Nogomet u nastavi matematike

Mijač, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Mijač

NOGOMET U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, veljača 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovo postignuće posvjećujem svojim roditeljima i bratu bez čije podrške ne bih nikada uspio. Uz njihovu motivaciju i ljubav koju su mi dali, shvatio sam da je svaki san moguće ostvariti. Zahvaljujem se mentorici, doc. Franki Miriam Brückler na uputama, suradnji i ukazanom povjerenju prilikom izrade ovoga rada kao i svima onima koji su bili uz mene te me podržavali i poticali tijekom studiranja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Razredna nastava **2**
1.1 Prvi razred 2
1.2 Drugi razred 5
1.3 Treći razred 8
1.4 Četvrti razred 9

2 Predmetna nastava **13**
2.1 Peti razred 13
2.2 Šesti razred 17
2.3 Sedmi razred 21
2.4 Osmi razred 26

3 Srednja škola **34**
3.1 Prvi razred srednje škole 34
3.2 Drugi razred srednje škole 41
3.3 Treći razred srednje škole 49
3.4 Četvrti razred srednje škole 55

Zaključak **61**

Bibliografija **62**

Uvod

Primjene matematike u opisu nogometnih pravila [3], praćenju nogometnih prvenstava i nacionalnih liga dobro su poznate, a mnoge od njih su odlični primjeri školske matematike. Ukoliko spomenemo, primjerice, svojstva standardne nogometne lopte, geometriju nogometnog terena, osnovne arimetičke operacije pri praćenju tablica ili razna druga kombinatorna i vjerojatnosna pitanja, vidimo da nailazimo na poveznicu matematike i nogometa.

Nemoguće je naći adekvatan primjer za vezu matematike i nogometa u svakoj temi, ali vidjeti ćemo sustavno kroz razne primjere po pojedinim nastavnim temama od 1. do 8. razreda osnovne škole te od 1. do 4. razreda srednje škole [11, 13] na koji način učenici mogu osvijestiti svoje znanje iz matematike i primijeniti ga na nogomet, odnosno svakodnevni život.

Stoga ovaj rad dijelimo na tri poglavlja. U prvom poglavlju promatrat ćemo vezu nogometa i matematičkih tema koje se obrađuju od 1. do 4. razreda osnovne škole, tj. u razrednoj nastavi. U drugom poglavlju obrađivat ćemo matematičke teme povezane s nogometom koje se uče od 5. do 8. razreda osnovne škole, tj. u predmetnoj nastavi. U trećem poglavlju usredotočiti ćemo se na vezu nogometa i matematičkih tema srednje škole od 1. do 4. razreda, pri čemu ćemo pod srednjom školom podrazumijevati (matematičku ili opću) gimnaziju. Razlog isključivog korištenja gradiva gimnazija je taj da prikažemo što više raznovrsnih matematičkih primjera povezanih s nogometom, a gimnazije su upravo te koje obrađuju pojedine teme koje u drugim srednjim školama nisu zastupljene.

Poglavlje 1

Razredna nastava

Razredna nastava podrazumijeva prva četiri razreda učenikova školovanja. Kao i u ostalim predmetima, tako i u matematici, učenici ovdje stvaraju „temelje” za gradivo koje ih čeka kasnije u predmetnoj nastavi. U ova četiri razreda nailazimo na prepreke jer učenici nemaju veliko znanje matematike za shvaćanje nekih primjera, ali svakako da ćemo izdvojiti nekoliko poveznica matematike i nogometa.

Važno je napomenuti da razrednu nastavu predaje učitelj ili učiteljica koji osim matematike predaje i druge predmete, odnosno naglasak je da učenici u ovoj dobi dobiju osnovne matematičke ideje i da ih motiviramo za rad u višim razredima, kako osnovne, tako i srednje škole.

1.1 Prvi razred

Učenici u 1. razredu svoga školovanja nailaze na osnovne matematičke teme koje u višim razredima nadograđuju. Na početku se bave geometrijom, tj. promatraju tijela u prostoru (kugla, valjak, kvadar, kocka, piramida), ravne i zakrivljene crte i plohe te geometrijske likove (krug, trokut, pravokutnik, kvadrat), a kasnije prelaze na aritmetiku u kojoj uče prirodne brojeve do 20, uspoređuju ih, zbrajaju i oduzimaju.

Naravno da nećemo moći svaku temu povezati s nogometom jer to jednostavno nije moguće, ali vidjet ćemo kako matematičke teme koje se obrađuju u 1. razredu osnovne škole možemo povezati s nogometom u stvarnosti pa krenimo redom.

Za nogometnu utakmicu je potreban pravokutni teren koji mora imati duljinu između 90 i 120 metara te širinu između 45 i 90 metara. Na tom nogometnom terenu nalaze se dvije momčadi od po 11 igrača (ne brojimo pričuvne igrače na klupama) te 1 nogometna lopta. Naravno, kada mislimo na nogometnu loptu mislimo na kuglu, ali ne onu pravu matematičku kuglu jer nogometne lopte imaju ipak vidljiva odstupanja od matematičke savršenosti [9].

Primijetimo da već gore opisanim dolazimo do pojedinih matematičkih tema koje se rade u 1. razredu osnovne škole.

Već smo spomenuli nogometnu loptu kao kuglu te nogometni teren kao pravokutnik. Učenici u 1. razredu samo prepoznaju i imenuju kuglu pa bi tako trebali nakon što vide nogometnu loptu reći da se radi o kugli (iako je to neprecizno, zasigurno dovoljno za učenike ove dobi). Ista stvar je i s nogometnim terenom, gdje bi učenici trebali prepoznati i imenovati pravokutnik te razlikovati pravokutnik od ostalih geometrijskih likova poput kruga i trokuta.

Za praćenje utakmica, raznih prvenstava i nacionalnih liga potrebno je poznavanje brojeva i osnova aritmetike. Učenici se u 1. razredu osnovne škole susreću sa zbrajanjem i oduzimanjem brojeva od 1 do 20, a ako bolje razmislimo upravo su ti brojevi ključni kod praćenja rezultata (pribrajamo i oduzimamo broj 1 kada padne zgoditak ili kada jedna momčad ostane s igračem manje zbog isključenja istoga).

Isto tako u 1. razredu učenici uspoređuju brojeve do 20, a ako to stavimo u kontekst nogometa i utakmica onda je jasno da to zapravo radimo svaki puta kada gledamo utakmicu jer momčad koja ima veći broj zgoditaka je pobijedila, a i (bar u prvom dijelu svakog nogometnog prvenstva) tako rangiramo momčadi u tablici.

Ovdje možemo spomenuti i još neke osnovne aritmetičke operacije kako bismo mogli računati trenutne i moguće pozicije za tablici pojedinih momčadi. U tome slučaju najviše koristimo pribrajanje brojeva 1 i 3 zbog toga jer momčad dobije 3 boda za pobjedu i 1 bod za neriješen rezultat. Oduzimanje će nam koristiti kada budemo računali gol-razliku pojedine momčadi.

Ako gledamo strogo samo 1. razred osnovne škole, onda momčad koja ostvari 7 pobjeda[1] ima već 21 bod i to iskače iz naših tema jer učenici ovdje uče samo brojeve do 20, ista stvar je i s oduzimanjem jer ovdje vrlo lako možemo otići u negativne brojeve, odnosno u brojeve veće od 20 tako da ćemo se tablicama, osvojenim bodovima,

[1] Ili 6 pobjeda i 3 neriješena ishoda, ili 5 pobjeda i 6 neriješenih ishoda, ili 4 pobjede i 9 neriješenih ishoda, ili 3 pobjede i 12 neriješenih ishoda, ili 2 pobjede i 15 neriješenih ishoda, ili 1 pobjeda i 18 neriješenih ishoda, ili bez pobjeda i 21 neriješeni ishod. Uočimo kako ispisivanje ovih mogućnosti također može biti zanimljiv zadatak (za 2. razred osnovne škole): S koliko pobjeda i neriješenih rezultata momčad ostvari 21 bod?

gol-razlikama i ostalim statistikama baviti kasnije.

Izdvojimo prvi primjer za 1. razred koji učenicima može lako dočarati matematiku povezanu sa stvarnim životom, tj. povezanost s nogometom.

Primjer 1.1.1. *Igra se nogometna utakmica između momčadi A i B. Momčad A postigla je* 3 *zgoditka, a momčad B* 1 *zgoditak. Koja momčad je pobijedila i zašto? Ako je nakon te utakmice momčad A zauzela prvo mjesto u skupini s ukupno* 2 *pobjede,* 1 *neriješenom utakmicom i bez poraza, koliko momčad A ima bodova?*

U gornjem primjeru učenici će uspoređivati brojeve do 5 i isto tako zbrajati brojeve do 10 što je zapravo dobar zadatak na koji mogu naići nakon naučenoga gradiva. Također, susrest će se i s brojem 0 koji se uči već u 1. razredu i on će označavati broj poraza momčadi A.

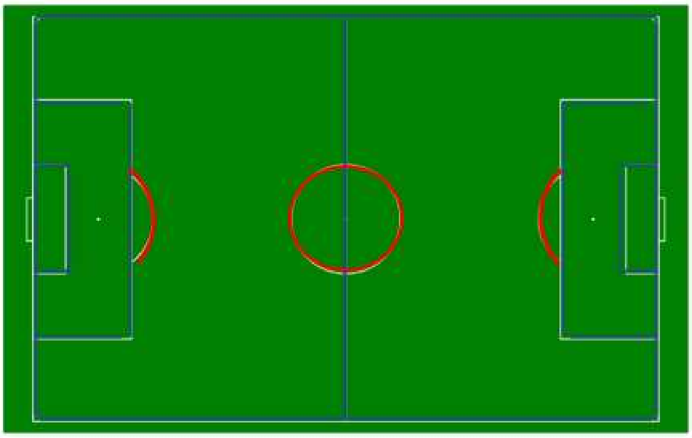
Promotrimo drugi primjer koji je također vezan za 1. razred u kojem vježbamo neke druge matematičke teme kao što su oduzimanje brojeva do 20, brojevna crta i slično.

Primjer 1.1.2. *Igra se nogometna utakmica između momčadi A i B. Momčad A postigla je* 1 *zgoditak i pri tome su joj isključena* 2 *igrača, a momčad B postigla je* 5 *zgoditaka i nitko nije isključen. Postignute zgoditke prikaži na brojevnoj crti (točkama označi brojeve) i pomoću nje odredi koja je momčad pobijedila te izračunaj s koliko igrača je momčad A završila utakmicu.*

U primjeru 1.1.2 učenici će nacrtati brojevnu crtu i točkom odrediti mjesto na brojevnoj crti za brojeve 1 i 5 te na temelju toga komentirati da je momčad B bila uspješnija i pobijedila u utakmici. Nakon toga će izračunati s koliko je igrača momčad A završila utakmicu tako da će od ukupnoga broja igrača oduzeti broj isključenih igrača.

U sljedećem primjeru vidjet ćemo kako učenici mogu povezati ravne i zakrivljene crte, važnu temu ovog razreda u matematici, s nogometnim terenom. Cilj ovoga primjera je da uspiju razlikovati ravne i zakrivljene crte.

Primjer 1.1.3. *Slika 1.1 prikazuje nogometni teren u umanjenom mjerilu. Plavom bojom označite ravne, a crvenom bojom zakrivljene crte.*



Slika 1.1: Nogometni teren.
Preuzeto s: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soccer_field_-_empty.svg`.
Autor slike: Nuno Tavares.
Licenca: `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/deed.en`.

Primjer 1.1.4. *Koristeći sliku 1.1, odredite koliko krugova i pravokutnika je vidljivo na nogometnom terenu.*

Ovdje učenicima možemo napomenuti da se jedan pravokutnik može nalaziti unutar drugog jer se ipak radi o 1. razredu osnovne škole.. Uz tu napomenu, učenici će vrlo brzo doći do prebrojavanja pravokutnika na način da će izdvojiti po dva kaznena i vratareva prostora te okvir nogometnoga terena. Što se tiče krugova, ovdje će svima biti jasno da imamo samo jedan krug i to onaj središnji. Razlog zašto promatramo krugove, a ne kružnice je taj što se učenici tek u 3. razredu osnovne škole upoznaju s pojmom kružnice te ju razlikuju od kruga.

1.2 Drugi razred

Učenici u 2. razredu svoga školovanja nadograđuju gradivo prethodno naučeno prvoga razreda tako što će sada uspoređivati brojeve do 100, učiti redne brojeve do 100 te zbrajati i oduzimati dvoznamenkaste brojeve do 100. U ovom razredu će se prvi puta susresti s množenjem i dijeljenjem brojeva, ali za sada do broja 9.

Za početak, možemo primijetiti da smo u odnosu na 1. razred proširili razmatrane brojeve do 100 te nam ova situacija omogućava da ispratimo cijelu jednu sezonu neke nacionalne lige.

Mnogi kažu da je sljedeća priča najljepša priča o sportu ikada, a ono što je sigurno da je najljepša priča u nogometu od kada on postoji kao takav. Naime, radi se o osvajanju titule prvaka *Premier League* sezone 2015./2016. Malo tko je na početku sezone vjerovao da će to biti mali klub s velikim ambicijama, Leicester City. Klub je u *Premier League* došao tek sezonu prije, tj. u sezoni 2013./2014. je osvojio *Championship*, drugi rang engleskog nogometa i tako se plasirao u prvi. Klub koji je sezonu prije osvajanja završio na 14. mjestu i koji je prema kladionicama imao koeficijent 5000 [12] te sezone 2015./2016. igrao je bez straha prema ijednoj većoj i na papiru favoriziranoj ekipi.

Na prvom mjestu su završili s ukupno 81 osvojenih bodom, 10 više ispred drugoplasiranog Arsenala te 11 bodova ispred trećeplasiranog Tottenhama. Od ukupno 38 odigranih utakmica, ostvarili su 23 pobjede, 12 poraza i 3 neriješena ishoda što im je bilo dovoljno za sigurno osvajanje titule prvaka.

U ovoj priči možemo primijetiti da nailazimo na neke poveznice koje imaju doticaj s gradivom u 2. razredu osnovne škole. Učenici će tek u 3. razredu moći izračunati broj bodova Leicester Citya ili bilo koje druge momčadi na temelju toga koliko imaju pobjeda, poraza i neriješenih ishoda, a da pritom koriste množenje dvoznamenkastih brojeva s jednoznamenkastim, ali ono što sigurno sada mogu zaključiti da je broj 81 (osvojio Leicester City) veći od broja 71 (osvojio Arsenal) i od brojeva bodova ostalih momčadi te na temelju toga zaključiti koja ekipa je prvak.

Također, učenici naravno mogu doći do ukupnoga broja bodova, ali pritom će koristiti taktiku da uzastopno zbrajaju jednoznamenkasti ili dvoznamenkasti broj s jednoznamenkastim. Oni isto tako uče da je umnožak zadanoga broja i broja 1 jednak zadanome broju te da je umnožak bilo kojega broja i 0 jednak 0, što će im uvelike olakšati računanje ukupnoga broja bodova pojedine momčadi, kao što ćemo vidjeti u Primjeru 1.2.1.

Osim uspoređivanja brojeva do 100, učenici također u ovom primjeru moraju razlikovati redne brojeve od glavnih brojeva tako što će plasman na tablici označiti rednim brojem, a broj osvojenih bodova glavnim brojem.

Primjer 1.2.1. *Tablica 1.1 prikazuje konačan poredak prvih deset momčadi u sezoni* 2015./2016. *u Premier League [4]. Popunite posljednji stupac u tablici da biste dobili sve podatke vezano za tu sezonu.*

PLASMAN	**MOMČAD**	**POBJEDE**	**PORAZI**	**NERIJEŠENO**	**BODOVI**
1.	Leicester	23	12	3	
2.	Arsenal	20	11	7	
3.	Tottenham	19	13	6	
4.	Manchester City	19	9	10	
5.	Manchester United	19	9	10	
6.	Southampton	18	9	11	
7.	West Ham	16	14	8	
8.	Liverpool	16	12	10	
9.	Stoke	14	9	15	
10.	Chelsea	12	14	12	

Tablica 1.1: *Premier League*, sezona 2015./2016.

Uz napomenu da pobjeda donosi 3 boda, neriješen ishod 1 bod te poraz 0 bodova, učenici će u računanju ukupnog broja bodova koristiti činjenicu da mogu zanemariti poraze jer to ne donosi nikakve bodove. Broj utakmica s neriješenim ishodom će pomnožiti s 1 (u 2. razredu se uči i definira, kao što smo ranije rekli, da je umnožak zadanoga broja i broja 1 jednak zadanom broju).

Učenicima će možda predstavljati problem izračunati broj bodova pojedine momčadi na temelju njihovih pobjeda. Množenje dvoznamenkastog broja s jednoznamenkastim je gradivo 3. razreda, ali način na koji se može riješiti ovaj zadatak u okviru 2. razreda je na način da primjerice za prvoplasiranu ekipu Leicester koja ima 23 pobjede raspišu:

$$23\cdot 3 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = \cdots = 69.$$

Ovdje bi učenici raspisali broj 3 ukupno 23 puta, tj. uzastopno pribrajali broj 3 sve do konačnoga rezultata. Istina, ovo nije baš najefikasniji način rješavanja ovoga zadatka, ali u 2. razredu nemamo drugačiji „alat” za ovo riješiti.

Ukoliko bi u ovom primjeru neka momčad imala 9 ili manje pobjeda onda bismo mogli pomnožiti pobjede s brojem 3 jer takvo množenje spada u ovaj razred, npr. da je bila zadana cijela tablica, a ne samo gornja polovica, onda bismo mogli lošije rangiranim momčadima na taj način brže izračunati ukupan broj bodova umjesto gornjeg raspisivanja.

1.3 Treći razred

Učenici u 3. razredu svoga školovanja upoznaju prirodne brojeve do 1000 te ih uspoređuju. Pisano zbrajaju i oduzimaju brojeve do 1000 te množe i dijele brojeve s 10 i 100. Vrijedi spomenuti i da množe dvoznamenkasti broj jednoznamenkastim brojem, mjere duljinu i preračunavaju mjerne jedinice za duljinu te se na kraju ovoga razreda bave geometrijom (prepoznaju i crtaju okomite pravce, krug i kružnicu) te mjere masu.

Učenici bi u ovom razredu sigurno mogli elegantnije i brže popuniti posljednji stupac tablice iz Primjera 1.2.1, ali osim toga sada bi mogli raditi i obrnuto, tj. na temelju ukupnoga broja pobjeda odrediti koliko pojedina momčad ima bodova, ako znaju broj utakmica koje imaju neriješen ishod i broj poraza.

U 3. razredu obrađuje se pisano dijeljenje dvoznamenkastoga i troznamenkastoga broja jednoznamenkastim brojem, stoga možemo primijetiti da bismo bez velikog raspisivanja došli do željenih podataka u tablici pa ćemo se u to uvjeriti u Primjeru 1.3.1.

Primjer 1.3.1. *Ako znamo da je španjolski klub Villareal osvojio ukupno* 60 *bodova u La Liga-i sezone* 2019./2020.*, a da je pri tome* 6 *puta odigrao neriješeno i* 14 *puta izgubio, koliko utakmica je navedeni klub završio s pobjedničkim ishodom?*[2]

Učenici će u ovom primjeru za početak zanemariti broj izgubljenih utakmica jer one donose 0 bodova i ne utječu na ukupan broj. Od ukupnog broja 60 oduzeti će one bodove koja je momčad Villareal skupila kada je odigrala neriješeno, tj. od broja 60 će oduzeti broj 6 i doći do broja 54.

