SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Katarina

ENESTRÖM-KAKEYIN TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojoj mentorici, prof. dr. sc. Sanji Varošanec, na pruženoj pomoći, savjetima, strpljenju i pristupačnosti tijekom izrade ovoga rada.

Posebna zahvala mojim roditeljima koji su bili bezuvjetna podrška i oslonac i bez kojih ne bih bila tu gdje sam sada.

Sadržaj

Uvod

Proučavanje nultočaka polinoma ima jako bogatu povijest. Datira otprilike iz vremena kada je otkrivena geometrijska interpretacija kompleksnih brojeva. J. Wallis [1] je zaslužan za prve pokušaje geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva. C. Wessel [2] je 1797. godine prvi puta opisao kompleksnu ravninu, međutim, njegovi zapisi su postali poznati tek 1895. godine. Za to su vrijeme, početkom 19. stoljeća, J. C. F. Gauss [3] i J.-R. Argand [4] nezavisno jedan od drugoga, opisali kompleksnu ravninu. Upravo su tada kompleksni brojevi postali šire prihvaćeni.

Gauss i A.-L. Cauchy [5] su među prvima pridonijeli otkrivanju položaja nultočaka polinoma, ali Eneström-Kakeyin teorem je bio polazna točka mnogobrojnih radova na tu temu. Radi se o rezultatu s početka 20. stoljeća i jedan je od osnovnih teorema koji opisuje položaj nultočaka polinoma.

Algebarske i analitičke metode pronalaženja nultočaka polinoma mogu biti dosta komplicirane, stoga je poželjno staviti neka ograničenja na koeficijente polinoma. Tako u Eneström-Kakeyinom teoremu promatramo polinome s realnim koeficijentima koji su nenegativni i čine rastući niz.

U radu je najprije predstavljen Eneström-Kakeyin teorem, a potom i neke od njegovih generalizacija. Prema tome, podjela rada je sljedeća.
U prvom je poglavlju navedena definicija polinoma i nultočaka polinoma, a potom teoremi koje primjenjujemo u proučavanju teme ovoga rada. Podrazumijeva se da su osnovni pojmovi, definicije i teoremi vezane za polinome poznati.
Drugo poglavlje se sastoji od dva potpoglavlja. Prvo, kraće, sadrži rezultate koji su prethodili Eneström-Kakeyinom teoremu, dok je u drugom naveden i dokazan sam teorem nakon

[1] John Wallis, (Ashford, 1616. - Oxford, 1703.), engleski matematičar.
[2] Caspar Wessel, (Vestby, 1745. - Copenhagen, 1818.), dansko-norveški matematičar.
[3] Johann Carl Friedrich Gauss, (Braunschweig, 1777. - Göttingen, 1855.), njemački matematičar.
[4] Jean-Robert Argand, (Geneva, 1768. - Paris, 1822.), švicarski matematičar.
[5] Augustin-Louis Cauchy, (Pariz, 1789. - Sceaux, 1857.), francuski matematičar.

kojega slijedi kratki povijesni osvrt o njegovom nastanku te pojašnjenje o njegovom nazivu.
U trećem su poglavlju obrađene neke od generalizacija Eneström-Kakeyinog teorema. Pri tome je napravljena podjela na polinome čiji koeficijenti čine rastući niz i na polinome čiji koeficijenti čine po dijelovima rastući niz.
Pod generalizacijama smatramo rezultate nastale prirodnim proširivanjem pretpostavki Eneström-Kakeyinog teorema, rezultate koji se u određenim slučajevima svode na Eneström-Kakeyin teorem te pojedina profinjenja Eneström-Kakeyinog teorema. U sklopu svakog od teorema je detaljno navedeno o kojoj vrsti rezultata se radi.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i svojstva polinoma

Definicija 1.0.1. *Funkcija* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definirana s*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}_0$ *i* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*, naziva se polinom.*
Konstante $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*, koje određuju polinom, nazivaju se koeficijenti polinoma.*

Polinomi su funkcije. Dakle, možemo ih zbrajati, množiti i komponirati. Odnosno, vrijedi:

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x),\\ (p \cdot q)(x) &= p(x) \cdot q(x),\\ (p \circ q)(x) &= p(q(x)).\end{aligned}$$

Skup svih polinoma s operacijama zbrajanja i množenja čini komutativni prsten s jedinicom kojega kratko nazivamo: prsten polinoma nad $\mathbb{C}$ i označavamo $\mathbb{C}[x]$.

Definicija 1.0.2. *Nultočkom polinoma* $p \in \mathbb{C}[x]$ *nazivamo svaki kompleksan broj* α *za koji vrijedi* $p(\alpha) = 0$.
Ako je $\alpha \in \mathbb{R}$*, onda se* α *zove realna nultočka, a ako je* $\alpha \in \mathbb{C}$*, kompleksna nultočka. Umjesto izraza nultočka polinoma koristi se i izraz korijen polinoma.*

Navedimo neke osnovne, opće poznate teoreme o nultočkama polinoma.

Teorem 1.0.3. *(Bezoutov teorem)*
Broj $\alpha \in \mathbb{C}$ *je nultočka polinoma* $p \in \mathbb{C}[x]$ *ako i samo ako je polinom* p *djeljiv polinomom* $q(x) = x - \alpha$.

Definicija 1.0.4. *Ako je polinom p djeljiv polinomom $q(x) = (x - \alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv polinomom $r(x) = (x - \alpha)^{k+1}$, onda kažemo da je $x = \alpha$ k-struka nultočka polinoma p, odnosno da je kratnost (višestrukost) nultočke $x = \alpha$ jednaka k.*

Teorem 1.0.5. *(Osnovni teorem algebre)*
Svaki polinom iz $\mathbb{C}[x]$ koji je barem prvog stupnja ima barem jednu nultočku u skupu kompleksnih brojeva.

Neke od posljedica Osnovnog teorema algebre su sljedeći teoremi.

Teorem 1.0.6. *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ n-tog stupnja može se na jedinstven način prikazati u obliku produkta n linearnih faktora.*
Točnije, ako je a_n vodeći koeficijent polinoma p, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nultočke od p, onda vrijedi

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Teorem 1.0.7. *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ n-tog stupnja, $n \geq 1$, ima točno n nultočaka ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njena kratnost.*

Teorem 1.0.8. *Neka je $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom n-tog stupnja. Tada postoje $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ i jedinstveni različiti $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ takvi da je*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r},$$

pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Teorem 1.0.9. *Ako je α nultočka polinoma p kratnosti $k \geq 2$, onda je α nultočka od p', i to kratnosti $k - 1$.*

Polinomi su holomorfne funkcije. Prisjetimo se da su holomorfne funkcije one funkcije koje su derivabilne i čija je derivacija neprekidna na domeni. Stoga navedimo još neke opće teoreme o holomorfnim funkcijama koje ćemo upotrebljavati u glavnom dijelu rada.

Teorem 1.0.10. *(Teorem o maksimumu modula) Neka je f nekonstantna i holomorfna na ograničenom području D i neprekidna na ∂D. Tada $|f|$ ne postiže svoj maksimum u unutrašnjoj točki od D, tj. maksimum se postiže na rubu od D.*

Lema 1.0.11. *[3] Neka je $p(z) = a_n z^n + a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$, pri čemu je $0 \leq m \leq n - 1$, polinom stupnja n s kompleksnim koeficijentima. Tada za svaki pozitivan realan broj r sve nultočke polinoma p leže u krugu $|z| \leq \max\left\{r, \sum_{k=0}^{m} \frac{|a_k|}{|a_n|\, r^{n-k-1}}\right\}$.*

Teorem 1.0.12. *(Jensenov teorem) Ako je funkcija f holomorfna na području D koje sadrži krug polumjera r oko 0 i $a_1, \cdots, a_n$ su nultočke funkcije f u tom krugu D te $f(0) \neq 0$, onda vrijedi*

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{|a_k|}{r}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Teorem 1.0.13. *[10, str. 171] Neka je f holomorfna funkcija, $f(0) \neq 0$ i $|f(z)| \leq M$ unutar $|z| \leq R$. Tada je broj nultočaka od f u krugu $|z| \leq dR, 0 < d < 1$ manji ili jednak od $\frac{1}{\log\frac{1}{d}} \cdot \log\frac{M}{|f(0)|}$.*

Dokaz se temelji na prethodno navedenom Jensenovom teoremu.

Dokaz. Neka je funkcija f holomorfna, $f(0) \neq 0$ i $|f(z)| \leq M$ unutar $|z| \leq 1$. Dokazujemo da je broj nultočaka od f u krugu $|z| \leq dR, 0 < d < 1$ manji ili jednak od $\frac{1}{\log\frac{1}{d}} \cdot \log\frac{M}{|f(0)|}$.

U krugu $|z| \leq R$ nultočke od f su $z_1, \cdots, z_N$. Neka su u krugu $|z| \leq dR, 0 \leq d \leq 1$ nultočke $z_1, \cdots, z_n$, $n \leq N$.
Prema Jensenovom teoremu, teorem 1.0.12, vrijedi:

$$-\sum_{k=1}^{N} \log\frac{|z_k|}{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \log|f(0)|. \tag{1.1}$$

Pogledajmo čemu je jednaka lijeva strana prethodne jednakosti:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{N} \log\frac{|z_k|}{R} &= -\left(\log\frac{|z_1|}{R} + \log\frac{|z_2|}{R} + \cdots + \log\frac{|z_N|}{R}\right) \\ &= -\log\left(\frac{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_N|}{R^N}\right) \\ &= \log\frac{R^N}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_N|}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nadalje, vrijedi:

$$\log\frac{R^n}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_n|} \leq \log\frac{R^N}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_N|}. \tag{1.3}$$

Naime, prethodna nejednakost je ekvivalentna tvrdnji

$$\log \frac{R}{|z_1|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_n|} \leq \log \frac{R}{|z_1|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_n|} + \log \frac{R}{|z_{n+1}|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_N|}.$$

Uočavamo da je suma prvih n članova na desnoj strani jednaka lijevoj strani pa dobivamo

$$0 \leq \log \frac{R}{|z_{n+1}|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_N|}.$$

Nultočke $z_{n+1}, \cdots z_N$ se nalaze u vijencu s polumjerima $d\,R$ i R. Stoga vrijedi $\frac{R}{|z_k|} \geq 1$ pa su pribrojnici desne strane prethodne nejednakosti pozitivni, odnosno, posljednja nejednakost je istinita tvrdnja. Ekvivalencijama smo došli do istinite tvrdnje, dakle, dokazali smo da tvrdnja (1.3) vrijedi.

Iz pretpostavke da su u krugu $|z| \leq d\,R, 0 \leq d \leq 1$ nultočke $z_1, \cdots, z_n$, $n \leq N$ slijedi da je $\frac{R}{|z_k|} \geq \frac{1}{d}$ za $k = 1, \cdots, n$. Odnosno,

$$\log \frac{R}{|z_k|} \geq \log \frac{1}{d}, \text{za}\, k = 1, \cdots, n$$

pa je

$$\log \frac{R}{|z_1|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_n|} \geq \log \frac{1}{d} + \cdots + \log \frac{1}{d},$$

tj. nakon što primijenimo svojstva logaritama dobivamo:

$$\log \frac{R^n}{|z_1| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_n|} \geq \log \left(\frac{1}{d}\right)^n.$$

Iz prethodne tvrdnje i tvrdnje (1.3) slijedi da je

$$\log \left(\frac{1}{d}\right)^n \leq \log \frac{R^N}{|z_1| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_n|}.$$

Uvrstimo li tu nejednakost i tvrdnju (1.2) u tvrdnju (1.1) dobivamo

$$\log \left(\frac{1}{d}\right)^n \leq \log \frac{R^N}{|z_1| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_n|} = -\sum_{k=1}^{N} \log \frac{|z_k|}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\theta}\right) \right| d\theta - \log |f(0)|.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{d}\right)^n &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \log|f(0)| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log M d\theta - \log|f(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \log M - \log|f(0)| \\
&= \log M - \log|f(0)|,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugom koraku iskoristili to da je $|f(z)| \leq M$ unutar $|z| \leq R$.

Odnosno, iskoristimo li svojstva logaritma dobivamo:

$$n \cdot \log\left(\frac{1}{d}\right) \leq \log\frac{M}{|f(0)|}.$$

Nakon što podijelimo posljednju nejednadžbu s $\log\frac{1}{d}$ dobivamo da je

$$n \leq \frac{1}{\log\frac{1}{d}} \cdot \log\frac{M}{|f(0)|},$$

a upravo to je tvrdnja koju smo i željeli dokazati. □

Lema 1.0.14. *(Schwarzova lema) Ako je* $f : K(0,1) \to K(0,1)$ *holomorfna funkcija takva da je* $f(0) = 0$, *tada je*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \textit{za sve} \quad z \in K(0,1).$$

Oznaku $K(z_1, r)$ koristimo kao oznaku za otvoreni krug radijusa r i središta z_1.

U upotrebi je često sljedeća generalizacija Schwarzove leme:

Lema 1.0.15. *Neka su* R_1 *i* R_2 *pozitivni realni brojevi.*
Ako je $f : K(0,R_1) \to K(0,R_2)$ *holomorfna funkcija takva da je* $f(0) = 0$, *tada je*

$$|f(z)| \leq \frac{R_2}{R_1}|z| \quad \textit{za sve} \quad z \in K(0,R_1).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju F ovako

$$F(z) := \frac{1}{R_2} f(R_1 z),\ z \in K(0,1).$$

Vrijedi:

$$|F(z)| = \frac{1}{R_2} |f(R_1 z)| \leq \frac{1}{R_2} \cdot R_2 = 1$$

pa je F funkcija sa $K(0,1)$ u $K(0,1)$ i ujedno je $F(0) = 0$.

Znači, F zadovoljava pretpostavku Schwarzove leme, lema 1.0.14.

Stoga je $|F(z)| \leq |z|$ za sve $z \in K(0,1)$.

Umjesto z stavimo $\frac{1}{R_1} z$ pri čemu $z \in K(0, R_1)$. Tada je

$$\left| F\left(\frac{z}{R_1}\right) \right| \leq \left| \frac{z}{R_1} \right| = \frac{1}{R_1} |z| \,. \tag{1.4}$$

Vratimo se u funkciju f:

$$\left| F\left(\frac{z}{R_1}\right) \right| = \left| \frac{1}{R_2} f\left(R_1 \frac{z}{R_1}\right) \right| = \left| \frac{1}{R_2} f(z) \right| = \frac{1}{R_2} |f(z)| \,. \tag{1.5}$$

Iz (1.4) i (1.5) slijedi da je $|f(z)| \leq \frac{R_2}{R_1} |z|$ za sve $z \in K(0, R_1)$. □

Još jedna generalizacija Schwarzove leme:

Lema 1.0.16. *Neka je p funkcija koja je holomorfna na jediničnom krugu, neka je $|p(z)| \leq M$ $(M > 0)$ za $|z| = 1$ te $p(0) = a$. Tada za $|z| < 1$ vrijedi:*

$$p(z) \leq M \frac{M|z| + |a|}{|a||z| + M}.$$

Lema 1.0.17. *[16, str. 325] Neka je p holomorfna funkcija unutar $|z| \leq R$, neka je $p(0) = 0$, $p'(0) = b$ te $|p(z)| \leq M$ za $|z| = R$. Tada za $|z| \leq R$ vrijedi*

$$|p(z)| \leq \frac{M|z|}{R^2} \frac{M|z| + R^2|b|}{M + |z||b|}.$$

Teorem 1.0.18. *(Bernsteinov teorem o maksimumu modula polinoma i njegove derivacije) Za polinom p stupnja n i njegovu derivaciju p' vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq n \cdot \max_{|z|=1} |p(z)| .$$

Korolar 1.0.19. *Neka je p polinom takav da su koeficijenti od p i njegove derivacije p' nenegativni brojevi. Neka je a pozitivan broj. Ako postoji pozitivna konstanta c takva da je*

$$\max_{|z|=a} |p'(z)| \leq c \cdot \max_{|z|=a} |p(z)| ,$$

tada je

$$p'(a) \leq cp(a).$$

Dokaz. Neka je $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$. Prema uvjetu korolara vrijedi: $a_n, \cdots, a_0 \geq 0$. Tada za z na kružnici $|z| = a$ vrijedi

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_n z^n + \cdots + a_0| \\ &\leq |a_n| \cdot |z|^n + \cdots + |a_0| \\ &= a_n \cdot a^n + \cdots + a_0 \\ &= p(a). \end{aligned}$$

Budući da to vrijedi za svaki z sa kružnice, slijedi da je

$$\max_{|z|=a} |p(z)| \leq p(a),$$

a budući da je točka a jedna od točaka skupa na kojemu tražimo maksimum i da je $p(a) = |p(a)|$ slijedi da u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost. Analogna tvrdnja vrijedi i za polinom p' te tvrdnja korolara slijedi iz tih jednakosti. □

Sljedeća je lema jedna od modifikacija Bernsteinovog teorema o maksimumu modula polinoma i njegove derivacije.

