Potrebno je izračunati koliko je $17 \cdot 19$. Spoje se prstenjak lijeve ruke i kažiprst desne ruke. Iznad spoja lijeve ruke se nalaze 3 prsta, a iznad spoja desne 1 prst, ta dva broja pomnožena daju 3. Ispod spoja lijeve ruke nalaze se 2 prsta, a ispod spoja desne ruke 4 prstiju, to je zajedno 6 prstiju. Taj broj pomnožen s 20 daje 120. Preostaje još sve zbrojiti s 200

$$200 + 120 + 3 = 323.$$

Nakon nekoliko trikova s brzim izvođenjem računskih operacija, nastavljamo s „pravim” trikovima u kojima izvođač temeljem naizgled ograničenih informacija, ali zapravo temeljem elementarne aritmetike, pogađa zamišljene brojeve.

1.4 Trikovi s kalendarom

Materijal potreban za sljedeće trikove je klasični papirnati kalendar, a u pozadini trika je činjenica da dani u mjesecu čine aritmetički niz s diferencijom 1, no to ne znači da se radi o trikovima samo za učenike srednjih škola. Trikovi su namijenjeni učenicima nižih razreda osnovne škole jer su brojevi koji sudjeluju u računskim operacijama prirodni brojevi manji od 31. Dakle, svaki učenik nižih razreda trebao bi biti u mogućnosti razumjeti i primijeniti metode opisane u trikovima. U svim ovim trikovima tijekom izvođenja nastavnik je okrenut tako da ne vidi što učenik radi, tj. tako da ne vidi odabrane brojeve. Ovi su trikovi preuzeti iz [7].

Tri dana u tjednu

Učenik uzima kalendar u ruke te odabire tri dana zaredom te ih zaokružuje. Nakon toga zbroji te tri vrijednosti i kaže rezultat. Nastavnik za tren pogađa dane koje je učenik zaokružio.

Naime, nastavnik samo treba izrečeni zbroj podijeliti s 3, tako dobije srednji dan, a prvi i treći dan su očigledno za 1 manji odnosno veći brojevi.

Dokaz. Neka je $a \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ prvi odabrani dan. Tada je sljedeći dan $a + 1$, a treći će biti $a + 2$. Dakle, kad se ti dani zboje dobiva se

$$a + (a + 1) + (a + 3) = 3 \cdot a + 3 = 3 \cdot (a + 1),$$

odnosno zbroj je jednak trostrukom srednjem danu. □

Najdraži dan

U ovoj varijanti prethodnog trika, učenik odabire najdraži dan (ponedjeljak, utorak, . . .). Kada odabere dan, zaokruži u kalendaru taj dan tri puta zaredom u mjesecu. Na primjer, učenik odabire petak kao najdraži dan, zaokruži prvi, drugi i treći petak u mjesecu. Kao u prethodnom triku, zbraja ih te rezultat kaže nastavniku.

Provođenje trika je analogno prethodnom, prvo se podijeli zbroj s 3 te je time dobiven srednji od tri dana, a druga dva su za 7 manji odnosno veći. Dokaz da trik funkcionira je (gotovo) isti kao prethodni, jer su sad odabrani dani a, $a + 7$ i $a + 14$.

Kvadratni tjedan

U ovom triku učenik treba zaokružiti kvadrat koji obuhvaća 4 dana. Nakon što ih učenik zaokruži, zbroji ih kao u prethodnim trikovima. Nastavnik dijeli dobiveni zbroj s 4 te tom broju oduzme 4 dana, rješenje je prvi dan koji je zaokružen. Tom danu se doda još 1 dan te se dobiva drugi dan. Treći dan se dobije tako da se drugom danu doda 6 dana, a onda četvrti dan tako da se ponovno pribroji 1 dan trećem danu. Ovdje su odabrani dani tipa a, $a + 1$, $a + 7$ i $a + 8$, pa im je zbroj $4 \cdot (a + 4)$, dakle dijeljenjem zbroja s 4 dobivamo dan za 4 veći od prvog.

Križić

Naposlijetku dajemo verziju u kojoj 5 zaokruženih dana tvore oblik križića (može se prilagoditi i da zaokruženi dani tvore oblik slova X). Od učenika se traži da uokviri križić oko 5 dana u mjesecu te ih zbroji. Da bi se otkrio središnji dan u križiću, zbroj treba podijeliti s 5 (jer smo sad zbrajali dane oblika a, $a + 6$, $a + 7$, $a + 8$, $a + 14$ pa im je zbroj $5, a + 35 = 5 \cdot (a + 7)$). Prvi dan se dobije tako da se središnjem danu oduzme 7, zadnji dan tako da se centralnom danu priboji 7 dana, a drugi i treći dan se dobiju tako da se središnjem danu oduzme, odnosno pribroji 1.

1.5 Zbrajanje poopćenih Fibonaccijevih brojeva

Ovaj se trik može izvesti u nižim razredima osnovne škole, točnije u 4., razredu kada učenici uče zbrajanje i oduzimanje brojeva do 10 000, ali da bi se trik doista razumio potrebno je poznavanje ideje Fibonaccijevih brojeva. Stoga, ako ga želimo i detaljnije analizirati, možemo ga izvesti u 4. razredu srednje škole kada se uče nizovi brojeva.

Podsjetimo se: Fibonaccijevi brojevi su članovi niza koji započinje s 1, 1, a dalje je svaki sljedeći član zbroj prethodna dva. Ako dozvolimo da početni članovi budu bilo koji brojevi, ali zadržimo rekurzivnu definiciju, govorimo o poopćenim Fibonaccijevim brojevima i upravo o njima se radi u ovom triku.

Učenik odabire dva broja (najzgodnije je trik izvoditi s dvoznamenkastim prirodnim brojevima jer ako krene od višeznamenkastih, brojevi postaju jako veliki i račun zamoran, a ako krene od jednoznamenkastih trik nije tako impresivan) koje zapisuje jedan ispod drugog. Ispod njih redom zapisuje uvijek zbroj dva broja iznad sve dok u stupcu ne bude 10 brojeva. Nastavnik je ili okrenut sve dok učenik ne kaže da ih je sve ispisao (u tom slučaju samo nakratko baci pogled na sedmi po redu broj) ili gleda sve dok učenik ne napiše sedmi član (npr. s izgovorom da hoće vidjeti da stvarno zna pravilno zbrajati) i onda okrene leđa ploči. Nakon što je učenik ispisao svih deset brojeva, treba ih sve zbrojiti, a za to vrijeme nastavnik samo treba sedmi član pomnožiti s 11 (za što može iskoristiti metodu iz prvog trika u ovom radu) i onda na odabrani način demonstrirati kako je „brzo zbrojio" (ili pogodio) konačni rezultat [11].

Primjerice, neka je učenik odabrao brojeve 23 i 32. Dakle na ploču piše sljedeće:

$$23$$
$$32$$
$$55$$
$$87$$
$$142$$
$$229$$
$$371$$
$$600$$
$$971$$
$$1571$$

Nastavnik će brzo pogoditi da je zbroj svih ovih brojeva $371 \cdot 11 = 4081$.