U ovom trenutku učenici znaju dijeliti dvoznamenkasti broj s jednoznamenkastim i ovo je lijepi primjer u kojem učenici osvješćuju povezanost matematike sa svakodnevnim životom. Broj 54 će podijeliti s brojem 3, jer toliko bodova nosi pobjeda, i dobit će broj 18, što je traženi odgovor u ovom primjeru.

Vratimo se sada skroz na početak, na temu nogometne lopte, pa ćemo vidjeti na koji način ju možemo povezati s gradivom 3. razreda. Naime, nekada je nogometna lopta bila životinjski mjehur ili želudac te bi se ona lako raspala ako bi ju netko udario jako nogom. Nakon uvođenja gume u 19. stoljeću, nogometna lopta poprima svoj moderni izgled te se kroz godine unapređuje i dolazi do modernog dizajna kakvog danas poznajemo [2].

Ono što učenici uče u 3. razredu je masa i preračunavanje jedinica, a prema službenim

[2]Poveznica: `https://en.wikipedia.org/wiki/2019%E2%80%9320_La_Liga`

nogometnim pravilima masa lopte mora biti između 410 i 450 grama. Preračunavanje granica mase, tj. 410 g i 450 g može biti zanimljiv primjer kako povezati sport s matematikom. U sljedećem primjeru uz nogomet ćemo uključiti i košarku i rukomet kako bi primjer bio zanimljiviji za učenike te dobi.

Primjer 1.3.2. *Masa nogometne lopte*[3] *mora biti između* 410 *i* 450 *grama, masa košarkaške lopte*[4] *mora biti između* 567 *i* 650 *grama, a masa rukometne lopte*[5] *između* 425 *i* 475 *grama. Izračunajte razliku masa između najteže dopuštene košarkaške i najteže dopuštene nogometne lopte te rezultat zapišite u gramima, a potom izračunajte razliku između najlakše dopuštene nogometne lopte i najlakše dopuštene rukometne lopte i rezultat zapišite u dekagramima.*

Učenici u ovome primjeru za početak pisano oduzimanju brojeve do 1000, konkretno oduzimaju broj 450 od broja 650 te dobivaju rezultat 200 g, dok u drugom podzadatku ponovno oduzimaju, ali u završnom koraku umjesto 50 g pišu 5 dekagrama, tj. preračunavaju jedinice za mjerenje mase.

1.4 Četvrti razred

Učenici u 4. razredu svoga školovanja, tj. u posljednjoj godini razredne nastave, proširuju prirodne brojeve do milijun (zbrajaju ih i oduzimaju, uspoređuju ih). Množe i dijele višeznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojevima, upoznaju kutove te računaju opseg trokuta, površinu pravokutnika i kvadrata.

Svi znamo da se nogomet igra prvenstveno zbog navijača. Igrači, koji imaju dobru potporu svojih navijača, dobivaju vjetar u leđa i osjećaju se motivirano. Domaći teren vrlo je velika prednost te često znamo čuti da su navijači 12. igrač na terenu. Pojedine momčadi imaju različite taktike kada igraju na domaćem terenu pred svojom publikom i kada igraju na gostujućem terenu. Idemo vidjeti kako ovo možemo povezati s temom iz 4. razreda osnovne škole.

Velike brojeve, barem one koje premašuju 50 000, pronaći ćemo u kapacitetima pojedinih stadiona. Za ljubitelje nogometa opće je poznato da Barcelona ima izrazito velik stadion s ogromnim kapacitetom, ali sigurno začuđuje činjenica da je Nou Camp po kapacitetu tek sedmi stadion u svijetu. Nou Camp službeno ima 99 354 mjesta za sjedenje, a prvih deset stadiona po kapacitetu donosimo u tablici 1.2 [5].

[3] Nogometna lopta: `https://hr.wikipedia.org/wiki/Nogometna_lopta`

[4] Košarkaška lopta: `https://bs.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%A1arka%C5%A1ka_lopta`

[5] Rukometna lopta `https://hr.wikipedia.org/wiki/Rukomet`

STADION	**GRAD, DRŽAVA**	**KAPACITET**
Rungrado May Day	Pjongjang, Sjeverna Koreja	150 000
Salt Lake Stadium	Kolkata, Indija	120 000
Azteca	Mexico City, Meksiko	105 000
Melbourne Cricket Ground	Melbourne, Australija	100 018
Azadi	Teheran, Iran	100 000
Bukit Jalil	Kuala Lumpur, Malezija	100 000
Nou Camp	Barcelona, Španjolska	99 354
Soccer City	Johannesburg, JAR	94 376
Wembley	London, UK	92 000
Gelora Bung Karno	Jakarta, Indonezija	88 306

Tablica 1.2: Deset najvećih stadiona

Poredak stadiona po kapacitetu smo dobili tako da smo uspoređivali broj mjesta za sjedenje, tj. posljednji stupac u našoj tablici. Uspoređivanje brojeva do milijun, kao što smo već naveli, radi se u 4. razredu stoga u nastavku donosimo primjer koji može poslužiti kao usvajanje gradiva i primjena na svakodnevni život.

Primjer 1.4.1. *Real Madrid*[6] *imao je krizu u prvoj polusezoni* 2018./2019. *u rezultatima te nije najbolje počeo svoje nacionalno prvenstvo i Ligu prvaka što se odmah očitovalo u posjećenosti navijača na domaćim utakmicama. Vrijedi napomenuti da navedeni klub igra svoje domaće utakmice na čuvenom stadionu Santiago Bernabeu koji ima kapacitet* 81 044 *sjedećih mjesta. Real Madrid tada je odigrao* 12 *utakmica prije zimske stanke te ostvario sljedeću posjećenost:*

[6] Posjećenost utamkica Real Madrida `https://www.index.hr/sport/clanak/real-u-krizi-posjecenost-pada-bernabeu-nijednom-rasprodan/2050345.aspx`

Getafe – 48 446,
Leganes – 59 255,
Roma – 69 251,
Espanyol – 67 658,
Atletico Madrid – 78 642,
Levante – 63 762,
Viktoria Plzen – 67 356,
Real Valladolid – 68 120,
Valencia – 69 653,
Melilla – 55 243,
CSKA Moskva – 51 636,
Rayo Vallecano – 52 229.

Protiv koje momčadi je posjećenost bila najveća, a protiv koje najmanja? Izračunaj ukupnu posjećenost u 12 *domaćih utakmica Real Madrida. Izračunaj razliku u posjećenosti u utakmicama protiv Rome i protiv Levantea.*

Iz ova tri pitanja učenici vrlo dobro mogu dobiti poveznicu gradiva 4. razreda i primjera iz nogometa, tj. svakodnevnog života. Oni ovdje usvajaju zbrajanje i oduzimanje brojeva do milijun te ih uspoređuju.

U ovakvim zadatcima poželjno je izračunati i prosječni broj gledatelja na utakmici, ali tada bismo koristili aritmetičku sredinu, tj. gradivo viših razreda osnovne škole, iako, s obzirom na to da se u ovom kontekstu samo radi o računu unutar gradiva 4. razreda, moguće je napraviti i primjer poput sljedećeg, naravno bez opće definicije prosjeka i bez zahtjeva da se ona pamti.

Primjer 1.4.2. *Ako znamo da se prosječna posjećenost stadiona računa tako da zbrojimo sve posjećenosti i onda zbroj podijelimo s brojem utakmica, kolika je bila prosječna posjećenost na utakmicama Real Madrida navedenim u primjeru 1.4.1?*

U kratkom uvodu spomenuli smo da učenici računaju površinu pravokutnika te poznaju mjerne jedinice za mjerenje površine (kvadratni centimetar, kvadratni decimetar, kvadratni metar), ali tek u višim razredima bave se pretvaranjem.

Kao što smo rekli kada smo obrađivali 1. razred, nogometni teren je pravokutnog oblika, ali mjere nogometnog igrališta nisu baš cijeli brojevi. Vratarev prostor kojeg znamo nazvati „peterac” ima duljinu 5.5 metara, a ne 5, što bi mnogi mogli očekivati. To je posljedica toga što su nogometna pravila nastala u Engleskoj pa su dimenzije prvotno uzete iz engleskih mjera: jardi i stope (stopa: 1 ft = 30.48 cm; jard: 1 yd = 91.44 cm). Ako gledamo vrata, ona u engleskim mjerama imaju dimenzije 8 stopa puta 8 jarda, dok je udaljenost živoga zida od lopte prilikom izvođenja izravnog ili neizravnog slobodnog udarca 10 jarda. Točka za izvođenje kaznenog udarca udaljena je 12 jardi od poprečne crte u vratima. U našim mjerama bismo rekli da su dimenzije vrata 7.32 metra puta 2.44

metra, dok je udaljenost živoga zida od lopte 9.15 metara. Točka za izvođenje kaznenog udarca udaljena je na 10.97 m, dakle skoro točno 11 metara od poprečne crte u vratima.

Računanje površine nogometnih vrata dosta nam je zanimljivo, ali za sada iskače iz gradiva 4. razreda, osim ako bismo računali u anglosaksonskim jedinicama jer je potrebno množiti dva decimalna broja, a ono najviše što učenici znaju u ovom razredu je pisano množenje višeznamenkastog prirodnog broja dvoznamenkastim prirodnim brojem. Iskoristimo to u Primjeru 1.4.3.

Primjer 1.4.3. *Površine nogometnih terena ovise o klubovima i njihovim željama igranja na većem ili manjem terenu. To sve utječe na taktiku pojedine momčadi i osim navijača, ovo je jedan od bitnih čimbenika koji utječe na prednost domaćega terena. Španjolski klub, Atletico Madrid,* 2017. *godine je izgradio novi stadion pod nazivom Wanda Metropolitano koji ima dimenzije nogometnog terena* $109\,\mathrm{m} \times 71\,\mathrm{m}$*, dok većina europskih klubova, poput Barcelone, Milana, Manchester Uniteda, Juventusa i sličnih ima dimenzije nogometnog terena* 105×68 *metara. Dimenzija* $105\,\mathrm{m} \times 68\,\mathrm{m}$ *ujedno je i preporučena veličina terena od strane FIFA-e.*

Izračunaj površinu nogometnog terena na stadionu Wanda Metropolitano te površinu nogometnog terena koju je propisala FIFA. Za koliko je veća površina nogometnog terena Atletico Madrida? Koliko otprilike površine preporučenog terena otpada na pojedinog igrača jedne momčadi?

Učenici u Primjeru 1.4.3 računaju površinu pravokutnika te u rezultatu znaju mjere za površinu, tj. koriste kvadratni metar. Kada računaju razliku između dviju površina tada koriste pisano oduzimanje u skupu brojeva do milijun, a upravo je to jedna od glavnih tema 4. razreda. Kad računaju kolika površina otpada na jednog igrača, dijele s dvoznamenkastim brojem 11.

Kao što smo u uvodu naveli, cilj učitelja ili učiteljice u prva četiri razreda osnovne škole je predočiti učenicima kako matematiku tako i druge predmete kroz primjere iz svakodnevnoga života. U toj dobi djeca tako najlakše shvaćaju osnovne matematičke pojmove i operacije te se motiviraju za daljnji rad. Kasnije ćemo vidjeti da ćemo imati još i više zanimljivijih primjera, ali sada nailazimo na neke prepreke jer njihovo gradivo, a i znanje matematike je još na osnovnoj razini.

Poglavlje 2

Predmetna nastava

Predmetna nastava podrazumijeva drugu polovicu školovanja u osnovnoj školi, tj. školovanje od 5. do 8. razreda. Osim učenikove energije koja se uočljivo diže, također i gradivo iz matematike počinje imati veći smisao i često nailazimo na primjere iz svakodnevnoga života. Učenici s vremenom nailaze na prave probleme te kao što nam je razredna nastava bila „temelj" za predmetnu, tako će predmetna biti „temelj" za srednju školu.

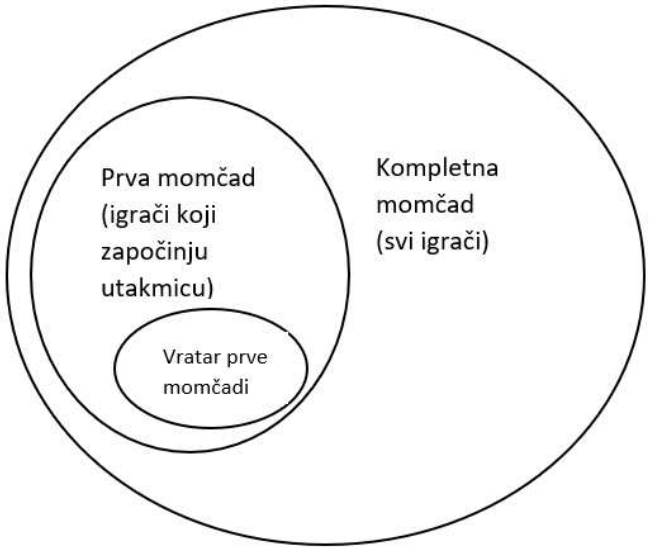
2.1 Peti razred

U 5. razredu osnovne škole učenici se susreću s pojmom skupa i elementa skupa. Također, nauče što znači pripadati nekom skupu, odnosno što znači ne pripadati nekom skupu. Pojam skupa se u matematici ne definira, ali da bi učenici ipak dobili neku svijest o tom pojmu, pokušavamo na što jednostavniji način opisati što on predstavlja. Na početku, da bi se učenicima približio intuitivan pojam skupa, skupovi se predočuju uz pomoć primjera iz svakodnevnog života. Ovdje možemo iskoristiti nogomet da bi učenicima bilo zanimljivije, ali i jasnije što je to skup.

Zamislimo da imamo neku nogometnu momčad i promatramo samo prvih 11 igrača, tj. „prvu postavu". U toj momčadi imamo vratara, obrambene igrače, vezne igrače i napadače. Učenicima sada umjesto momčadi kažemo da ćemo koristiti naziv skup, a svi igrači predstavljaju elemente toga skupa. Za elemente koji se nalaze unutar skupa kažemo i da pripadaju tom skupu.

Učenicima na ovom primjeru možemo objasniti i pojam podskupa nekog skupa. Skup koji smo promatrali sastojao se od igrača koji čine prvu postavu. Sada promatrajmo te igrače i sve rezervne igrače. Očito će ovaj skup imati više elemenata (igrača) zato što smo sada u obzir uzeli i sve rezervne igrače.

Primjer 2.1.1. *Vidimo da se unutar skupa koji se sastoji od igrača prve momčadi i igrača rezervne momčadi nalazi skup koji se sastoji samo od igrača prve momčadi. Unutar njega je npr. jednočlani skup koji se sastoji samo od vratara prve momčadi. Kažemo da je skup igrača prve momčadi podskup skupa svih igrača koje smo promatrali, a da je skup koji se sastoji samo od vratara prve postave podskup oba ta skupa (slika 2.1).*



Slika 2.1: Neki „nogometni” skupovi.

U 5. razredu učenici se po prvi puta susreću s pojmom racionalnog broja, odnosno razlomka. Uče objasniti što predstavlja brojnik, a što nazivnik. Također uče i da razlomačka crta označava operaciju dijeljenja. Računske operacije s razlomcima zasad se ne rade jer je u ovoj dobi važnije da učenici shvate koncept razlomka, da znaju podijeliti zadani lik na određeni broj jednakih dijelova i obrnuto, da znaju uz pomoć razlomka zapisati na koliko smo jednakih dijelova podijelili neki lik.

Primjer 2.1.2. *Pogledajmo središnju crtu nogometnog terena na slici 1.1. Ona dijeli nogometni teren na dva dijela jednake površine i oblika.*[1] *Svaki dio predstavlja jednu polovinu što zapisujemo kao razlomak* $\frac{1}{2}$.

U 5. se razredu učenici upoznaju i s decimalnim brojevima te provode osnovne računske operacije s njima. Sada se možemo ukratko vratiti u prethodno poglavlje, točnije

[1] Dva sukladna dijela.

u odjeljak 1.4 u kojem smo spomenuli dimenzije nogometnih vrata. Spomenuli smo da u mjerama engleskog sustava dimenzije iznose 8 stopa puta 8 jarda, dok bi u našem mjernom sustavu rekli da dimenzije vrata iznose 7.32 metra puta 2.44 metra. Učenici sad znaju računati s decimalnim brojevima pa im možemo zadati neki zadatak sličan sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.3. *Izračunaj duljinu okvira i površinu nogometnih vrata.*

Rješenje. Budući da nogometna vrata imaju oblik pravokutnika, da bismo izračunali površinu koristimo formulu za površinu pravokutnika, a tu formulu učenici nauče u 4. razredu. Kod nogometnih vrata opseg pravokutnika baš i nije bitan jer donji dio ne sadrži okvir, tako da više smisla ima gledati duljinu okvira, tj. zbrojiti duljine dviju stativa i grede, dok bi opseg sadržavao dvije grede (jedna stvarna, a druga zamišljena) i dvije stative. U ovom zadatku učenici kod računanja duljine okvira vježbaju zbrajanje decimalnih brojeva, a kod određivanja površine vježbaju množenje decimalnih brojeva. [2]

Primjer 2.1.4. *Prema službenim nogometnim pravilima, duljina nogometnog terena iznosi između* 90 *i* 120 *metara, a širina iznosi između* 45 *i* 90 *metara. Odredi najveći opseg i najmanju površinu koje može imati nogometni teren.*

Rješenje. Znamo da nogometni teren ima oblik pravokutnika. Budući da je riječ o pravokutniku, učenici bi trebali znati izračunati njegov opseg i površinu jer su to naučili u 4. razredu. Jedino, prije samog računa, trebaju promisliti kako ćemo dobiti najveći opseg, a kako najmanju površinu. Da bismo odredili najveći opseg, trebamo „uzeti" najveću duljinu i najveću širinu. Dakle, uzimamo da je duljiina terena 120 metara, a širina 90 metara. Slično razmišljamo i kod određivanja najmanje površine. Da bismo odredili najmanju površinu, trebamo „uzeti" najmanju duljinu i najmanju širinu. Dakle, uzimamo da je duljina terena 90 metara, a širina 45 metara.

Nakon što se upoznaju s razlomcima i decimalnim brojevima, učenici se susreću i s mjernim jedinicama. Neke mjerne jedinice su učenicima poznate već iz nižih razreda osnovne škole, a znaju ih i iz svakodnevnog života. U prethodnim poglavljima naveli smo da je prema službenim pravilima nogometne igre duljina nogometnog terena između 90 i 120 metara, a širina između 45 i 90 metara. Kako se učenici susreću s osnovnim mjernim jedinicama za duljinu (kilometar, metar, decimetar, centimetar i milimetar), možemo iskoristiti dimenzije nogometnog igrališta u metrima za preračunavanje u veće i manje mjerne jedinice.

Spomenuli smo i da nogometna lopta ima masu između 410 i 450 grama. Učenici

[2] Površina je relevantniji parametar, što ćemo pokazati u kasnijem primjeru.

se susreću i s mjernim jedinicama za masu (tona, kilogram, dekagram, gram i miligram) pa možemo iskoristiti masu nogometne lopte za pretvaranje u veće i manje mjerne jedinice kao što smo već učinili u Primjeru 1.3.2. Učenici su se već susreli prije s ovakvim zadatcima pa im ovdje zapravo skrećemo pažnju na ono što već znaju, a samo se trebaju prisjetiti. Za to nam opet može poslužiti zadatak sličan sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.5. *Duljina nogometnog terena Allianz arene*[3] *iznosi* 105 *metara, a širina iznosi* 68 *metara. Izrazi duljinu i širinu tog nogometnog terena u centimetrima, milimetrima, decimetrima i kilometrima.*

Već od 1. razreda osnovne škole učenici znaju razlikovati ravne i zakrivljene linije, znaju nacrtati točku i imenovati je velikim tiskanim slovom. Kasnije uz pomoć ravnala znaju i nacrtati ravnu liniju. Upoznaju se s pojmom dužine te ju također znaju nacrtati uz pomoć ravnala. U 5. razredu učenici u sklopu nastavne jedinice skupovi točaka u ravnini određuju parove paralelnih ili okomitih dužina, određuju sukladne dužine. Ovdje nam opet može poslužiti nogometni teren kako bi učenici na nešto drugačiji način i njima vjerojatno zanimljiviji odredili paralelne, okomite i sukladne dužine.