Lema 1.0.20. *[5] Neka je p polinom stupnja $n \geq 1$. Tada vrijedi*

$$\max_{|z|=R} |P'(z)| \leq \frac{n}{R} \max_{|z|=R} |P(z)| .$$

Poglavlje 2

Eneström-Kakeyin teorem

2.1 Rezultati koji su prethodili Eneström-Kakeyinom teoremu

Proučavanje nultočaka polinoma ima jako bogatu povijest. Datira iz vremena kada je otkrivena geometrijska interpretacija kompleksnih brojeva. Među osobama koje su pridonijele toj temi ističu se Gauss i Cauchy.

Gauss je 1816. godine, prilikom otkrivanja druga dva [1] dokaza Osnovnog teorema algebre, dokazao sljedeće (pogledati [9]):

Teorem 2.1.1. *Ako je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s realnim koeficijentima, onda se sve nultočke polinoma p nalaze unutar*

$$|z| \leq R = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ \left(n\sqrt{2}\,|a_k| \right)^{\frac{1}{k}} \right\}.$$

Godine 1849. pokazao je da se, za proizvoljne realne ili kompleksne koeficijente, R može dobiti kao pozitivno rješenje jednadžbe

$$z^n - \sqrt{2}\left(|a_{n-1}|\, z^{n-1} + \cdots + |a_0| \right) = 0.$$

Cauchy je unaprijedio Gaussov rezultat iz Teorema 2.1.1 (pogledati [4], [15]) i dokazao:

[1] Gauss se dokazivanjem osnovnog teorema algebre bavio pedeset godina te je ponudio četiri različita dokaza.

Teorem 2.1.2. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s kompleksnim koeficijentima, onda se (sve) nultočke polinoma p nalaze unutar*

$$|z| \leq 1 + \max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|.$$

Uočimo da ni Teorem 2.1.1 ni Teorem 2.1.2 ne sadrže nikakve restrikcije na koeficijente polinoma p (osim restrikcije da su koeficijenti realni, odnosno, kompleksni brojevi).

Zanimljivo je vidjeti što se može reći o položaju nultočaka polinoma ukoliko se na njegove koeficijente postave neke restrikcije. U ovom radu promatrat ćemo situacije kad su koeficijenti polinoma realni brojevi koji čine rastući niz ili čine niz koji prvo do nekog člana raste, a zatim pada. Jedan od prvih rezultata tog tipa pojavio se prije više od sto godina i danas je poznat pod nazivom Eneström-Kakeyin teorem.

2.2 Eneström-Kakeyin teorem

Eneström-Kakeyin teorem glasi:

Teorem 2.2.1. *(Eneström-Kakeyin teorem) Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s realnim koeficijentima za koje vrijedi*

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n, \tag{2.1}$$

onda sve nultočke polinoma p pripadaju krugu $|z| \leq 1$.

Dokaz. [17] Promotrimo prvo sljedeći umnožak:

$$\begin{aligned} p(z)(1-z) &= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)(1-z) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z - a_1 z^2 - a_2 z^3 - \cdots - a_{n-1} z^n - a_n z^{n+1} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) z + (a_2 - a_1) z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z^{n-1} + (a_n - a_{n-1}) z^n - a_n z^{n+1}. \end{aligned}$$

Potom definirajmo funkciju f, pomoću posljednje jednakosti, na sljedeći način:

$$p(z)(1-z) = f(z) - a_n z^{n+1}. \tag{2.2}$$

Dakle, $f(z) = a_0 + (a_1 - a_0) z + (a_2 - a_1) z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z^{n-1} + (a_n - a_{n-1}) z^n$.

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|f(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|a_0 + (a_1 - a_0) z + (a_2 - a_1) z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z^{n-1} + (a_n - a_{n-1}) z^n\right| \\ &\leq |a_0| + |a_1 - a_0|\,|z| + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}|\,|z|^{n-1} + |a_n - a_{n-1}|\,|z|^n \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)\,|z| + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\,|z|^{n-1} + (a_n - a_{n-1})\,|z|^n\,, \end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti iskoristili pretpostavku teorema. Specijalno, ako je $|z| = 1$, onda se izraz u posljednjem retku svodi na

$$a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}),$$

odnosno

$$a_n$$

pa za $|z| = 1$, vrijedi $|f(z)| \leq a_n$.

Promotrimo sada funkciju $z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$:

$$\begin{aligned} z^n f\left(\frac{1}{z}\right) &= z^n \left(a_0 + (a_1 - a_0)\frac{1}{z} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + (a_n - a_{n-1})\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) \\ &= a_0 z^n + (a_1 - a_0) z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z + (a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Argumentacijom analognom kao i kod $|f(z)| \leq a_n$, za $|z| = 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \left|z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right| &= \left|a_0 z^n + (a_1 - a_0) z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z + (a_n - a_{n-1})\right| \\ &\leq |a_0|\,|z|^n + |a_1 - a_0|\,|z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}|\,|z| + |a_n - a_{n-1}| \\ &= a_0\,|z|^n + (a_1 - a_0)\,|z|^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\,|z| + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Odnosno, za $|z| = 1$, vrijedi $\left|z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq a_n$.

Prema Teoremu o maksimumu modula, teorem 1.0.10, vrijedi $\left|z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq a_n$ i za $|z| \leq 1$. Stoga vrijedi $\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{a_n}{|z|^n}$, za $|z| \leq 1$.

Zamjenimo li z sa $\frac{1}{z}$ u prethodnom izrazu dobivamo:

$$|f(z)| \leq \frac{a_n}{\left|\frac{1}{z}\right|^n}, \text{ za} \left|\frac{1}{z}\right| \leq 1,$$

iz čega, nakon što primijenimo svojstva apsolutne vrijednosti, slijedi da je

$$|f(z)| \leq a_n\,|z|^n\,, \text{ za } |z| \geq 1. \tag{2.3}$$

Promotrimo sada apsolutnu vrijednost izraza (2.2) za $|z| \geq 1$:

$$\begin{aligned} |p(z)(1-z)| &= \left|f(z) - a_n z^{n+1}\right| \\ &\geq \left||f(z)| - \left|a_n z^{n+1}\right|\right| \\ &= \left|a_n z^{n+1}\right| - |f(z)| \\ &\geq a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^n \\ &= a_n |z|^n (|z| - 1). \end{aligned}$$

U prvom smo koraku iskoristili svojstvo apsolutne vrijednosti.
U trećem koraku smo najprije iskoristili tvrdnju (2.3), tj. iskoristili smo da je $|f(z)| - \left|a_n z^{n+1}\right| \leq a_n |z|^n - a_n |z|^{n+1}$. Izlučivanjem $a_n |z|^n$ iz prethodnog izraza dobili smo umnožak $a_n |z| (1 - |z|)$ kojemu je drugi faktor, za $|z| \geq 1$, manji ili jednak 0. Odnosno, cijeli umnožak je manji ili jednak 0. Stoga je $\left||f(z)| - \left|a_n z^{n+1}\right|\right|$ jednako $\left|a_n z^{n+1}\right| - |f(z)|$.
Iz tvrdnje (2.3) slijedi da je $-|f(z)| \geq -a_n |z|^n$, nakon čega smo, pribrajanjem $a_n |z|^{n+1}$ cijeloj nejednakosti, dobili da je $a_n |z|^{n+1} - |f(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^n$. Upravo to smo iskoristili u pretposljednjem koraku.

Dakle,

$$|p(z)(1-z)| \geq a_n |z|^n (|z| - 1), \text{ za } |z| \geq 1. \tag{2.4}$$

Promotrimo što se događa s izrazom (2.4) ukoliko je $|z|$ strogo veći od 1.
Za $|z| > 1$ desna strana nejednakosti u (2.4) je strogo veća od 0 budući da su svi faktori u umnošku strogo veći od 0. Odnosno, $p(z)(1-z) \neq 0$ pa specijalno vrijedi i $p(z) \neq 0$. Zaključujemo da z za koji vrijedi $|z| > 1$ ne mogu biti nultočke polinoma, odnosno, za nultočke polinoma p mora vrijediti $|z| \leq 1$.

Dokazali smo da ako je $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ polinom stupnja n s realnim koeficijentima za koje vrijedi $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$, onda za nultočke polinoma p mora vrijediti $|z| \leq 1$. Time je dokaz Teorema 2.2.1 gotov. □

Čini se da je Gustaf Hjalmar Eneström [2] prvi dobio rezultate ove vrste i to kada je proučavao matematičke probleme vezane uz mirovinske fondove. Svoje rezultate je objavio 1893. godine u švedskom znanstvenom časopisu Öfversigt af Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar (pogledati [11]), a zatim ponovno spomenuo u izdanjima 1893.-1894. i 1895. godine.
Sōichi Kakeya [3] je 1912. godine u japanskom znanstvenom časopisu Tôhoku Mathematical Journal objavio rad (pogledati [18]) na engleskom jeziku koji je sadržavao općenitiju tvrdnju:

[2]Gustaf Hjalmar Eneström, (Nora, 1852. - Stockholm, 1923.), švedski matematičar.
[3]Sōichi Kakeya, (Fukayasu, 1886. - 1947.), japanski matematičar.

Teorem 2.2.2. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s realnim, pozitivnim koeficijentima, onda se sve nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $R_1 \leq |z| \leq R_2$, pri čemu je $R_1 = \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \dfrac{a_j}{a_{j+1}}$ i $R_2 = \max\limits_{0 \leq j \leq n-1} \dfrac{a_j}{a_{j+1}}$.*

U posljednjim redcima svoga rada, Kakeya je spomenuo da iz pretpostavke monotonosti koeficijenata u teoremu 2.2.1 slijedi da sve nultočke polinoma p leže unutar $|z| \leq 1$. Rad nije sadržavao literaturu i čini se da Kakeya nije bio upoznat s Eneströmovim rezultatima. Barem još tri rada, koji su objavljeni tijekom 1912. i 1913. godine u Tôhoku Mathematical Journal, u kojima se spominje Kakeyin rad, svjedoče o tome koliko je on bio zamijećen. Jedan rad je napisan na njemačkom jeziku, a dva, čiji je autor Tsuruichi Hayashi [4] na engleskom (pogledati [19], [20]). Hayashi je zasigurno saznao za Eneströmovo ranije otkriće te ga je potaknuo da isto i objavi u ranije spomenutom japanskom znanstvenom časopisu. Stoga, 1920. godine, u Tôhoku Mathematical Journal, Eneström objavljuje doslovni prijevod svoga rada iz 1893. godine na francuskom jeziku (pogledati [12]).

Dakle, Eneström je prvi objavio dokaz Teorema 2.2.1 i to godine 1893. Međutim, i Kakeya je samostalno, ne znajući za Enestromöv dokaz, dokazao teorem te ga 1912. godine objavio. Upravo iz tog razloga se navedeni teorem naziva Eneström-Kakeyin teorem.

[4] Tsuruichi Hayashi, (Tokushima, 1873. – 1935.), japanski matematičar.

Poglavlje 3

Generalizacije Eneström-Kakeyinog teorema

3.1 Polinomi čiji koeficijenti čine rastući niz

A. Joyal [1], G. Labelle [2] i Q.I. Rahman [3] sljedećim su rezultatom proširili Eneström-Kakeyin teorem na polinome čiji koeficijenti čine rastući niz, ali nisu nužno nenegatvni.

Teorem 3.1.1. *Ako za koeficijente polinoma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ vrijedi*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0,$$

onda se nultočke polinoma p nalaze u krugu

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Dokaz. [7] Označimo sa D polumjer kruga, tj.

$$D = \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Dokažimo da je $D \geq 1$ ako je $a_n \geq a_0$.
Razlikujemo tri slučaja: (1) $a_n < 0, a_0 \leq 0$; (2) $a_n > 0, a_0 \geq 0$; (3) $a_n > 0, a_0 < 0$.

(1) Ako je $a_n < 0$ i $a_0 \leq 0$, onda je $|a_0| = -a_0, |a_n| = -a_n$ i vrijedi:

$$D = \frac{a_n - a_0 - a_0}{-a_n} = \frac{a_n - 2a_0}{-a_n}.$$

[1] André Joyal, (Drummondville, 1943.), kanadski matematičar. Trenutno radi na: Université du Québec à Montréal, Kanada.

[2] Gilbert Labelle, (Longueuil, 1944.), kanadski matematičar.

[3] Qazi Ibadur Rahman, (Deoria, 1934. -Montréal, 2013.), kanadski matematičar.

Budući da je $a_n \geq a_0$, slijedi da je

$$\begin{aligned} 2a_n &\geq 2a_0 \\ -2a_0 &\geq -2a_n \\ a_n - 2a_0 &\geq a_n - 2a_n \\ a_n - 2a_0 &\geq -a_n \\ \frac{a_n - 2a_0}{-a_n} &\geq 1, \end{aligned}$$

tj. $D \geq 1$.

(2) Ako je $a_n > 0$ i $a_0 \geq 0$, onda je $D = \dfrac{a_n - a_0 + a_0}{a_n} = 1$.

(3) Ako je $a_n > 0, a_0 < 0$, onda je $D = \dfrac{a_n - a_0 - a_0}{a_n} = \dfrac{a_n - 2a_0}{a_n}$ i imamo niz nejednakosti

$$\begin{aligned} a_0 &< 0 \\ 2a_0 &< 0 \\ -2a_0 &> 0 \\ a_n - 2a_0 &> a_n \\ \frac{a_n - 2a_0}{a_n} &> 1, \end{aligned}$$

što znači da je $D > 1$.

U sva tri slučaja smo pokazali da je $D \geq 1$.

Promotrimo sada umnožak:

$$\begin{aligned} p(z)(1-z) &= \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right)(1-z) \\ &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 - a_n z^{n+1} - a_{n-1} z^n - \cdots - a_1 z^2 - a_0 z \\ &= (a_n - a_{n-1}) z^n + (a_{n-1} - a_{n-2}) z^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0) z + a_0 - a_n z^{n+1} \\ &= -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k + a_0. \end{aligned}$$

Potom definirajmo funkciju ϕ, pomoću posljednje jednakosti, na sljedeći način:

$$p(z)(1-z) = -a_n z^{n+1} + \phi(z). \tag{3.1}$$

Dakle,

$$\phi(z) = (a_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)z + a_0.$$

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|\phi(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &= \left|(a_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)z + a_0\right| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}|\,|z|^n + |a_{n-1} - a_{n-2}|\,|z|^{n-1} \cdots + |a_1 - a_0|\,|z| + |a_0|\,. \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $|z| = 1$, onda se izraz u posljednjem retku svodi na

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_1 - a_0| + |a_0|\,,$$

što je, nakon što iskoristimo pretpostavku teorema, jednako

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_1 - a_0 + |a_0|\,,$$

odnosno

$$a_n - a_0 + |a_0|\,.$$

Dakle, za $|z| = 1$, vrijedi $|\phi(z)| = a_n - a_0 + |a_0|\,.$

Također, za $|z| = 1$, vrijedi $\left|z^n\phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq a_n - a_0 + |a_0|\,.$

Da bismo to dokazali, najprije ćemo promotriti funkciju $z^n\phi\left(\frac{1}{z}\right)$:

$$\begin{aligned} z^n\phi\left(\frac{1}{z}\right) &= z^n\left((a_n - a_{n-1})\left(\frac{1}{z}\right)^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)\left(\frac{1}{z}\right) + a_0\right) \\ &= a_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})z + \cdots + (a_1 - a_0)z^{n-1} + a_0z^n. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \left|z^n\phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| &= \left|a_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})z + \cdots + (a_1 - a_0)z^{n-1} + a_0z^n\right| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}|\,|z| + \cdots + |a_1 - a_0|\,|z|^{n-1} + |a_0|\,|z|^n\,. \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $|z| = 1$, onda se izraz u posljednjem retku svodi na

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_1 - a_0| + |a_0|\,.$$

Ako potom iskoristimo pretpostavku teorema, onda je posljednji izraz jednak

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_1 - a_0 + |a_0|\,,$$

odnosno,

$$a_n - a_0 + |a_0|\,.$$

Budući da je funkcija $z^n \phi\left(\frac{1}{z}\right)$ analitička unutar $|z| \leq 1$, prema Teoremu o maksimumu modula, Teorem 1.0.10, vrijedi $\left|z^n \phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq a_n - a_0 + |a_0|$ i za $|z| \leq 1$.

Odnosno, za $|z| \leq 1$ vrijedi

$$\left|\phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|z|^n}.$$

Zamjenimo li z sa $\frac{1}{z}$ u prethodnom izrazu dobivamo:

$$|\phi\,(z)| \leq (a_n - a_0 + |a_0|)\,|z|^n\,, \text{ za } |z| \geq 1. \tag{3.2}$$

Želimo dokazati da su sve nultočke polinoma p u krugu polumjera D.
Promotrimo što znamo o točkama izvan tog kruga.