Dokaz. Neka su prva dva broja A i B bilo koja dva broja. Dakle, na ploči će pisati sljedećih deset brojeva:

$$A,$$
$$B,$$
$$A + B,$$
$$B + (A + B) = A + 2B,$$
$$(A + B) + (A + 2B) = 2A + 3B,$$
$$(A + 2B) + (2A + 3B) = 3A + 5B,$$
$$(2A + 3B) + (3A + 5B) = 5A + 8B,$$

$$(3A + 5B) + (5A + 8B) = 8A + 13B,$$

$$(5A + 8B) + (8A + 13B = 13A + 21B,$$

$$(8A + 13B) + (13A + 21B) = 21A + 34B.$$

Zbroj tih 10 brojeva je: $11 \cdot (5A + 8B)$, tj. točno sedmi broj pomnožen s 11. □

1.6 Binarni trik

Ovaj trik je primjeren za učenike viših razreda osnovne škole, koji su se već susreli ili će se upravo susresti s binarnim sustavom brojeva na satovima informatike ili same matematike. Binarni brojevni sustav je pozicijski brojevni sustav s bazom 2, a njegove znamenke su 0 i 1. Dok u dekadskom pozicijskom sustavu vrijednost pozicije predstavlja potenciju od 10, ovdje je vrijednost svake pozicije potencija od 2. Za početak, osnovna verzija trika. Potreban materijal su kartice kao na slici 1.2. Učenik zamisli broj, zatim

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Slika 1.2: Kartice za binarni trik

nađe sve kartice na kojima se nalazi taj broj. Kartice predaje nastavniku koji za tren otkriva zamišljeni broj [7]. Kako? Objasnimo to na primjeru.

Neka je učenik je zamislio broj 35, dakle odabrao je kao na slici 1.3. Nastavnik samo

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Slika 1.3: Odabrane kartice

treba zbrojiti brojeve u gornjem lijevom kutu tih kartica, zaokružene na slici 1.3:

$$1 + 2 + 32 = 35.$$

Osim osnovne verzije, trik se može izvesti i na sljedeće načine:

1. Pogađanje datuma rođenja

   Učenik kao i u osnovnom triku odabire kartice, ali sad one koje sadrže njegov dan, a potom i mjesec rođenja. Važno je da se trik izvede dvaput, odvojeno za pogađanje dana i za pogađanje mjeseca rođenja. Uočimo da je za pogađanje dana rođenja dovoljno koristiti prvih pet kartica sa slike 1.2 (na šestoj su svi brojevi veći od 31), a za pogađanje mjeseca rođenja dovoljne su prve četiri kartice.

2. Pogađanje broja godina učenika ili njihovih roditelja

   Osim pogađanja datuma trik možemo izvesti i tako da pogađamo starosti učenika ili njihovih roditelja. Kao i u osnovnom triku učenik odabire kartice, a nastavnik zbrajajući prve brojeve na njima dolazi do rješenja.

Dokaz. Primijetimo da kartice započinju potencijama broja 2 i da svaka kartica sadrži točno one brojeve kojima je binarna znamenka 1 na poziciji potencije od 2 zapisane u gornjem lijevom kutu. Znamo da se svaki prirodan broj može jednoznačno zapisati kao zbroj potencija broja 2, pa slijedi da se zamišljeni broj rekonstruira na opisani način. □

Uočimo da se princip trika može još bolje sakriti ako brojeve na karticama ispišemo nepravilnijim redoslijedom, samo je bitno da izvođač zna gdje se nalaze brojevi koje treba zbrajati.

Poglavlje 2

Teorija brojeva

Teorija brojeva je grana matematike koja se bavi proučavanjem svojstava prirodnih brojeva (i cijelih i racionalnih). Njezini početci sežu u antičku Grčku. Najstariji poznati rezultati iz teorije brojeva potječu od pitagorejaca, a najstariji sačuvani su oni opisani u VII., VIII. i IX. knjizi Euklidovih *Elemenata*. Njome su se bavili i arapski matematičari, ali je interez za nju u Europi nakon kraja antike zamro dok ga u 17. st. nije obnovio Pierre de Fermat (1607.–1665.). Mnogo novih rezultata iz teorije brojeva dobio je L. Euler (1707.−1783.), a C. F. Gauß (1777.−1855.) dao je teoriji brojeva modernu formu. Gauß je izjavio „matematika je kraljica znanosti, a teorija brojeva je kraljica matematike". Sve do sedamedesetih godina 20. stoljeća ona je bila dio čiste, teorijske, neprimjenjive matematike, ali tada su otkrivene njezine primjene u kriptografiji [5].

U ovom poglavlju opisat ćemo trikove čija pozadina je u nekima od temeljnih rezultata iz teorije brojeve, uglavnom vezano za djeljivost.

2.1 Parnost i neparnost

Za početak nekoliko trikova koji se temelje na parnosti i neparnosti brojeva. Budući da se učenici već rano susreću s tim pojmovima, može ih se primijeniti u nastavi matematike počevši od drugog razreda osnovne škole.

Pogodi broj

Za „zagrijavanje” jedan jednostavan trik koji će nas uvesti u trikove s parnim i neparnim brojevima [1]. Nastavnik traži od učenika da odabere između 2 i 3 jedan broj koji mu je „draži”. Nakon toga odabrani broj pomnoži s 4, a drugi sa 7 te ih zbroji i kaže rezultat. Nastavnik pogađa odabrani broj. Trik se može izvesti s bilo koja četiri broja, pazeći da svaki par sadrži jedan paran i jedan neparan broj.

U triku se koristi svojstvo parnih i neparnih brojeva da je umnožak parnog broja s parnim ili neparnim brojem paran broj, a umnožak dva neparna broja je neparan. Neka su a i b brojevi među kojima „dražeg” bira učenik (a je paran, b je neparan), zatim neka je x paran broj s kojim učenik treba pomnožiti „draži” broj, a y neparan s kojim treba množiti onaj drugi. Imamo dva moguća slučaja:

1. Učenik je zamislio broj a (paran). U tom slučaju računa

$$a \cdot x + b \cdot y = \text{paran} \cdot \text{paran} + \text{neparan} \cdot \text{neparan} = \text{paran} + \text{neparan} = \text{neparan};$$

2. Učenik je zamislio broj b (neparan). U tom slučaju računa

$$b \cdot x + a \cdot y = \text{neparan} \cdot \text{paran} + \text{paran} \cdot \text{neparan} = \text{paran} + \text{paran} = \text{paran}.$$

Dakle, ako je zbroj paran, učenik je zamislio neparan broj, a ako je zbroj neparan, učenik je zamislio paran broj.

Misterij zaključane sobe

Sljedeći trik je zgodan kao uvod u parne i neparne brojeve u drugom razredu osnovne škole. Za trik su potrebni sljedeći materijali: prsten, tablica (slika 2.1) te kartice s uputama za paran i neparan broj (slika 2.2 lijevo i desno).