Primjer 2.1.6. *Nogometni teren ima oblik pravokutnika. Istaknimo „vanjski" pravokutnik nogometnog terena na slici 2.2*[4] *i označimo mu vrhove s A, B, C i D. U pravokutniku $ABCD$ odredi:*

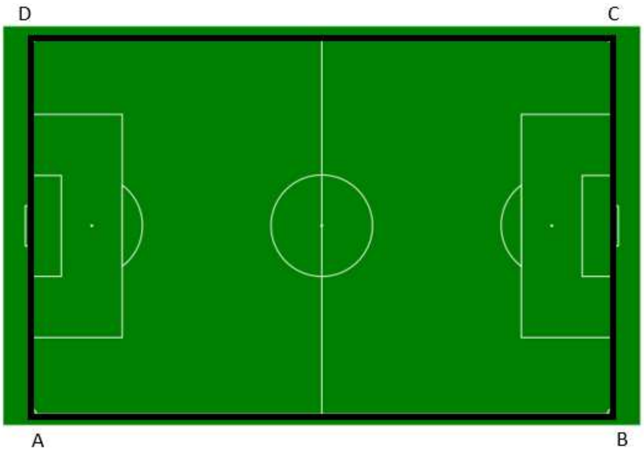
(a) parove okomitih dužina;

(b) parove paralelnih dužina;

(c) parove sukladnih dužina.

[3]Karakteristike Allianz arene: `https://hr.wikipedia.org/wiki/Allianz_Arena`

[4]Ovo je slika 1.1 sa sljedećom izmjenom: nacrtan pravokutnik $ABCD$.



Slika 2.2: Nogometni teren kao pravokutnik.

U primjeru 2.1.6 na lagan smo način uz pomoć nogometnog terena došli do pravokutnika na čijem će modelu učenici određivati parove okomitih, paralelnih i sukladnih dužina. Umjesto da odmah krenemo s pravokutnikom $ABCD$ i rješavanjem zadatka, mi smo krenuli s nogometnim terenom pa na njemu izdvojili pravokutnik. Ovaj princip će vjerojatno i učenicima biti draži jer se matematika malo povezuje sa svakodnevnim životom i stvarima koje vole. Uočavamo da crte na nogometnom terenu sadrže još dosta drugih parova paralelnih, okomitih i sukladnih dužina.

2.2 Šesti razred

U 6. razredu učenici se susreću sa skupom cijelih brojeva. Saznaju da je taj skup nastao proširenjem skupa prirodnih brojeva te da se sastoji od svih prirodnih brojeva, od nule i od svih suprotnih prirodnih (negativnih cijelih) brojeva. Kod računskih operacija s negativnim brojevima (zbrajanje i oduzimanje) poslužiti nam može gol-razlika. Gol-razlika je razlika između postignutih i primljenih zgoditaka nekoga kluba.

Primjer 2.2.1. *Pogledajmo tablicu 2.1 u kojoj se nalaze neki klubovi*[5] La Liga-*e na kraju sezone* 2019./2020.. *Svakom klubu u tablici navedena je pozicija koju je isti zauzeo, ukupan broj pogodaka koje su postigli, ukupan broj pogodaka koje su primili i gol-razlika.*

[5]Tablica La Liga: `https://en.wikipedia.org/wiki/2019%E2%80%9320_La_Ligaiz\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{s\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begingroup\endgroup\relax\let\ignorespaces\relax\accent20s\egroup\spacefactor\accent@spacefactorpanjolske`

KLUB	PLASMAN	BROJ POSTIGNUTIH ZGODITAKA	BROJ PRIMLJENIH ZGODITAKA	GOL-RAZLIKA
Real Madrid	1.	70	25	45
Sevilla	4.	54	34	20
Osasuna	10.	46	54	−8
Eibar	14.	39	56	−17
Mallorca	19.	40	65	−25
Espanyol	20.	27	58	−31

Tablica 2.1: *La Liga* 2019./2020.

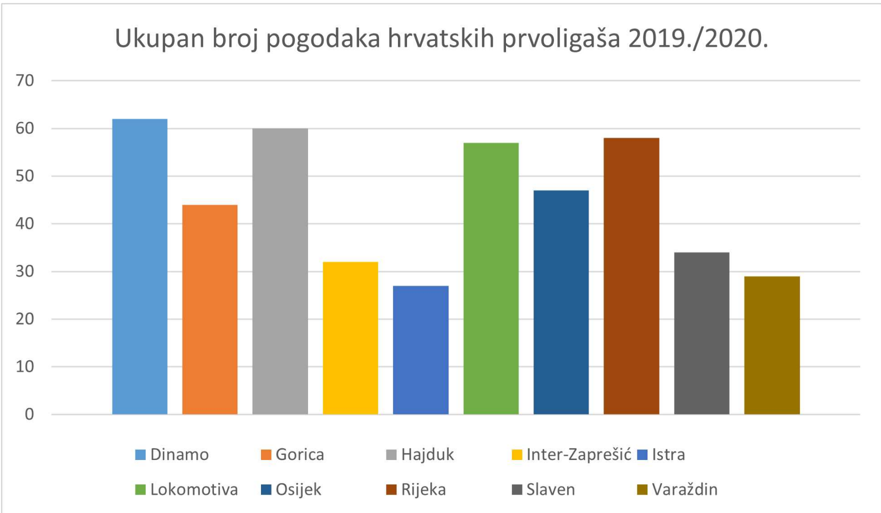
Kada učenicima dajemo ovakvu tablicu da ju ispune na nastavi ili za zadaću, posljednji stupac neka je prazan da oni sami izračunaju koliko iznose gol-razlike za pojedine klubove. Najprije pitamo učenike kako bismo dobili gol-razliku, tj. što trebamo raditi da bismo došli do konkretnog broja za svaki klub. Učenici sportaši, a i oni koji ne prate sport, trebali bi znati da se gol-razlika određuje tako da od ukupnog broja danih pogodaka oduzmemo ukupan broj primljenih pogodaka. Primjerice, da bismo izračunali gol-razliku Real Madrida imamo jednostavni račun $70 - 25 = 45$. Dobili smo da je gol-razlika Real Madrida u toj sezoni iznosila 45. Učenici ovaj podatak najlakše interpretiraju da je Real Madrid „u plusu za 45”, a nogometnim rječnikom rečeno, kažemo da je Real Madrid postigao pozitivnu gol razliku. Slično bi vrijedilo i za Sevillu. Pogledajmo sada Osasunu. Da bismo izračunali gol-razliku računamo $46 - 54 = -8$. Dobili smo da je gol-razlika Osasune u toj sezoni iznosila -8. Učenici ovaj podatak najlakše interpretiraju da je Osasuna „u minusu za 8”, a nogometnim rječnikom rečeno, kažemo da je Osasuna imala negativnu gol-razliku. Analogno računamo i za ostale klubove.

Na prethodnom primjeru možemo i usporediti gol-razlike koje smo dobili. Preciznije rečeno, uspoređivat ćemo cijele brojeve. U ovom primjeru nas zanimaju samo brojevi $45, 20, -8, -17, -25, -31$. Kada bismo ih prikazali na brojevnom pravcu, desno od broja 0 nalazili bi se brojevi 20 i 45, a lijevo od broja 0 nalazili bi se brojevi -8, -17, -25 i -31. Lako određujemo da je od zadanih brojeva najveći broj 45. Najmanji broj od zadanih brojeva je -31. Učenici znaju da kako se udaljavamo od nule u negativnom dijelu brojevnog pravca zapravo imamo sve „manje i manje” brojeve. Učenicima možemo zadati da uz pomoć oznaka za uspoređivanje ($<$, $>$, $=$) usporede dobivene gol-razlike.

Nakon što se završi s obrađivanjem skupa cijelih brojeva, kreće se na pravokutni koordinatni sustav unutar kojeg se obrađuje par nastavnih jedinica vezanih za prikaz i analizu podataka. Naglasak je na prikazu danih podataka uz pomoć stupčastog dijagrama te nešto manje, linijskog dijagrama.

Učenici mogu tablice sa zadanim podatcima prikazati i grafički uz pomoć dijagrama. Dijagrame mogu crtati ručno u bilježnice, a učenici koji su bolji u informatici dijagrame mogu prikazati i u nekom programu za tabličnu obradu podataka. Dijagrami su općenito vrlo dobar način prikaza podataka jer se iz njih, ako su korektno izrađeni, odmah mogu iščitati određeni podatci i odgovoriti na neka pitanja. Jedan način da ih učenici nauče koristiti je interpretacija već gotovih dijagrama.

Primjer 2.2.2. *Pogledajmo stupčasti dijagram 2.3 koji nam pokazuje ukupan broj pogodaka hrvatskih prvoligaša*[6] *na kraju sezone* 2019./2020. *Klubovi su poredani abecednim redom.*



Slika 2.3: Dijagram broja pogodaka hrvatskih prvoligaša 2019./2020..

Učenici na temelju ovakvog dijagrama lako mogu odgovoriti na neka pitanja. Primjerice, mogu odmah uočiti da je najviše pogodaka postigao Dinamo, a najmanje Istra. Također, znali bi poredati klubove po silaznom ili uzlaznom redoslijedu u odnosu na ukupan broj pogodaka koje su postigli.

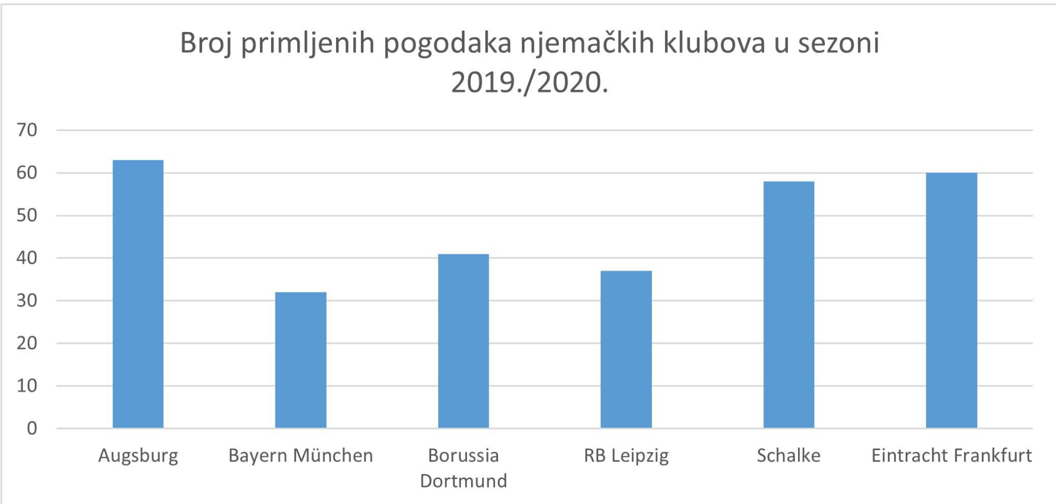
[6]1. HNL 2019./2020. `https://www.rezultati.com/nogomet/hrvatska/1-hnl-2019-2020/tablica/`

Učenicima možemo zadati i obrnuti zadatak. Zadamo im određene podatke, a na njima je da naprave dijagram. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.2.3. *Zadana je tablica 2.2 u kojoj se nalaze neki njemački klubovi*[7] *i njihov broj primljenih zgoditaka na kraju sezone* 2019./2020. *Prikažite stupčastim dijagramom dane podatke i odredite koji je klub primio najviše, a koji klub najmanje zgoditaka.*

KLUB	BROJ PRIMLJENIH ZGODITAKA
Augsburg	63
Bayern München	32
Borussia Dortmund	41
RB Leipzig	37
Schalke	58
Eintrach Frankfurt	60

Tablica 2.2: *Bundesliga* 2019./2020.



Slika 2.4: Dijagram broja primljenih zgoditaka njemačkih klubova 2019./2020..

Na temelju danih podataka učenici bi trebali dobiti dijagram 2.4.

[7] Bundesliga 2019./2020. `https://en.wikipedia.org/wiki/2019%E2%80%9320_Bundesliga`

Učenici lako mogu odgovoriti i na postavljena pitanja. Najviše zgoditaka primio je Augsburg, a najmanje zgoditaka primio je Bayern München.

Također, ovdje smo mogli imati i negativne brojeve, primjerice da smo ovom grafičkom metodom išli prikazati gol-razlike iz Primjera 2.2.1.

Kao što je navedeno u prethodnom odjeljku, učenici se u 5. razredu susreću s razlomcima. Naglasak je na shvaćanju koncepta razlomka. U 6. razredu obrađuju se računske operacije s razlomcima pa možemo i ovdje iskoristiti nogomet da bismo na zanimljiviji način učenicima zadali zadatke.

Primjer 2.2.4. *Kylian Mbappé odigrao je* $\frac{2}{3}$ *nogometne utakmice, a nakon toga trener ga je odlučio zamijeniti. Marco Veratti odigrao je* $\frac{4}{5}$ *nogometne utakmice, a potom je trener odlučio da izađe iz igre. Odredi koji je igrač proveo više minuta u igri.*

Napomena: *Uzimamo da je trajanje nogometne utakmice točno* 90 *minuta, dakle bez produžetaka.*

U ovom primjeru učenici najprije trebaju izračunati koliko iznosi $\frac{2}{3}$ od 90, a potom $\frac{4}{5}$ od 90. Tu je zapravo riječ o množenju razlomka prirodnim brojem. Na kraju, uz jednostavnu usporedbu, učenici daju odgovor na pitanje tko je proveo više minuta u igri.

2.3 Sedmi razred

Učenici u 7. razredu svoga školovanja nailaze na nove matematičke teme koje do sada nisu spominjali, ali koje će poslužiti kao temelj za srednjoškolsku matematiku. Na početku se bave skupom racionalnih brojeva, računskim operacijama u njemu te počinju rješavati jednostavne linearne jednadžbe u tom skupu. Nakon toga susreću se s pravokutnim koordinatnim sustavom u ravnini i vektorima koji će im biti važni i u fizici. Slijede proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine, postotci te vjerojatnost slučajnog događaja, koja će itekako biti zanimljiva u ovom našem doticaju s nogometom. Kasnije prelaze na geometriju (opseg i površina mnogokuta i trokuta) te spominju znanstveni zapis broja koji ćemo također povezati s nogometom, ali u 8. razredu jer tada konkretno pretvaraju brojeve u znanstveni zapis.

Za početak, prisjetimo se početka ovog rada gdje je bila riječ o uvjetima koje nogometna lopta mora zadovoljavati. Konkretno nas zanima opseg nogometne lopte jer se u nogometnim pravilima veličina nogometne lopte zadaje preko opsega. U školi je uobičajenije iz polumjera (ili promjera) kruga izračunati njegov opseg, nego obrnuto pa tako učenici sustavno kroz svoje školovanje kružne i kuglaste objekte opisuju polumjerom ili promjerom. Gledajući s praktične strane, konkretno u nogometu, razlog je vrlo jednostavan: lakše ćemo izmjeriti opseg nogometne lopte, nego polumjer (ili promjer) jer bismo u tom slučaju morali rezati loptu ili je ukliještiti u pomičnu mjerku.

U zadatcima vezanim za izračunavanje opsega, a kasnije i oplošja, nogometne lopte ne možemo bez spominjanja zasigurno najpoznatije konstante u matematici, broja π.

Velika većina učenika broj π poistovjećuje s 3.14, ali to su samo prve tri znamenke ovog broja pa ćemo zato, ukoliko želimo biti precizni, reći da je broj π zapravo omjer opsega i promjera bilo kojeg kruga (ili kugle).

Pogledajmo sada primjer zadatka koji se uklapa u ovu temu.

Primjer 2.3.1. *Poznavajući službena pravila nogometne igre, izračunajte polumjer i promjer nogometne lopte.*

Rješenje. Budući da smo rekli da je lopta kuglastog oblika, na nju je primjenjiva formula za opseg O kugle

$$O = 2r\pi,$$

gdje je r polumjer lopte (kugle), a π dobro poznata konstanta.

Prema pravilima nogometne igre opseg lopte je između 68 cm i 70 cm pa slijedi da je

$$r_1 = \frac{O_1}{2\pi} = \frac{68}{2\pi} \approx 10.82 \text{ cm},$$
$$r_2 = \frac{O_2}{2\pi} = \frac{70}{2\pi} \approx 11.14 \text{ cm},$$

tj. promjer iznosi oko 22 centimetra.

Učenici također opseg i površinu kruga mogu osvijestiti kroz zadatak koji je povezan s izračunavanjem središnjega kruga na nogometnom terenu (slika 1.1). Prema službenim pravilima nogometne igre, središnji krug ima polumjer 9.15 m i na osnovu toga imamo pravo zadati sljedeći primjer u kojem primjenjujemo znanje na rješavanje zadataka iz svakidašnjice.

Primjer 2.3.2. *Izračunaj površinu i opseg središnjega kruga nogometnog terena. Koji udio površine terena on zauzima za najmanji i najveći dopušteni teren?*

Rješenje. Uvrštavajući dani polumjer $r = 9.15\,\text{m}$ u formulu za površinu (P) i opseg (O) kruga, učenici će vrlo brzo dobiti sljedeće rješenje:

$$P = r^2\pi = 9.15^2\pi \approx 263.022\ \text{m}^2,$$

$$O = 2r\pi = 2 \cdot 9.15 \cdot \pi \approx 57.491\ \text{m}.$$

Prema pravilima nogometne igre, najmanje dopuštene dimenzije terena su 90 m $\times$ 45 m, a najveće dopuštene 120 m $\times$ 90 m, tj. najmanja dopuštena površina nogometnog terena je 4 050 m^2, a najveća dopuštena 10 800 m^2.

Sada nam je jedino još preostalo izračunati udio, a to ćemo dobiti tako što ćemo površinu (P) središnjega kruga podijeliti s najmanjom, odnosno najvećom, dopuštenom površinom terena.

$$\frac{263.022}{4\,050} \approx 0.065 = 6.5\%, \qquad \frac{263.022}{10\,800} \approx 0.024 = 2.4\%.$$

Još jedan zanimljiv zadatak koji bismo mogli zadati učenicima bi bio da im isprintamo neki model nogometnog terena i najprije trebaju plavom ili crvenom bojom istaknuti sve kružnice i kružne lukove koje mogu uočiti. Nakon toga, neka izračunaju opseg i površinu svakog kruga te duljinu kružnog luka. Učenicima bi ovaj zadatak dali kao ponavljanje nakon što obradimo nastavnu cjelinu kružnica i krug jer se u toj cjelini susreću s izračunavanjem navedenih veličina.

Učenici u 7. razredu računaju s postotcima te znaju izračunati prosječne vrijednosti dane skupine podataka. Ovdje posebno realistično možemo iskoristiti nogomet da bismo različite matematičke teme povezali u jedan zadatak. Prije primjera takvog zadatka, dotaknimo se malo svjetskih nogometnih prvenstava.