Neka je $z \in \mathbb{C}$ takva da je $|z| > D$. Budući da je $D \geq 1$, slijedi da je $|z| \geq 1$.
Pomnožimo li $D < |z|$ sa $|z|^n \neq 0$ i $|a_n|$ dobivamo:

$$|a_n|\,D\,|z|^n < |a_n|\,|z|^{n+1}\,,$$

odnosno

$$(a_n - a_0 + |a_0|)\,|z|^n < |a_n|\,|z|^{n+1}\,.$$

Budući da prema (3.2) vrijedi $(a_n - a_0 + |a_0|)\,|z|^n \geq |\phi(z)|$ dobivamo da je

$$|\phi(z)| < |a_n|\,|z|^{n+1}\,, \tag{3.3}$$

tj.

$$|a_n|\,|z|^{n+1} - |\phi(z)| > 0.$$

Primijenimo li najprije svojstvo apsolutne vrijednosti $|a-b| \geq ||a|-|b||$, a potom i tvrdnju (3.3) na izraz (3.1) dobivamo:

$$|p(z)(1-z)| = \left|-a_n z^{n+1} + \phi(z)\right| \geq |a_n|\,|z|^{n+1} - |\phi(z)| > 0.$$

Dakle, za $|z| > D$ vrijedi $p(z)(1-z) \neq 0$, a kako je i $|z| > 1$ slijedi da je i $p(z) \neq 0$, tj. polinom p nema nultočaka u području $|z| > D$. To znači da sve nultočke mora imati u krugu $|z| \leq D$.

Time je dokaz teorema 3.1.1 gotov. □

Uočimo da se za $a_0 \geq 0$ ovaj rezultat svodi na Eneström-Kakeyin teorem.

K. K. Dewan [4] i N. K. Govil [5] su dokazali da krug iz prethodnog teorema može biti zamijenjen kružnim vijencem s manjim vanjskim polumjerom. Stoga sljedeći rezultat u nekim slučajevima može dati preciznije rezultate, a u to ćemo se i uvjeriti nakon dokaza samog teorema.

Teorem 3.1.2. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja $n \geq 1$ takav da vrijedi*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0.$$

Tada se sve nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu (možda degeneriranom)

$$R_2 \leq |z| \leq R_1, \tag{3.4}$$

s polumjerima

$$R_1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right) + \sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right)^2 + \frac{M_1}{|a_n|}},$$

$$R_2 = \frac{1}{2{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2 {M_2}^3}\right],$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} M_1 &= a_n - a_0 + |a_0|\,, \\ M_2 &= {R_1}^n\left(|a_n|\,R_1 + a_n - a_0\right), \\ c &= a_n - a_{n-1}, \\ b &= a_1 - a_0. \end{aligned}$$

[4]Kum Kum Dewan, (New Delhi, 1950.), indijska matematičarka. Trenutno radi na: Jamia Millia Islamia, India.

[5]Narendra Kumar Govil, (Aligarh, 1940.), indijski matematičar. Trenutno radi na: Auburn University, SAD.

Štoviše, vrijedi

$$0 \leq R_2 \leq 1 \leq R_1 \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}. \tag{3.5}$$

Dokaz. [14] Najprije ćemo dokazati tvrdnju (3.5), a budući da ćemo pri tom dokazu koristiti nekoliko pomoćnih tvrdnji, iste ćemo odmah i dokazati.
Najprije, vrijedi

$$M_1 \geq |a_n|\,. \tag{3.6}$$

Naime, $M_1 = a_n - a_0 + |a_0|$, stoga dokazujemo $a_n - a_0 + |a_0| \geq |a_n|$. Razlikujemo tri slučaja ovisno o predznaku koeficijenata a_n i a_0 : (1) $a_n > 0$, $a_0 \geq 0$; (2) $a_n < 0$, $a_0 < 0$; (3) $a_n > 0$, $a_0 \leq 0$. Slučaj $a_n < 0$, $a_0 \geq 0$ nije moguć budući da po pretpostavci vrijedi $a_n \geq a_0$.

(1) Ako je $a_n > 0$ i $a_0 \geq 0$, tada je $|a_n| = a_n$ i $|a_0| = a_0$. Stoga iz istinite tvrdnje $a_n - a_0 \geq a_n - a_0$ slijedi $a_n - a_0 \geq |a_n| - |a_0|$ što je i trebalo dokazati.

(2) Ako je $a_n < 0$ i $a_0 < 0$ tada je $|a_n| = -a_n$ i $|a_0| = -a_0$. Prema pretpostavci teorema je $a_n \geq a_0$, pa je $2a_n \geq 2a_0$. To napišemo ovako: $a_n - a_0 \geq -a_n + a_0$ i upotrijebimo da je $|a_n| = -a_n$ i $|a_0| = -a_0$ te dobivamo $a_n - a_0 \geq |a_n| - |a_0|$.

(3) Ako je $a_n > 0$ i $a_0 \leq 0$, tada je $|a_0| = -a_0$. Budući da je $-a_0 \geq a_0$, slijedi da je $a_n - a_0 \geq a_n + a_0$, tj. $a_n - a_0 \geq |a_n| - |a_0|$.

Dakle, u sva tri slučaja smo dokazali da vrijedi tvrdnja (3.6).

Također, vrijedi:

$$(M_1 - c)\,(M_1 - |a_n|) \geq 0. \tag{3.7}$$

Iz tvrdnje (3.6) slijedi da je $M_1 - |a_n| \geq 0$. Dakle, potrebno je još dokazati da je prvi faktor umnoška iz prethodne nejednakosti nenegativan. Prema pretpostavci je $M_1 = a_n - a_0 + |a_0|$ i $c = a_n - a_{n-1}$ stoga je $M_1 - c = a_{n-1} - a_0 + |a_0|$. Uočavamo da je razlika prva dva pribrojnika nenegativna budući da je po pretpostavci $a_{n-1} \geq a_0$. Očito je i treći pribrojnik nenegativan pa je i cijeli zbroj nenegativan. Dakle, dokazali smo tvrdnju (3.7).

Krenimo s dokazom tvrdnje (3.5), dokažimo da vrijedi

$$R_1 \geq 1, \tag{3.8}$$

odnosno

$$\frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)+\sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)^2+\frac{M_1}{|a_n|}}\geq 1.$$

Ta je tvrdnja ekvivalentna sljedećoj

$$\sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)^2+\frac{M_1}{|a_n|}}\geq 1-\frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right). \tag{3.9}$$

Uočavamo da je lijeva strana nejednakosti nenegativna, a sada ćemo dokazati da je također i desna. Naime, svedemo li pribojnike desne strane prethodne nejednadžbe na zajednički nazivnik dobivamo $\frac{2\,|a_n|\,M_1-cM_1+c\,|a_n|}{2\,|a_n|\,M_1}$. Nazivnik razlomka je pozitivan budući da je, prema (3.6), $M_1>0$ pa je i cijeli umnožak $2\,|a_n|\,M_1$ pozitivan.

Promotrimo sada brojnik razlomka. Uočavamo da vrijedi $2\,|a_n|\,M_1-cM_1+c\,|a_n|\geq 2|a_n|^2-c|a_n|+c|a_n|$ što je jednako $2|a_n|^2$, odnosno pozitivno je. Dakle, i brojnik je pozitivan pa zaključujemo da je $\frac{2\,|a_n|\,M_1-cM_1+c\,|a_n|}{2\,|a_n|\,M_1}>0$. Time smo dokazali da je desna strana nejednakosti u (3.9) nenegativna.

Sada, kvadriramo li nejednakost iz (3.9) dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)^2+\frac{M_1}{|a_n|}\geq 1-2\frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)+\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)^2,$$

odnosno

$$\frac{M_1}{|a_n|}\geq\frac{|a_n|M_1-cM_1+c|a_n|}{|a_n|M_1}.$$

Pomnožimo li nejednakost sa $|a_n|M_1>0$ dobivamo ${M_1}^2\geq M_1\,(|a_n|-c)+c|a_n|$, tj. ${M_1}^2-M_1\,(|a_n|-c)-c|a_n|\geq 0$ što je istinita tvrdnja.
Naime, iskoristimo li da je $M_1\geq|a_n|$ dobivamo ${M_1}^2-M_1\,(|a_n|-c)-c|a_n|\geq|a_n|^2-|a_n|\,(|a_n|-c)-c|a_n|$ što je jednako 0.
Dakle, ekvivalencijama smo došli do istinite tvrdnje, odnosno dokazali smo da vrijedi tvrdnja (3.8).

Nadalje, vrijedi

$$R_1\leq\frac{a_n-a_0+|a_0|}{|a_n|}, \tag{3.10}$$

odnosno

$$\frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)+\sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|}-\frac{1}{M_1}\right)^2+\frac{M_1}{|a_n|}}\leq\frac{a_n-a_0+|a_0|}{|a_n|}.$$

Prethodna nejedankost je ekvivalentna sljedećoj

$$\frac{c\,(M_1-|a_n|)}{2|a_n|M_1}+\frac{\sqrt{c^2(M_1-|a_n|)^2+4|a_n|{M_1}^3}}{2|a_n|M_1}\leq\frac{M_1}{|a_n|}.$$

Pomnožimo li cijelu nejednakost sa $2|a_n|M_1>0$ dobivamo:

$$c\,(M_1-|a_n|)+\sqrt{c^2(M_1-|a_n|)^2+4|a_n|{M_1}^3}\leq 2{M_1}^2,$$

odnosno

$$\sqrt{c^2(M_1-|a_n|)^2+4|a_n|{M_1}^3}\leq 2{M_1}^2-c\,(M_1-|a_n|)\,. \tag{3.11}$$

Uočavamo da je lijeva strana nejednakosti nenegativna, a sada ćemo dokazati da je također i desna. Naime, vrijedi $2{M_1}^2-cM_1+c|a_n|\geq 2|a_n|^2-c|a_n|+c|a_n|$ što je jednako $2|a_n|^2$, odnosno, pozitivno je. Dakle, desna strana nejednakosti u (3.11) je nenegativna.

Sada, kvadriramo li nejednakost iz (3.11) dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$c^2(M_1-|a_n|)^2+4|a_n|{M_1}^3\leq 4{M_1}^4-4{M_1}^2c\,(M_1-|a_n|)+c^2(M_1-|a_n|)^2,$$

odnosno

$$|a_n|{M_1}^3\leq {M_1}^4-{M_1}^2c\,(M_1-|a_n|)\,.$$

Podijelimo li nejednakost s ${M_1}^2>0$ dobivamo

$$|a_n|M_1\leq {M_1}^2-c\,(M_1-|a_n|)$$

što je jednako

$$M_1\,(M_1-|a_n|)-c\,(M_1-|a_n|)\geq 0,$$

odnosno

$$(M_1-c)\,(M_1-|a_n|)\geq 0.$$

Dobili smo tvrdnju (3.7) koju smo prethodno dokazali.
Ekvivalencijama smo došli do istinite tvrdnje, dakle, vrijedi tvrdnja (3.10).

U dokazu tvrdnje (3.5) je preostalo još dokazati da vrijedi $0 \leq R_2 \leq 1$ što ćemo napraviti naknadno, nakon dokaza tvrdnje (3.4).

Dokažimo sada tvrdnju (3.4).
Promotrimo najprije polinom g definiran kao umnožak polinoma $1 - z$ i p:

$$\begin{aligned} g(z) &= (1-z)p(z) \\ &= (1-z)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\right) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z - a_1 z^2 - a_2 z^3 - \cdots - a_{n-1}z^n - a_n z^{n+1} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1} \\ &= -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, z^k + a_0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Potom definirajmo polinom r, pomoću posljednje jednakosti, na sljedeći način:

$$g(z) = -a_n z^{n+1} + r(z). \tag{3.13}$$

Dakle,

$$r(z) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, z^k + a_0.$$

Nadalje, neka je $q(z) = z^n r\left(\frac{1}{z}\right)$.
Najprije,

$$r\left(\frac{1}{z}\right) = (a_1 - a_0)\frac{1}{z} + (a_2 - a_1)\frac{1}{z^2} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z^{n-1}} + (a_n - a_{n-1})\frac{1}{z^n} + a_0$$

pa je

$$q(z) = z^n\left((a_1 - a_0)\frac{1}{z} + (a_2 - a_1)\frac{1}{z^2} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z^{n-1}} + (a_n - a_{n-1})\frac{1}{z^n} + a_0\right).$$

Odnosno,

$$q(z) = a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^{n-k}.$$

Dokažimo sada da vrijedi

$$|q(z)| \leq M_1 \quad \text{za} \quad |z| = 1. \tag{3.14}$$

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|q(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |q(z)| &= \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right| \\ &\leq |a_0||z|^n + |a_1 - a_0||z|^{n-1} + |a_2 - a_1||z|^{n-2} + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}||z| + |a_n - a_{n-1}|. \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $|z| = 1$, onda se izraz u posljednjem retku svodi na

$$|a_0| + |a_1 - a_0| + |a_2 - a_1| + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_n - a_{n-1}|,$$

što je, nakon što iskoristimo pretpostavku teorema, jednako

$$|a_0| + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1},$$

odnosno

$$a_n - a_0 + |a_0|,$$

a to je upravo jednako M_1.
Dakle, dokazali smo da vrijedi tvrdnja (3.14). Uz to je $M_1 \geq 0$ te $q(0) = a_n - a_{n-1} = c$, dakle, zadovoljene su pretpostavke leme 1.0.16. Stoga vrijedi

$$q(z) \leq M_1 \frac{M_1|z| + c}{c|z| + M_1} \quad \text{za} \quad |z| < 1.$$

Za $|z| = 1$ imamo $q(z) \leq M_1 = M_1 \dfrac{M_1|z| + c}{c|z| + M_1}$, pa za sve z, $|z| \leq 1$ vrijedi

$$q(z) \leq M_1 \frac{M_1|z| + c}{c|z| + M_1}.$$

Dakle, vrijedi

$$\left| z^n r\left(\frac{1}{z}\right) \right| = |q(z)| \leq M_1 \frac{M_1|z| + c}{c|z| + M_1} \quad \text{za} \quad |z| \leq 1.$$

Zamjenom z sa $\frac{1}{z}$ dobivamo da za $|z| \geq 1$ vrijedi:

$$\frac{1}{|z|^n} |r(z)| \leq M_1 \frac{M_1 \frac{1}{|z|} + c}{c \frac{1}{|z|} + M_1},$$

odnosno vrijedi

$$|r(z)| \leq M_1 |z|^n \frac{M_1 + c|z|}{c + M_1|z|} \quad \text{za} \quad |z| > 1. \tag{3.15}$$

Dokažimo sada da za $|z| = R > 1$ vrijedi

$$|g(z)| > 0 \tag{3.16}$$

ako $R > R_1$.

Prema (3.13) vrijedi: $a_n z^{n+1} = r(z) - g(z)$.
Kada na to djelujemo s apsolutnom vrijednosti dobivamo:

$$|a_n||z|^{n+1} \leq |r(z)| + |g(z)|,$$

tj.

$$|g(z)| \geq |a_n||z|^{n+1} - |r(z)|.$$

Uvrstimo li u to $|z| = R > 1$ i iskoristimo tvrdnju (3.15) dobivamo:

$$|g(z)| \geq |a_n| R^{n+1} - M_1 R^n \frac{M_1 + R(a_n - a_{n-1})}{M_1 R + (a_n - a_{n-1})},$$

odnosno

$$|g(z)| \geq |a_n| R^{n+1} - M_1 R^n \frac{M_1 + cR}{M_1 R + c}.$$

Svedemo li najprije desnu stranu nejednakosti na zajednički nazivnik, a potom izlučimo zajednički faktor $\dfrac{R^n}{M_1R+c}$ dobivamo:

$$|g(z)| \geq \frac{R^n}{M_1R+c}\Big(M_1|a_n|R^2 - cR\,(M_1 - |a_n|) - {M_1}^2\Big).$$

Sada ćemo dokazati da je desna strana prethodne nejednakosti veća od 0 za $R > R_1$, odnosno da vrijedi tvrdnja (3.16).

Promatramo $\dfrac{R^n}{M_1R+c}\left(M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1 - |a_n|)\,R - {M_1}^2\right)$.

Prvi faktor je pozitivan budući da je $R > 1$, zatim po pretpostavci vrijedi $c \geq 0$ te prema tvrdnji (3.6) vrijedi $M_1 > 0$.

Dakle, potrebno je još dokazati da je $M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1 - |a_n|)\,R - {M_1}^2 > 0$ za $R > R_1$. Promotrimo pripadnu kvadratnu jednadžbu $M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1 - |a_n|)\,R - {M_1}^2 = 0$. Njen graf je parabola okrenuta prema gore, a rješenja su:

$$R_{1',2'} = \frac{c\,(M_1 - |a_n|) \pm \sqrt{c^2(M_1 - |a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}}{2M_1|a_n|}.$$

Funkcija je pozitivna ako je $R > R_{2'}$, pri čemu je $R_{2'}$ ono rješenje u kojem je znak ispred korijena $+$.

Kvadratna nejednadžba je pozitivna i za $R < R_{1'}$. Međutim budući da je korijen iz pripadne diskriminante veći od izraza $c\,(M_1 - |a_n|)$ od kojega se oduzima, onda je i cijeli razlomak, odnosno $R_{1'}$ je negativan, dok je $R > 1$. Dakle, takvih $R - ova$ nema.

Sada ćemo dokazati da je $R_{2'} = R_1$. Naime,

$$\begin{aligned}
R_{2'} &= \frac{c\,(M_1 - |a_n|) + \sqrt{c^2(M_1 - |a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}}{2M_1|a_n|} \\
&= \frac{c\,(M_1 - |a_n|)}{2M_1|a_n|} + \sqrt{\frac{c^2(M_1 - |a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}{4{M_1}^2|a_n|^2}} \\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right) + \sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right)^2 + \frac{M_1}{|a_n|}} \\
&= R_1.
\end{aligned}$$

Dakle, za $|z| = R > R_1$, vrijedi $|g(z)| > 0$. Odnosno, nultočke polinoma g se ne nalaze unutar $|z| > R_1$, nalaze se unutar $|z| \leq R_1$.