[1] Trik napisan u komunikaciji s doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Slika 2.1: Tablica

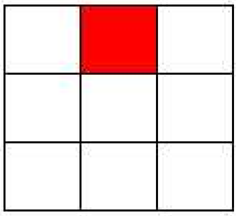
Upute:
1. Prekriži 6.
2. Pomakni se za 7 mjesta i prekriži 7.
3. Pomakni se za 4 mjesta i prekriži 3.
4. Pomakni se za 6 mjesta i prekriži 1.
5. Pomakni se za 5 mjesta i prekriži 8.
6. Pomakni se za 2 mjesta i prekriži 2.
7. Pomakni se za 1 mjesto i prekriži 9.
8. Za kraj pomakni se za 7 mjesta i prekriži 4.

Upute:
1. Prekriži 7.
2. Pomakni se za 4 mjesta i prekriži 3.
3. Pomakni se za 7 mjesta i prekriži 2.
4. Pomakni se za 3 mjesta i prekriži 9.
5. Pomakni se za 1 mjesta i prekriži 8.
6. Pomakni se za 2 mjesta i prekriži 6.
7. Pomakni se za 5 mjesto i prekriži 1.
8. Za kraj pomakni se za 3 mjesta i prekriži 4.

Slika 2.2: Kartice s uputama, za paran broj lijevo, za neparan desno

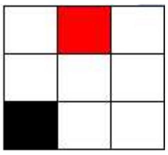
Nastavnik priča o hotelu čiji je raspored soba prikazan tablicom na slici 2.1. Počinjena je krađa, ukraden je zlatni prsten, policija metodom dedukcije otkriva u kojoj sobi se nalazi prsten. Nastavnik zapisuje svoje predviđanje i ostavlja ga tako da se do kraja trika ne vidi, okreće leđa, a učenik spušta prsten na polje s nekim brojem te zatim prati karticu sa uputama u skladu s time je li taj broj paran ili ne paran. Učenik smije pomicati prsten po poljima lijevo, desno, gore i dolje, ali ne smije dijagonalno i ne smije staviti prsten da ostane na prekriženom polju. Kada je izvršio sve upute, učenik otvara nastavnikovo predviđanje: „Policija je našla prsten u sobi broj 5.”. Naime, prsten će uvijek na kraju završiti na polju s brojem 5 [7].

Neka je primjerice učenik na početku stavio prsten na polje broj 2 (slika 2.3).

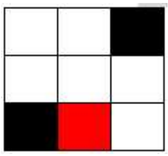


Slika 2.3:

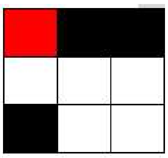
Stoga mora pratiti upute za parne brojeve (slike 2.4 do 2.11).



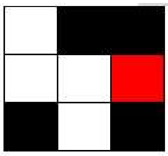
Slika 2.4: Prekriži 7.



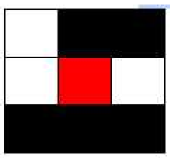
Slika 2.5: Pomakni se za 4 mjesta i prekriži 3.



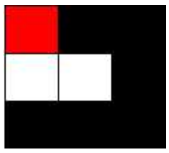
Slika 2.6: Pomakni se za 7 mjesta i prekriži 2.



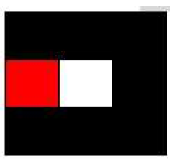
Slika 2.7: Pomakni se za 3 mjesta i prekriži 9.



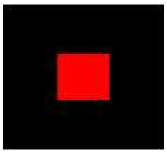
Slika 2.8: Pomakni se za 1 mjesta i prekriži 8.



Slika 2.9: Pomakni se za 2 mjesta i prekriži 6.



Slika 2.10: Pomakni se za 5 mjesta i prekriži 1.



Slika 2.11: Za kraj pomakni se za 3 mjesta i prekriži 4.

Što je u kojoj ruci?

Trik koji slijedi namijenjen je učenicima osnovne škole, iako se može izvest i u srednjoj, a preuzet je iz [10]. Materijal potreban za trik su dvije kovanice od 5 i 10 lipa, a u triku sudjeluju dva učenika. Postupak je sljedeći:

1. Nastavnik jednom učeniku preda kovanice, on ih skriva u svaku ruku po jednu bez da otkriva njihov raspored.

2. Drugi učenik zamišlja broj s koji će prvi pomnožiti vrijednost kovanice u desnoj ruci i šapne ga prvom učeniku, ali nastavniku samo otkriva njegovu parnost. Nastavnik ovisno o parnosti zamišljenog broja daje sljedeće upute:

   1.a. Ako je broj paran, onda prvi učenik samo taj broj pomnoži s vrijednosti kovanice i ne govori ništa nastavniku.

   1.b. Ako je zamišljeni broj neparan, onda nastavnik traži od drugog učenika da ga pomnoži s 2, te onda kao u 1.a., prvi učenik dobiva umnožak.

3. Nakon toga, kao u 2., drugi učenik opet zamišlja broj, ali ovaj put drugačije parnosti. Sada dobiva sljedeće upute:

   2.a. Ako je novi broj neparan, onda prvi učenik samo taj broj pomnoži s vrijednosti kovanice u lijevoj ruci.

   2.b. Ako je zamišljeni broj paran, onda nastavnik traži od drugog učenika da mu doda neki neparan broj, primjerice 7, te onda kao u 2.a., prvi učenik dobiva umnožak.

4. Na kraju prvi učenik zbroji ta dva produkta i otkriva zbroj.

5. Nastavnik iz prvog pokušaja pogađa u kojoj ruci se krije koja kovanica.

Tijek trika simbolički je prikazan u tablici 2.1. Preostaje nam još otkriti kako nastavnik brzo može pretpostaviti u kojoj ruci je koja kovanica. Ovisno o tome je li prvi broj kojeg zamisli drugi učenik paran ili neparan, konačni reultat je jedan od:

1. $5 \cdot 2n + 10 \cdot (2m + 1) = 10n + 20m + 10 = 10(n + 2m + 5)$;
2. $10 \cdot 2n + 5 \cdot (2m + 7) = 20n + 10m + 35 = 5(4n + 2m + 7)$.

	Desna ruka	Lijeva ruka	Desni umnožak	Lijevi umnožak	Zbroj
1. mogućnost	5 lipa	10 lipa	$5 \cdot 2n$	$10 \cdot (2m + 1)$	$5 \cdot 2n + 10 \cdot (2m + 1)$
2. mogućnost	10 lipa	5 lipa	$10 \cdot 2n$	$5 \cdot (2m + 7)$	$10 \cdot 2n + 5 \cdot (2m + 7)$

Tablica 2.1: Tijek trika „Što je u kojoj ruci?”

Dakle, ako je rezultat djeljiv s 10, slijedi 5 lipa je u desnoj ruci, 10 lipa u lijevoj, ako nije onda obrnuto.

2.2 Prosti brojevi

Prosti brojevi su prirodni brojevi koji su djeljivi samo s jedan i samim sobom. Trikovi koji slijede temeljit će se na tom svojstvu, a namijenjeni su učenicima viših razreda osnovne škole.