Svjetsko prvenstvo u nogometu (skraćeno SP) jedan je od najpopularnijih sportskih događaja na svijetu, a održava se svake četiri godine. Na SP-u od 1998. godine sudjeluju 32 reprezentacije iz cijeloga svijeta te su ravnomjerno raspoređene u 8 skupina. Unutar skupine svaka reprezentacija igra po jednu utakmicu s drugim reprezentacijama, a nakon utakmica po skupinama slijedi osmina finala. U osminu finala idu po dvije najbolje reprezentacije iz svake skupine. Pobjednici utakmica osmine finala idu dalje u četvrtfinale. Pobjednici utakmica četvrtfinala idu u sljedeću fazu natjecanja, a to je polufinale. U polufinalu pobjednici idu u veliko finale tj. dvoboj za svjetskog prvaka, a poražene momčadi bore se za treće mjesto. Hrvatska reprezentacija je 1998. godine u Francuskoj osvojila treće mjesto, a u Rusiji 2018. godine drugo mjesto.

Primjer 2.3.3. *Imajući na umu pravila igranja nogometnih utakmica na svjetskom nogometnom prvenstvu*[8]*, izračunaj:*

(a) Koliko se ukupno utakmica odigra na jednom svjetskom prvenstvu?

(b) Na svjetskom prvenstvu održanom 2010. *godine u Južnoafričkoj Republici postignuto je ukupno* 145 *pogodaka. Koliko je to prosječno pogodaka po utakmici?*

(c) U finalnom ogledu svjetskog prvenstva u Johannesburgu igrale su momčadi Španjolske i Nizozemske. Španjolci su imali loptu u svome posjedu ukupno 53 *minute i* 28 *sekundi, a Nizozemci su imali loptu u svome posjedu ukupno* 31 *minutu i* 32 *sekunde. Ostatak vremena lopta nije bila „u igri". Izrazi u postotcima posjed lopte jedne i druge ekipe u odnosu na vrijeme u kojem je lopta bila „u igri".*

Rješenje. U podzadatku a) učenici će najvjerojatnije krenuti s prebrojavanjem utakmica odigranih od skupina pa do finala i tako doći do konačnog rješenja. Ukupno imamo 32 reprezentacije raspoređene ravnomjerno u 8 skupina. Znači, u svakoj skupini su 4 reprezentacije. Unutar svake skupine odigra se ukupno 6 utakmica, a budući da imamo 8 skupina ukupan broj utakmica odigranih po skupinama iznosi $6 \cdot 8 = 48$. U osmini finala odigra se još 8 utakmica, u četvrtfinalu još 4 utakmice i u polufinalu još 2 utakmice. Još je preostalo prebrojati utakmicu za treće mjesto te utakmicu velikog finala. Dakle, ukupno imamo 64 nogometne utakmice. Ovaj podzadatak trebali bi znati riješiti svi učenici jer se matematika potrebna za rješavanje ovog zadatka uči u nižim razredima.

U podzadatku b) učenici trebaju ukupan broj pogodaka podijeliti s ukupnim brojem odigranih utakmica i tako dolaze do prosječnog broja pogodaka po utakmici koji zaokružen na dvije decimale iznosi 2.27.

U podzadatku c) učenici trebaju izračunati u postocima posjed lopte svake momčadi. Uzet ćemo da se nogometna utakmica igrala 90 minuta, dakle bez produžetaka. Jednostavnim računom dobivamo da je reprezentacija Španjolske imala posjed lopte od 59.2%, a reprezentacija Nizozemske posjed lopte od 34.8%. U preostalom vremenu lopta nije bila u igri. Ukoliko bismo zbrojili udio vremena u kojima je loptu posjedovala Španjolska, odnosno Nizozemska, s udjelom kada nije bila u igri, dobili bismo točno 100%.

Na početku smo naveli da učenici u 7. razredu uče izračunati vjerojatnost slučajnog događaja.[9] Najprije od ukupnog broja elementarnih događaja određuju povoljne događaje za određeni slučajni pokus, a potom računaju vjerojatnost kao omjer broja povoljnih

[8]Primjer iz M. Erak, Matematika i sport, Matka 21 (2012./2013.), 21.

[9]Za slučaj da slučajni pokus ima konačno mnogo mogućih ishoda.

elementarnih događaja i ukupnog broja elementarnih događaja u nekom slučajnom pokusu.

Primjer 2.3.4. *U momčadi Juventus trenutno se nalaze* 24 *igrača. Od toga ukupno ima* 2 *vratara,* 8 *obrambenih igrača,* 8 *veznih igrača i* 6 *napadača. Izračunaj vjerojatnost da iz momčadi Juventusa nasumce odaberemo igrača koji igra na poziciji obrambenog igrača. Koja je vjerojatnost da odaberemo napadača?*

Rješenje. Prvo računamo vjerojatnost da iz cijele momčadi odaberemo igrača koji igra na poziciji obrambenog igrača. U momčadi Juventusa ima ukupno 24 igrača što znači da ima ukupno 24 elementarna događaja. Sada trebamo odrediti broj povoljnih događaja. Želimo odabrati jednog od obrambenih igrača, a budući da ih ima ukupno 8, slijedi da je broj povoljnih događaja 8. Sada računamo vjerojatnost da odaberemo obrambenog igrača:

$$P(\text{odabran je obrambeni igrač}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \approx 0.33,$$

što znači da je vjerojatnost da smo odabrali obrambenog igrača približno 33%. Analognim načinom dobivamo da je vjerojatnost odabira napadača egzaktno[10] 25%.

Pogledajmo još jedan primjer povezan s nogometom da bismo učenicima mogli približiti vjerojatnost s aktivnostima iz svakodnevnog života.

Primjer 2.3.5. *Momčad Paris Saint-Germain (skraćeno PSG) pobijedila je u* 13 *od ukupno* 20 *posljednjih prvenstvenih utakmica. Ako pretpostavimo da joj se vjerojatnost pobjede ne mijenja, koja je vjerojatnost da će pobijediti u idućoj utakmici?*

Rješenje. Ukupan broj elementarnih događaja je 20 jer je ukupno odigrano 20 utakmica, a broj povoljnih događaja je 13 jer upravo je u toliko utakmica momčad PSG slavila. Neka je A =„iduća utakmica je pobjeda”. Imamo

$$P(A) = \frac{13}{20} = 0.65,$$

tj. vjerojatnost da će momčad PSG slaviti u idućoj utakmici je 65%.

U ovom odjeljku naveli smo samo nekoliko primjera u kojima možemo iskoristiti nogomet da bi učenici uvidjeli povezanost matematike sa svakodnevnom aktivnošću velikog broja ljudi. Za svako područje matematike možemo iskoristiti neke primjere iz nogometnog svijeta, samo treba biti maštovit pri odabiru zadataka, a učenicima će zasigurno biti draže rješavati zadatke povezane s nogometom, nego uobičajene zadatke.

[10]Kažemo približno jer $\frac{1}{3}$ nije isto što i 33%, niti 33.3%, ali $\frac{1}{4}$ jest 25% pa u tom slučaju kažemo egzaktno.

2.4 Osmi razred

U 8. razredu učenici zaokružuju svoje dotad stečeno osnovnoškolsko obrazovanje te kreću s, možemo reći, ozbiljnijom matematikom s kojom će se detaljnije susresti u srednjoj školi. Na početku učenici se susreću s kvadriranjem, a upoznaju se i sa formulama za kvadrat binoma te razliku kvadrata. Nakon toga obrađuju se potencije i korjenovanje, a unutar ove cjeline radi se znanstveni zapis broja kojeg ćemo također povezati s nogometom. Potom se susreću s Pitagorinim poučkom te njegovom primjenom. Do kraja 8. razreda bave se geometrijom ravnine i prostora, susreću se s računanjem oplošja i obujma, a bave se i sa preslikavanjima ravnine.

U prethodnom odjeljku izračunali smo polumjer nogometne lopte koristeći njezin zadani opseg. Sada ćemo iskoristiti naš izračun da bismo izračunali oplošje nogometne lopte.

Primjer 2.4.1. *Poznavajući službena nogometna pravila, izračunajte oplošje nogometne lopte. Dobiveno oplošje preračunaj u kvadratne metre.*

Rješenje. Budući da je lopta kuglastog oblika možemo iskoristiti formulu za oplošje kugle. Formula za oplošje kugle glasi

$$o = 4r^2\pi,$$

gdje je r polumjer lopte, a π već prije spomenuta konstanta [11]. U primjeru 2.3.1 odredili smo da najmanji polumjer lopte približno iznosi 10.82 cm, dok najveći polumjer lopte približno iznosi 11.14 cm. Radi lakšeg računanja uzet ćemo da je polumjer nogometne lopte točno 11 cm. Uvrštavanjem $r = 11$ cm u formulu za oplošje kugle dobivamo

$$o = 4 \cdot (11\,\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 1\,521\ \text{cm}^2.$$

Dakle, izračunali smo da oplošje nogometne lopte polumjera 11 cm iznosi približno 1 521 cm^2. Preostalo nam je još taj rezultat preračunati u kvadratne metre, a to ćemo učiniti tako da ćemo dobiveno oplošje podijeliti s 10 000, tj.

$$o = 1\,521\ \text{cm}^2 = 0.1521\ \text{m}^2.$$

Također, kako se učenici upoznaju s pojmom obujma te računaju obujam kugle, možemo im zadati zadatak u kojem će izračunati obujam nogometne lopte.

Primjer 2.4.2. *Nogometna lopta u unutrašnjosti ima „balon" koji je obložen kožom izgleda „bubamare", pri čemu je oplošje lopte* $1521\,\text{cm}^2$. *Izračunaj obujam maksimalno napumpanog balona nogometne lopte. Dobiveni obujam preračunaj u litre.*

[11] Oplošje je jednako četverostrukoj površini kruga kojeg dobijemo ako raspolovimo kuglu.

Rješenje. Ako je unutrašnjost nogometne lopte (balon) maksimalno napumpana, onda je kožna mreža pripijena uz balon i nalikuje kugli. Zanemarit ćemo odstupanje oblika nogometne lopte od oblika kugle pa onda možemo približno izračunati obujam nogometne lopte tako što ćemo izračunati obujam kugle oplošja 1 521 cm^2. Iz zadanog podatka o oplošju kugle, dobivamo (ono što u ovom radu već znamo, ali nije zadano u zadatku) da je polumjer nogometne lopte približno 11 cm. Obujam lopte računamo uz pomoć formule za obujam kugle:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$ [12]

gdje je r polumjer kugle, pa dobivamo

$$V = \frac{4}{3} \cdot 11^3 \cdot \pi \approx 5\,572.5 \text{ cm}^3.$$

Preostalo nam je dobiveni obujam preračunati u litre. Budući da je 1 dm^3 = 1 L, potrebno je 5572.5 cm^3 pretvoriti u dm^3, a to ćemo učiniti tako da podijelimo dobiveni volumen s 1 000. Dobivamo 5572.5 cm^3 = 5.5725 dm^3, tj. traženi obujam je 5.5725 L.

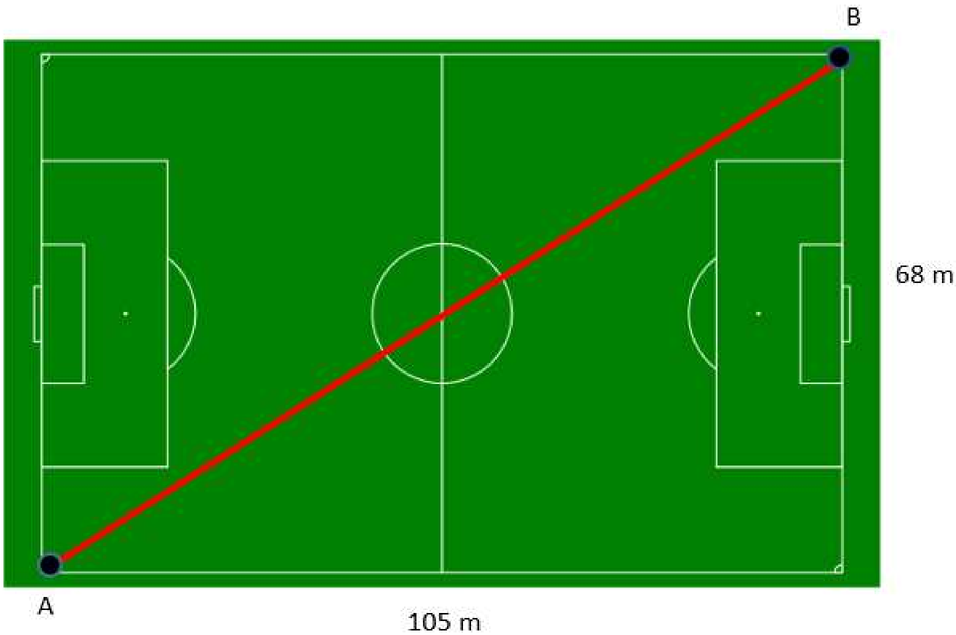
Jedan od najvažnijih teorema koje učenici nauče u osnovnoj školi je Pitagorin teorem (Pitagorin poučak), vezan za pravokutni trokut. Pitagorin teorem govori da je u svakom pravokutnom trokutu površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama. U 8. razredu učenici primjenjuju Pitagorin teorem na pravokutnik i kvadrat, jednakokračni i jednakostranični trokut, trapez i romb. Ovdje ćemo prikazati kako možemo povezati nogomet i Pitagorin teorem u nekoliko primjera.

Primjer 2.4.3. *Duljina nogometnog terena Allianz arene iznosi* 105 m*, a širina iznosi* 68 m*. Ako igrač A stoji u kutu (pogledaj sliku 2.5*[13]*), koliko je od njega udaljen igrač B koji stoji u nasuprotnom kutu?*

Rješenje. Zamislimo da nam slika 2.5 predstavlja Allianz Arenu.

[12] Uočimo da je $V = \frac{r}{3} \cdot o$.

[13] Ovo je slika 1.1 sa sljedećim izmjenama: dodana dužina $\overline{AB}$ te duljina i širina terena.



Slika 2.5: Model terena Allianz arene.

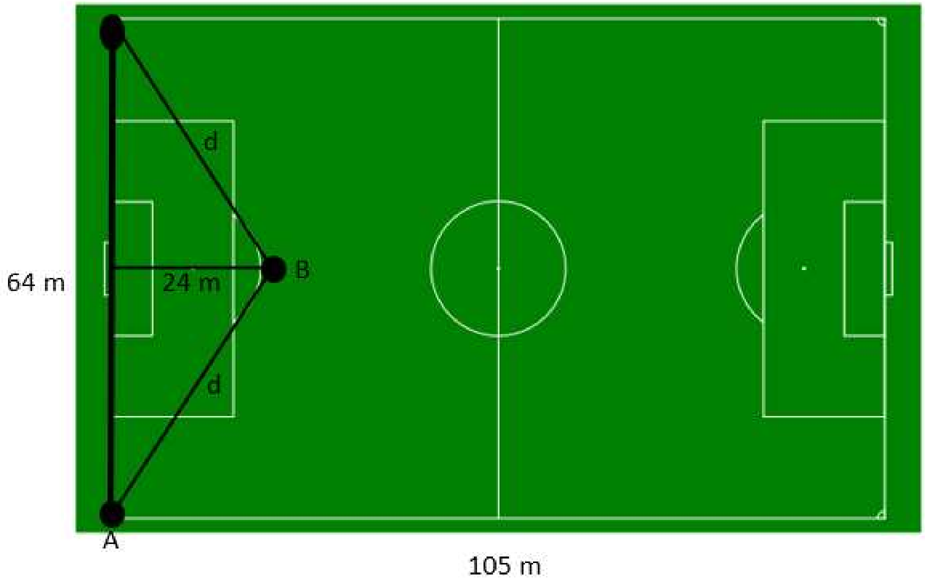
Iz uvjeta zadatka znamo koliko iznose duljina i širina nogometnog terena, a također znamo i poziciju igrača A i B (bez smanjenja općenitosti odabrali smo jedan od 4 „kuta" da predstavlja poziciju igrača A, potom određujemo lokaciju igrača B). Ako malo bolje pogledamo ovaj prikaz, uočavamo da je tražena udaljenost igrača A i B zapravo hipotenuza u pravokutnom trokutu s katetama duljina 105 m i 68 m. Sada iskoristimo Pitagorin teorem i lako možemo dobiti traženu udaljenost igrača:

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= 105^2 + 68^2, \\
|AB|^2 &= 11\,025 + 4\,624, \\
|AB|^2 &= 15\,649, \\
|AB| &\approx 125 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

Dakle, udaljenost dvaju igrača koji stoje u međusobnom nasuprotnim kutovima iznosi približno 125 m.

U ovom primjeru smo iz pravokutnika došli do pravokutnog trokuta te smo na njega primijenili Pitagorin teorem da bismo došli do rješenja. Nogometni teren smo shvatili kao pravokutnik što nam je omogućilo da riješimo zadatak. U sljedećem primjeru vidjet ćemo primjenu Pitagorinog teorema na jednakokračni trokut, a poslužit će nam opet nogometni teren.

Primjer 2.4.4. *Igrač A izvodi udarac iz kuta („korner"). Igrač B je jednako udaljen od lijevog i desnog kuta i* 24 m *od vrata. Na kojoj se međusobnoj udaljenosti nalaze igrači A i B ako je širina nogometnog terena* 64 m*?*



Slika 2.6: Skica za ovaj primjer

Rješenje. Iz uvjeta zadatka znamo da je igrač B jednako udaljen od lijevog i desnog kuta, a to znači da imamo jednakokračni trokut s osnovicom duljine 64 m i krakovima nepoznate duljine d (slika 2.6[14]). Također, udaljenost igrača B od vrata predstavlja visinu u jednakokračnom trokutu. Budući da je riječ o jednakokračnom trokutu, znamo da visina dijeli osnovicu na dva dijela jednakih duljina. Dalje zadatak lako rješavamo jer smo došli do

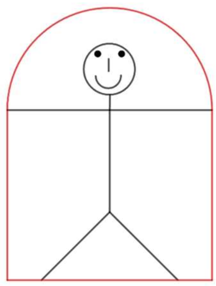
[14]Ovo je slika 1.1 sa sljedećim izmjenama: dodan trokut s visinom i njezinom duljinom, oznake krakova trokuta te duljina i širina terena.

pravokutnog trokuta pa možemo iskoristiti Pitagorin teorem i doći do tražene udaljenosti:

$$\begin{aligned} d^2 &= 24^2 + 32^2, \\ d^2 &= 576 + 1\,024, \\ d^2 &= 1\,600, \\ d &= 40 \text{ m}. \end{aligned}$$

Dakle, igrači A i B su međusobno udaljeni za 40 m.

Kao što smo prije najavili, osvrnut ćemo se na izvođenje kaznenih udaraca i poveznicu između površine vrata i površine koju vratar prekriva. Površina koju prekriva vratar kada stoji uspravno je približno oblika pravokutnika s polukrugom ponad istoga (slika 2.7).



Slika 2.7: Površina koju prekriva vratar.

Vratari su tipično visoki pa ćemo za primjer uzeti vratara koji je visok 1.9 m. Prema tome, širina koju prekriva vratar je 1.9 m (raspon ruku većine ljudi je više-manje jednak njihovoj visini), a upravo taj raspon je promjer polukružnog dijela. Pravokutni dio te površine je visina ramena vratara. Uzmimo da je ona 1.6 m. Sveukupno vratar prekriva površinu od približno

$$\left[1.6 \cdot 1.9 + \frac{\left(\frac{1.9}{2}\right)^2 \pi}{2} \right] \text{m}^2 = 4.5 \text{ m}^2,$$

odnosno, oko četvrtine površine vrata ($P = 7.32 \text{ m} \cdot 2.44 \text{ m} = 17.67048 \text{ m}^2$). Upravo je toliki prosječni udio obranjenih kaznenih udaraca. Je li to slučajnost ili zvuči previše logično te jesu li u slabijim ligama samo izvođači slabiji ili pak vratari bolji nego u jačim, vidjet ćemo u nastavku koji se upravo dotiče Pitagorinog poučka.