Polinomi g i p su povezani formulom $g(z) = (1 - z)p(z)$ pa su nultočke polinoma g sve nultočke polinoma p i dodatno još jedna $z = 1$. Dakle, nultočke polinoma p se nalaze unutar kruga polumjera R_1.

Dokažimo da polinom p nema nultočaka unutar $|z| < R_2$, tj. da za nultočke polinoma p vrijedi $|z| \geq R_2$.

Definirajmo polinom f, pomoću tvrdnje (3.12), na sljedeći način:

$$g(z) = f(z) + a_0. \tag{3.17}$$

Dakle,

$$f(z) = -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, z^k. \tag{3.18}$$

Dokažimo sada da vrijedi

$$|f(z)| \leq M_2 \quad \text{za} \quad |z| \leq R_1. \tag{3.19}$$

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|f(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, z^k \right| \\ &\leq |a_n||z|^{n+1} + |a_1 - a_0||z| + |a_2 - a_1||z|^2 + \cdots + |a_n - a_{n-1}||z|^n \end{aligned}$$

što je, nakon što iskoristimo pretpostavku teorema, jednako

$$|a_n||z|^{n+1} + (a_1 - a_0)|z| + (a_2 - a_1)|z|^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^n.$$

Specijalno, ako je $|z| \leq R_1$, onda je izraz u posljednjem retku manji ili jednak od

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + (a_1 - a_0)R_1 + (a_2 - a_1){R_1}^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1}){R_1}^n$$

što je pak manje ili jednako od

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + {R_1}^n\, (a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1})\,.$$

Izraz u prethodnom retku jednak je

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + {R_1}^n(a_n - a_0), \tag{3.20}$$

odnosno, nakon što izlučimo zajednički faktor ${R_1}^n$

$${R_1}^n\left(|a_n|R_1 + a_n - a_0\right),$$

a to je upravo jednako M_2.

Dakle, dokazali smo da za $|z| \leq R_1$ vrijedi $|f(z)| \leq M_2$, odnosno da vrijedi tvrdnja (3.19). Nadalje, vrijedi $f(0) = 0$ i $f'(0) = a_1 - a_0 = b$, stoga budući da su zadovoljene pretpostavke leme 1.0.17, vrijedi

$$|f(z)| \leq \frac{M_2|z|}{{R_1}^2}\,\frac{M_2|z| + {R_1}^2 b}{M_2 + |z|b} \quad \text{za} \quad |z| \leq R_1. \tag{3.21}$$

Dokažimo sada da za $|z| \leq R_1$ vrijedi

$$|g(z)| > 0 \tag{3.22}$$

ako $|z| < R_2$.

Prema tvrdnji (3.17) vrijedi $a_0 = g(z) - f(z)$. Kada na to djelujemo s apsolutnom vrijednosti dobivamo:

$$|a_0| \leq |g(z)| + |f(z)|$$

pa je

$$|g(z)| \geq |a_0| - |f(z)|.$$

Iskoristimo li nejednakost (3.21) dobivamo da za $|z| \leq R_1$ vrijedi:

$$|g(z)| \geq |a_0| - \frac{M_2|z|}{{R_1}^2}\frac{M_2|z| + {R_1}^2 b}{M_2 + b|z|}.$$

Izlučimo li na desnoj strani nejednakosti $\dfrac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)}$ dobivamo:

$$|g(z)| \geq \frac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)}\left({M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b(M_2 - |a_0|)|z| - |a_0|{R_1}^2 M_2\right).$$

Sada ćemo dokazat da je desna strana prethodne nejednakosti veća od 0 za $|z| < R_2$, odnosno da vrijedi tvrdnja (3.22).

Prvi faktor je negativan budući da je nazivnik promatranog razlomka pozitivan. Član M_2 je pozitivan po definiciji: $M_2 = {R_1}^n (|a_n|R_1 + a_n - a_0)$ - prema tvrdnji (3.8) vrijedi $R_1 > 0$ te prema pretpostavci vrijedi $a_n - a_0 \geq 0$.

Dakle, potrebno je još dokazati da je ${M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0| < 0$. Promotrimo pripadnu kvadratnu jednadžbu ${M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0| = 0$. Njen graf je parabola okrenuta prema dolje, a rješenja su:

$$|z|_{1,2} = \frac{-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|) \pm \sqrt{{R_1}^4 b^2 (M_2 - |a_0|)^2 + 4{M_2}^3{R_1}^2|a_0|}}{2{M_2}^2}.$$

Ta kvadratna jednadžba je negativna za $|z|$ iz intervala $\langle |z|_1, |z|_2 \rangle$ pri čemu je $|z|_2$ ono rješenje u kojem je znak ispred korijena +.

Broj $|z|_1$ je negativan. Naime, korijen iz pripadne diskriminante je veći od izraza $-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)$ od kojega se oduzima, stoga je i cijeli razlomak, odnosno $|z|_1$ negativan.

Dakle, uzimamo $|z|$ iz intervala $\langle |z|_1, |z|_2 \rangle$ i $|z|$ je nenegativan. To znači da je $|z|$ iz intervala $\langle 0, |z|_2 \rangle$, odnosno da je $|z| < |z|_2$.

Dokažimo sada da je $|z|_2 = R_2$. Naime,

$$\begin{aligned}
|z|_2 &= \frac{-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|) + \sqrt{{R_1}^4 b^2 (M_2 - |a_0|)^2 + 4{M_2}^3{R_1}^2|a_0|}}{2{M_2}^2} \\
&= \frac{1}{{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3}\right] \\
&= R_2.
\end{aligned}$$

Dakle, za $|z| < R_2$, vrijedi $|g(z)| > 0$, odnosno nultočke polinoma g se ne nalaze unutar kruga $|z| < R_2$. Prema već opisanom isto vrijedi i za nultočke polinoma p. Dakle, za nultočke polinoma p vrijedi $|z| \geq R_2$.

Time je dokaz tvrdnje (3.4) gotov.

Vratimo se sada na dokaz tvrdnje (3.5) u kome nam je preostalo dokazati da vrijedi:

$$0 \leq R_2 \leq 1.$$

Za to će nam biti potrebna pomoćna tvrdnja:

$$M_2 \geq |a_0| \tag{3.23}$$

koju ćemo odmah dokazati.

Za $z = 1$ je apsolutna vrijednost izraza (3.18) jednaka

$$|f(1)| = |-a_n + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1}|,$$

odnosno

$$|f(1)| = |-a_0| = |a_0|. \tag{3.24}$$

Dokazali smo tvrdnju (3.8), tj. dokazali smo da je $1 \leq R_1$ pa vrijedi

$$|z| \leq R_1 \quad \text{za} \quad z = 1.$$

Stoga, prema tvrdnji (3.19) za $z = 1$ vrijedi:

$$|f(1)| \leq M_2,$$

odnosno, iskoristimo li tvrdnju (3.24) dobivamo da je

$$|a_0| \leq M_2$$

što smo i željeli dokazati.

Dokažimo sada da je

$$R_2 \geq 0, \tag{3.25}$$

odnosno

$$\frac{1}{2{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2 {M_2}^3}\right] \geq 0.$$

Pomnožimo li cijelu nejednadžbu s $2{M_2}^2 > 0$ dobivamo:

$$-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2 {M_2}^3} \geq 0,$$

tj.

$$\sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3} \geq {R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big). \tag{3.26}$$

Lijeva strana nejednakosti je očito nenegativna, a sada ćemo dokazati da je također i desna. Dokazali smo tvrdnju (3.8), odnosno da je $R_1 \geq 1$, stoga je ${R_1}^2$ pozitivan, a $b = a_1 - a_0$ nenegativan faktor u umnošku ${R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big)$. Posljednji faktor, $M_2 - a_0$, je nenegativan prema prethodno dokazanoj tvrdnji (3.23). Dakle, desna strana nejednakosti u (3.26) je nenegativna.

Sada, kvadriramo li posljednju nejednakost dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$${R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3 \geq {R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2,$$

odnosno

$$4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3 \geq 0$$

što je istinita tvrdnja. Ekvivalencijama smo došli do istinite tvrdnje, dakle, vrijedi tvrdnja (3.25).

Preostalo je dokazati da je

$$R_2 \leq 1, \tag{3.27}$$

tj.

$$\frac{1}{2{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3}\right] \leq 1.$$

Pomnožimo li cijelu nejednadžbu s $2{M_2}^2 > 0$ dobivamo:

$$-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3} \leq 2{M_2}^2,$$

odnosno

$$\sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3} \leq 2{M_2}^2 + {R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big).$$

Lijeva strana nejednadžbe je očito nenegativna, a isto vrijedi i za desnu stranu prema već dokazanim tvrdnjama. Stoga kvadriranjem posljednje nejednakost dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$R_1{}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,R_1{}^2 M_2{}^3 \leq 4M_2{}^4 + 4M_2{}^2 R_1{}^2 b(M_2 - |a_0|) + R_1{}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2,$$

tj.

$$M_2{}^4 + M_2{}^2 R_1{}^2 b(M_2 - |a_0|) - |a_0|\,R_1{}^2 M_2{}^3 \geq 0.$$

Podijelimo li posljednju nejednakost sa $M_2{}^2 > 0$, grupiramo prvi i posljednji član te izlučimo zajednički faktor M_2 dobivamo:

$$M_2\left(M_2 - |a_0| R_1{}^2\right) + R_1{}^2 b(M_2 - |a_0|) \geq 0. \tag{3.28}$$

Drugi član prethodne nejednakosti je nenegativan. Prvi član se sastoji od faktora M_2 za kojeg smo dokazali da je pozitivan i faktora $M_2 - |a_0|R_1{}^2$ za kojeg ćemo sada dokazati da je također nenegativan.

Pretpostavimo da vrijedi

$$M_2 - |a_0| R_1{}^2 \geq 0, \tag{3.29}$$

tj.

$$R_1{}^n\,(|a_n| R_1 + a_n - a_0) \geq |a_0| R_1{}^2.$$

Podijelimo li posljednju nejednakost s $R_1{}^2 > 0$ dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$R_1{}^{n-2}\,(|a_n| R_1 + a_n - a_0) \geq |a_0|. \tag{3.30}$$

Sada razlikujemo dva slučaja: (1) $a_0 \neq 0$ te (2) $a_0 = 0$.

(1) Ako je $a_0 \neq 0$, onda nejednakost (3.30) možemo podijeliti s $|a_0|$ pa dobivamo:

$$\frac{R_1{}^{n-2}\,(|a_n| R_1 + a_n - a_0)}{|a_0|} \geq 0 \tag{3.31}$$

što je istinita tvrdnja. Nazivnik je očito pozitivan stoga promotrimo brojnik. Prvi faktor je pozitivan budući da vrijedi tvrdnja (3.8). Drugi faktor je $|a_n|R_1 + a_n - a_0$ te je njegov prvi član pozitivan, a zbroj sljedeća dva nenegativan jer prema pretpostavci vrijedi $a_n \geq a_0$.

Dakle, i brojnik je nenegativan, odnosno, tvrdnja (3.31), a time i njoj ekvivalentna tvrdnja (3.30) su istinite.

(2) Ako je $a_0 = 0$ tvrdnja (3.30) je istinita budući da je lijeva strana te nejednakosti brojnik lijeve strane nejednakosti u (3.31) za koji smo pokazali da je nenegativan. Dakle, i u ovom smo slučaju došli do istinite tvrdnje, tj. dokazali smo da vrijedi (3.30).

U oba slučaja smo došli do istinite tvrdnje. Time smo dokazali tvrdnje, redom, (3.29), (3.28) i (3.27), odnosno dokazali smo da je $R_2 \leq 1$.
Ovime je dokaz teorema 3.1.2 gotov. □

Sljedećim primjerima ćemo ilustrirati razliku u preciznosti rezultata teorema 3.1.1 i 3.1.2.

Primjer 3.1.3. *Promotrimo polinom* $p(z) = 6z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z - 100$.

Prema teoremu 3.1.1 nultočke polinoma p se nalaze u krugu $|z| \leq 34.3334$, dok je prema teoremu koji smo upravo dokazali polumjer tog kruga manji - preciznije, nultočke se nalaze u krugu $|z| \leq 6.0236$.

Primjer 3.1.4. *Promotrimo polinom* $p(z) = \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{2}{5}z^3 + \frac{3}{10}z^2 + \frac{1}{5}z - 1000$.

U ovom je primjeru još izraženija razlika u preciznosti između navedenih teorema. Naime, nultočke polinoma p se, prema teoremu 3.1.1 nalaze u krugu $|z| \leq 4001$, a prema teoremu 3.1.2 u krugu $|z| \leq 63.2535$.

Ako je $a_0 \geq 0$, onda je polumjer vanjskog kruga jednak 1, tj. rezultat se svodi na Eneström-Kakeyin teorem te dodatno vrijedi $|z| \geq R_2$, odnosno dobivamo dodatnu informaciju da se nultočke ne nalaze u krugu polumjera R_2.

Sljedeći teorem je proširenje teorema 3.1.1, a za njega, kao i naknadna dva, su zaslužni A. Aziz [6] i B. A. Zargar [7].

Teorem 3.1.5. *Ako je* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *polinom stupnja* n *takav da za neki* $K \geq 1$ *vrijedi*

$$Ka_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0,$$

onda se sve nultočke polinoma p *nalaze u krugu*

$$|z + (K-1)| \leq \frac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

[6] Abdul Aziz, (1951.), indijski matematičar. Trenutno radi na: University of Kashmir, Indija.
[7] Bashir Ahmad Zargar, indijski matematičar. Trenutno radi na: University of Kashmir, Indija.

Dokaz. [1] Promotrimo najprije polinom f definiran kao umnožak polinoma $1-z$ i p:

$$\begin{aligned} f(z) &= (1-z)p(z) \\ &= (1-z)\left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\right) \\ &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z - a_1 z^2 - \cdots - a_{n-1}z^n - a_n z^{n+1} \\ &= -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)z + a_0. \end{aligned}$$

Dodamo li i oduzmemo $Ka_n z^n$ prethodnom retku, on postaje:

$$-a_n z^n(z+K-1) + (Ka_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \cdots + (a_2 - a_1)z^2 + (a_1 - a_0)z + a_0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= -a_n z^n(z+K-1) + (Ka_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \cdots \\ &+ (a_2 - a_1)z^2 + (a_1 - a_0)z + a_0, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} f(z) &= -a_n z^n(z+K-1) + z^n\Bigg\{(Ka_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z} + \cdots \\ &+ (a_2 - a_1)\frac{1}{z^{n-2}} + (a_1 - a_0)\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Primjenom svojstava apsolutne vrijednosti na izraz $f(z)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \Bigg|-a_n z^n(z+K-1) + z^n\Bigg\{(Ka_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z} + \cdots \\ &+ (a_2 - a_1)\frac{1}{z^{n-2}}(a_1 - a_0)\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Bigg\}\Bigg| \\ &\geq |a_n||z|^n|z+K-1| - |z|^n\Bigg|(Ka_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z} + \cdots \\ &+ (a_2 - a_1)\frac{1}{z^{n-2}} + (a_1 - a_0)\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Bigg|. \end{aligned}$$

Primijenimo li svojstvo nejednakosti trokuta na izraz

$$-\left|(Ka_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z} + \cdots + (a_2 - a_1)\frac{1}{z^{n-2}} + (a_1 - a_0)\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

posljednji redak prethodne nejednakosti postaje veći ili jednak od

$$\begin{aligned} |z|^n\Bigg[|a_n||z+K-1| - \Bigg\{|Ka_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}|\frac{1}{|z|} + \cdots \\ +|a_2 - a_1|\frac{1}{|z^{n-2}|} + |a_1 - a_0|\frac{1}{|z^{n-1}|} + \frac{|a_0|}{|z^n|}\Bigg\}\Bigg], \end{aligned} \tag{3.32}$$

a to je, za $|z| > 1$, strogo veće od $|z|^n\left[|a_n||z+K-1| - \left\{Ka_n - a_0 + |a_0|\right\}\right]$.

Naime, iskoristimo li pretpostavku teorema $Ka_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0$ dobivamo: $|Ka_n - a_{n-1}| = Ka_n - a_{n-1}$ te $|a_k - a_{k-1}| = a_k - a_{k-1}$ za svaki $k = 1, \cdots, n-1$ pa je tvrdnja (3.32) ekvivalentna s

$$|z|^n\Bigg[|a_n||z+K-1| - \Bigg\{Ka_n - a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{|z|} + \cdots$$
$$+(a_2 - a_1)\frac{1}{|z^{n-2}|} + (a_1 - a_0)\frac{1}{|z^{n-1}|} + \frac{|a_0|}{|z^n|}\Bigg\}\Bigg].$$

Nadalje, za $|z| > 1$ je $\frac{-1}{|z|} > -1$ pa je prethodni redak veći od

$$|z|^n\left[|a_n||z+K-1| - \left\{(Ka_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) + |a_0|\right\}\right],$$

odnosno

$$|z|^n\left[|a_n||z+K-1| - \left\{Ka_n - a_0 + |a_0|\right\}\right].$$

Dakle, za $|z| > 1$ je $|f(z)| > |z|^n\left[|a_n||z+K-1| - \left\{Ka_n - a_0 + |a_0|\right\}\right]$.