Odabrana karta

Trik koji slijedi osmislili su Jacob Daley i George Sands neovisno jedan o drugom [7]. Budući da se trik temelji na prostim brojevima, primjeren je za izvođenje učenicima nakon završenog 5. razreda osnovne škole. U triku se koristi bilo koji prost broj p karata (najviše njih 13, pa ćemo mi taj trik opisati upravo na primjeru korištenja 13 karata). Pritom karte imaju vrijednosti koje pišu na njima, as (A) vrijedi 1, dečko (J) vrijedi 11, a dama (Q) vrijedi 12. Nastavnik prvo iz standardnog kompleta karata odabire po jednu kartu s vrijednostima od 1 do $p - 1$ (u našem slučaju dakle po jedan A, 2, 3, $\ldots$, 10, J i Q). Te se karte slože u sljedećem redoslijedu (odozogor prema dolje, poleđine su okrenute prema gore): 10-5-7-2-3-8-J-9-6-Q-A-4. Tako složeni snop nastavnik stavlja pred učenika, pokraj toga mu predaje preostale karte. Primijetimo da su karte složene tako da kad se na prvo (najgornje) mjesto doda još neka karta i ciklički od bilo koje karte pribrojimo njenu vrijednost (dakle, zbrajamo modulo p), rezultat nikad neće biti prva karta.

Učenik zatim među tim preostalim kartama treba odabrati jednu, zapamtiti ju i staviti (poleđinom prema gore) na pripremljeni snop od $p-1$ karte (dakle, sad ima snop s prostim brojem p karata), ostale karte se više ne koriste u triku. Učenik sad treba koliko god puta želi, bar jednom, presječi taj snop, sve dok ne smatra da je njegova karta dobro sakrivena. Uočimo da presijecanje ne mijenja ciklički poredak karata.

Sad učenik treba otvoriti najgornju kartu i ostaviti ju na vrhu snopa. Ovisno o njezinoj vrijednosti n, treba jednu po jednu prebaciti sljedećih n karata s vrha snopa na dno. Nakon toga ponovno otvara trenutnu najgornju kartu i zatim ovisno o njezinoj vrijednosti jednu po jednu prebacuje karte s vrha na dno. Postupak treba ponovljajući sve dok ne ostane samo jedna karta poleđinom prema gore, upravo ona će biti učenikova na početku odabrana karta.

Iznimno, može se dogoditi da se odabrana karta nakon nekoliko presijecanja opet pojavila na vrhu snopa te ju učenik već u prvom koraku otvori. U tom slučaju nastavnik čestita učeniku na sposobnosti da presijecanjem vrati svoju kartu na vrh, u suprotnom izriče predviđanje da će posljednja neotvorena karta biti upravo učenikova odabrana karta.

Skrivena karta

Za sljedeći trik potreban nam je standardni francuski komplet karata te dva učenika. Na početku nastavnik podijeli snop karata na pola i jednu polovicu da jednom učeniku, a drugu drugom. Svaki odabere i upamti jednu kartu i preda ju drugom, koji ju umetne među svoje karte i onda ih dobro promiješa. Nastavnik uzima oba snopa, stavlja jedan na drugi, otvori sve karte i brzo nalazi koje karte su učenici razmijenili [11].

Za ovaj trik nastavnik unaprijed, u tajnosti, pripremi snop karata tako da odvoji proste od složenih brojeva. Pritom uzima da dečko (J) vrijedi 11, dama (Q) 12, kralj (K) 13, a as (A) vrijedi 1. Budući da 1 nije ni složen ni prost, dva asa stavlja s kartama prostih vrijednosti (2, 3, 5, 7, J, K), dva sa složenim (4, 6, 8, 9, 10, Q). Pritom zapamti koja dva asa je stavio u koju skupinu karata. Zatim svaki od dva snopa dobro izmiješa i stavi jedan na drugog. Očito je lako uočiti prost broj među složenim i obrnuto, tako da samo treba paziti da svakom od učenika dade točno pola karata, primjerice tako da pita znaju li koliko je karata ukupno (52), koliko je pola (26) pa komentira da je pravedno da svako dobije 26 i tako dobiva izgovor za odbrojavanje.

2.3 Brzi magični kvadrat

Trik koji slijedi predstavlja primjenu magičnog kvadrata [2] u matamagiji. Započinje tako da učenik odabire broj između 34 i 100 da bude magična suma, a nastavnik brzo

[2]Magični kvadrati su kvadratne tablice brojeva sa svojstvom da su zbrojevi svih stupaca, svih redaka i

ispisuje magični kvadrat reda 4 tako da je zbroj jednak zamišljenom broju. U tom kvadratu će dodatno svaki 2×2-podkvadrat sadržavati brojeve koji u zbroju daju zamišljeni broj. Također će i brojevi koji se nalaze u kutovima magičnog kvadrata imati taj isti zbroj.

Kako nastavnik brzo može ispisati magični kvadrat zadanog magičnog zbroja sa svim navedenim dodatnim svojstvima? Započinje se tako da zapamti kvadrat u kojem su sva polja popunjena osim njih četiri kao na slici 2.12, četiri nepopunjena bit će označena slovima A, B, C i D. Sve što treba je na pozicije tih slova staviti prikladne brojeve [7]. Polje A se popunjava tako da od zbroja kojeg učenik kaže oduzmemo 21 te upišemo na tu poziciju. Tom broju dodamo 1 te upišemo u polje B, ponovno dodamo 1 i upišemo u polje C i na kraju u polje D upišemo broj u polje C zbrojen s 1. Drugim riječima ako s X označimo zbroj kojeg je učenik zahtijevao, onda kvadrate popunjavamo po pravilu:

$$A = X - 21,$$

$$B = A + 1,$$

$$C = B + 1,$$

$$D = C + 1.$$

B	1	12	7
11	8	A	2
5	10	3	D
4	C	6	9

Slika 2.12: Predložak koji nastavnik mora znati

Primjer. Učenik je zahtijeva magičnu sumu 67. Tada je

$$A = 67 - 21 = 46,$$

$$B = 46 + 1 = 47,$$

$$C = 47 + 1 = 48,$$

$$D = 48 + 1 = 49.$$

Dakle, kvadrat na slici 2.13 ima magičnu sumu 67.

obje dijagonale jednaki (to je tzv. magična suma). Broj redaka/stupaca magičnog kvadrata naziva se njegovim redom.

47	1	12	7
11	8	46	2
5	10	3	49
4	48	6	9

Slika 2.13: Magični kvadrat reda 4 s magičnom sumom 67

2.4 Djeljivost s 9

Rođendan

Ovaj je trik je namijenjen učenicima četvrtog razreda osnovne škole. Učenik zamisli svoj „sretan” prirodan broj, pomnoži ga se s 9 te umnošku pribraja koliko ima godina. Nakon što učenik kaže rezultat nastavnik pogađa broj godina [7].

Neka je x sretan broj, a y broj godina. Dakle, učenik računa $9x+y$. Nastavnik taj rezultat podijeli s 9 i zapamti ostatak. Broj godina učenika y mora se od tog ostatka razlikovati za višekratnik od 9, dakle je jednak ostatku, ostatku plus 9, ostatku plus 18, ... S obzirom na to da je lako unutar raspona od 9 godina procijeniti koliko je star učenik, nastavnik će lako pogoditi broj y.