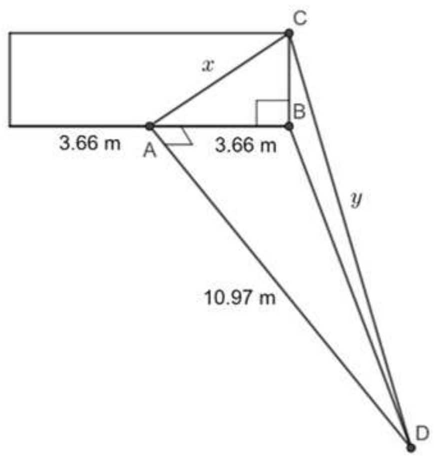
Točka za izvođenje kaznenog udarca nalazi se na udaljenosti od 10.97 m (12 yd) od polovišta poprečne crte unutar vrata (slika 2.8; uočimo da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DAB$ pravokutni). Ako izvođač cilja u gornji (recimo desni) kut vrata C, lopta treba prijeći udaljenost y. Prema Pitagorinom poučku primijenjenom na pravokutne trokute sa slike 2.8 dobivamo da vrijedi

$$y^2 = 10.97^2 \text{ m}^2 + x^2 \qquad \text{i} \qquad x^2 = 3.66^2 \text{ m}^2 + 2.44^2 \text{ m}^2,$$

tj.

$$y^2 = \left(10.97^2 + 3.66^2 + 2.44^2\right) \text{m}^2 = 139.6901 \text{ m}^2,$$

odnosno, lopta do gornjeg kuta vrata preleti oko 11.82 m.



Slika 2.8: Mjere vrata i položaj točke izvođenja kaznenog udarca.

Profesionalni i vrhunski izvođači kaznenih udaraca ispucavaju loptu vrlo precizno, brzinama i do 100 km/h, što znači da će takvi izvođači ispucati loptu do gornjeg desnog kuta u pola sekunde ili čak i manje. Gledajući reakcijsko vrijeme vratara – jedina veličina koju možemo smatrati više-manje neovisnom o kvaliteti natjecanja – oko 0.2 s, vidimo da čak i onim najboljim vratarima vrijeme preostalo da ulovi takvu loptu teško da je dovoljno, dok u slabijim natjecanjima ne samo da mu preostane više vremena, nego je i preciznost izvođača manja pa čak i slabiji vratari imaju veću šansu obraniti kazneni udarac.

Još jednu poveznicu između matematike i nogometa možemo dati kod obrađivanja nastavne jedinice znanstveni zapis broja. Znanstveni zapis broja je umnožak broja a i potencije broja 10. Apsolutna vrijednost broja a mora iznositi bar 1, a biti manja od 10:

$1 \leq a \leq 10$.

U prvom poglavlju u odjeljku 4. razred spomenuli smo poredak stadiona po kapacitetu gledatelja koje stadion može primiti. Izdvojit ćemo neke stadione te napraviti zasebnu tablicu 2.3.

STADION	**GRAD, DRŽAVA**	**KAPACITET**
Rungrado May Day	Pjongjang, Sjeverna Koreja	150 000
Salt Lake Stadium	Kolkata, Indija	120 000
Azteca	Mexico City, Meksiko	105 000
Azadi	Teheran, Iran	100 000
Wembley	London, UK	92 000

Tablica 2.3: Kapaciteti nekih stadiona

Umjesto da u posljednjem stupcu pišemo brojeve s 6, odnosno 5 znamenki, možemo iskoristiti znanstveni zapis broja pa tako primjerice umjesto 150 000 napisati $1.5 \cdot 10^5$ ili umjesto 92 000 možemo zapisati $9.2 \cdot 10^4$. Analogno bismo zapisali i preostale kapacitete.

Prema Forbesovoj listi [8] iz 2019. u tablici 2.4 je prikaz 5 nogometnih klubova koji su na kraju 2019. godine imali najveću vrijednost u američkim dolarima. Umjesto da u stupcu vrijednosti ispisujemo sve znamenke brojeva, možemo koristiti elegantniji zapis i vrijednost zapisati u znanstvenom zapisu.

KLUB	**DRŽAVA**	**VRIJEDNOST / $**	**ZNANSTVENI ZAPIS VRIJEDNOSTI**
Real Madrid	Španjolska	4 239 000 000 000	$4.239 \cdot 10^{12}$
Barcelona	Španjolska	4 021 000 000 000	$4.021 \cdot 10^{12}$
Manchester United	Engleska	3 808 000 000 000	$3.808 \cdot 10^{12}$
Bayern München	Njemačka	3 024 000 000 000	$3.024 \cdot 10^{12}$
Manchester City	Engleska	2 688 000 000 000	$2.688 \cdot 10^{12}$

Tablica 2.4: Vrijednost nekih klubova

Kroz osnovnoškolsko matematičko obrazovanje učenici stječu temelje za savladavanje nastavnog sadržaja koji ih čeka u kasnijem obrazovanju. Ovdje matematika prelazi na nešto apstraktniju razinu pa je i na nama nastavnicima da učenicima na što zanimljiviji način pokušamo predočiti određene matematičke sadržaje, a u tome nam može pomoći i nogomet. Vidjeli smo nekoliko primjera iz matematike u kojima možemo iskoristiti nogomet, a zasigurno će učenicima biti draže kad se susretnu sa ovakvim primjerima zadataka. Na nama nastavnicima je samo da budemo malo maštoviti pri kreiranju zadataka.

Poglavlje 3

Srednja škola

Učenici nakon svoje osnovne škole i znanja stečenog u osam godina školovanja upisuju srednju školu. Kao što smo spomenuli u uvodu, u ovome poglavlju obrađivat ćemo gradivo srednje škole, ali ćemo pri tome kao reprezentativno uzeti gradivo opće ili matematičke gimnazije. To ne znači da nastavnici koji ne predaju u gimnazijama ne mogu koristiti ovaj rad za primjere u nastavi matematike, odnosno da učenici koji ne pohađaju gimnaziju ne mogu razumjeti ovaj rad.

3.1 Prvi razred srednje škole

Početkom 1. razreda srednje škole nastava matematike koncipirana je na način da se prvo znanja iz osnovne škole, zatim nadograde novim znanjima, a krajem 1. razreda krenu na nove matematičke teme − trigonometriju i statistiku. Od 2019. godine na snazi je novi kurikulum [13] (Tablica 3.1) koji je upravo ove dvije cjeline prebacio u 1. razred srednje škole.

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda	Ishodi na razini usvojenosti »dobar«
Barata podatcima prikazanima na različite načine.	Prikazuje podatke tablično, stupčastim dijagramom, histogramom, dijagramom stablo – list, linijskim dijagramom. Određuje srednje vrijednosti: mod, medijan, donji i gornji kvartil te standardnu devijaciju. Crta brkatu kutiju.	Prikuplja, organizira i grafički prikazuje podatke te određuje i interpretira srednje vrijednosti.

Primjenjuje normalnu razdiobu.	Crta krivulju normalne razdiobe, opisuje razdiobu podataka ispod krivulje, rješava probleme s normalnom razdiobom.	Opisuje i grafički prikazuje normalnu razdiobu. Rješava zadatak uz zadanu aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju.
Primjenjuje trigonometrijske omjere.	Primjenjuje trigonometrijske omjere pri modeliranju problemskih situacija i rješavanju problema u planimetriji (trokut, kvadrat, pravokutnik, paralelogram, romb, trapez, mnogokut, deltoid).	određivanje nepoznatih veličina u pravokutniku, jednakokračnome i jednakostraničnome trokutu.

Tablica 3.1: Ishodi iz predmetnog kurikuluma [13] vezani za 1. razred srednje škole.

Nakon što učenici uspješno savladaju cjeline algebarskih izraza i potencija, linearnih jednadžbi i nejednadžbi te linearnih funkcija i osnovno znanja rada na skupovima možemo krenuti sa statistikom koja dobiva sve veći značaj u nogometu, posebno u državi gdje živi nešto više od 4 milijuna stanovnika i isto toliko nogometnih trenera i analitičara.

Pitanje je kakvi se to podatci obrađuju u nogometu i gdje sve nailazimo na statistiku. Gotovo svaki profesionalni klub uz trenera ima i analitičara koji prikuplja podatke o drugim klubovima i njihovim igračima, pozicijama koje igraju, njihovim rezultatima, postignutim i primljenim zgoditcima i slično. Analiziraju se i brzina igrača, otkucaji srca, tlak i druge karakteristike pojedinog igrača, a naravno tome dosta pridonose i tehnološke naprave poput umreženih pametnih prsluka. Za početak, fokusirat ćemo se na nogometne lige.

Iako godina kalendarski počinje u siječnju, a školska godina u Hrvatskoj oko prvog tjedna mjeseca rujna, tako i nogometne lige počinju ovisno o državama u kojima se liga igra, ovisno o klimatskim uvjetima, godišnjom dobu. Nogometna sezona u Europi pa tako i u Hrvatskoj, najčešće počinje početkom kolovoza, a završava početkom lipnja. Spomenimo ovdje jedan zanimljiv podatak, a to je da je reprezentacija Bolivije, koja inače svoje utakmice odigrava u La Pazu na visini od 3600 m, skoro izgubila licencu za odigravanje nogometnih utakmica jer je FIFA htjela uvesti ograničenje za odigravanje utakmica pod njenom ingerencijom na najviše 2500 m, no na kraju su odustali [1].

Prošle nogometne sezone kao i ove svjedočimo pandemiji koronavirusa, a gotovo da ne postoji područje ljudskog djelovanja na koje ona nije napravila utjecaj. Tako se prošle nogometne sezone mnoge nogometne lige nisu odigrale do kraja, a neke su se odigrale s privremenim prekidom tijekom ožujka i travnja te su za to vrijeme ljubitelji nogometa mogli uživati u utakmicama bjeloruske i tadžikistanske lige, odnosno klubova poput Bate Borisova, Nemana, Istiklola ILI CSKA Pamire. U novoj sezoni, koja se u većini europskih država igra od kolovoza, utakmice se igraju na vrijeme, ali dio neodigranih utakmica zbog zaraza pojedinih igrača ostavio je određeni trag na tablice liga.

Sljedeći primjer, tj. aktivnost koju ćemo provesti može biti učenicima itekako zanimljiva i oni sami na temelju toga mogu proizvoljno odabrati nogometnu ligu i analizirati ju, tj. ovo može biti projekt iz nastave matematike.

Primjer 3.1.1. *U ovom trenutku fokusirat ćemo se na Prvu hrvatsku nogometnu ligu (skraćeno* 1. *HNL), odnosno na posljednju završenu sezonu* 2019./2020. *HNK Gorica, sada već stalni prvoligaš i momčad koja ima velike ambicije, osvojila je šesto mjesto te imaju namjeru dogodine igrati UEFA natjecanje (za koje je potrebno biti plasiran barem peti). Da bi se to ostvarilo, stručni stožer na čelu s trenerom prezentirat će svojim igračima statističke podatke vezane za završenu sezonu na temelju tablice (Tablica 3.2).*

PLASMAN	KLUB	POBJEDE	NERIJEŠENO	PORAZI	POSTIGNUTO	PRIMLJENO	GOL-RAZLIKA	BODOVI
1.	Dinamo	25	5	6	62	20	42	80
2.	Lokomotiva	19	8	9	57	38	19	65
3.	Rijeka	19	7	10	58	42	16	64
4.	Osijek	17	11	8	47	29	18	62
5.	Hajduk	18	6	12	60	41	19	60
6.	Gorica	12	13	11	44	48	−4	49
7.	Slaven Belupo	10	9	17	34	51	−17	39
8.	Varaždin	9	9	18	29	50	−21	36
9.	Istra 1961	5	10	21	27	59	−32	25
10.	Inter-Zaprešić	3	8	25	32	72	−40	17

Tablica 3.2: Tablica 1. HNL sezone 2019/2020. [6]

Za analizu ovih podataka možemo se poslužiti programom za izradu tablica, primjerice MS Excel. Analizu započinjemo općim podatcima koje možemo iščitati iz tablice, kao na primjer da je osvajač lige Dinamo odigrao 36 utakmica s 25 pobjeda, 5 neriješenih utakmica, 6 poraza, 62 postignuta pogotka, 20 primljenih pogodaka, gol-razlikom od +42 što se dobije, kao što smo spomenuli u poglavlju 2, kao zbroj postignutih pogodaka umanjen za broj primljenih pogodaka te ukupan broj bodova koji su ostvarili na kraju sezone iznosi 80.

Budući da znamo pravila nogometne igre, što naravno uključuje to da bi netko pobijedio, drugi mora izgubiti, suma broja pobjeda jednaka je sumi broja poraza, a preostali broj od ukupnoga broja odigranih utakmica su one koje su završile bez pobjednika, tj. neriješeno. Već u samom početku dolazimo do jedne zanimljive situacije. U navedenoj sezoni u 1. HNL svaki klub je odigrao 36 utakmica, ali odigrano je ukupno 180 utakmica, a ne 360, do čega dolazimo time da je svaka utakmica igrana u paru između klubova, primjerice utakmica između Dinama i Hajduka upisana je kao odigrana utakmica za oba kluba, ali to je bila jedna utakmica.

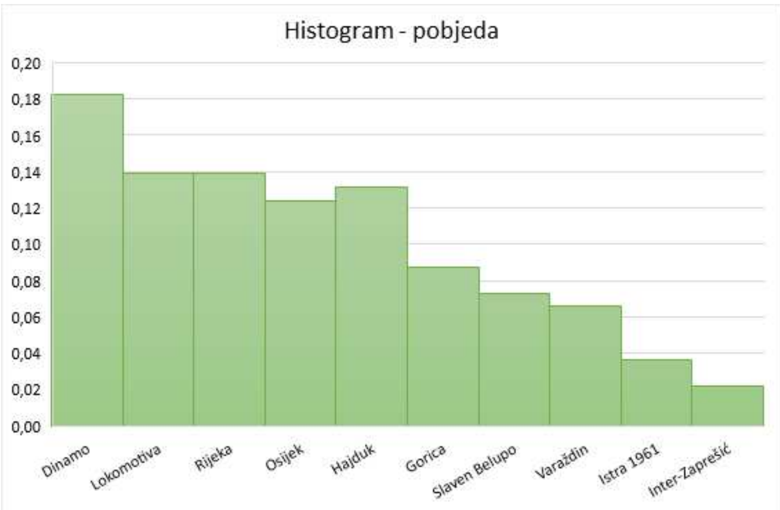
Nastavimo li analizu dalje, vidimo da je od 180 utakmica, njih 137 završilo pobjedom (odnosno porazom) jedne od momčadi, a da je ukupno klubovima pripisano 86 neriješenih rezultata što znači da su 43 utakmice završile neriješeno. Također možemo izračunati postotke i aritmetičke sredine ovih podataka. Podijelimo li broj pobjeda s ukupnim brojem utakmica dobivamo 76.11% utakmica u kojima je jedan od sudionika pobijedio (odnosno izgubio), a broj utakmica koje su završile neriješeno dobivamo na sličan način, tj. 23.89%. Gledajući dobivene postotke, na svake 4 utakmice s pobjednikom dolazi (otprilike) 1 bez pobjednika. Možemo izračunati i aritmetičku sredinu, odnosno koliko su u prosjeku klubovi pobjeđivali. Ukupan broj klubova je 10 pa podijelimo broj utakmica s pobjednikom i dobivamo da je to 13.7 utakmica po klubu, odnosno 4.3 neriješenih. Možemo izračunati i prosječan broj postignutih pogodaka po klubu. Ukupan broj postignutih pogodaka u ovoj sezoni iznosi 450, što znači da su klubovi u prosjeku postigli po 45 pogodaka u sezoni. Znamo da ako je toliko pogodaka postignutih, toliko je i primljenih, pa je i prosjek primljenih pogodaka jednak prosjeku postignutih.

Kako su ovi podatci rangirani prema plasmanu kojem je pridružen i naziv klub, takve ćemo ih promatrati. Od podataka koji se nalaze u tablici na slici 3.2 za prvi razred srednje škole mogu se iskoristiti podatci o pobjedama, neriješenim i izgubljenim utakmicama, ali i podatci o primljenim i postignutim pogocima. Te podatke promatramo kao frekvencije pa možemo izračunati i njihove relativne frekvencije koje se nalaze u stupcima pored u sljedećoj tablici (Tablica 3.3).

PLASMAN	KLUB	POBJEDE	I. R. F.	NERIJEŠENO	II. R. F.	PORAZI	III. R. F.	POSTIGNUTO	IV. R. F.	PRIMLJENO	V. R. F.
1.	Dinamo	25	0.1825	5	0.0581	6	0.0438	62	0.1378	20	0.0444
2.	Lokomotiva	19	0.1387	8	0.0930	9	0.0657	57	0.1267	38	0.0844
3.	Rijeka	19	0.1387	7	0.0814	10	0.0730	58	0.1289	42	0.0933
4.	Osijek	17	0.1241	11	0.1279	8	0.0584	47	0.1044	29	0.0644
5.	Hajduk	18	0.1314	6	0.0698	12	0.0876	60	0.1333	41	0.0911
6.	Gorica	12	0.0876	13	0.1512	11	0.0803	44	0.0978	48	0.1067
7.	Slaven Belupo	10	0.0730	9	0.1047	17	0.1241	34	0.0756	51	0.1133
8.	Varaždin	9	0.0657	9	0.1047	18	0.1314	29	0.0644	50	0.1111
9.	Istra 1961	5	0.0365	10	0.1163	21	0.1533	27	0.0600	59	0.1311
10.	Inter-Zaprešić	3	0.0219	8	0.0930	25	0.1825	32	0.0711	72	0.1600
	N=	**137**		**86**		**137**		**450**		**450**	

Tablica 3.3: Relativne frekvencije podataka 1. HNL sezone 2019/2020.

Sada kada imamo relativne frekvencije možemo kreirati i histograme (slika 3.1) za svaki pojedini stupac grupirano po kategoriji naziva kluba.