Očito je desna strana prethodne nejednakosti veća od 0 ako je

$$|a_n||z+K-1| - \left\{Ka_n - a_0 + |a_0|\right\} > 0,$$

odnosno

$$|z+K-1| > \frac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Dakle, ako je $|z| > 1$, onda je $|f(z)| > 0$ za $|z+K-1| > \dfrac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}$.

Stoga sve nultočke polinoma f čija je apsolutna vrijednost veća od 1 leže u krugu

$$|z+K-1| \leq \frac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}. \tag{3.33}$$

Međutim, i one nultočke polinoma f čija je apsolutna vrijednost manja ili jednaka od 1 također zadovoljavaju tvrdnju (3.33).
Naime, prema nejednakosti trokuta vrijedi $|z + K - 1| \leq |z| + |K - 1|$. Iskoristimo li sada pretpostavku da je $K \geq 1$ te činjenicu da promatramo nultočke čija je apsolutna vrijednost manja ili jednaka od 1 dobivamo da je prethodna nejednakost manja ili jednaka od $1+K-1$, odnosno K. Preostalo je dokazati da je

$$K \leq \frac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}. \tag{3.34}$$

Pretpostavimo da ta tvrdnja vrijedi, odnosno da vrijedi njoj ekvivalentna tvrdnja

$$\frac{Ka_n - a_0 + |a_0| - K|a_n|}{|a_n|} \geq 0.$$

Pomnožimo li nejednakost s $|a_n| > 0$ te grupiramo članove sa zajedničkim faktorom dobivamo:

$$K(a_n - |a_n|) + (|a_0| - a_0) \geq 0. \tag{3.35}$$

Sada razlikujemo dva slučaja: (1) $a_0 \geq 0$ (2) $a_0 < 0$.

(1) Ako je $a_0 \geq 0$, onda je i $Ka_n \geq 0$. Tada nejednakost (3.35) prelazi u oblik $K \cdot 0 \geq 0$ što je istina.

(2) Ako je $a_0 < 0$, onda razlikujemo dva podslučaja: (a) $a_n \geq 0$ te (b) $a_n < 0$.

   (a) U ovom slučaju je nejednakost (3.35) ekvivalentna s $K \cdot 0 - 2a_0 \geq 0$, tj. $-2a_0 \geq 0$ što je istinito.

   (b) U ovom slučaju je nejednakost (3.35) ekvivalentna s $K \cdot 2a_n - 2a_0 \geq 0$. Kada tu nejednakost podijelimo s 2 dobijemo pretpostavku teorema.

Dakle, u svakom od slučajeva je nejednakost (3.35) istinita.

Ekvivalencijama smo došli do istinite tvrdnje, dakle, vrijedi nejednakost (3.34). Odnosno, dokazali smo da i nultočke polinoma f čija je apsolutna vrijednost manja ili jednaka od 1 zadovoljavaju tvrdnju (3.33).

Dakle, sve nultočke polinoma f leže u krugu $|z + K - 1| \leq \dfrac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}$.

Polinomi f i p su povezani formulom $f(z) = (1 - z)p(z)$ stoga zaključujemo da se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu $|z + K - 1| \leq \dfrac{Ka_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}$.
Time je dokaz teorema 3.1.5 gotov. □

Uočimo da uz pretpostavku $a_0 \geq 0$, dobivamo sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.6. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da za neki $K \geq 1$ vrijedi*

$$Ka_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0,$$

onda se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu

$$|z + (K-1)| \leq K.$$

Nadalje, ako u Eneström-Kakeyinom teoremu promijenimo pretpostavke tako da pretpostavimo da za alternirajuće koeficijente polinoma p vrijedi (2.1), dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 3.1.7. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da vrijedi*

$$a_n \geq a_{n-2} \geq \cdots \geq a_3 \geq a_1 > 0 \quad i \quad a_{n-1} \geq a_{n-3} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_0 > 0,$$

ako je n neparan, ili

$$a_n \geq a_{n-2} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_0 > 0 \quad i \quad a_{n-1} \geq a_{n-3} \geq \cdots \geq a_3 \geq a_1 > 0,$$

ako je n paran.
Tada se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu

$$\left| z + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Dokaz. [1] Promotrimo najprije polinom f definiran kao umnožak polinoma $1 - z^2$ i p:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 - z^2\right) p(z) \\ &= \left(1 - z^2\right)\left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right) \\ &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z^2 - a_1 z^3 - \cdots - a_{n-1} z^{n+1} - a_n z^{n+2} \\ &= -a_n z^{n+2} - a_{n-1} z^{n+1} + (a_n - a_{n-2}) z^n + (a_{n-1} - a_{n-3}) z^{n-1} + \cdots + (a_3 - a_1) z^3 + \\ &+ \; (a_2 - a_0) z^2 + a_1 z + a_0. \end{aligned}$$

Odnosno,

$$\begin{aligned} f(z) &= -z^{n+1}(a_n z + a_{n-1}) + z^n \left\{ (a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3}) \frac{1}{z} + \cdots + (a_3 - a_1) \frac{1}{z^{n-3}} \right. \\ &+ \left. (a_2 - a_0) \frac{1}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right\}. \end{aligned}$$

Apsolutna vrijednost od $f(z)$ je veća ili jednaka od

$$|z|^{n+1}|a_n z + a_{n-1}| - |z|^n \Big|(a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3})\frac{1}{z} + \cdots + (a_3 - a_1)\frac{1}{z^{n-3}} + (a_2 - a_0)\frac{1}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Big|,$$

odnosno nakon što izlučimo $|z|^n$:

$$|z|^n \Big\{|z||a_n z + a_{n-1}| - \Big|(a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3})\frac{1}{z} + \cdots + (a_3 - a_1)\frac{1}{z^{n-3}} + (a_2 - a_0)\frac{1}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Big|\Big\}.$$

Primijenom nejednakosti trokuta na izraz

$$-\Big|(a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3})\frac{1}{z} + \cdots + (a_3 - a_1)\frac{1}{z^{n-3}} + (a_2 - a_0)\frac{1}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\Big|$$

posljednji redak prethodne nejednakosti postaje veći ili jednak od

$$|z|^n \Big\{|z||a_n z + a_{n-1}| - \Big\{|a_n - a_{n-2}| + |a_{n-1} - a_{n-3}|\frac{1}{|z|} + \cdots + |a_3 - a_1|\frac{1}{|z^{n-3}|} + |a_2 - a_0|\frac{1}{|z^{n-2}|} + \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} + \frac{|a_0|}{|z^n|}\Big\}\Big\}. \tag{3.36}$$

što je, za $|z| > 1$, strogo veće od $|a_n + a_{n-1}| - (a_n + a_{n-1})$.

Naime, za $|z| > 1$ je $\frac{-1}{|z|} > -1$ pa je tvrdnja (3.36) veća od

$$|a_n + a_{n-1}| - (|a_n - a_{n-2}| + |a_{n-1} - a_{n-3}| + \cdots + |a_3 - a_1| + |a_2 - a_0| + |a_1| + |a_0|) \tag{3.37}$$

Iskoristimo li sada pretpostavku teorema dobivamo da je $|a_k - a_{k-2}| = a_k - a_{k-2}$ za svaki $k = 2, \cdots, n-1$ te $|a_1| = a_1$ i $|a_0| = a_0$. Stoga je tvrdnja (3.37) ekvivalentna s

$$|a_n + a_{n-1}| - (a_n + a_{n-1}),$$

a to je pak veće od 0 ako je $|a_n + a_{n-1}| > a_n + a_{n-1}$.

Dakle, ako je $|z| > 1$, onda je $|f(z)| > 0$ za $|a_n + a_{n-1}| > a_n + a_{n-1}$.

Slijedi da polinom f nema nultočaka za $\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| > 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Dakle, nultočke polinoma f čija je apsolutna vrijednost veća od 1 leže unutar

$$\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| > 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{3.38}$$

Međutim, i one nultočke polinoma f čija je apsolutna vrijednost manja ili jednaka od 1 također zadovoljavaju tvrdnju (3.38).

Naime, vrijedi $\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq |z| + \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$, a to je, budući da promatramo $|z| \leq 1$, manje ili jednako od $1 + \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}$. Prema pretpostavci su svi koeficijenti nenegativni pa je prethodni izraz jednak $1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Dakle, $\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ vrijedi i za $|z| \leq 1$.

Zaključujemo da sve nultočke polinoma f leže u krugu $\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| > 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Polinomi f i p su povezani formulom $f(z) = \left(1 - z^2\right) p(z)$ stoga se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu $\left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| > 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ i time smo dokazali tvrdnju teorema. □

Preostale teoreme ovoga poglavlja predstavili su A. Aziz i Q. G. Mohammad [8] 1980. godine.

Teorem 3.1.8. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s realnim pozitivnim koeficijentima. Ako postoje $t_1 > t_2 \geq 0$ takvi da*

$$a_r t_1 t_2 + a_{r-1}(t_1 - t_2) - a_{r-2} \geq 0,\ r = 1, \cdots, n+1,\ (a_{-1} = a_{n+1} = 0),$$

onda se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu $|z| \leq t_1$.

Dokaz. [2] Promotrimo najprije polinom f definiran na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(z) &= (t_2 + z)(t_1 - z)p(z) \\ &= \left(t_1 t_2 + (t_1 - t_2)z - z^2\right)\left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\right) \\ &= -a_n z^{n+2} + (a_n(t - 1 - t_2) - a_{n-1}) z^{n+1} + (a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}) z^n + \cdots \\ &+ (a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0) z^2 + (a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)) z + a_0 t_1 t_2. \end{aligned}$$

Nadalje, neka je $g(z) = z^{n+2} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

[8] Q. G. Mohammad. Trenutno radi na: University of Kashmir, Indija.

Dakle,

$$\begin{aligned}
g(z) &= z^{n+2}\Big(- a_n z^{-n-2} + \Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)z^{-n-1} + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)z^{-n} + \cdots \\
&+ \Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)z^{-2} + \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)z^{-1} + a_0 t_1 t_2\Big) \\
&= -a_n + \Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)z + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)z^2 + \cdots \\
&+ \Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)z^n + \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)z^{n+1} + a_0 t_1 t_2 z^{n+2}.
\end{aligned}$$

Potom definiramo polinom h pomoću polinoma g, na sljedeći način

$$\begin{aligned}
h(z) &= \Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)z + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)z^2 + \cdots \\
&+ \Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)z^n + \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)z^{n+1} + a_0 t_1 t_2 z^{n+2}.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$g(z) = -a_n + h(z). \tag{3.39}$$

Promotrimo sada $|h(z)|$:

$$\begin{aligned}
|h(z)| &= \Big|\Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)z + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)z^2 + \cdots \\
&+ \Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)z^n + \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)z^{n+1} + a_0 t_1 t_2 z^{n+2}\Big| \\
&\le |a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}|\,|z| + |a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}|\,|z|^2 + \cdots \\
&+ |a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0|\,|z|^n + |a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)|\,|z|^{n+1} + |a_0 t_1 t_2|\,|z|^{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci vrijedi $a_r t_1 t_2 + a_{r-1}\,(t_1 - t_2) - a_{r-2} \ge 0,\ r = 1, \cdots, n+1, (a_{-1} = a_{n+1} = 0)$. Stoga je

$$|a_r t_1 t_2 + a_{r-1}\,(t_1 - t_2) - a_{r-2}| = a_r t_1 t_2 + a_{r-1}\,(t_1 - t_2) - a_{r-2}$$

i tu činjenicu primijenimo na prvih $n + 1$ pribrojnika. Nadalje, budući da je prema pretpostavci $t_1 > 0, t_2 \ge 0$ te da su koeficijenti pozitivni, vrijedi $|a_0 t_1 t_2| = a_0 t_1 t_2$. Stoga je posljednji redak prethodne nejednakosti jednak

$$\begin{aligned}
&\Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)\,|z| + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)\,|z|^2 + \cdots \\
+ &\Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)\,|z|^n + \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)\,|z|^{n+1} + \Big(a_0 t_1 t_2\Big)\,|z|^{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li u prethodni izraz $|z| = \dfrac{1}{t_1}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} & \Big(a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1}\Big)\frac{1}{t_1} + \Big(a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2}\Big)\left(\frac{1}{t_1}\right)^2 \\ + \quad & \Big(a_{n-1} t_1 t_2 + a_{n-2}(t_1 - t_2) - a_{n-3}\Big)\left(\frac{1}{t_1}\right)^3 + \cdots + \Big(a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0\Big)\left(\frac{1}{t_1}\right)^n \\ + \quad & \Big(a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2)\Big)\left(\frac{1}{t_1}\right)^{n+1} + \Big(a_0 t_1 t_2\Big)\left(\frac{1}{t_1}\right)^{n+2}. \end{aligned}$$

Uz a_{n-1} je $\dfrac{-1}{t_1} + (t_1 - t_2)\dfrac{1}{{t_1}^2} + t_1 t_2 \dfrac{1}{{t_1}^3} = \dfrac{-1}{t_1} + \dfrac{1}{t_1} - \dfrac{t_2}{{t_1}^2} + \dfrac{t_2}{{t_1}^2} = 0.$
Uz a_{n-2} je $\dfrac{-1}{{t_1}^2} + (t_1 - t_2)\dfrac{1}{{t_1}^3} + t_1 t_2 \dfrac{1}{{t_1}^4} = 0.$
Uz a_{n-k} je $\dfrac{-1}{{t_1}^k} + (t_1 - t_2)\dfrac{1}{{t_1}^{k+1}} + t_1 t_2 \dfrac{1}{{t_1}^{k+2}} = 0, \quad k = 1, \cdots, n-1, n.$
Uz a_n je $(t_1 - t_2)\dfrac{1}{t_1} + t_1 t_2 \dfrac{1}{{t_1}^2} = 1.$

Stoga je gornji izraz jednak a_n.

Dakle, za $|z| = \dfrac{1}{t_1}$ vrijedi $|h(z)| \leq a_n$ pa je $\max\limits_{|z|=\frac{1}{t_1}} |h(z)| \leq a_n$.

Odnosno, za $|z| = \dfrac{1}{t_1}$ vrijedi $|h(z)| \leq a_n$.

Prema Teoremu o maksimumu modula nejednakost $|h(z)| < a_n$ vrijedi da sve z iz kruga $K\left(0, \dfrac{1}{t_1}\right)$.

Dakle, $h : K\left(0, \dfrac{1}{t_1}\right) \to K(0, a_n)$ i $h(0) = 0$. Stoga koristeći lemu 1.0.15 za $R_1 = \dfrac{1}{t_1}$ i $R_2 = a_n$ dobivamo

$$|h(z)| \leq \frac{R_2}{R_1}|z| = a_n t_1 |z| \quad \text{za} \quad |z| < \frac{1}{t_1},$$

a i na samoj kružnici $|z| = \dfrac{1}{t_1}$ vrijedi

$$|h(z)| \leq a_n t_1 |z|.$$

Dakle, vrijedi

$$|h(z)| \leq a_n t_1 |z| \quad \text{za} \quad z \leq \frac{1}{t_1}. \tag{3.40}$$

Promotrimo sada apsolutnu vrijednost izraza (3.39):

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |h(z) - a_n| \\ &\geq ||h(z)| - |a_n|| . \end{aligned}$$

Prethodni je izraz jednak $||h(z)| - a_n|$ budući da su, prema pretpostavci, koeficijenti polinoma pozitivni. Nadalje, za $|z| \leq \frac{1}{t_1}$ je $|h(z)| \leq a_n$ pa je prethodni izraz manji ili jednak od $a_n - |h(z)|$.
Dakle, vrijedi:

$$|g(z)| \geq a_n - |h(z)| , \quad \text{za} \quad |z| \leq \frac{1}{t_1}. \tag{3.41}$$

Iz (3.40) slijedi da je $-|h(z)| \geq -a_n t_1 |z|$, za $|z| \leq \frac{1}{t_1}$ pa uvrstimo li to u (3.41) dobivamo da je $|g(z)| \geq a_n (1 - |z| t_1)$.

Ako je $|z| < \frac{1}{t_1}$, onda je $|g(z)| \geq a_n (1 - |z| t_1) > 0$. Naime, u tom slučaju je umnožak $|z| t_1$ manji od 1 pa je razlika $1 - |z| t_1$ pozitivna. Dakle, drugi faktor u umnošku $a_n (1 - |z| t_1)$ je pozitivan. Za prvi faktor znamo da je pozitivan prema pretpostavci teorema pa je i cijeli umnožak pozitivan.
Zaključujemo da se nultočke polinoma g moraju nalaziti unutar kruga $|z| \geq \frac{1}{t_1}$.

Polinomi f i g su povezani formulom $f(z) = z^{n+2} g\left(\frac{1}{z}\right)$. Dakle, polinom $f(z)$ ima iste nultočke kao polinom $g\left(\frac{1}{z}\right)$ te još jednu dodatnu $z = 0$. Stoga, budući da se nultočke polinoma $g\left(\frac{1}{z}\right)$ moraju nalaziti unutar kruga $|z| \geq \frac{1}{t_1}$ slijedi da se nultočke polinoma $f(z)$ moraju nalaziti unutar kruga $|z| \leq t_1$.