Neka je primjerice desetgodišnji učenik odabrao „sretni” broj 30, pomnožio ga je s 9 te mu dodao 10, dobio je broj 280. Nastavnik dijeli taj broj s 9 te dobiva 31 i ostatak 1. Lako procijeni učenik ne može imati 1 godinu, ali bi mogao imati 1 + 9 = 10 godina i tako pogađa učenikove godine.

Nestala znamenka

U ovom ćemo triku koristiti svojstvo da je prirodan broj zapisan u dekadskom sustavu djeljiv s 9 točno ako mu je zbroj svih znamenaka djeljiv s 9.

Na početku trika nastavnik traži od učenika da zamisli neki što veći prirodni broj. Nakon toga mu učenik zbraja sve znamenke, te zbroj oduzme od zamišljenog broja. Prekriži jednu znamenku različitu od 0 te bilo kojim redom pročita preostale znamenke rezultata. Nastavnik će uvijek pogoditi koju je znamenku učenik pobrisao. Kako? Dok učenik čita znamenke, nastavnik ih zbraja te mu na kraju preostaje samo pronaći razliku dobivenog zbroja do prvog slijedećeg višekratnika broja 9 [3].

Uočimo prvo da smo zabranili brisanje 0 jer je ona kongruentna s 9 (modulo 9). Dakle, znamo da je pobrisana neka od znamenki 1 do 9, koje su svaka kongruentna sama sebi (modulo 9). Kad od broja oduzmemo njegov zbroj znamenki, uvijek dobivamo broj djeljiv s 9, dakle dobivamo broj x čiji zbroj znamenki je djeljiv s 9. Dakle, ako nastavnik zna zbroj svih znamenki od x osim jedne koja nije 0 (a njega saznaje kad učenik nabraja znamenke), nedostajuća znamenka je uvijek jednaka razlici tog zbroja do prvog sljedećeg višekratnika od 9.

Primjerice, neka je učenik zamislio broj 134 256, zbroj njegovih znamenaka je 21, pa je izračunao $134256 - 21 = 134235$. Neka je prekrižio znamenku 4, te čita, 1, 3, 2, 3, 5, nastavnik zbraja i dobiva slijedeće: $1 + 3 + 2 + 3 + 5 = 14$, prvi slijedeći višekratnik broja 9 je 18. Slijedi, znamenka koja nedostaje je 4.

2.5 Svojstva dekadskog zapisa

Uvijek 22

Ovaj trik možemo iskoristiti uvođenje pojmova permutacija i varijacija, a potrebno je znati dekadski zapis broja. Stoga je, ovisno o tome želimo li eksplicitno spominjati permutacije, ovaj trik namijenjen za nastavu matematike u 3. razredu srednje škole ili u 5. razredu osnovne škole kao ponavljanje dekadskog brojevnog sustava.

Uputa za trik je sljedeća: Učenik treba zamisliti neki troznamenkasti broj kojem su sve znamenke različite. Zatim treba ispisat sve moguće kombinacije (to su varijacije drugog razreda u tročlanom skupu) po dvije od tih znamenaka tako da tvore dvoznamenkaste brojeve, ukupno će tako dobiti šest dvoznamenkastih brojeva. Nakon toga ih treba zbrtojiti, a odvojeno treba zbrojiti znamenke polaznog troznamenkastog broja. Na kraju zbroj dvoznamenkastih brojeva treba podijeliti sa zbrojem znamenaka troznamenkastog broja. Nakon što je učenik sve zbrojio i podijelio, nastavnik pogađa da je konačni rezultat 22 [8].

Neka je učenik primjerice zamislio broj 735, te je napisao sljedeće dvoznamenkaste brojeve: 73, 75, 35, 37, 53, 57. Njihov zbroj iznosi $73 + 75 + 35 + 37 + 53 + 57 = 330$, a zbroj znamenaka polaznog broja iznosi $7 + 3 + 5 = 15$. Preostaje podijeliti 330 s 15: $330 : 15 = 22$.

Dokaz. Neka su a, b, c redom znamenke početnog broja. To znači da učenik ispisuje sljedeće dvoznamenkaste brojeve:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Rastavimo te dvoznamenkaste brojeve na desetice i jedinice:

$$ab = 10a + b,$$

$$\begin{aligned} ac &= 10a + c, \\ ba &= 10b + a, \\ bc &= 10b + c, \\ ca &= 10c + a, \\ cb &= 10c + b. \end{aligned}$$

Dakle, učenik izračunava sljedeći zbroj

$$ab + ac + ba + bc + ca + cb =$$

$$\begin{aligned} &= (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b) = \\ &= 22a + 22b + 22c = \\ &= 22(a + b + c). \end{aligned}$$

Kad taj zbroj podijelimo sa zbrojem znamenki početnog broja $a + b + c$ očito dobivamo 22. □

Uvijek 1089

Ovaj trik je jedan od najčešće spominjanih kada je riječ o matematičkim trikovima. Često se transformira u matematički trik proricanja, a može se generalizirati i na više znamenki i druge brojevne sustave [1].

Učenik odabire bilo koji troznamenkasti broj kojemu prva i zadnja znamenka nisu jednake. Nakon toga obrne poredak znamenki te oduzme manji od većeg od dvaju brojeva. Znamenkama razlike ponovno obrne poredak te tako dobiveni broj zbraja s prethodnom razlikom. Nastavnik pogađa da je konačni rezultat 1089.

Neka je primjerice učenik zamislio broj 742, dakle kad mu obrne redoslijed znamenki dobiva 247. Oduzima ta dva broja:

$$742 - 247 = 495.$$

Okrene poredak znamenki razlike 495 da dobije 594 i naposljetku zbroji ta dva broja:

$$495 + 594 = 1089.$$

Dokaz. Neka je abc na početku zamišljeni troznamenkasti broj. Znamo da $a \neq c$ pa bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a > c$. U prvom koraku obrtanje znamenki rezultira brojem cba, a oduzimanje daje

$$abc - cba = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c) + (c - a).$$

Budući da je $c < a$, znači da oduzimanje na mjestu jedinica prenosi znamenku na mjesto desetica („posuđuje" se desetka da bi se izvelo oduzimanje na zadnjem mjestu), a ta pak prenosi znamenku i na mjesto stotica (npr. $742 - 247 = 495 = 100(7 - 2 - 1) + 90 + (10 + 2 - 7)$). Dakle, rezultat oduzimanja je broj kojem je prva znamenka $a - c - 1$, druga je 9, a treća je $10 + c - a$, tj. razlika iznosi $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$. Obrtanje poretka znamenki te razlike daje broj $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, što u konačnom zbroju daje $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089$. □

Poglavlje 3

Algebra

Naziv algebra potiče od arapske riječi al-džabr koja se pojavljuje u dijelu naslova znamenitog djela arapskog (zapravo, perzijskog) matematičara Al-Hvarizmija (oko 780.–850.), u kojem se prvi put pojavljuju algebarski zadaci (jednadžbe) s pripadnom matematičkom pozadinom. Jednostavne algebarske zadatke možemo naći još u sumersko-babilonsko i staroegipatsko doba, ali su oni rješavani bez generalizacija i dokaza. Antički grčki matematičari su pak svoje tvrdnje dokazivali, a i riješili su ili postavili mnoge probleme koji su danas algebarski, no kod njih je taj sadržaj izražen u kontekstu geometrije. Stoga se algebra počela razvijati tek u arapsko doba i nakon al-Hvarizmija bitno su je razvili i drugi arapski matematičari (Abu Kamil, Al-Karadži, Omar Khayyam, ...) [5, 6]. Trikovi u nastavku u pozadini imaju algebarske principe (svojstva računskih operacija te linearne jednadžbe i funkcije).