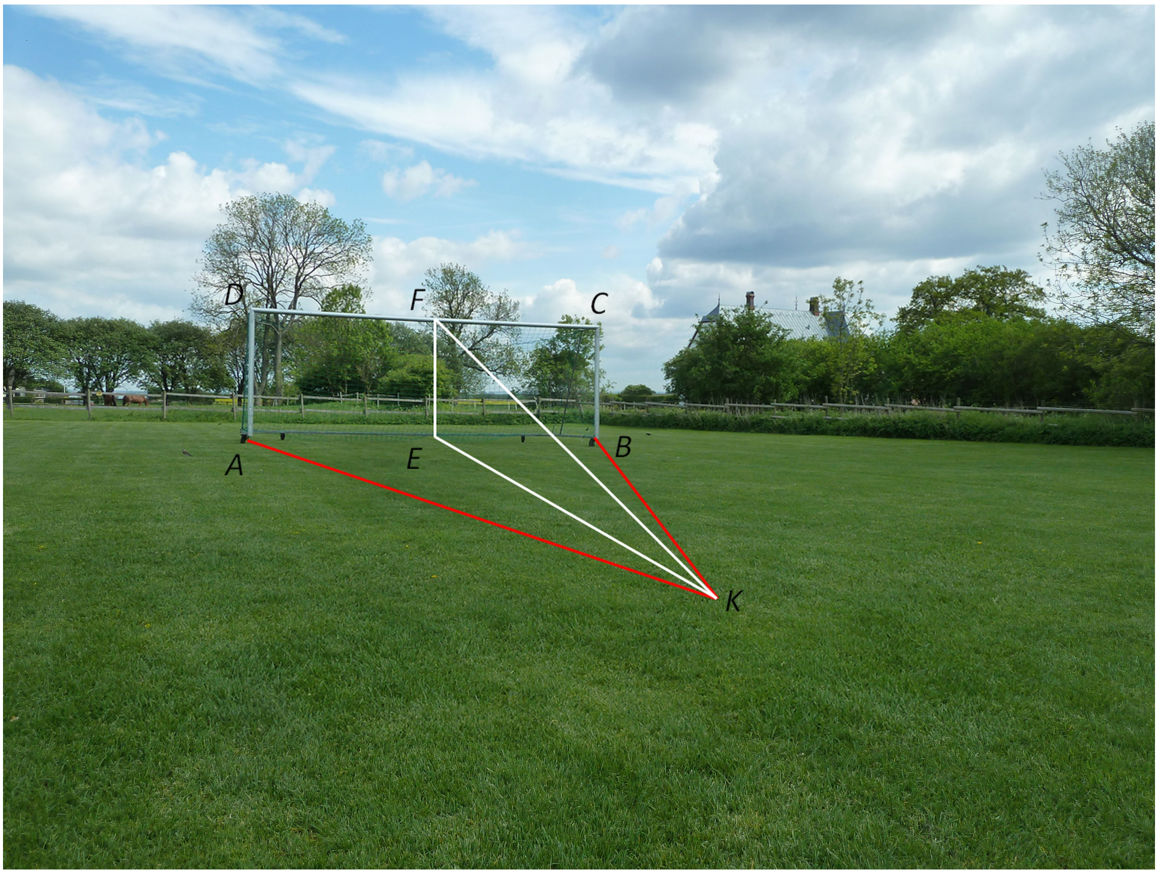


Slika 3.1: Histogrami podataka 1. HNL sezone 2019/2020.

Osim histogramom, mogli smo podatke prikazati linijskim dijagramom, a mogli su se grupirati na način da se prikažu dijagramom stablo-list, no histogrami su prikladniji za prikaz ovog tipa podataka. Pitanje je što HNK Gorica mora napraviti da bi dogodine igrala neko od UEFA natjecanja. Odgovor je jednostavan, a vidljiv i iz grafova na slici 3.1, postizati više pogodaka i time pobjeđivati u više utakmica.

Nakon statistike prijeđimo na trigonometriju. Nogomet i trigonometrija imaju puno poveznica i kroz gotovo sve razrede srednje škole ćemo povezivati trigonometriju s nogometom. Za početak krenimo s kaznenim udarcima.

Primjer 3.1.2. *Iz statistike HNL-a možemo iščitati podatak da je najbolji izvođač kaznenih udaraca u povijesti HNL-a Ivan Krstanović koji ih je postigao* 29 *[7]. On je zasigurno jako dobro upućen u jedan od sljedećih podataka koji možemo izračunati. Kao što smo naveli u* 2. *poglavlju, kazneni udarac se izvodi s* 11 m *(točnije* 10.97 m*, ali zbog jednostavnosti uzimamo* 11 m*), a širina vrata je* 7.32 m *i visina* 2.44 m*. Iz ovih podataka možemo izračunati pod kojim kutom se vide vrata iz točke za izvođenje kaznenog udarca, ali ipak treba biti oprezan. Imamo naime dva moguća kuta: Jedan je kut α pod kojim se iz točke izvođenja kaznenog udarce vide vratnice (kut $\angle AKB$ na slici 3.2), a drugi je kut β pod kojim se iz iste točke vidi vertikalna simetrala vrata (njezin dio $\overline{EF}$ između gol-crte i grede, to je na slici 3.2 kut $\angle EKF$). Uočimo da su kutovi $\angle KEF, \angle KEA$ i $\angle AEF$ na slici 3.2 pravi.*



Slika 3.2: Prikaz kutova pod kojima se iz točke za izvođenje kaznenog udarca vide vratnice odnosno raspon između gol-crte i grede (slika objavljena s dopuštenjem autora F. M. Brückler)

Vidimo jednakokračni trokut $\triangle ABK$ kojega zatvara gol-crta $\overline{AB}$ i krakovi $\overline{KA}$ i $\overline{KB}$ prikazani crvenom bojom (slika 3.2). Između krakova je kut $\alpha = \angle AKB$. U ovom trokutu visina je udaljenost od točke za izvođenje kaznenog udarca do gol-crte, a to je $|EK| \approx 11$ m. Učenici znaju koristiti trigonometriju za računanje veličine kutova, odnosno duljina stranica trokuta u pravokutnom trokutu. Prema tome uzmemo jedan od pravokutnih trokuta $\triangle AEK$ ili $\triangle BEK$ i izračunamo veličinu kuta $\frac{\alpha}{2}$, a tada je α dvostruko veći kut. Račun slijedi u nastavku:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{732}{2}\,\text{cm}}{1\,100\,\text{cm}},$$

$$\frac{\alpha}{2} = 18°24'13.29'',$$

$$\alpha = 36°48'26.57''.$$

Promotrimo sad kut $\beta = \angle EKF$ pod kojim se iz točke K vidi vertikalni raspon vrata (slika 3.2). Ovdje odmah uočavamo pravi kut pri vrhu E u trokutu $\triangle KEF$ te je jednostavno izračunati kut β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{244\,\text{cm}}{1\,100\,\text{cm}},$$

$$\beta = 12°30'28''.$$

Kao što vidimo oba kuta su poprilično mali iako gledateljima izgledaju veliki. Navijački žar često mijenja percepciju i često se čuje da je netko mogao promašiti, kako mu je to vratar obranio i slično. Naravno, naš Ivan Krstanović, unatoč matematičkim izračunima, dobro je poznat po tome da rijetko, tj. gotovo nikada ne promaši kazneni udarac.

3.2 Drugi razred srednje škole

Na početku 2. razreda srednje škole, učenici se susreću s drugim i trećim korijenom te provode računske operacije s njima. Nakon toga se dosta vremena obrađuje kvadratna jednadžba, kao i na njezinu primjenu u modeliranju problemskih situacija iz svakodnevnog života. Učenici 2. razreda po prvi puta se susreću s kvadratnom funkcijom. Grafički prikazuju različite oblike grafova kvadratnih funkcija, računaju nultočke i ekstrem te primjenjuju kvadratne funkcije za modeliranje problemskih situacija. Također, upoznaju se s poučcima o sinusima i kosinusu (osnovne trigonometrijske omjere upoznali su u 1. razredu srednje škole). Do kraja nastavne godine bave se geometrijom prostora i geometrijskim tijelima, a na kraju rješavaju zadatke vezane za vjerojatnost gdje se po prvi puta susreću s geometrijskom vjerojatnošću.

Klasična nogometna lopta, kao što je već spomenuto u prijašnjim poglavljima, sastavljena je od crno-bijelih površina te je predmet želja brojne djece. Mnogi ne znaju da se nogometna lopta može opisati i na matematički način. Da bismo mogli detaljnije proučiti i opisati izgled mreže nogometne lopte, najprije trebamo upoznati Platonova tijela, odnosno pravilne poliedre. Učenici se tijekom svog obrazovanja s Platonovim tijelima po prvi puta susreću u 8. razredu osnovne škole, a potom u 2. razredu srednje škole.

Slika 3.3: Klasična nogometna lopta je napuhani krnji ikozaedar (slika s izložbe „Volim matematiku" ,Zagreb, 2015., fotografirala i ustupila F. M. Brückler)

Pravilni poliedri su geometrijska tijela omeđena sukladnim pravilnim mnogokutima kojima iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova. Prisjetimo se, pravilni mnogokuti su mnogokuti kojemu su sve stranice jednakih duljina i svi kutovi jednakih veličina. Razlikujemo pet Platonovih tijela (tablica 3.4).[1]

[1] Strogo uzevši, trebalo bi pisati pravilni tetraedar, pravilni heksaedar i t.d., jer tetraedar, heksaedar, ... znače poliedar s 4, 6, ... strana, no uobičajeno je kod korištenja tih naziva za pravilne poliedre izostavljati riječ 'pravilni'.

POLIEDAR	**LIKOVI NA STRANAMA**	**BROJ STRANA**	**BROJ VRHOVA**	**BROJ BRIDOVA**
Tetraedar	Jednakostranični trokuti	4	4	6
Heksaedar	Kvadrati	6	8	12
Oktaedar	Jednakostranični trokuti	8	6	12
Dodekaedar	Pravilni peterokuti	12	30	30
Ikozaedar	Jednakostranični trokuti	20	12	30

Tablica 3.4: Platonova tijela.

Osim Platonovih tijela, zanimljiva su i Arhimedova (polupravilna) tijela. Arhimedova tijela omeđena su pravilnim mnogokutima koji mogu imati različit broj stranica, dok smo kod Platonovih tijela napomenuli da je omeđen sukladnim pravilnim mnogokutima. Ukupno postoji trinaest Arhimedovih tijela. U literaturi se pojavljuje podatak da ih ima četrnaest. Arhimedova tijela nazivamo još i polupravilni poliedri, a upravo ćemo u nogometnoj lopti prepoznati jedno od njih.

Na slici 3.4 možemo vidjeti model pravilnog ikozaedra.

Slika 3.4: Model pravilnog ikozaedra.
(Slika objavljena s dopuštenjem autora F. M. Brückler)

Ako od pravilnog ikozaedra „odrežemo” njegove vrhove, dobit ćemo model nogometne lopte (krnji ikozaedar): nakon rezanja oko svako bivšeg vrha ikozaedra nastane peterokut, a bivše strane ikozaedra postaju šesterokuti. Dakle, možemo zaključiti da klasični dijelovi od kojih se sastoji vanjština svake nogometne lopte čine krnji ikozaedar. Standardna nogometna lopta sastavljena je od 12 crnih peterokuta i 20 bijelih šesterokuta. Ovakav dizajn javnosti je predstavljen 1970. godine kako bi gledatelji preko televizijskih ekrana loptu mogli lakše uočiti na terenu. Svaki crni peterokut okružen je ukupno s pet bijelih šesterokuta, dok je svaki bijeli šesterokut okružen naizmjenično s tri crna peterokuta i tri bijela šesterokuta. Zaključno, u svakom se vrhu sastaju jedan peterokut i dva šesterokuta. Model nogometne lopte svrstava se u polupravilne poliedre (Arhimedova tijela), a pri crtanju mreže nogometne lopte primjenjuje se Eulerova formula s kojom se učenici susreću u 2. razredu srednje škole. Eulerova formula povezuje broj strana (S), broj bridova (B) i broj vrhova (V) (konveksnog)[2] poliedra. Uz oznake navedene u prošloj rečenici, za sve konveksne poliedre, a onda i za pravilne i polupravilne poliedre, vrijedi:

$$V - B + S = 2.$$

Učenicima sada možemo zadati zadatak u kojem će povezati nogomet i matematiku tako što će primijeniti Eulerovu formulu na krnji ikozaedar, tj. na nogometnu loptu. Pogledajmo sljedeći zadatak.

Primjer 3.2.1. *Uz činjenice navedene o nogometnoj lopti, odnosno o krnjem ikozaedru, odredi broj bridova i broj vrhova nogometne lopte.*

Napomena: *Svaki brid zajednički je dvjema stranama, a svaki vrh zajednički je trima stranama.*

Rješenje. Kao što je rečeno, nogometna lopta je omeđena s 12 peterokuta i 20 šesterokuta. Iz ove činjenice možemo odrediti broj strana, odnosno vrijedi $S = 12 + 20 = 32$. Svi peterokuti imaju ukupno $12 \cdot 5 = 60$ bridova, dok svi šesterokuti imaju ukupno $20 \cdot 6 = 120$ bridova. Znamo da je svaki brid zajednički dvjema stranama pa je ukupan broj bridova nogometne lopte jednak

$$B = \frac{60 + 120}{2} = \frac{180}{2} = 90.$$

Na analogni način možemo izračunati i broj vrhova ili jednostavnije, uvrštavanjem poznatih izraza u Eulerovu formulu dobivamo

$$V = 2 + B - S = 2 + 90 - 32 = 60.$$

Dakle, nogometna lopta (krnji ikozaedar) ima ukupno 32 strane, 90 bridova i 60 vrhova. Detaljnije o ovom primjeru te sličnim primjerima može se pročitati u [10].

[2] Konveksni poliedar omeđeni je skup u prostoru dobiven kao presjek konačno mnogo poluprostora.

U 2. razredu srednje škole učenici u cjelini geometrija prostora i geometrijska tijela računaju oplošje prizme pa samim time potrebno je računati površine raznih pravilnih mnogokuta. Sukladno tome, koristeći model nogometne lopte, navodimo još jedan mogući primjer zadavanja zadataka učenicima.

Primjer 3.2.2. *Izračunajte površinu mreže nogometne lopte ako su bridovi peterokuta i šesterokuta duljine* 3 cm*. Koliko bi krojaču bilo potrebno materijala za šivanje jedne takve lopte?*

Rješenje. Prvo ćemo izračunati površinu pravilnog šesterokuta sa stranicom duljine 3 cm. Površina P_6 pravilnog šesterokuta je 6 puta veća od površine P svog karakterističnog trokuta. Karakteristični trokut (3.5) pravilnog šesterokuta je jednakostranični trokut sa stranicom duljine 3 cm. Koristeći formulu za određivanje površine jednakostraničnoga trokuta imamo

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2.$$

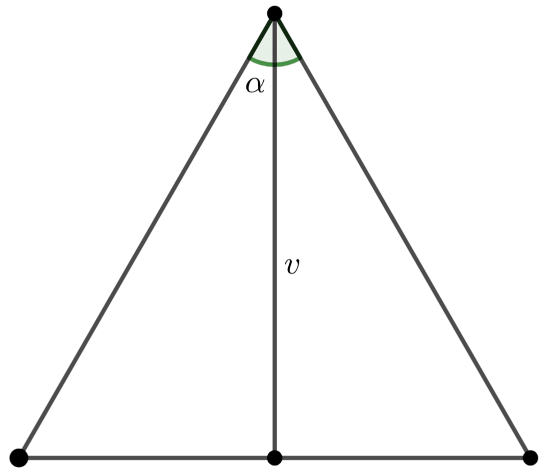
Sada računamo površinu pravilnog šesterokuta te dobivamo

$$P_6 = 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2,$$

odnosno pravilni šesterokut čija stranica ima duljinu 3 cm ima površinu od približno 23.38 cm^2. Sljedeće računamo površinu P_5 pravilnog peterokuta. Površina pravilnog peterokuta je 5 puta veća od površine p svog karakterističnog trokuta. Karakteristični trokut pravilnog peterokuta je jednakokračni trokut sa osnovicom duljine 3 cm. Znamo i da je kut između krakova jednak

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Da bismo odredili površinu karakterističnog trokuta, potrebna nam je duljina visine na osnovicu. Pogledajmo sliku 3.5.



Slika 3.5: Karakteristični trokut pravilnog mnogokuta.

Visina v na osnovicu jednakokračnog trokuta dijeli tu osnovicu na dva sukladna dijela pa znamo da je duljina svakog tog dijela 1.5 cm. Nadalje, visina je ujedno i simetrala kuta nasuprot osnovice pa znamo da ona dijeli kut na dva dijela od kojih svaki iznosi 36°. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta, a s time se učenici upoznaju u 1. razredu srednje škole lako računamo

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{1.5\,\mathrm{cm}}{v}, \quad v = \frac{1.5\,\mathrm{cm}}{\operatorname{tg} 36^\circ},$$

pa je

$$P_5 = 5p = 5 \cdot \frac{3 \cdot 1.5}{2 \operatorname{tg} 36^\circ}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{45}{4 \operatorname{tg} 36^\circ}\,\mathrm{cm}^2.$$

Vidimo dakle da je površina pravilnog peterokuta stranice duljine 3 cm približno jednaka 15.48 cm^2. Iz činjenice da se mreža nogometne lopte sastoji od 12 pravilnih peterokuta i 20 pravilnih šesterokuta, računamo površinu mreže nogometne lopte:

Lako dobivamo

$$P_{\text{MREŽA}} = 12P_5 + 20P_6 = \left(\frac{135}{\operatorname{tg} 36^\circ} + 270\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2 \approx 653.47\mathrm{cm}^2.$$

Primijetimo (kad usporedimo s ranije izračunatim oplošjem stvarne nogometne lopte, vidi primjer 2.4.1) da je očigledno — budući da je ova površina mreže oko 43 % oplošja kugle koja odgovara propisanim dimenzijama nogometne lopte — lopta sašivena iz pravilnih peterokuta i šesterokuta brida duljine 3 cm dosta manja od prave nogometne lopte.[3] Na početku smo naveli da se učenici u 2. razredu susreću s poučcima o sinusima i kosinusu. U 1. razredu srednje škole promatrali smo pod kojim kutom se vidi gol-linija iz točke u kojoj se izvodi kazneni udarac. Sada ćemo isto to izračunati za slobodne udarce. Za ovo se mogu iskoristiti i programi dinamičke geometrije u kojima se mogu kreirati modeli nogometnih terena i vrlo precizno pozicionirati mjesto s kojeg se izvodi slobodan udarac, a time odmah dobivamo i udaljenosti toga mjesta od vratnica i od sredina vrata. Budući da znamo dimenzije vrata lako se izračuna kut pod kojim se iz proizvoljne točke na terenu vidi gol-linija (raspon među vratnicama). Jedan od mogućih primjera je sljedeći.

Primjer 3.2.3. *Neka je udaljenost od točke izvođenja slobodnog udarca do bliže vratnice jednaka 24 m i neka je kut pod kojim se iz te točke vidi gol-crta jednak* $15°$. *Odredi kolika je udaljenost do dalje stative gola i udaljenost do središta gola.*

Rješenje.

Slika 3.6: Prikaz slobodnog udarca (slika objavljena s dopuštenjem autora F. M. Brückler)

[3]Znajući da su oplošja bar približno razmjerna kvadratima polumjera, promjera ili duljine brida, lako bi se uspjelo dobiti da ako želimo sašiti loptu koja bi odgovarala službenim pravilima, bridovi pravilnih peterokuta i šesterokuta od kojih je sastavljena trebaju imati duljinu od približno 4.5 cm. Taj se rezultat može potvrditi i preciznijim, ali zahtjevnim, stereometrijskim računom.

Vidimo da ovdje imamo trokut kojeg zatvaraju točka S koja označava mjesto izvođenja slobodnog udarca i točke koje označavaju dna vratnica. Trokut je raznostraničan, u njemu znamo duljine dviju stranica ($a = \overline{AB}$ je gol-linija koja ima duljinu jednaku propisanoj širini gola i $b = \overline{BS}$ koja je zadana zadatkom) i veličinu kuta $\alpha = \angle ASB$. Da bismo odredili treću stranicu potrebno je iskoristiti kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

pri čemu je α kut nasuprot stranice a. Uvrstimo li prema onome što znamo pretvarajući sve duljine u centimetre, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$732^2\text{cm}^2 = 2\,400^2\text{cm}^2 + c^2 - 2\cdot 2\,400\cdot c\cdot\cos 15^\circ\text{cm}^2,$$

iz koje se dobiju dva rješenja, a nama je potrebno ono koje je dulje od 2400 cm jer znamo da je to udaljenost do bliže vratnice, a mi računamo udaljenost do dalje. Dobivamo da je tražena udaljenost $c = 2\,705.5$ cm.