Polinomi p i f su povezani formulom $f(z) = (t_2 + z)(t_1 - z)p(z)$ pa su nultočke polinoma f sve nultočke polinoma p i još dvije dodatne $-t_2$ i t_1. Dakle, dokazali smo da se nultočke polinoma p moraju nalaziti unutar kruga $|z| \leq t_1$. Time je dokaz dokaz teorema 3.1.8 gotov.
□

Uočimo, ako je $t_2 = 0$ i $t_1 = 1$ tada se teorem 3.1.8 svodi na Eneström-Kakeyin teorem jer je uvjet

$$a_r \cdot 1 \cdot 0 + a_{r-1}(1 - 0) - a_{r-2} \geq 0,$$

ekvivalentan s pretpostavkom Eneström-Kakeyinog teorema.

Nadalje, ako vrijedi samo $t_2 = 0$, onda se pretpostavka teorema 3.1.8 svodi na:

$$\begin{aligned} a_r t_1 \cdot 0 + a_{r-1}(t_1 - 0) - a_{r-2} &\geq 0 \\ a_{r-1} t_1 - a_{r-2} &\geq 0 \\ t_1 &\geq \frac{a_{r-2}}{a_{r-1}}. \end{aligned}$$

Budući da prethodna tvrdnja vrijedi za svaki $r = 1, \cdots, n+1$ slijedi da je

$$\begin{aligned} t_1 &\geq \frac{a_{-1}}{a_0} = \frac{0}{a_0} = 0, \\ t_1 &\geq \frac{a_0}{a_1}, \\ &\vdots \\ t_1 &\geq \frac{a_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Stoga broj t_1 zadovoljava uvjete teorema 3.1.8 te smo dobili sljedeći rezultat:

Teorem 3.1.9. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n s realnim pozitivnim koeficijentima, onda se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu*

$$|z| \leq t = \max\left(\frac{a_0}{a_1}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Uočimo da, ukoliko su koeficijenti strogo rastući ovaj teorem daje preciznije rezultate o nultočkama polinoma budući da je tada $t < 1$.

Teorem 3.1.10. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da vrijedi*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0, \tag{3.42}$$

onda on nema nultočku kratnosti veće ili jednake 2 čija je apsolutna vrijednost veća ili jednaka $\frac{n}{n+1}$. Drugim riječima, sve nultočke polinoma p čija je apsolutna vrijednost veća od $\frac{n}{n+1}$ su jednostruke.

Dokaz. [2] Pretpostavimo suprotno, tj. da je p polinom stupnja n takav da vrijedi $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0$ te da postoji nultočka kratnosti veće ili jednake 2 čija je apsolutna vrijednost veća ili jednaka od $\frac{n}{n+1}$.

Prema teoremu 1.0.9 zaključujemo da je to također nultočka polinoma p'. Dakle, postoji nultočka polinoma p' čija je apsolutna vrijednost veća ili jednaka od $\frac{n}{n+1}$.

Promotrimo polinom p':

$$p'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1.$$

Budući da su, po pretpostavci, koeficijenti polinoma p pozitivni, slijedi da su i koeficijenti polinoma p' također pozitivni pa možemo primijeniti teorem 3.1.9. Dakle, nultočke polinoma p' leže unutar kruga

$$|z| \leq \max\left(\frac{a_1}{2a_2}, \frac{2a_2}{3a_3}, \cdots, \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}\right). \tag{3.43}$$

Za $i = 2, \cdots, n$ vrijedi $a_i \geq a_{i-1}$ pa je $\frac{a_{i-1}}{a_i} \leq 1$. Pomnožimo li posljednju nejednakost sa $i-1 > 0$ i podijelimo sa $i > 0$ dobivamo: $\frac{(i-1)a_{i-1}}{ia_i} \leq \frac{i-1}{i}$.

Dakle, vrijedi $\frac{a_1}{2a_2} \leq \frac{1}{2}, \frac{2a_2}{3a_3} \leq \frac{2}{3}, \cdots, \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n} \leq \frac{n-1}{n}$.
Stoga je $\max\left(\frac{a_1}{2a_2}, \frac{2a_2}{3a_3}, \cdots, \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}\right) \leq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right)$. Primijenimo li prethodnu nejednakost na tvrdnju (3.43) dobivamo da se nultočke polinoma p' nalaze unutar kruga

$$|z| \leq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right),$$

odnosno

$$|z| \leq \frac{n-1}{n}.$$

Također, vrijedi $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ pa možemo zaključiti da za sve nultočke polinoma p' vrijedi $|z| < \frac{n}{n+1}$.
Došli smo do kontradikcije s pretpostavkom da postoji nultočka polinoma p' čija je apsolutna vrijednost veća ili jednaka od $\frac{n}{n+1}$. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna i time smo dokazali da vrijedi tvrdnja teorema 3.1.10. □

Direktna posljedica prethodnog teorema jest:

Korolar 3.1.11. *Sve nultočke polinoma koji zadovoljavaju* (3.42) *i čija je apsolutna vrijednost jednaka* 1 *su jednostruke.*

Sljedeći teorem otkriva područja u kojima se ne nalaze nultočke polinoma s nenegativnim koeficijentima.

Teorem 3.1.12. *Ako je* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *polinom stupnja* $n \geq 1$ *takav da* $a_j \geq 0$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$ *i* $a_n > 0$, *onda za svaki relani* $a > 0$ *polinom* p *nema nultočaka u krugu* $|z - a| < \dfrac{a}{n}$.

Dokaz. [2] Budući da je prema pretpostavci a pozitivan relan broj, vrijedi $p^{(k)}(a) > 0$ za $k = 0, 1, \cdots, n$.
Najprije,

$$p^{(0)}(a) = p(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Svi koeficijenti polinoma $p(a)$ su veći ili jednaki 0, osim vodećeg koeficijenta koji je strogo veći od 0. Također, a je strogo veći od 0 pa je zasigurno barem vodeći koeficijent polinoma $p(a)$ strogo veći od 0, dok su ostali koeficijenti nenegativni. Odnosno, polinom $p(a)$ je pozitivan. Analogno će biti za svaku derivaciju polinoma $p(a)$, uvijek će barem vodeći koeficijent toga polinoma biti strogo veći od 0.

Vrijednost vodećeg člana polinoma $p^{(k)}$ u točki a jednaka je $(n-(k-1)) \cdot (n-(k-2)) \cdot \cdots \cdot (n-1)) \cdot n \cdot a_n \cdot a^{n-k}$. Dakle, jednak je umnošku prirodnih brojeva, koeficijenta a_n i određene potencije broja a, i to je pozitivan broj.

Promotrimo sada polinom f definiran na sljedeći način:

$$f(z) = p\left(\frac{a}{n} z + a\right).$$

Odnosno,

$$f(z) = a_n \left(\frac{a}{n} z + a\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{a}{n} z + a\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{a}{n} z + a\right)^{n-2} + \cdots + a_2 \left(\frac{a}{n} z + a\right)^2 + a_1 \left(\frac{a}{n} z + a\right)^1 + a_0.$$

Potenciramo li binom $\left(\frac{a}{n} z + a\right)$ prema binomnom poučku, a potom, u dobivenom izrazu uočimo da su novonastali pribrojnici članovi oblika $\left(\frac{a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!} z^k$, $k = 0, 1, \cdots, n$ dobivamo da je prethodni izraz jednak

$$p(a) + \frac{a}{n} p'(a) z + \left(\frac{a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!} z^2 + \cdots + \left(\frac{a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!} z^n.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= p\left(\frac{a}{n}z + a\right) \\ &= p(a) + \frac{a}{n}p'(a)z + \left(\frac{a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}z^2 + \cdots + \left(\frac{a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}z^n. \end{aligned}$$

Nadalje, neka je $g(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$.
Najprije,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = p(a) + \frac{a}{n}p'(a)\frac{1}{z} + \left(\frac{a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \left(\frac{a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\frac{1}{z^n}$$

pa je

$$g(z) = p(a)z^n + \frac{a}{n}p'(a)z^{n-1} + \left(\frac{a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}z^{n-2} + \cdots + \left(\frac{a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}.$$

Odnosno,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!}z^{n-k}.$$

Koeficijenti polinoma g su $p(a), \frac{a}{n}p'(a), \left(\frac{a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}, \cdots, \left(\frac{a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}$, dakle, polinom g ima realne pozitivne koeficijente.

Polinom $p^{(k)}(z)$ za $k = 0, 1, \cdots, n-1$ je polinom stupnja $n-k$ te također ima realne pozitivne koeficijente.

Budući da je $p^{(k)}(z)$ polinom stupnja većeg ili jednakog od 1 možemo primijeniti lemu 1.0.20 pa dobivamo da za $k = 0, 1, \cdots, n-1$ vrijedi:

$$\max_{|z|=a} \left|p^{(k+1)}(z)\right| \le \frac{n-k}{a} \max_{|z|=a} \left|p^k(z)\right|.$$

Prema korolaru Bernsteinovog teorema, korolar 1.0.19, slijedi da je

$$p^{(k+1)}(a) \le \frac{n-k}{a}p^k(a) \ \text{ za } \ k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{3.44}$$

Nadalje, nejednakost

$$\frac{n-k}{a} \leq \frac{n(1+k)}{a}$$

je ekvivalentna s istinitom nejednakosti $k(n+1) \geq 0$.
Stoga je

$$\frac{n-k}{a} p^k(a) \leq \frac{n(1+k)}{a} p^k(a). \tag{3.45}$$

Iz nejednakosti (3.44) i (3.45) dobivamo da je

$$p^{(k+1)}(a) \leq \frac{n(1+k)}{a} p^k(a) \text{ za } k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Podijelimo li prethodnu tvrdnju sa $(1+k)!$ i pomnožimo s $\left(\frac{a}{n}\right)^{k+1}$ dobivamo:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{k+1} \frac{p^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \leq \left(\frac{a}{n}\right)^{k} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \text{ za } k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

Time smo dokazali da polinom g zadovoljava prepostavke Eneström-Kakeyinog teorema pa zaključujemo da nultočke polinoma g leže u krugu $|z| \leq 1$.

Polinomi f i g su povezani formulom $g(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ pa slijedi da se nultočke polinoma $f(z)$ moraju nalaziti unutar kruga $|z| \geq 1$. Odnosno, nultočke polinoma $f(z) = p\left(\frac{a}{n}z + a\right)$ se ne nalaze u krugu $|z| < 1$. Zamjenom z sa $\frac{n}{a}(z-a)$ dobivamo $\left|\frac{n}{a}(z-a)\right| < 1$, odnosno $|z-a| < \frac{a}{n}$. Dakle, nultočke polinoma p se ne nalaze u krugu $|z-a| < \frac{a}{n}$. Time je dokaz teorema 3.1.12 gotov. □

Direktna posljedica prethodnog teorema jest sljedeće profinjenje Eneström-Kakeyinog teorema:

Teorem 3.1.13. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da vrijedi $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0$, onda se sve nultočke polinoma p nalaze u području*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-a| \geq \frac{a}{n} \right\}$$

pri čemu je $0 < a \leq 1$.

Teorem 3.1.14. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja $n \geq 1$ takav da je $a_j \geq 0, j = 0, 1, \cdots, n-1$ i $a_n > 0$. Ako postoji $a > 0$ za koji vrijedi $np(a) \geq 2ap'(a)$, onda polinom p nema nultočaka u krugu $|z - a| \leq \dfrac{2a}{n}$.*

Dokaz. [2] Promotrimo polinom f definiran na sljedeći način:

$$f(z) = p\left(\left(\frac{2a}{n}\right)z + a\right).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n\left(\frac{2a}{n}z + a\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{2a}{n}z + a\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{2a}{n}z + a\right)^{n-2} + \cdots \\ &+ a_2\left(\frac{2a}{n}z + a\right)^2 + a_1\left(\frac{2a}{n}z + a\right) + a_0 \end{aligned}$$

Potenciramo li binom $\left(\dfrac{2a}{n}z + a\right)$ prema binomnom poučku, a potom, u dobivenom izrazu uočimo da su novonastali pribrojnici članovi oblika $\left(\dfrac{2a}{n}\right)^k \dfrac{p^{(k)}(a)}{k!}z^k$, $k = 0, 1, \cdots, n$ dobivamo da je prethodni izraz jednak

$$p(a) + \frac{2a}{n}p'(a)z + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}z^2 + \cdots + \left(\frac{2a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}z^n.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= p\left(\frac{2a}{n}z + a\right) \\ &= p(a) + \frac{2a}{n}p'(a)z + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}z^2 + \cdots + \left(\frac{2a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}z^n. \end{aligned}$$

Nadalje, neka je $g(z) = z^n f\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Najprije,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = p(a) + \left(\frac{2a}{n}\right)p'(a)\frac{1}{z} + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \left(\frac{2a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}\frac{1}{z^n}$$

pa je

$$g(z) = p(a)z^n + \left(\frac{2a}{n}\right)p'(a)z^{n-1} + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}z^{n-2} + \cdots + \left(\frac{2a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}.$$

Odnosno,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!} z^{n-k}.$$

Polinom $p^{(k)}(z)$ za $k = 0, 1, \cdots, n-1$ je polinom stupnja $n-k$ s realnim pozitivnim koeficijentima. Dakle, $p^{(k)}(z)$ je polinom stupnja većeg ili jednakog od 1 pa možemo primijeniti lemu 1.0.20.

Stoga, za $k = 0, 1, \cdots, n-1$ vrijedi:

$$\max_{|z|=a} \left|p^{(k+1)}(z)\right| \leq \frac{n-k}{a} \max_{|z|=a} \left|p^k(z)\right|.$$

Prema korolaru Bernsteinovog teorema, korolar 1.0.19, slijedi da je

$$p^{(k+1)}(a) \leq \frac{n-k}{a} p^k(a) \quad \text{za} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{3.46}$$

Sada ćemo pokazati da za $k = 1, 2, \cdots, n-1$ vrijedi

$$p^{(k)}(a) \geq \frac{a}{n-k} p^{(k+1)}(a) \geq \frac{2a}{n(k+1)} p^{(k+1)}(a). \tag{3.47}$$

Prva nejednakost u (3.47) je neposredna posljedica nejednakosti (3.46).

Dokažimo sada drugu nejednakost iz (3.47), odnosno

$$\frac{a}{n-k} p^{(k+1)}(a) \geq \frac{2a}{n(k+1)} p^{(k+1)}(a), \quad \text{za} \quad k = 1, \cdots, n-1. \tag{3.48}$$

Nejednakost

$$\frac{a}{n-k} \geq \frac{2a}{n(k+1)}$$

je ekvivalentna s jednakosti $nk + 2k \geq n$ koja je istinita. Naime, vrijedi $nk \geq n$ jer je $k \geq 1$, također, vrijedi $2k > 0$ pa slijedi da je $nk + 2k > nk$, odnosno $nk + 2k \geq n$. Stoga vrijedi tvrdnja (3.48).

Iz pretpostavke $np(a) \geq 2ap'(a)$, slijedi da za $k = 0, 1, \cdots, n-1$ vrijedi

$$\left(\frac{2a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \geq \left(\frac{2a}{n}\right)^{(k+1)} \frac{p^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}. \tag{3.49}$$

Naime, dokazali smo da vrijedi tvrdnja (3.48):

$$\frac{a}{n-k}p^{(k+1)}(a) \geq \frac{2a}{n}\frac{p^{(k+1)}(a)}{k+1}, \quad \text{za} \quad k = 1, \cdots, n-1.$$

pa pomnožimo li tu nejednakost sa $\frac{1}{k!} > 0$ i $\left(\frac{2a}{n}\right)^k > 0$ dobivamo:

$$\left(\frac{2a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \geq \left(\frac{2a}{n}\right)^{(k+1)} \frac{p^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$$

i to vrijedi za $k = 1, \cdots, n-1$. Za $k = 0$ prethodna nejednakost postaje $\left(\frac{2a}{n}\right)^0 \frac{p^{(k)}(a)}{0!} \geq \left(\frac{2a}{n}\right) \frac{p'(a)}{1!}$, odnosno $p(a) \geq \frac{2a}{n}p'(a)$, a to vrijedi po pretpostavci.
Dakle, $\left(\frac{2a}{n}\right)^k \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \geq \left(\frac{2a}{n}\right)^{(k+1)} \frac{p^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$ vrijedi za $k = 0, 1, \cdots, n-1$, odnosno, dokazali smo da vrijedi tvrdnja (3.49).

Koeficijenti polinoma g su $p(a), \frac{2a}{n}p'(a), \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \frac{p''(a)}{2!}, \cdots, \left(\frac{2a}{n}\right)^n \frac{p^{(n)}(a)}{n!}$, dakle, polinom g ima realne pozitivne koeficijente.

Tvrdnja (3.49) zajedno s prethodno navedenom činjenicom o koeficijentima polinoma g dokazuju da su zadovoljene pretpostavke Eneström-Kakeyinog teorema pa slijedi da se nultočke polinoma g nalaze u krugu $|z| \leq 1$.