3.1 Svojstva računskih operacija

Tajna trikova koji slijede krije se u svojstvima računskih operacija, te su ovi trikovi namijenjeni učenicima osnovne škole.

Uvijek 5

Za početak jedan jednostavan trik koji je namijenjen učenicima 6. razreda osnovne škole, a može se pokazati nakon što učenici nauče sljedbenike brojeva.

Učenik zamisli prirodan broj, doda mu njegov (neposredni) sljedbenik, nakon toga doda 9 te sve podijeli s 2. Na kraju oduzme zamišljeni broj, a nastavnik pogađa rezultat. Naime, rezultat je uvijek 5 [12]..

Dokaz. Neka je n broj kojeg je učenik zamislio. Upute trika odgovaraju računu:

$$\frac{n + (n + 1) + 9}{2} - n = \frac{2n + 10}{2} - n = n + 5 - n = 5.$$

Uočimo da se u dokazu koriste asocijativnost zbrajanja, distributivnost množenja prema zbrajanju i komutativnost zbrajanja. □

Datum rođenja

U triku koji slijedi nastavnik pogađa datum rođenja učenika pomoću linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Trik je primjeren učenicima 6. razreda osnovne škole.

Nastavnik proziva učenika koji žele sudjelovati u triku. Na početku učenik zapisuje, tako da nastavnik ne vidi, svoj datum rođenja (dan i mjesec).

Nastavnik daje sljedeće upute: Udvostruči broj dana te rezultat pomnoži s 10, doda 73, sve pomnoži s 5 na kraju doda broj mjeseci. Nakon završetka računanja oba učenika kažu brojeve koje su dobili. Tijekom cijelog računa nastavnik treba biti okrenut tako da ga ne vidi, a na kraju učenik nastavniku govori samo konačni rezultat, temeljem kojeg nastavnik pogađa dan i mjesec njegova rođenja [12].

Primjerice, Ana je rođena 24. veljače (24.02.), pa treba računati:

$$2 \cdot 24 = 48,$$

$$48 \cdot 10 = 480,$$

$$480 + 73 = 553,$$

$$553 \cdot 5 = 2765,$$

$$2765 + 2 = 2767.$$

Dokaz. Neka je $D = ab$ dvoznamenkasto zapisani dan rođenja, a $M = cd$ dvoznamenkasto zapisani mjesec rođenja (dakle, primjerice 1. 3. tretiramo kao 01. 03.). Tada upute trika znače sljedeći račun:

$$(D \cdot 2 \cdot 10 + 73) \cdot 5 + M = 100D + M + 365.$$

Dakle, kad oduzmemo 365 od rezultata ostaje $100D + M = abcd$. □

. Uočimo da ovdje ne samo da su u pozadini trika svojstva računskih operacija, nego nastavnik mora u glavi riješiti linearnu jednadžbu oblika $X + 365 =$ broj kojeg kaže učenik (a onda rekonstruirati X kao $100D + M$).

Zamišljeni broj

Učenik zamišlja dva prirodna broja između 1 i 9. Prvi broj udvostruči, pa tom broju pribroji 2, zbroj pomnoži s 5 te umnošku doda drugi broj. Nakon što je sve izračunao kaže rješenje, a nastavnik pogađa oba broja [12].

Neka je učenik zamislio brojeve 3 i 6. Prati upute te računa sljedeće:

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 6 + 2 = 8, \quad 8 \cdot 5 = 40, \quad 40 + 6 = 46.$$

Da bi nastavnik otkrio polazne brojeve, treba oduzeti 10 od rezultata $(46 - 10 = 36)$. Prva znamenka je prvi zamišljeni broj, a zadnja drugi.

Dokaz. Ako su a i b zamišljeni brojevi, onda upute odgovaraju računu $(2a + 2) \cdot 5 + b = 10a + b + 10$. Dakle, ako oduzmemo 10, znamenka jedinica je drugi zamišljeni broj, a ispred nje je prvi. Uočimo da ovaj trik funkcionira i ako je prvi zamišljeni broj (a) višeznamenkast. □

.

Trik se može provesti i na primjeru braće i sestara, gdje a predstavlja broj braće, a b sestara. U slučaju da učenik nema braće, riješenje nakon oduzimanja 10 će biti jednoznamenkasti broj, odnosno ako nema sestara na mjestu jedinica će biti 0.

Spojevi na slijepo

Navest ćemo još jedan primjer trika u kojem se uslijed razdvojenog množenja s 2 i 5 zahvaljujući asocijativnosti množenja kamuflira množenje s 10 koje znamenku pomiče za jedno mjesto ulijevo. U ovom slučaju nastavnik priča priču inspiriranu internetskim stranicama za spajanje parova [7].

Par (učenik i učenica) sjeda u klupu jedan nasuprot drugoga. Svaki dobiva list papira, važno je da ni jedno ne vidi što drugi piše. Nastavnik ih zamoli da napišu po jedan jednoznamenkasti broj. Pritom nastavnik stoji tako da vidi broj kojeg je napisalo samo jedno od njih, recimo tako da vidi učenikov broj, ali ne vidi broj kojeg je napisala učenica. Nastavnik daje uputu učenici, da svoj broj, pomnoži s 2, doda 2 te sve skupa pomnoži s 5. Nakon toga nastavnik oduzme broj učenika od 10 i kaže ga učenici koja ga treba oduzeti od svog broja.

Svaki par koji se podvrgne ovom ispitivanju kompatibilnosti ispast će kompatibilan — rezultat će biti broj koji ima jednu znamenku od učenika, a drugu od učenice..

Primjerice, neka je Ana zamislila 5, a Ivan 3. Ana prati uputu, zamišljeni broj pomnoži s 2, doda 2 te sve skupa pomnoži s 5. Na kraju oduzima 7. Ana dobiva broj:

$$(2 \cdot 5 + 2) \cdot 57 = 12 \cdot 57 = 607 = 53.$$

Time su vidljiva oba zamišljena broja, par je kompatibilan.

Dokaz. Neka je a broj koji je zamislila učenica, b broj koji je zamislio učenik, $a, b \in 1, 2, 3, ..., 9$. Račun kojeg učenica u triku provodi je

$$(2 \cdot a + 2) \cdot 5 - (10 - b) = 10 \cdot a + 10 - 10 - b = 10 \cdot a + b.$$

Dakle, koje god broje učenici zamislili, uvijek će znamenka desetice biti broj učenice, a znamenka jedinice broj učenika. □

3.2 Linearne jednadžbe i njihovi sustavi

Trikovi koji slijede namijenjeni su učenicima srednje škole jer koriste metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi s više nepoznanica [7].