Da bismo izračunali udaljenost središta vrata (sredine gol-linije) trebamo izračunati duljinu težišnice $\overline{ST}$ našeg trokuta, a prije toga trebamo iskoristiti sinusov poučak pomoću kojeg dobivamo kutove trokuta uz vratnice. Iz jednadžbe

$$\frac{732}{\sin 15^\circ} = \frac{2\,400}{\sin\beta},$$

dobivamo $\beta = 58^\circ 3' 30''$, a iz činjenice da je zbroj veličina kutova u trokutu jednak 180°, slijedi da je $\gamma = 106^\circ 56' 30''$.

Ponovnim korištenjem kosinusovog poučka dobivamo da za duljinu t težišnice vrijedi

$$t^2 = 366^2\text{cm}^2 + 2\,400^2\text{cm}^2 - 2\cdot 366\cdot 2\,400\text{cm}^2\cdot\cos 106^\circ 56' 30'',$$

odnosno, $t \approx 2\,5301$ cm.

Kao završni primjer vezan za gradivo ovog razreda, navodimo primjer modeliranja kvadratnom funkcijom pri rješavanju problema iz svakodnevnog života.

Primjer 3.2.4. *Vratar ispucava loptu sa zemlje. Putanja lopte opisana je funkcijom* $h(x) = -0.005x^2 + 0.4x$*, gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja lopte. Veličine h i x izražene su u metrima. Odredi sljedeće:*

(a) *Na kojoj je visini lopta kada je njezina horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja* 25 m*?*

(b) *Koja je najveća visina lopte?*

(c) *Na kojoj će udaljenosti od vrata lopta pasti na zemlju?*

Rješenje. U podzadatku a) uvrštavanjem $x = 25$ u zadanu kvadratnu funkciju, dobivamo

$$h(25) = -0.005 \cdot 25^2 + 0.4 \cdot 25 = 6.87 \text{ m}.$$

U podzadatku b) korištenjem formule za y-koordinatu tjemena kvadratne funkcije

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

dobivamo

$$y_0 = \frac{4 \cdot (-0.005) \cdot 0 - 0.4^2}{4 \cdot (-0.005)} = 8 \text{ m}.$$

U podzadatku c) rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$-0.005x^2 + 0.4x = 0.$$

Izlučivanjem zajedničkog faktora dobivamo

$$x \cdot (-0.005x + 0.4) = 0,$$

a iz ovoga slijedi da je $x = 80$ m. Rješenje $x = 0$ je trivijalno pa ga ne uzimamo kao rješenje zadatka.

Zadatci koji uključuju modeliranje kvadratnom funkcijom i rješavanje kvadratnih jednadžbi pogodni su za korelaciju matematike (i fizike) i nogometa. Jedan od takvih primjera dali smo u prethodnom primjeru. Slični zadatci pojavljuju se i na državnoj maturi pa je učenicima dobro prikazati što više takvih zadataka različite tematike, odnosno vrlo efikasno iskoristiti i nogomet za prikaz modeliranja iz svakodnevnog života.

3.3 Treći razred srednje škole

Na početku 3. razreda srednje škole slijedi ponavljanje nastavnog sadržaja 2. razreda. Nakon toga slijedi nastavna cjelina „Eksponencijalna i logaritamska funkcija" u kojoj se učenici osim eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi susreću s primjenom navedenih funkcija pri modeliranju problema iz svakodnevnog života. Funkcije su glavna tema prvog polugodišta pa nakon navedenih slijede trigonometrijske funkcije. Učenici se upoznaju s grafovima trigonometrijskih funkcija, a počinju i rješavati trigonometrijske jednadžbe. U 3. razredu obrađuju se i vektori (u ravnini), a moguće je da su se učenici i u dotadašnjem obrazovanju već susreli s njima jer vektori pripadaju proširenom sadržaju 1. i 2. razreda srednje škole. Do kraja 3. razreda obrađuje se nastavna cjelina pravac, unutar koje učenici određuju jednadžbe pravca te kut između pravaca, a potom prelaze na krivulje drugog reda koje opisuju jednadžbama. Na samom kraju susreću se s kombinatorikom.

U ovom odjeljku najveću pozornost posvetit ćemo kombinatorici[4] jer se na vrlo zanimljiv i praktičan način mogu uzeti primjeri iz nogometnog svijeta koji će učenicima biti daleko zanimljiviji. Primjerice, možemo promatrati kako trener može kombinirati koje će igrače staviti u početnu postavu ili kod grupne faze natjecanja Lige prvaka možemo promatrati moguće kombinacije za prolazak određene momčadi u sljedeće faze natjecanja. Premda ima puno nogometnih primjera iz kombinatorike o kojima bi se mogao pisati čitav zasebni rad, navest ćemo neke primjere u kojima je moguće povezati nogomet i matematiku, a da budu prikladni za učenike 3. razreda srednje škole.

Pogledajmo prvo primjere veze krivulja drugog reda i nogometa prikladne za ovaj razred. Ako bismo pitali učenike pomoću koje bi krivulje opisali putanju lopte, velika većina njih bi odgovorila pomoću parabole. Prilikom obrađivanja nastavne jedinice parabole, učenici trebaju pomoću zadanih točaka pronaći jednadžbu parabole, a ovdje možemo povezati nogomet i matematiku kako bismo zadali jedan takav primjer.

Primjer 3.3.1. *Pretpostavimo da je putanja nogometne lopte koja je ispucana sa zemlje parabola. Ako bismo postavili koordinatni sustav kojem je os apscisa na zemlji (točno ispod parabole, dakle proteže se po zemlji u smjeru u kojem je ispucana lopta) i odabrali metar kao jedinicu duljine, parabola bi prolazila kroz točke $A(0,0)$ i $B(12,7)$. Točka B predstavlja njezinu najvišu poziciju. Pronađite kvadratnu funkciju koja modelira putanju ove nogometne lopte.*

Rješenje. Učenici bi trebali iskoristiti svoje znanje iz 2. razreda srednje škole prilikom rješavanja ovog zadatka jer su se tamo susreli s kvadratnom funkcijom te modeliranjem pomoću iste u situacijama iz svakodnevnog života. Budući da nam je poznata maksimalna vrijednost funkcije, a ona se postiže u tjemenu parabole (točka $T(x_0, y_0)$), iskoristit ćemo tjemeni oblik jednadžbe parabole

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0.$$

Uvrštavanjem koordinata tjemena u ovu jednadžbu dobivamo

$$y = a \cdot (x - 12)^2 + 7.$$

[4]Ne u smislu u kojem taj izraz koriste komentatori nogometnih utakmica, već u stvarnom, matematičkom smislu te riječi.

Koeficijent a nazivamo vodećim koeficijentom i učenicima je poznato da on mora biti različit od nule jer u protivnom naša funkcija ne bi bila kvadratna, nego linearna. Naš cilj je odrediti koeficijent a i time ćemo doći do rješenja zadatka.

Iz zadatka nam je poznata i druga koordinata kroz koju „prolazi" parabola, a to je točka $A(0,0)$. Uvrštavanjem koordinata točke u jednadžbu dobivamo

$$0 = a \cdot (0-12)^2 + 7.$$

Preostalo je još riješiti ovu jednadžbu do kraja. Lakim računom dolazimo do koeficijenta a,

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (-12)^2 + 7, \\ 0 &= 144a + 7, \\ -144a &= 7 \\ a &= -\frac{7}{144}. \end{aligned}$$

Kvadratna funkcija koja modelira opisanu putanju nogometne lopte je dakle

$$y = -\frac{7}{144}(x-12)^2 + 7$$

Zadatke koji se rješavaju na analogan način, a nešto su drugačije postavljeni, možemo zadati na mnogo načina. Jedan od takvih zadataka je i sljedeći primjer kojeg nećemo rješavati.

Primjer 3.3.2. *Maksimalna visina koju je dosegla sa zemlje ispucana nogometna lopta iznosi* 5 *metara. Nakon što je lopta prešla udaljenost od* 8 *metara, njezina visina je iznosila* 3.2 *metra. Kada je lopta dotaknula teren, nalazila se* 40 *metara od pozicije s koje je ispucana. Algebarski odredite kvadratnu funkciju koja modelira putanju nogometne lopte.*

Kao što je spomenuto u na početku odjeljka, učenici krajem 3. razreda obrađuju kombinatoriku. Upoznaju se s osnovnim principima prebrojavanja, varijacijama, permutacijama i kombinacijama. Na početku navodimo neke osnovne primjere pomoću kojih možemo učenike upoznati s kombinatorikom, a potom krećemo na zanimljivije primjere.

Primjer 3.3.3. *Na koliko načina možemo prognozirati ishod nogometnog turnira u kojem se natječe* 18 *nogometnih ekipa, ako nas zanima redoslijed svih momčadi? Na koliko načina možemo prognozirati ishod ako nas zanima redoslijed prvih četiriju ekipa?*

Napomena: *Pretpostavljamo da jedno mjesto ne mogu dijeliti dvije ili više ekipa, nego je redoslijed jedinstveno određen rezultatima odigranih utakmica.*

Rješenje. Prvo nas zanima broj mogućih redoslijeda svih momčadi. Ishod nogometnog turnira je uređena 18-torka ekipi u kojoj se svaka ekipa pojavljuje točno jednom. Prvoplasiranu ekipu možemo odabrati na 18 načina, drugoplasiranu ekipu možemo odabrati na preostalih 17 načina, trećeplasiranu među preostalih 16 i analognim načinom dalje. Izborom prvih 17 ekipa, jedinstveno je određena posljednja ekipa. Dakle, različitih ishoda ima ukupno

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

što kraće zapisujemo kao 18!. Upravo ćemo 18! ostaviti kao konačno rješenje zato što bi množenjem dobili prevelike brojeve pa je i veća mogućnost da se prilikom računanja negdje i pogriješi.

Nadalje, zanima nas redoslijed prvih četiriju ekipa. Ishod nogometnog turnira u ovom je slučaju uređena četvorka u kojoj se svaka ekipa pojavljuje najviše jednom. Takvih četvorki ukupno ima

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15.$$

Primjer 3.3.4. *Na satu tjelesne i zdravstvene kulture organiziran je nogometni turnir. Budući da je nastavnik želio da sudjeluju svi učenici u razredu, odlučio je da će on biti vratar, a svi ostali učenici će pucati kaznene udarce. Najboljim učenicima dodijelit će pehar i dvije medalje. Na koliko je načina moguće dodijeliti nagrade za prva tri mjesta ako je u razredu ukupno* 12 *učenika.*

Rješenje. Ovaj zadatak je primjer zadatka s varijacijama bez ponavljanja. Učenici u takvim zadatcima moraju prepoznati koliko ukupno imamo elemenata u skupu kojeg promatramo (u ovom slučaju promatramo skup koji se sastoji od svih učenika tog razreda) te moraju prepoznati koliki je broj elemenata koje razvrstavamo (u ovom slučaju to su pehar i dvije medalje). Učenicima je poznata formula za varijacije bez ponavljanja r-tog razreda skupa od n elemenata.

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Prepoznavanjem elemenata u zadatku dolazimo do $n = 12$, $r = 3$ pa računamo

$$V_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 1\,320.$$

Dakle, pehar i dvije medalje možemo podijeliti na ukupno 1 320 načina. Spomenuto je da se učenici upoznaju i s principima prebrojavanja. U poglavlju 2 naveli smo primjer

2.3.3 u kojem je trebalo odrediti ukupan broj nogometnih utakmica koje su se odigrale na svjetskom nogometnom prvenstvu. Taj primjer većina učenika rješava „pješke", a zapravo do konačnog rješenja možemo doći na vrlo jednostavan način primjenjujući princip umnoška i princip zbroja.

Ukupno imamo 32 reprezentacije koje su ravnomjerno raspoređene u 8 skupina. Dakle, u svakoj su skupini 4 reprezentacije. Principom umnoška lako određujemo da je ukupan broj utakmica koje se odigraju po skupinama 48. U osmini finala odigra se još 8 utakmica, u četvrtfinalu još 4 utakmice. U polufinalu još 2 utakmice. Još je preostalo prebrojati utakmicu za treće mjesto te utakmicu velikog finala. Konačno, korištenjem principa zbroja dolazimo do konačnog rješenja, a ono iznosi 64.
Kao što je već navedeno, učenici već sa znanjem iz nižih razreda osnovne škole znaju odrediti rješenje ovog zadatka. Međutim, ponovno smo spomenuli ovaj primjer kako bismo skrenuli pažnju na principe prebrojavanja.

Kao što smo vidjeli u prethodnim primjerima, u nogometu se može svašta kombinirati. Često znamo čuti na tribinama da je neka momčad dobitna kombinacija, da nekima kombinatorika nije jača strana, da neki pak trebaju bolje kombinirati napad i obranu i slično. Mnogi pri tome uopće ne prepoznaju matematički sadržaj u onome što govore ili pak krivo upotrebljavaju izraz kombinatorika poistovjećujući ga s izrazom kombiniranje. Naravno, malo tko razmišlja o matematici u trenutku kada njegova momčad igra utakmicu, već sve posveti tome da momčad za koju on ili ona navija i pobijedi, a tome doprinosi srčano navijanje s tribine. S obzirom da ovaj nije pisan u udobnosti navijačke stolice, već u miru u kojem se misli mogu fokusirati na vezu između matematike i nogometa, dotaknuti ćemo se pojavnosti kombinatorike u nogometu.

Za početak jedna od najvažnijih stvari koju navijači svake reprezentacija očekuju prije samih utakmica je izbor igrača za te nadolazeće utakmice, tj. žargonski rečeno „Tko je pozvan?". Izbornik reprezentacije ima pravo na poziv 23 igrača, a dodatno može izabrati još 8 igrača za pretpoziv što im daje mogućnost ukoliko se netko od igrača ozlijedi da uđe u prvih 23. Jedan od takvih poziva nalazimo na web-stranici `https://hns-cff.hr/news/21930/dalic-objavio-popis-kandidata-za-utakmice-u-studenom/`.
Za potrebe sljedećeg izračuna mi ćemo promatrati samo one igrače koji se nalaze unutar sljedećih skupina: vratari (D. Livaković, S. Sluga, I. Grbić), obrambeni igrači (D. Vida, D. Lovren, Š. Vrsaljko, T. Jedvaj, B. Barišić, D. Ćaleta-Car, D. Melnjak, F. Uremović, D. Bradarić), vezni igrači (L. Modrić, M. Kovačić, M. Brozović, M. Badelj, M. Rog, M. Pašalić, N. Vlašić), igrači napada (I. Perišić, A. Kramarić, A. Rebić, J. Brekalo, B. Petković, A. Budimir, A.M. Čolak).

Sada kada izbornik, tj. trener, ima popis igrača treba odabrati neku taktiku. Najprije odabere jednog vratara od 3 ponuđena, a zatim treba odlučiti kako će na terenu rasporediti ostalih 10 igrača koje mora izabrati od ukupno preostalih 20 (naravno, smatramo da vratar ne može igrati nikoju drugu poziciju osim pozicije vratara kao što smatramo da svaki igrač ovisno o poziciji za koju je izabran ne može igrati niti jednu drugu). Primjerice, uzmimo da se naš trenutni izbornik Zlatko Dalić protiv Turske odlučio na jednu od najpoznatijih nogometnih taktika, a to je postava 4-4-2, što znači da imamo 4 obrambena i 4 vezna igrača te 2 napadača. Sada kada imamo odabranu postavu 4-4-2, zanima nas na koliko načina izbornik može složiti nogometnu momčad ponuđenih igrača.

Najprije odaberemo vratara što možemo učiniti na $\binom{3}{1} = 3$ načina. Potom odaberemo obrambene igrače na $\binom{7}{4} = 35$ načina pa vezni red na $\binom{7}{4} = 35$ načina te na kraju igrače napada na $\binom{6}{2} = 15$ načina. Prema principu produka, pomnožimo li te rezultate dobivamo ukupno 55 125 različitih mogućih postava.

Neka je za utakmicu sa Švedskom izbornik odlučio promijeniti taktiku i igrati više napadački nogomet, tako što je maknuo jednog igrača iz veznog reda i dodao ga u napad. Analognim računom kao u prethodnom primjeru dolazimo do rezultata od 73 500 različitih kombinacija. Primjećujemo da je broj kombinacija u ovom slučaju veći.

Mogli smo na početku jednostavno uzeti ukupan broj igrača 23 i izračunati na koliko se načina, njih $\binom{23}{11}$, može izabrati prva postava bez obzira na to za koju su poziciju prijavljeni i taktiku koju bi igrali. U tom slučaju dobili bismo 1 352 078 kombinacija.

Pogledajmo još jedan mogući zadatak na ovu temu. Za utakmicu protiv Portugala znamo da će igrati kapetan reprezentacije Luka Modrić, siguran vratar Dominik Livaković te obrambeni dvojac Dejan Lovren i Domagoj Vida. Na koliko načina možemo odabrati preostale igrače ukoliko je taktika, tj. postava, 3-5-2. U ovom slučaju vratar je već odabran i to je jedan jedini mogući odabir dok u obrani od potrebnih 3 igrača imamo već zadana 2 pa trebamo od preostalih 5 odabrati još jednog, tj. zapisujemo $\binom{5}{1} = 5$. U veznom redu znamo jednoga igrača pa trebamo odabrati još 4 od preostalih 6, tj. $\binom{6}{4} = 15$. Na kraju biramo napad za koji nemamo ograničenja te pišemo $\binom{6}{2} = 15$. Konačno, kada pomnožimo, imamo ukupno 1 125 različitih mogućih postava.

Cijela ova priča može nam poslužiti i za dokaz jednoga zanimljivoga identiteta koji se u ovom razredu može dokazati kombinatorno.

Propozicija 3.3.5. *Za* $0 \leq k \leq n$ *vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Lijeva strana jednadžbe kaže da od n nogometaša biramo nogometnu ekipu od k nogometaša. Na desnoj strani razlikujemo dva slučaja ovisno o tome uzimamo li u ekipu jednog konkretnog nogometaša, na primjer Luku Modrića.

U prvom slučaju Luka Modrić već je izabran u nogometnu ekipu te je potrebno od preostalih $n-1$ nogometaša izabrati još $k-1$ nogometaša, prema tome imamo $\binom{n-1}{k-1}$ načina za to učiniti.

U drugom slučaju Luka Modrić nije dio ekipe jer je, recimo, ozlijeđen pa u ovom slučaju od preostalih $n-1$ nogometaša trebamo izabrati k nogometaša za nogometnu ekipu, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina.

Koristeći princip sume dobivamo upravo zadanu tvrdnju, tj. kombinatorno smo dokazali tvrdnju propozicije. □

Ovaj dokaz može se primijeniti na konkretnu momčad s konkretnim brojem nogometaša te se može učenicima dati zadatak u kojem treba dokazati da vrijedi $\binom{23}{11} = \binom{22}{10} + \binom{22}{11}$, što je primjer koji proizlazi iz našega prethodnog primjera gdje smo slagali nogometnu momčad od popisa 23 igrača reprezentacije.
Za kraj napomenimo da smo namjerno izostavili zadatke i primjere u kojima bismo kombinatoriku povezali s vjerojatnosti, ne zato jer bi bili neprikladni, nego jer su oni najočiglednija veza matematike i nogometa i opisani u mnogo izvora, primjerice [9].