Polinomi f i g su povezani formulom $g(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ pa su nultočke polinoma g sve nultočke polinoma $f\left(\frac{1}{z}\right)$ i dodatno još jedna $z = 0$. Dakle, za nultočke polinoma $f\left(\frac{1}{z}\right)$ vrijedi $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 1$. Odnosno, za nultočke polinoma $f(z)$ vrijedi $|z| \geq 1$, tj. nultočke polinoma $f(z)$ se ne nalaze u krugu $|z| < 1$.

Polinom $f(z)$ je definiran pomoću polinoma p na ovaj način $f(z) = p\left(\frac{2a}{n}z + a\right)$ pa zaključujemo da se nultočke polinoma $p\left(\frac{2a}{n}z + a\right)$ ne nalaze u krugu polumjera manjeg od 1. Odnosno, zamjenom z sa $\frac{n}{2a}(z - a)$ dobivamo: $|z - a| < \frac{2a}{n}$. Dakle, nultočke polinoma p se ne nalaze u krugu $|z - a| < \frac{2a}{n}$. Time smo dokazali tvrdnju teorema 3.1.14. □

Ako za koeficijente prethodnog teorema vrijedi dodatni uvjet $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0$, onda dobivamo još jedno profinjenje Eneström-Kakeyinog teorema:

Teorem 3.1.15. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da vrijedi*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0,$$

onda se sve nultočke polinoma p nalaze u području

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \frac{2}{n} \right\}.$$

3.2 Polinomi čiji koeficijenti čine po dijelovima monoton niz

U ovom poglavlju promatramo proširenje Eneström-Kakeyinog teorema na polinome čiji koeficijenti čine po dijelovima monoton niz. Točnije, na one polinome čiji koeficijenti rastu do nekog mjesta, a zatim padaju. Prvo ćemo dokazati jedan rezultat u kojemu je pretpostavka na koeficijente još općenitija, tj. za polinome čiji koeficijenti zadovoljavaju uvjet:

$$t^n a_n \leq t^{n-1} a_{n-1} \leq \cdots \leq t^{\lambda+1} a_{\lambda+1} \leq t^{\lambda} a_{\lambda} \geq t^{\lambda-1} a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq t a_1 \geq a_0, \tag{3.50}$$

za neki $t > 0$ i $0 < \lambda \leq n$.

Za sljedeće su rezultate zaslužni: K. K. Dewan i M. Bidkham[9].

Teorem 3.2.1. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da za neki $t > 0$ i $0 < \lambda \leq n$ vrijedi*

$$t^n a_n \leq t^{n-1} a_{n-1} \leq \cdots \leq t^{\lambda} a_{\lambda} \geq t^{\lambda-1} a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq t a_1 \geq a_0,$$

onda se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu

$$|z| \leq \frac{t}{|a_n|} \left\{ \left(\frac{2a_{\lambda}}{t^{n-\lambda}} - a_n \right) + \frac{1}{t^n} \left(|a_0| - a_0 \right) \right\}. \tag{3.51}$$

[9]Mahmood Bidkham. Trenutno radi na: Semnan University, Iran.

Dokaz. [13] Promotrimo najprije sljedeći umnožak:

$$
\begin{aligned}
p(z)(t-z) &= \Big(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\Big)(t-z)\\
&= a_0 t + a_1 z t + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}t + a_n z^n t - a_0 z - a_1 z^2 - \cdots - a_{n-1}z^n - a_n z^{n+1}\\
&= a_0 t + (ta_1 - a_0)z + (ta_2 - a_1)z^2 + \cdots + (ta_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + (ta_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}\\
&= a_0 t + \sum_{k=0}^{n}(ta_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1}, \qquad a_{-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Prethodni umnožak označimo s g, tj.

$$g(z) = p(z)(t-z).$$

Uočavamo da je g polinom stupnja $n+1$, stoga, primjenimo li lemu 1.0.11 na polinom g, dobivamo da se sve njegove nultočke nalaze u krugu

$$|z| \leq \max\left\{t, \sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{|a_n|\, t^{n-k}}\right\}. \tag{3.52}$$

Dokažimo sada da vrijedi

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{ta_k - a_{k-1}}{t^{n-k}a_n}\right| = t. \tag{3.53}$$

Naime,

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{ta_k - a_{k-1}}{t^{n-k}a_n}\right| = \left|\frac{ta_0 - a_{-1}}{t^n a_n} + \frac{ta_1 - a_0}{t^{n-1}a_n} + \frac{ta_2 - a_1}{t^{n-2}a_n} + \cdots + \frac{ta_{n-1} - a_{n-2}}{ta_n} + \frac{ta_n - a_{n-1}}{a_n}\right|\\
= &\left|\frac{1}{t^n a_n}\Big(ta_0 + t(ta_1 - a_0) + t^2(ta_2 - a_1) + \cdots + t^{n-1}(ta_{n-1} - a_{n-2}) + t^n(ta_n - a_{n-1})\Big)\right|\\
= &\left|\frac{1}{t^n a_n}\Big(ta_0 + t^2 a_1 - ta_0 + t^3 a_2 - t^2 a_1 + \cdots + t^n a_{n-1} - t^{n-1}a_{n-2} + t^{n+1}a_n - t^n a_{n-1}\Big)\right|\\
= &\left|\frac{1}{t^n a_n} t^{n+1} a_n\right|\\
= &\ |t|\\
= &\ t,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u pretposljednjem retku iskoristili pretpostavku $t > 0$.

Nadalje, vrijedi:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{ta_k - a_{k-1}}{t^{n-k}a_n}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{ta_k - a_{k-1}}{t^{n-k}a_n}\right|$$

pri čemu je desna strana nejednakosti, nakon što primjenimo svojstva apsolutne vrijednosti i pretpostavku $t > 0$, jednaka

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|}.$$

Dakle,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{ta_k - a_{k-1}}{t^{n-k}a_n}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|}.$$

Odnosno, primjenimo li tvrdnju (3.53) na prethodni zaključak, dobivamo:

$$t \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|}.$$

Stoga je,

$$|z| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|}. \tag{3.54}$$

Nadalje, vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|} = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|} + \sum_{k=\lambda+1}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|} \tag{3.55}$$

i dokazat ćemo da je taj zbroj jednak

$$\frac{1}{|a_n|}\left\{t\left(\frac{|a_0| - a_0}{t^n} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}}\right\} + t\left\{\frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right)\right\}.$$

Najprije,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lambda} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}|a_n|} &= \frac{|ta_0|}{t^n|a_n|} + \frac{|ta_1 - a_0|}{t^{n-1}|a_n|} + \frac{|ta_2 - a_1|}{t^{n-2}|a_n|} + \cdots + \frac{|ta_{\lambda-1} - a_{\lambda-2}|}{t^{n-(\lambda-1)}|a_n|} + \frac{|ta_\lambda - a_{\lambda-1}|}{t^{n-\lambda}|a_n|} \\
&= \frac{1}{|a_n|}\frac{1}{t^n}\left(|ta_0| + t\,|ta_1 - a_0| + t^2\,|ta_2 - a_1| + \cdots + t^{\lambda-1}\,|ta_{\lambda-1} - a_{\lambda-2}| + t^\lambda\,|ta_\lambda - a_{\lambda-1}|\right) \\
&= \frac{1}{|a_n|}\frac{1}{t^n}\Big(|ta_0| + t\,|ta_1 - a_0| + t\left|t^2a_2 - ta_1\right| + \cdots + t\left|t^{\lambda-1}a_{\lambda-1} - t^{\lambda-2}a_{\lambda-2}\right| + mt\left|t^\lambda a_\lambda - t^{\lambda-1}a_{\lambda-1}\right|\Big).
\end{aligned}$$

Sada, na svaki od članova u zagradi, počevši od drugoga na dalje, možemo iskoristiti pretpostavku teorema $t^{\lambda-1}a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq ta_1 \geq a_0$. Stoga vrijedi $\left|t^k a_k - t^{k-1}a_{k-1}\right| = t^k a_k - t^{k-1}a_{k-1}$ za svaki $k = 0, \cdots, \lambda - 1$ pa je izraz u posljednjem retku jednak

$$\frac{1}{|a_n|}\frac{1}{t^n}\left(|ta_0| + t^2a_1 - ta_0 + t^3a_2 - t^2a_1 + \cdots + t^\lambda a_{\lambda-1} - t^{\lambda-1}a_{\lambda-2} + t^{\lambda+1}a_\lambda - t^\lambda a_{\lambda-1}\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{|a_n|}\frac{1}{t^n}\left(|ta_0| - ta_0 + t^{\lambda+1}a_\lambda\right).$$

Sada, budući da je po pretpostavci $t > 0$ vrijedi $|ta_0| = t\,|a_0|$, te budući da svaki član u zagradi sadrži faktor t, isti možemo i izlučiti pa dobivamo

$$\frac{1}{|a_n|}\frac{t}{t^n}\left(|a_0| - a_0 + t^\lambda a_\lambda\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{|a_0| - a_0}{t^n} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}}\right).$$

Dakle,

$$\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} = \frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{|a_0| - a_0}{t^n} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}}\right). \tag{3.56}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\lambda+1}^{n}\frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} &= \frac{|ta_{\lambda+1} - a_\lambda|}{t^{n-(\lambda+1)}\,|a_n|} + \frac{|ta_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}|}{t^{n-(\lambda+2)}\,|a_n|} + \cdots + \frac{|ta_{n-1} - a_{n-2}|}{t\,|a_n|} + \frac{|ta_n - a_{n-1}|}{|a_n|}\\
&= \frac{1}{|a_n|}\left(\frac{|ta_{\lambda+1} - a_\lambda|}{t^{n-(\lambda+1)}} + \frac{|ta_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}|}{t^{n-(\lambda+2)}} + \cdots + \frac{|ta_{n-1} - a_{n-2}|}{t} + \frac{|ta_n - a_{n-1}|}{1}\right)\\
&= \frac{1}{|a_n|}\frac{t}{t^n}\left(t^\lambda\,|ta_{\lambda+1} - a_\lambda| + t^{\lambda+1}\,|ta_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}| + \cdots + t^{n-2}\,|ta_{n-1} - a_{n-2}| + t^{n-1}\,|ta_n - a_{n-1}|\right)\\
&= \frac{1}{|a_n|}\frac{t}{t^n}\left(\left|t^{\lambda+1}a_{\lambda+1} - t^\lambda a_\lambda\right| + \left|t^{\lambda+2}a_{\lambda+2} - t^{\lambda+1}a_{\lambda+1}\right| + \cdots + \left|t^{n-1}a_{n-1} - t^{n-2}a_{n-2}\right| + \left|t^n a_n - t^{n-1}a_{n-1}\right|\right).
\end{aligned}$$

Sada, na svaki od članova u zagradi možemo primjeniti pretpostavku teorema $t^n a_n \leq t^{n-1}a_{n-1} \leq \cdots \leq t^\lambda a_\lambda$. Stoga vrijedi $\left|t^k a_k - t^{k-1}a_{k-1}\right| = t^{k-1}a_{k-1} - t^k a_k$ za svaki $k = \lambda, \cdots, n$ pa je izraz u posljednjem retku jednak

$$\frac{1}{|a_n|}\frac{t}{t^n}\left(t^\lambda a_\lambda - t^{\lambda+1}a_{\lambda+1} + t^{\lambda+1}a_{\lambda+1} - t^{\lambda+2}a_{\lambda+2} + \cdots + t^{n-2}a_{n-2} - t^{n-1}a_{n-1} + t^{n-1}a_{n-1} - t^n a_n\right),$$

odnosno,

$$\frac{1}{|a_n|}\frac{t}{t^n}\left(t^\lambda a_\lambda - t^n a_n\right),$$

tj.

$$\frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right).$$

Dakle,

$$\sum_{k=\lambda+1}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} = \frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right). \tag{3.57}$$

Sada uvrstimo (3.56) i (3.57) u (3.55) te dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} &= \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} + \sum_{k=\lambda+1}^{n} \frac{|ta_k - a_{k-1}|}{t^{n-k}\,|a_n|} \\
&= \frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{|a_0| - a_0}{t^n} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}}\right) + \frac{1}{|a_n|}t\left(\frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right) \\
&= \frac{t}{|a_n|}\left(\frac{|a_0| - a_0}{t^n} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} + \frac{a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right) \\
&= \frac{t}{|a_n|}\left\{\left(\frac{2a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right) + \frac{1}{t^n}\left(|a_0| - a_0\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Uvrstimo li (3.58) u (3.54) dobivamo da sve nultočke polinoma g leže u krugu

$$|z| \leq \frac{t}{|a_n|}\left\{\left(\frac{2a_\lambda}{t^{n-\lambda}} - a_n\right) + \frac{1}{t^n}\left(|a_0| - a_0\right)\right\}.$$

Budući da su sve nultočke polinoma p ujedno i nultočke polinoma g, dokazali smo tvrdnju teorema. □

U sljedećem teoremu promatramo poseban slučaj kada je $t = 1$. Rezultat je precizniji, odnosno nultočke polinoma koji zadovoljavaju navedene pretpostavke nalaze se u kružnom vijencu čiji je vanjski polumjer manji od onoga iz prethodnog teorema - (3.51).

Teorem 3.2.2. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da za neki λ, $0 < \lambda \leq n$ vrijedi*

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{\lambda+1} \leq a_\lambda \geq a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq a_0.$$

Tada se sve nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu (možda degeneriranom)

$$R_2 \leq |z| \leq R_1,$$

s polumjerima

$$R_1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right) + \sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right)^2 + \frac{M_1}{|a_n|}},$$
$$R_2 = \frac{1}{2{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3}\right],$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} M_1 &= -a_n + 2a_\lambda - a_0 + |a_0|, \\ M_2 &= {R_1}^n\left(|a_n|R_1 + 2a_\lambda - a_n - a_0\right), \\ c &= |a_n - a_{n-1}|, \\ b &= a_1 - a_0. \end{aligned}$$

Dokaz. [13] Promotrimo najprije polinom g definiran kao umnožak polinoma $1 - z$ i $p(z)$:

$$\begin{aligned} g(z) &= (1-z)p(z) \\ &= (1-z)\Big(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\Big) \\ &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z - a_1 z^2 - \cdots - a_{n-1}z^n - a_n z^{n+1} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1} \\ &= -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\,z^k + a_0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Potom definirajmo polinom r, pomoću posljednje jednakosti, na sljedeći način:

$$g(z) = -a_n z^{n+1} + r(z). \tag{3.60}$$

Dakle,

$$r(z) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\,z^k + a_0.$$

Nadalje, neka je $q(z) = z^n r\left(\frac{1}{z}\right)$.
Najprije,

$$r\left(\frac{1}{z}\right) = (a_1 - a_0)\frac{1}{z} + (a_2 - a_1)\frac{1}{z^2} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z^{n-1}} + (a_n - a_{n-1})\frac{1}{z^n} + a_0$$

pa je

$$q(z) = z^n\left((a_1 - a_0)\frac{1}{z} + (a_2 - a_1)\frac{1}{z^2} + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})\frac{1}{z^{n-1}} + (a_n - a_{n-1})\frac{1}{z^n} + a_0\right).$$

Odnosno,

$$q(z) = a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^{n-k}.$$

Dokažimo sada da vrijedi

$$|q(z)| \leq M_1 \quad \text{za} \quad |z| = 1. \tag{3.61}$$

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|q(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |q(z)| &= \left|a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^{n-k}\right| \\ &\leq |a_0||z|^n + |a_1 - a_0||z|^{n-1} + |a_2 - a_1||z|^{n-2} + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}||z| + |a_n - a_{n-1}|. \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $|z| = 1$, onda se izraz u posljednjem retku svodi na

$$|a_0| + |a_1 - a_0| + |a_2 - a_1| + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_n - a_{n-1}|,$$

odnosno

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{n}|a_k - a_{k-1}|. \tag{3.62}$$

Rastavimo $\sum_{k=1}^{n}|a_k - a_{k-1}|$ na dvije sume kako bismo mogli iskoristiti pretpostavku teorema:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k - a_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\lambda}|a_k - a_{k-1}| + \sum_{k=\lambda+1}^{n}|a_k - a_{k-1}|.$$

Iskoristimo li pretpostavku $a_\lambda \geq a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq a_0$ dobivamo da je $|a_k - a_{k-1}| = a_k - a_{k-1}$ za svaki $k = 1, \cdots, \lambda$. Stoga je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_{\lambda-1} - a_{\lambda-2} + a_\lambda - a_{\lambda-1} \\ &= -a_0 + a_\lambda. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Sada za $\sum\limits_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}|$ koristimo pretpostavku $a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{\lambda+1} \leq a_\lambda$, stoga je $|a_k - a_{k-1}| = a_{k-1} - a_k$ za svaki $k = \lambda + 1, \cdots, n$. Dakle,

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| &= a_\lambda - a_{\lambda+1} + a_{\lambda+1} - a_{\lambda+2} + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_{n-1} - a_n \\ &= a_\lambda - a_n. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Uvrstimo li tvrdnje (3.63) i (3.64) u (3.62) dobivamo

$$|a_0| - a_0 + a_\lambda + a_\lambda - a_n,$$

odnosno

$$-a_n + 2a_\lambda - a_0 + |a_0|,$$

a to je upravo M_1.

Dakle, za $|z| = 1$ vrijedi $|q(z)| \leq M_1$.