Igra mozgova

Slijedi jedan trik s kartama koji izgleda kao trik upravljanja umom učenika koji sudjeluje. Za trik je potreban jedan standardni (francuski) komplet karata i jedan učenik.

Nastavnik prvo dobro promiješa karte te ih raširi karata po stolu tako da su karte okrenute licem prema dolje. Učenik odabire 13 karata koje će ići na „crvenu" hrpu, a nakon toga 13 karata koje će ići na „crnu" hrpu. Karte u te dvije hrpe učenik skupi, ali tako da i dalje gledaju licem prema dolje. Nastavnik skuplja preostostale karte (njih 26) u hrpu okrenutu licem prema gore. Nastavnik uzima po jednu od otvorenih karata, ako je crvena stavlja ju u svoju „crvenu" hrpu, a ako je crna u „crnu". Za svaku kartu koju nastavnik tako odloži učenik treba odabrati po jednu od svojih karata (svejedno iz kojeg stupca) i, držeći je i dalje licem prema dolje, staviti ispred odgovarajuće nastavnikove hrpe. Nastavnik pritom komentira nešto poput toga da on utječe na učenikove misli tako da će postići izjednačenje crvenih i crnih karata među onima koje učenik bira [11].

Na kraju ovog postupka pred nastavnikom su dva stupca karata s licem prema gore, u jednom su crvene, a u drugom crne karte. Ispred svakog od tih stupaca je onoliko karata okrenutih licem prema dolje koliko je karata u nastavnikovom stupcu. Sad nastavnik kaže da će broj crvenih karata ispred crvenog stupca biti jednak broju crnih karata u stupcu ispred crnog. Učenik broji karte i ispada da je nastavnik bio u pravu.

Dokaz. Neka su R i B brojevi crvenih odnosno crnih karata koje je otvorio nastavnik. Ispred crvenih karata nalazi se R karata licem prema dolje, među njima je R_1 crvenih i B_1 crnih karata, dakle

$$R = R_1 + B_1.$$

Analogno je ispred crnih karata njih B okrenutih licem prema dolje, od njih je R_2 crvenih i B_2 crnih, dakle

$$B = R_2 + B_2.$$

Tvrdimo da je uvijek $R_1 = B_2$. Od svih karata, njih 26 je crveno, a 26 crno, dakle je

$$R + R_1 + R_2 = B + B_1 + B_2 = 26.$$

Dakle, imamo sustav od četiri linearne jednadžbe sa šest nepoznanica. Supstituiramo $R = R_1 + B_1$ i $B = R_2 + B_2$ u $R + R_1 + R_2 = B + B_1 + B_2$, te dobivamo

$$2R_1 + R_2 + B_1 = R_2 + B_1 + 2B_2.$$

Oduzmemo $R_2 + B_1$ i podijelimo s 2 te preostaje

$$R_1 = B_2.$$

Time je dokazano da je broj crvenih karata ispred crvenog stupca jednak broju crnih karata ispred crnog stupca. □

Broj pikula

Nastavljamo s trikom za koji nam je potreban skup pikula te ćemo pomoću tri koraka otkriti točan broj pikula koje je učenik odabrao [11].

Na početku trika nastavnik traži od učenika dok je on okrenut leđima uzme nekoliko pikula i sakrije ih. Nakon što je učenik uzeo pikule, nastavnik također uzima, vodeći računa da uzme više nego učenik. To osigurava time da je učeniku rekao da uzme nekoliko pikula, pa će nastavnik uzeti puno, recimo dvadesetak, pikula. Nastavnik broji svoje pikule i određuje ciljani broj, to radi tako da od broja svojih pikula oduzme neki mali broj. Primjerice neka je nastavnik uzeo 18 pikula, od njega će oduzet neki mali broj, recimo 4. Ciljani broj je onda $18-4 = 14$. Tada se okreće učeniku i na objavljuje predviđanje, „Uzeo sam isti broj pikula kao ti, uz 4 dodatne te mi ostaje točno pikula koje tebi nedostaju do 14.”. Kada je predviđanje objavljeno, učenik broji svoje pikule, a nastavnik broji svoje pred ostatkom razreda.

Objasnimo trik koristeći linearne izraze. Neka je d umanjitelj, u broj pikula koje je uzeo učenik i n broj pikula koje je uzeo nastavnik. Početak trika osigurava da je $n > u$. Nastavnik je kao ciljani broj izrekao $n - d$, tj. tvrdi da ima u pikula koliko i učetnik, zatim još d njih i da mu preostaje koliko učeniku s njegovih u nedostaje do $n - d$, dakle da ima $u + d + ((n - d) - u) = n$, što naravno ima.

Skriveni novčići

Za kraj jedan trik s novčićima. Nastavnik će uz pomoć sustava linearnih jednadžbi pogoditi koliko novčića učenik drži u lijevoj, odnosno desnoj ruci.

Na početku trika nastavnik učeniku daje neki broj N novčića. Učenik ih raspoređuje proizvoljno u lijevu i desnu ruku. Nastavnik daje daljnje upute: Broj novčića u desnoj ruci neka pomnoži s određenim prirodnim brojem d, a broj u lijevoj s nekim drugim prirodnim brojem l. Na kraju učenik treba zbrojiti ta dva umnoška i nastavniku reći rezultat, a nastavnik odmah pogađa koliko je novčića u kojoj ruci [2].

Neka su D i L brojevi novčića u desnoj i lijevoj ruci. Nastavnik zapravo mora unaprijed riješiti određeni sustav linearnih jednadžbi. Prvo, zna početni broj novčića N, dakle je $D + L = N$. Nadalje, zna s kojim brojevima d i l su D i L množeni te koji je konačni rezultat $x = d\,D + l\,L$. Dakle, nastavnik treba riješiti sustav

$$D + L = N,$$

$$l \cdot L + d \cdot D = x.$$

Prvo, uočimo zašto d i l ne smiju biti jednaki: Dobili bismo jednadžbe s proporcionalnim lijevim stranama pa sustav ili ne bi imao rješenja ili bi ih imao beskonačno mnogo. Drugo, zbog prve jednadžbe je očito da ako nastavnik iz x odredi npr. L, onda je D razlika od tog broja do N. Supstitucija $D = N - L$ iz prve u drugu jednadžbu daje

$$l\,L + d\,(N - L) = x,$$

odnosno

$$L = \frac{x - d\,N}{l - d}.$$

Primijetimo da je najbolje uzeti množitelje takve da je l za jedan veći od d, kako bi pravilo bilo jednostavnije: $L = x - d\,N$, $D = N - L$. Ako je primjerice trik izveden s $N = 9$ novčića i množiteljima $d = 4$, $l = 5$ te ako je učenik nastavniku rekao da je dobio rezultat $x = 38$, nastavnik zna da su u lijevoj ruci $L = 38 - 4 \cdot 9 = 2$ novčića, a u desnoj njih $D = 9 - 2 = 7$.

Serijski broj novčanice

Trik je namijenjen učenicima srednje škole, točnije učenicima 1. razreda srednje škole, a njegova tajna leži u rješavanju sustava linearnih jednadžbi.