3.4 Četvrti razred srednje škole

Nakon početnog ponavljanja nastavnog sadržaja naučenog u 3. razredu, kreće se s obrađivanjem nastavne cjeline „Brojevi" unutar koje se učenici po prvi puta susreću s principom matematičke indukcije i binomnim poučkom. Do kraja prvog polugodišta rade se nizovi, aritmetički i geometrijski, a spominje se i njihova primjena u svakodnevnom životu, posebice u kamatnom računu. Po prvi puta učenici se susreću i s pojmom limesa niza i geometrijskog reda. Na početku drugog polugodišta sistematizira se dotadašnje znanje o funkcijama koje su se obrađivale kroz prva tri razreda srednje škole, a potom se naučeni sadržaj produbljuje do novih pojmova – limesa funkcije i neprekidnosti funkcije. Nakon što se završi cjelina o funkcijama, do kraja školske godine obrađuju se derivacije i integrali. Promatra se i daje njihova primjena na različite aspekte matematičkog i svakodnevnog života.

Brzina nogometaša je jedna od najvažnijih karakteristika koju svaki nogometaš posjeduje. Svakom napadaču je u interesu da što brže stigne do lopte i pokrene akciju koja može rezultirati pogotkom. Također, treneri često traže od svojih igrača da brže igraju te da protok lopte bude sve brži i brži. Obrambenim igračima brzina može predstavljati nešto negativno jer kako god da se pripremaju da zaustave protivničkog napadača, jednostavno ne uspijevaju jer je prebrz za njih. Različitim treninzima brzine, nogometaši pospješuju svoju fizičku spremnost i brzinu, a to im zasigurno omogućuje da budu bolji od svojih protivnika te omoguće prednost svoje ekipe u tom pogledu. Za navijače je jedan od najvećih užitaka gledati kako napadač prolazi pokraj obrambenih igrača i u konačnici postiže gol.

Francuski list *Le Figaro* objavio je listu najbržih nogometaša 2020. godine. Najbrži nogometaš današnjice je francuski nogometaš, ujedno i igrač PSG-a, Kyllian Mbappé s najvećom brzinom od 36 km/h. Slijede ga nogometaš španjolskog kluba Athletic Bilbao s brzinom od 35.7 km/h te igrač Arsenala Pierre-Emerick Aubameyang s brzinom od 35.5 km/h.

Učenici se u sklopu nastavne cjeline „Derivacije” susreću s problemom tangente. Kao uvodni i primjer za razradu ove nastavne jedinice može nam poslužiti primjer iz nogometa.

Primjer 3.4.1. *Nogometaš započinje s istrčavanjem na terenu.*[5] *Duljina puta s koju je nogometaš pretrčao (izražena u metrima) u prvih* 15 *sekundi istrčavanja može se opisati pravilom* $s(t) = 1.2\,t^2\,\mathrm{m/s^2}$. *Koliko iznose prosječna brzina tijekom prvih* 10 *sekundi i trenutna brzina nogometaša u desetoj sekundi?*

Rješenje. Na početku ćemo izračunati prosječnu brzinu nogometaša pri 10 sekundi. Učenici znaju izračunati prosječnu brzinu jer se ona spominje u uvodnom dijelu ove cjeline. Da bismo izračunali prosječnu brzinu, računamo omjer promjene puta i promjena vremena u prvih 10 sekundi:

$$v = \frac{s(10) - s(0)}{(10 - 0)\,\mathrm{s}}.$$

[5]Primjer na poveznici `http://ss-tehnicka-st.skole.hr/upload/ss-tehnicka-st/images/static3/2669/File/GIBANJE_numericki_zadaci_i_formule.pdf`

U sljedećem koraku potrebno je izračunati $s(10)$ i $s(0)$, a to izračunamo uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti u dano pravilo:

$$s(10) = 1.2 \cdot 10^2 = 1.2 \cdot 100 = 120\,\mathrm{m},$$

$$s(0) = 1.2 \cdot 0^2 = 0.$$

Vraćanjem u izraz za brzinu dobivamo da je

$$v = \frac{120}{10} = 12 \text{ m/s}.$$

Nakon toga krećemo s prosječne brzine na trenutnu brzinu. Kao što smo napomenuli prije, ovaj primjer dajemo učenicima kada se upoznavaju s problemom određivanja brzine pa zbog toga možemo na različite načine krenuti sa sljedećim korakom. Ako želimo odrediti trenutnu brzinu u $t = 10$ s, moramo računati prosječne brzine u manjim vremenskim intervalima koji su dovoljno blizu $t = 10$ s. Ovdje bismo učenicima mogli zadati tablicu sa zadanim intervalima koju će oni nadopuniti i približno odrediti trenutačnu brzinu za $t = 10$ s. U kasnijem obrađivanju nastavne cjeline „Derivacije" učenici će naučiti precizno izračunati trenutnu brzinu, ali mi nećemo prikazati taj postupak jer je očigledan.

Primjer tablice (tablica 3.5) koje možemo dati učenicima pri čemu učenici sami popunjavaju 2. i 3. stupac, tj. širinu zadanih intervala i prosječnu brzinu, a nakon toga slijedi diskusija o njihovim rješenjima.

Vremenski interval	Širina intervala u sekundama	Prosječna brzina u m/s
$[9.9, 9.99]$	0.09	23.868
$[9.99, 9.999]$	0.009	23.9868
$[9.99, 10]$	0.001	23.9988
$[10, 10.001]$	0.001	24.0012
$[10.001, 10.01]$	0.009	24.0132
$[10.01, 10.1]$	0.09	24.132

Tablica 3.5: Prosječna brzina.

Na kraju uočavamo da što su širine intervala oko $t = 10$ s manje, to je iznos prosječne brzine bliži 24 m/s. Zapravo možemo reći da prosječne brzine teže broju 24 m/s kada širine intervala teže nuli.

Ovo je samo jedan od primjera pomoću kojeg možemo učenike upoznati s novim pojmovima. Na ovaj način približili smo ih putem nečega što im je poznato iz svakodnevnog života.

Spomenuli smo da se u 4. razredu obrađuju aritmetički i geometrijski nizovi pa kao jedan primjer možemo iskoristiti sjedala na nogometnim stadionima da bismo zadali neke zadatke.

Primjer 3.4.2. *Nogometni stadion sastoji se od* 25 *sekcija za sjedenje. Svaka sekcija ima* 44 *reda. Prvi red ima* 22 *mjesta, drugi red ima* 23 *mjesta, treći red ima* 24 *mjesta i tako dalje. Odredi koliko mjesta ima u redu* 44 *pojedine sekcije.*

Rješenje. U ovom primjeru koristit ćemo aritmetički niz i pripadajuće formule kako bismo izračunali ono što se traži od nas. Uz oznake n = n-ti red, a_n = broj mjesta u n-tom redu, računamo:

$$a_n = 22 + n - 1,$$

$$a_n = 21 + n.$$

Prvo se traži da odredimo broj mjesta za sjedenje u redu 44. Dakle, uzimajući u obzir da je $n = 44$, računamo

$$a_{44} = 44 + 21$$

$$a_{44} = 65.$$

Dakle, u 44. redu ima 65 mjesta za sjedenje.

I za kraj ovoga razreda, a i cijeloga rada, dotaknuti ćemo se vjerojatnosti i slučajnih varijabli, odnosno gradiva za nadarenije učenike ili za učenike s pojačanim satima matematike.

Vjerojatnost u matematici se postepeno uvodi još od osnovne škole. Razina na koju dođu do 4. razreda srednje škole trebala bi im omogućiti dobro razlučivanje i upotrebu nešto složenijih apstraktnih pojmova. Između ostaloga, u ovom razredu se bave i slučajnim varijablama. Ovaj pojam omogućiti će nam predviđanje rezultata i konačnog rasporeda tablice nekog nogometnog prvenstva ili lige.

Uzimamo da je svaka utakmica nezavisni slučaj u odnosu na onu prije nje i onu koja joj slijedi. Možemo postaviti parametre slučajno, ali ukoliko želimo dobiti što realističniji rezultat uzet ćemo nešto što znamo, jer je nerealno da neki klub koji je očito slabiji na kraju ima veću vjerojatnost za osvajanje lige od nekog kluba za kojeg realno znamo da je bolji. Stoga možemo odabrati neke parametre koji nam mogu olakšati dolazak do rezultata, a njih možemo dobiti na razne načine poput promatranja ranijih sezona, pripremnih utakmica, rezultata u kupu, statistika samih igrača i slično. Neki od relevantnijih podataka mogu biti prosječan broj pogodaka u prethodnoj sezoni ili više njih, prosječan broj kartona, udaraca iz kuta, kaznenih udaraca, udaraca na vrata i slično.

Sada kada smo sve ovo naveli, uzmimo konkretan primjer. Već smo analizirali 1. HNL za sezonu 2019./2020. pa sada možemo učiniti istu stvar za sezonu 2020./2021. No, za početak odredimo parametar pomoću kojega ćemo koristiti određivanje predikcije rezultata. Neka je to prosječan broj pogodaka u posljednje 3 sezone. Neki klubovi su igrali za to vrijeme i niže lige za koje će pogodak u našem slučaju, zbog jednostavnosti, vrijediti kao u 1. HNL. U tablici 3.6 prikazan je prosječan broj pogodaka po utakmici u posljednje 3 sezone.

KLUB	**PROSJEK POGODAKA PO UTAKMICI**
Dinamo	1.9461
Lokomotiva	1.4747
Rijeka	1.9428
Osijek	1.5354
Hajduk	1.8089
Gorica	1.3796
Slaven Belupo	1.0480
Varaždin	1.2864
Istra 1961	0.8199
Šibenik	1.3899

Tablica 3.6: Prosječan broj pogodaka po klubu od 2017. do 2020. u HNL-u, `https://www.rezultati.com/nogomet/hrvatska/1-hnl/rezultati/`

Jedan od najpoznatijih osnovnih metoda za procjenu vjerojatnosti pobjede je Poissonova raspodjela[6] sa sljedećom formulom

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

gdje je x broj pogodaka koji će postići neka momčad, a λ prosječan broj pogodaka po utakmici u odabranom prethodnom razdoblju.

Ukoliko pretpostavimo da rezultat utakmice dviju momčadi ovisi samo o njihovim prosječnim brojevima pogodaka u odabranom prethodnom razdoblju te ako pretpostavimo da su brojevi pogodaka koje daje jedna odnosno druga momčad nezavisni događaji, onda vjerojatnost određenog rezultata dobijemo umnoškom vjerojatnosti postizanja pogodaka jedne, odnosno druge momčadi. Primjerice, izračunati ćemo kolika je vjerojatnost da utakmica između Dinama i Osijeka, temeljem podataka iz tablice 3.4., završi rezultatom 3 : 1.

Pomoću Poissonove raspodjele dobijemo vjerojatnost da Dinamo postigne 3 pogotka, odnosno

$$P(X = 3) = \frac{1.9461^3 e^{-1.9461}}{3!} = 0.1755.$$

Na isti način izračunamo da Osijek postigne 1 pogodak te dobijemo

$$P(X = 1) = \frac{1.5354^1 e^{-1.5354}}{1!} = 0.3307.$$

Pomnožimo li te dvije vjerojatnosti dobivamo da je vjerojatnost da utakmica završi rezultatom 3 : 1 jednaka 0.058, odnosno 5.8%.

[6]Primjer s Poissonovom raspodjelom `https://towardsdatascience.com/predicting-premier-league-standings-putting-that-math-to-some-use-e8de64938d7`

Zaključak

Nogomet u nastavi matematike nije uobičajena pojava. Kroz ovaj rad vidjeli smo kako postepeno, od razredne nastave preko predmetne pa kroz čitavo srednjoškolsko obrazovanje možemo iskoristiti matematiku pri rješavanju problema iz nogometa.
U prva četiri razreda svoga školovanja, učenici dobivaju osnovne pojmove koje će nadograđivati tijekom daljnjeg obrazovanja. Spomenuli smo da se u tim razredima naglasak ne stavlja na preciznost pri definiranju i uvođenju novih pojmova jer učenici u toj dobi nisu u mogućnosti shvatiti većinu matematičkih problema. Međutim, u ovom razdoblju važno je da učenici steknu radne navike te da im na što jednostavniji način približimo nove matematičke pojmove. Ovdje nam je nogomet uvelike pomogao. Kroz praćenje točaka, linija i krugova učenici se upoznaju s osnovnim geometrijskim pojmovima. Spomenuli smo primjenu nogometa u provođenju osnovnih računskih operacija.
Prelaskom na predmetnu nastavu, dostiže se određena razina apstraktnosti u matematici. Primjeri iz nogometa poslužili su nam za uvođenje novih pojmova i njihovo uvježbavanje (cijeli brojevi). Spomenuli smo i korelaciju matematike i informatike s nogometom. Također, koristeći formule za opseg i površinu pravokutnika te volumen i oplošje kugle, odredili smo opseg i površinu nogometnog terena te volumen i oplošje nogometne lopte.
U srednjoj školi, matematika dostiže višu razinu. Učenici se susreću s pojmovima kvadratne funkcije pomoću koje su dani primjeri modeliranja pomoću iste u nogometu. Također, korištenjem trigonometrijskih formula računa se kut pod kojim nogometaš treba ispucati loptu kako bi došla do određenog mjesta (u okvir vrata). Kroz srednjoškolsku matematiku najviše se primjera između povezanosti nogometa i matematike dalo kroz razne primjere iz kombinatorike i vjerojanosti.

Bibliografija

[1] *Bolivija ima 'morsku' i 'planinsku' reprezentaciju*, Jutarnji.hr (2007), https://www.jutarnji.hr/naslovnica/bolivija-ima-morsku-i-planinsku-reprezentaciju-3310202 (pristupljeno: veljača 2021.).

[2] *Nogometna lopta*, Sport i moda (2016), https://blog.sport-moda.hr/nogometna-lopta/?fbclid=IwAR1ZPSOqzVTSGrKa3P59iZD0oRm6saZRjevjOCEIsSukaDUUg7aKvmslKX4, https://blog.sport-moda.hr/nogometna-lopta/?fbclid=IwAR1ZPSOqzVTSGrKa3P59iZD0oRm6saZRjevjOCEIsSukaDUUg7aKvmslKX4 (pristupljeno: veljača 2021.).

[3] *Pravila nogometne igre*, (2020), https://hns-cff.hr/files/documents/19374/PNI%202020-2021%20HR.pdf.

[4] 2015–16 *Premier League*, https://en.wikipedia.org/wiki/2015%E2%80%9316_Premier_League#League_table, (pristupljeno: veljača 2021.).

[5] *Popis nogometnih stadiona prema kapacitetu gledališta*, https://hr.m.wikipedia.org/wiki/Dodatak:Popis_nogometnih_stadiona_prema_kapacitetu_gledali%C5%A1ta?fbclid=IwAR1ZPSOqzVTSGrKa3P59iZD0oRm6saZRjevjOCEIsSukaDUUg7aKvmslKX4, (pristupljeno: veljača 2021.).

[6] *Rezultati i poretci od osnutka Prve hrvatske nogometne lige*, http://prvahnl.hr/povijest/rezultati-i-poretci/?sid=29, (pristupljeno: veljača 2021.).

[7] *Statistika kaznenih udaraca u 1. HNL.*, https://hrnogomet.com/hnl/kazneniUdarci.php?sortOrder=desc&sortBy=3&stranica=1&lang=hr&tab=1, (pristupljeno: veljača 2021.).

[8] K. Badenhausen, *The World's 50 Most Valuable Sports Teams 2019*, Forbes (2019), https://www.forbes.com/sites/kurtbadenhausen/2019/07/22/

the-worlds-50-most-valuable-sports-teams-2019/?sh=11f06c79283d, https://www.forbes.com/sites/kurtbadenhausen/2019/07/22/the-worlds-50-most-valuable-sports-teams-2019/?sh=11f06c79283d (pristupljeno: veljača 2021.).

[9] F. M. Brückler i D. Cicvarić, *Nogometna matematika i fizika*, Školska knjiga, 2008.

[10] K. Koščević, *Nogometna lopta*, Matka **96** (2015./2016.), 24.

[11] NCVVO, *Nastavni program za matematiku*, http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf.

[12] M. Shapland, *As lucky punters collect on Leicester City winning the Premier League at 5,000-1, why did bookies offer such crazily high odds?*, This is money (2016), https://www.thisismoney.co.uk/money/news/article-3571428/Why-did-bookies-offer-crazily-high-5-000-1-odds-Leicester-City.html, https://www.thisismoney.co.uk/money/news/article-3571428/Why-did-bookies-offer-crazily-high-5-000-1-odds-Leicester-City.html (pristupljeno: veljača 2021.).

[13] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta matematika za osnovne škole i gimnazije*, Narodne novine (2019), br. 7/2019.

Sažetak

U ovom su diplomskom radu sustavno, prema gradivu matematike za pojedine razrede osnovnih i srednjih škola, opisane razne primjene matematike na nogomet. U prvom poglavlju, koje se tiče razredne nastave matematike, dajemo niz primjera osnovne aritmetike i geometrije u nogometnom kontekstu. U drugom se poglavlju bavimo primjenom matematike viših razreda osnovne škole na nogomet: račun s razlomcima, osnove vjerojatnosti i Pitagorin teorem samo su neke od tema koje se ovdje primjenjuju na situacije iz nogometnog svijeta. U trećem poglavlju opisujemo kako srednjoškolsko (gimnazijsko) matematičko gradivo povezati s nogometom, te ovdje na nogomet, među ostalim, primjenjujemo funkcije, trigonometriju i statistiku.

Summary

In this diploma thesis we systematically, according to the mathematics content for individual classes of primary and secondary schools, describe various applications of mathematics to football. In the first chapter, which concerns the teaching of mathematics in the first four years of primary school, we give several examples of basic arithmetic and geometry in football context. In the second chapter, we apply upper primary school mathematics to football: fraction aritmetic, basic probability, and the Pythagorean theorem are just some of the topics that we here apply to situations from the football world. In the third chapter, we describe how to connect high school (gymnasium) mathematical content with football, and here we describe, among other, football applications of functions, trigonometry and statistics.

Životopis

Rođen sam 23. prosinca 1996. godine u Viernheimu, Savezna Republika Njemačka. Odrastao sam i živim u Zagrebu sa svojim roditeljima i bratom. Školovanje sam započeo 2003. godine u Osnovnoj školi grofa Janka Draškovića te sam istu završio 2011. godine kada upisujem X. gimnaziju „Ivan Supek“, opći smjer. Za vrijeme srednjoškolskog obrazovanja stekao sam ljubav prema matematici i dobio želju da budem nastavnik. Na državnoj maturi iz matematike ostvario sam odličan uspjeh te u srpnju 2015. godine upisao Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Matematika; smjer nastavnički. Uz dobru organizaciju i redovno učenje, sve kolegije sam položio u roku te 2018. godine završio preddiplomski sveučilišni studij. Iste godine upisao sam diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički te također položio sve kolegije pravovremeno, ali sam produžio svoje školovanje za jedan dodatni semestar zbog pisanja diplomskoga rada.

Naravno, znanje o nogometu mi je uvelike pomoglo u pisanju ovoga rada jer sam u tome od svoga djetinjstva. Za vrijeme srednje škole prestao sam s dugogodišnjim treniranjem nogometa te sam u veljači 2013. godine položio ispit za nogometnoga suca (slika 3.7). Razlog je bio taj što sam volio nogomet i htio ostati u njemu, kada već kao igrač nisam uspio. U veljači 2016. godine stekao sam zvanje regionalnoga suca da bih potom krajem 2016. godine položio i ispit za suca malog nogometa. Kasnije sam se opredijelio za mali nogomet i sustavno napredovao. Trenutno sam na listi sudaca 1. HMNL, najvišeg državnog ranga u malom nogometu.

Slika 3.7: Nogometni sudac
(fotografija objavljena uz dopuštenje autora V. Tolića)