Materijal potreban za trik je jedna novčanica hrvatske kune, svaka ta novčanica ima jedinstveni serijski broj koji se sastoji od sedam znamenaka između dva slova (slika 3.1). U ovom triku nastavnik pogađa znamenke serijskog broja novčanice koju učenik drži u ruci. Učenik uzima novčanicu te na ploču zapisuje njen serijski broj (bez slova), nastavnik je cijelo vrijeme okrenut tako da ne vidi što piše na ploči. Nakon toga nastavnik daje uputu učeniku da zbroji prvu znamenku s drugom, drugu s trećom, treću s četvrtom, četvrtu s petom, petu sa šestom, šestu sa sedmom te na kraju sedmu s prvom. Nakon što učenik kaže nastavniku svih 7 brojeva, nastavnik pogađa serijski broj novčanice. [7].

Slika 3.1: Serijski broj jedne novčanice

Neka su x_i ($i = 1, \dots, 7$) redom nepoznate znamenke serijskog broja, a s_i, $i = 1, \dots, 7$ neka su redom zbrojevi koje učenik govori nastavniku. Vidimo da nastavnik treba napamet riješiti sustav od sedam linearnih jednadžbi sa sedam nepoznanica:

$$x_i + x_{i+1} = s_i, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$x_7 + x_1 = s_7.$$

Uvedimo dodatne oznake x za (nepoznati) zbroj svih znamenki serijskog broja i s za zbroj svih suma koje dobiva učenik. Ako zbrojimo sve jednadžbe i podijelimo s 2 vidimo da vrijedi

$$x = \frac{1}{2}s.$$

Uočimo da je ključno odrediti prvu znamenku x_1 jer se onda preostale znamenke lako izračunaju direktno iz $s_1, \dots, s_6$. Zbrojimo li prvu, treću, petu i sedmu jednadžbu dobivamo

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = s_1 + s_3 + s_5 + s_7,$$

a ako zbrojimo drugu, četvrtu i šestu jednadžbu dobijemo

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = s_2 + s_4 + s_6.$$

Oduzmemo li posljednje dvije jednadžbe, dobijemo

$$2x_1 = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7,$$

dakle je prva znamenka x_1 serijskog broja polovica naizmjeničnog zbroja i razlike koje nastavniku kaže učenik. Dalje je naravno $x_2 = s_1 - x_1$, $x_3 = s_2 - x_2, \ldots, x_7 = s_6 - x_6$.

Kada je znamenka x_1 poznata ostale znamenke su rješenja jednadžbi. Time su poznate sve znamenke serijskog broja novčanice.

Primjerice, neka je serijski broj neke novčanice 6203235. Učenik zbraja znamenke prema uputi te će nastavniku reći zbrojeve 8, 2, 3, 5, 5, 8, 11.

Nastavnik računa: $8-2+3-5+5-8+11 = 12$, dakle prva znamenka je 6. Druga znamenka jednaka je prvom zbroju 8 umanjenom za prvu znamenku, dakle je druga znamenka 2. Dalje je treža znamenka $2 - 2 = 0$, četvrta $3 - 0 = 3$, peta $5 - 3 = 2$, šesta $5 - 2 = 3$ i naposlijetku sedma je $8 - 3 = 5$.

Poglavlje 4

Zaključak

Trikovi koji su obuhvaćeni lako se i brzo izvode u nastavi matematike, a cilj im je približiti opće znanje matematike učenicima, kao i zainteresirat ih za samu matematiku. Njima se teži približavanju matematike kao discipline koja najčešće zadaje glavobolje kako učenicima tako i njihovim roditeljima. Osim toga, kroz zabavne aktivnosti kao što su ovi trikovi, učenici brže i lakše savladavaju nastavni sadržaj koji se obrađuje na nastavnom satu. Svaki trik je biran kao predstavnik veće skupine trikova i svrstan u kategorije po matematičkom sadržaju. Birani su trikovi čija su objašnjenja i dokazi zanimljivi, ali i razumljivi učenicima u određenom periodu školovanja. Stoga su u ovom radu predloženi razredi za izvođenje trikova ,u ovisnosti o znanju i matematičkim sposobnostima učenika, da ne bi samo uživali u triku, nego i razumjeli njihovu matematičku pozadinu. Osim toga odabrani trikovi često su kombinacija različitog matematičkog znanja pa su korisni i za utvrđivanje već unaprijed obrađenog nastavnog sadržaja. Budući da se danas u školstvu teži interdisciplinarnoj nastavi, smatramo da će upravo opisani trikovi biti od velike pomoći nastavnicima u izvođenju nastavnog sata i pripremi nastavnog materijala.

Sažetak

U popularizaciji i nastavi matematike se često koristi matemagija (matematički magični trikovi). U ovom smo radu predstavili trikove koji uključuju brojeve, a organizirani su u poglavlja prema grani matematike na kojoj se temelji princip pojedinog trika: aritmetici, teoriji brojeva i algebri. Svi su detaljno objašnjeni, a funkcioniranje većine je dokazano.

Summary

Mathemagic, i. e. magic tricks with mathematical foundation, are often used in popularisation and teaching of mathematics. In this thesis we describe magic tricks with numbers, organised in chapters depending on underlying branches of mathematics: arithmetic, number theory and algebra. All of them are explained in detail, and for most of them their principles are proven.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 23. siječnja 1996. godine, odrasla sam u Zaprešiću gdje sam završila osnovnu i opću gimnaziju. Nakon uspješno položene državne mature upisala sam 2014. godine prediplomski studije Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, koji sam završila 2017. te odmah nastavila s diplomskim studijem Matematika, smjer:nastavnički, kojeg trenutno završavam. Tijekom svog obrazovanja volontirala sam u njemačkoj školi u Sarajevu i u internacionalnoj školi QSIS u Sarajevu, u kojima sam se susrela s različitim sustavima obrazovanja.

Bibliografija

[1] E. Behrends, *The mystery of the number 1089 – how Fibonacci numbers come into play*, Elem. Math. 70 (2015) , 1–9.

[2] A. Beutelspacher, *In Mathe war ich immer schlecht*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, (2001).

[3] F. M. Brückler, *Magic number 9*, European mathematical society (2016).

[4] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2007.

[5] F. M. Brückler, *Povijest matematike 2*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2010.

[6] R. Coolman, *What Is Algebra?*, Live science (2015).

[7] K. Fulves, *Self-working number magic*, Dover Publ., New York, 2012.

[8] M. Gardner, *Mathematical Magic Show*, Penguin Books, India, 1986.

[9] M. Gusić, *Kako je aritmetika zadavala muke*, Matka 103 (2018), 178-179.

[10] N. Hadar, *Odd and even numbers—magician's approach*, The Mathematics Teacher 5 (1982) 408-412.

[11] P. McOwan, M. Parker, *The Manual of Mathematical Magic*, dostupno na http://www.mathematicalmagic.com/ (veljača 2020.)

[12] M. Seifert, *Matematički trikovi*, Matka 99 (2017) , 156-159.

[13] D. Veljan, *Čarobne četvorine (iliti magični kvadrati)*, Poučak 57 (2014), 12-23.