Prema Teoremu o maksimumu modula za svaki z iz otvorenog kruga $|z| < 1$ vrijedi $|q(z)| < M_1$ pa vrijedi i za $z = 0$. Dakle, $q(0) = a_n - a_{n-1}$ i vrijedi $0 \leq |a_n - a_{n-1}| < M_1$. Time smo pokazali da su zadovoljene pretpostavke leme 1.0.16, stoga vrijedi

$$|q(z)| \leq M_1 \frac{M_1|z| + |a_n - a_{n-1}|}{|a_n - a_{n-1}||z| + M_1} \quad \text{za} \quad |z| < 1. \tag{3.65}$$

Za $|z| = 1$ je $M_1 = M_1 \dfrac{M_1|z| + |a_n - a_{n-1}|}{|a_n - a_{n-1}||z| + M_1}$, a to zajedno s tvrdnjom (3.61) dovodi do zaključka da tvrdnja (3.65) vrijedi i za $|z| = 1$.

Dakle, $|q(z)| \leq M_1 \dfrac{M_1|z| + |a_n - a_{n-1}|}{|a_n - a_{n-1}||z| + M_1}$ vrijedi za $|z| \leq 1$.

Odnosno, budući da je $q(z) = z^n r\left(\frac{1}{z}\right)$, za $|z| \leq 1$ vrijedi

$$\left|z^n r\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq M_1 \frac{M_1|z| + |a_n - a_{n-1}|}{|a_n - a_{n-1}||z| + M_1}. \tag{3.66}$$

Ako je $R > 1$, onda je $\left|\frac{1}{R}e^{-i\theta}\right| = \left|\frac{1}{R}\right| < 1$, tj. $\frac{1}{R}e^{-i\theta}$ se nalazi unutar jedinične kružnice za svaki realni θ. Stoga u (3.66) umjesto z uvrstimo $\frac{1}{R}e^{-i\theta}$ pa dobivamo:

$$\left|\left(\frac{1}{Re^{i\theta}}\right)^n r\left(Re^{i\theta}\right)\right| \leq M_1 \frac{M_1\left|\frac{1}{Re^{i\theta}}\right| + |a_n - a_{n-1}|}{|a_n - a_{n-1}|\left|\frac{1}{Re^{i\theta}}\right| + M_1},$$

odnosno, budući da je $\left|e^{in\theta}\right| = 1$ i $|R| > 1$,

$$\frac{\left|r\left(Re^{i\theta}\right)\right|}{R^n} \leq M_1 \frac{M_1 + |a_n - a_{n-1}|R}{|a_n - a_{n-1}| + M_1 R}.$$

Pomnožimo li promatranu nejednakost s $R^n > 0$ dobivamo:

$$\left|r\left(Re^{i\theta}\right)\right| \leq M_1 R^n \frac{M_1 + |a_n - a_{n-1}|R}{|a_n - a_{n-1}| + M_1 R}. \tag{3.67}$$

Prema (3.60) vrijedi: $a_n z^{n+1} = r(z) - g(z)$.

Kada na to djelujemo s apsolutnom vrijednosti, dobivamo:

$$|a_n||z|^{n+1} \leq |r(z)| + |g(z)|,$$

tj.

$$|g(z)| \geq |a_n||z|^{n+1} - |r(z)|.$$

Uvrstimo li u to $z = Re^{i\theta}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right| &\geq |a_n|R^{n+1} - \left|r\left(Re^{i\theta}\right)\right| \\
&\geq |a_n|R^{n+1} - M_1 R^n \frac{M_1 + |a_n - a_{n-1}|R}{|a_n - a_{n-1}| + M_1 R} \\
&= |a_n|R^{n+1} - M_1 R^n \frac{M_1 + cR}{c + M_1 R},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugom koraku iskoristili tvrdnju (3.67).

Izlučimo li sada $\frac{R^n}{M_1R+c}$ na desnoj strani posljednje nejednakosti dobivamo:

$$\frac{R^n}{M_1R+c}\Big((M_1R+c)\,|a_n|R - M_1\,(M_1+cR)\Big),$$

odnosno

$$\frac{R^n}{M_1R+c}\left(M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1-|a_n|)\,R - {M_1}^2\right).$$

Dakle, $\left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right| \geq \frac{R^n}{M_1R+c}\left(M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1-|a_n|)\,R - {M_1}^2\right)$ i sada ćemo dokazati da je desna strana nejednakosti veća od 0 ako je $R > R_1$.

Promatramo $\frac{R^n}{M_1R+c}\left(M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1-|a_n|)\,R - {M_1}^2\right)$.

Prvi faktor je pozitivan budući da je $R > 1$, $c \geq 0$ te vrijedi $M_1 > 0$. Naime, M_1 je pozitivan budući da je dobiven kao suma izraza $|a_k - a_{k-1}|$, $k = 1, \cdots, n$ i $|a_0|$. Kada bi M_1 bio jednak 0 to bi značilo da su svi izrazi $|a_k - a_{k-1}|$ i $|a_0|$ jednaki 0, tj. q bi bio nulpolinom pa bi i r bio nulpolinom, a nije.

Dakle, potrebno je još dokazati da je $M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1-|a_n|)\,R - {M_1}^2 > 0$ za $R > R_1$. Promotrimo pripadnu kvadratnu jednadžbu $M_1|a_n|R^2 - c\,(M_1-|a_n|)\,R - {M_1}^2 = 0$. Njezina rješenja su:

$$R_{1',2'} = \frac{c\,(M_1-|a_n|) \pm \sqrt{c^2(M_1-|a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}}{2M_1|a_n|}.$$

Funkcija je pozitivna ako je $R > R_{2'}$, pri čemu je $R_{2'}$ ono rješenje u kojem je znak ispred korijena +.

Kvadratna nejednadžba je pozitivna i za $R < R_{1'}$. Međutim budući da je korijen iz pripadne diskriminante veći od izraza $c\,(M_1-|a_n|)$ od kojega se oduzima, onda je i cijeli razlomak, odnosno $R_{1'}$ je negativan, dok je $R > 1$. Dakle, takvih $R - ova$ nema.

Sada ćemo dokazati da je $R_{2'} = R_1$. Naime,

$$\begin{aligned}
R_{2'} &= \frac{c\,(M_1 - |a_n|) + \sqrt{c^2(M_1 - |a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}}{2M_1|a_n|} \\
&= \frac{c\,(M_1 - |a_n|)}{2M_1|a_n|} + \sqrt{\frac{c^2(M_1 - |a_n|)^2 + 4{M_1}^3|a_n|}{4{M_1}^2|a_n|^2}} \\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right) + \sqrt{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{|a_n|} - \frac{1}{M_1}\right)^2 + \frac{M_1}{|a_n|}} \\
&= R_1.
\end{aligned}$$

Dakle, za $|z| = R > 1$ je $\left|g\left(Re^{i\theta}\right)\right| > 0$ ako je $R > R_1$. Stoga su nultočke polinoma g u krugu $|z| = R \leq R_1$.

Polinomi g i p su povezani formulom $g(z) = (1 - z)p(z)$ pa su nultočke polinoma g sve nultočke polinoma p i još jedna dodatna $z = 1$. Dakle, za nultočke polinoma p vrijedi $|z| \leq R_1$.

Dokažimo sada da polinom p nema nultočaka unutar $|z| < R_2$.

Definirajmo najprije polinom f, pomoću polinoma g, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
g(z) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1} \\
&= a_0 + f(z). \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^k - a_n z^{n+1}.$$

Sada ćemo dokazati da vrijedi

$$|f(z)| \leq M_2 \quad \text{za} \quad |z| \leq R_1. \qquad (3.69)$$

Primjenom nejednakosti trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti na izraz $|f(z)|$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}\right| \\
&\leq |a_1 - a_0| + |a_2 - a_1||z| + \cdots + |a_n - a_{n-1}||z|^n + |-a_n||z|^{n+1}.
\end{aligned}$$

Specijalno, ako je $|z| \leq R_1$, onda je izraz u posljednjem retku manji ili jednak od

$$|a_1 - a_0| + |a_2 - a_1|R_1 + \cdots + |a_n - a_{n-1}|{R_1}^n + |a_n|{R_1}^{n+1},$$

odnosno

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}|{R_1}^k \tag{3.70}$$

što je pak manje ili jednako od

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + {R_1}^n \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}| \right).$$

Rastavimo li sumu iz prethodnog retka na već opisani način, prethodni redak postaje ekvivalentan sljedećem

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + {R_1}^n \left(\sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| + \sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| \right),$$

odnosno,

$$|a_n|{R_1}^{n+1} + {R_1}^n \left(-a_0 + a_\lambda + a_\lambda - a_n\right).$$

Izlučimo li ${R_1}^n$ dobivamo

$${R_1}^n \left(|a_n|R_1 + 2a_\lambda - a_n - a_0\right),$$

a to je upravo M_2.

Dakle, za $|z| \leq R_1$ vrijedi $|f(z)| \leq M_2$.
Nadalje, $f(0) = 0$ i $f'(0) = a_1 - a_0$ pa prema lemi 1.0.17 vrijedi

$$|f(z)| \leq \frac{M_2|z|}{{R_1}^2} \frac{M_2|z| + {R_1}^2|b|}{M_2 + |b||z|} \quad \text{za} \quad |z| \leq R_1. \tag{3.71}$$

Prema tvrdnji (3.68) vrijedi $a_0 = g(z) - f(z)$. Kada na to djelujemo s apsolutnom vrijednosti dobivamo:

$$|a_0| \leq |g(z)| + |f(z)|$$

pa je

$$|g(z)| \geq |a_0| - |f(z)|.$$

Iskoristimo li nejednakost (3.71) dobivamo da za $|z| \leq R_1$ vrijedi

$$|g(z)| \geq |a_0| - \frac{M_2|z|}{{R_1}^2} \frac{M_2|z| + {R_1}^2|b|}{M_2 + |b||z|}.$$

Izlučimo li $\dfrac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)}$ na desnoj strani prethodne nejednakosti dobivamo da je

$$|g(z)| \geq \frac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)} \left[-|a_0|{R_1}^2\,(M_2 + |z|b) + M_2|z|\left(M_2|z| + {R_1}^2 b\right)\right],$$

odnosno, poredamo li desnu stranu nejednakosti po potencijama od $|z|$:

$$|g(z)| \geq \frac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)} \left[{M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0|\right].$$

Sada ćemo dokazati da je desna strana prethodne nejednakosti veća od 0 ako je $|z| < R_2$.

Dakle, promatramo $\dfrac{-1}{{R_1}^2\,(M_2 + |z|b)} \left[{M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0|\right]$.

Prvi faktor je negativan budući da je nazivnik promatranog razlomka pozitivan - član M_2 je pozitivan jer je tako definiran na stranici 62, on je suma apsolutnih vrijednosti.

Dakle, potrebno je još dokazati da je ${M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0| < 0$. Promotrimo pripadnu kvadratnu jednadžbu ${M_2}^2|z|^2 + {R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)\,|z| - {R_1}^2 M_2|a_0| = 0$. Njen graf je parabola okrenuta prema dolje, a rješenja su:

$$|z|_{1,2} = \frac{-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|) \pm \sqrt{{R_1}^4 b^2 (M_2 - |a_0|)^2 + 4{M_2}^3{R_1}^2|a_0|}}{2{M_2}^2}.$$

Dakle, ta kvadratna jednadžba je negativna za $|z|$ iz intervala $\langle |z|_1, |z|_2 \rangle$ pri čemu je $|z|_2$ ono rješenje u kojem je znak ispred korijena +.

Drugo rješenje $|z|_1$ je negativan broj. Naime, korijen iz pripadne diskriminante je veći od izraza $-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|)$ od kojega se oduzima, stoga je i cijeli razlomak, odnosno $|z|_1$ negativan.

Dakle, uzimamo $|z|$ iz intervala $\langle |z|_1, |z|_2\rangle$ i $|z|$ je nenegativan. To znači da je $|z|$ iz intervala $\langle 0, |z|_2\rangle$, odnosno da je $|z| < |z|_2$.

Dokažimo sada da je $|z|_2 = R_2$. Naime,

$$\begin{aligned} |z|_2 &= \frac{-{R_1}^2 b\,(M_2 - |a_0|) + \sqrt{{R_1}^4 b^2 (M_2 - |a_0|)^2 + 4{M_2}^3{R_1}^2|a_0|}}{2{M_2}^2} \\ &= \frac{1}{{M_2}^2}\left[-{R_1}^2 b\Big(M_2 - |a_0|\Big) + \sqrt{{R_1}^4 b^2\Big(M_2 - |a_0|\Big)^2 + 4\,|a_0|\,{R_1}^2{M_2}^3}\right] \\ &= R_2. \end{aligned}$$

Dakle, za $|z| < R_2$ vrijedi $|g(z)| > 0$. Odnosno, polinom g, a time i polinom p nemaju nultočaka unutar $|z| < R_2$.

Dakle, dokazali smo da se nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $R_2 \leq |z| \leq R_1$, odnosno, dokazali smo tvrdnju teorema. □

U slučaju $\lambda = n$, teorem se svodi na teorem 3.1.2 te precizira rezultat iz teorema 3.1.1. Također, precizira Eneström-Kakeyin teorem u slučaju $\lambda = n$ i $a_0 \geq 0$.

Sljedeći teorem daje informaciju o broju nultočaka unutar kruga polumjera $\dfrac{1}{2}$ onih polinoma čiji koeficijenti koji zadovoljavaju (3.50).

Teorem 3.2.3. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da*

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{\lambda+1} \leq a_\lambda \geq a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq a_0,$$

za neki λ, $0 < \lambda \leq n$, te $a_0 \neq 0$, onda je broj nultočaka polinoma p koje se nalaze unutar kruga $|z| \leq \dfrac{1}{2}$ manji ili jednak od

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{|a_n| + |a_0| - a_n - a_0 + 2a_\lambda}{|a_0|}.$$

Dokaz. [13] Definirajmo polinom g na sljedeći način:

$$\begin{aligned} g(z) &= p(z)(1-z) \\ &= \Big(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\Big)(1-z) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n - a_0 z - a_1 z^2 - a_2 z^3 - \cdots - a_{n-1}z^n - a_n z^{n+1} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + (a_n - a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1} \\ &= -a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, z^k + a_0. \end{aligned}$$

Sada ćemo dokazati da vrijedi

$$|g(z)| \leq |a_n| + |a_0| + 2a_\lambda - a_0 - a_n, \text{ za } |z| \leq 1. \tag{3.72}$$

Primijenimo li svojstva apsolutne vrijednosti na $g(z)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| -a_n z^{n+1} + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_0 \right| \\ &\leq |a_n|\,|z|^{n+1} + |a_1 - a_0|\,|z| + |a_2 - a_1|\,|z|^2 + \cdots + |a_n - a_{n-1}|\,|z|^n + |a_0|\,, \end{aligned}$$

pri čemu je, za $|z| \leq 1$, posljednji redak manji ili jednak od

$$|a_n| + \sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|\,.$$

Sumu iz prethodnog retka ćemo rastaviti na slijedeći način:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| + \sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}|\,.$$

Dakle,

$$|g(z)| \leq |a_n| + |a_0| + \sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| + \sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}|\,. \tag{3.73}$$

Pogledajmo sada čemu su jednake sume iz prethodnog izraza.
Najprije,

$$\sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| = |a_1 - a_0| + |a_2 - a_1| + \cdots + |a_\lambda - a_{\lambda-1}|\,.$$

Iskoristimo li pretpostavku teorema $a_\lambda \geq a_{\lambda-1} \geq \cdots \geq a_0$, dobivamo da je $|a_k - a_{k-1}| = a_k - a_{k-1}$ za svaki $k = 1, \cdots, \lambda$ pa je izraz na desnoj strani u prethodnom retku jednak

$$a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_{\lambda-1} - a_{\lambda-2} + a_\lambda - a_{\lambda-1},$$

odnosno

$$-a_0 + a_\lambda.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| = -a_0 + a_\lambda. \tag{3.74}$$

Potom,

$$\sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| \;=\; |a_{\lambda+1} - a_\lambda| + |a_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}| + \cdots + |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_n - a_{n-1}| \,.$$

Iskoristimo pretpostavku teorema $a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{\lambda+1} \leq a_\lambda$ te dobivamo da je $|a_k - a_{k-1}| = a_{k-1} - a_k$ za svaki $k = \lambda, \cdots, n$. Stoga je prethodni redak jednak

$$a_\lambda - a_{\lambda+1} + a_{\lambda+1} - a_{\lambda+2} + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_{n-1} - a_n,$$

odnosno

$$a_\lambda - a_n.$$

Dakle,

$$\sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| = a_\lambda - a_n. \tag{3.75}$$

Naposlijetku, uvrstimo li (3.74) i (3.75) u (3.73) dobivamo:

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\leq |a_n| + |a_0| + \sum_{k=1}^{\lambda} |a_k - a_{k-1}| + \sum_{k=\lambda+1}^{n} |a_k - a_{k-1}| \\
&= |a_n| + |a_0| - a_0 + a_\lambda + a_\lambda - a_n \\
&= |a_n| + |a_0| - a_0 + 2a_\lambda - a_n.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da vrijedi tvrdnja (3.72).

Pokažimo sada da su zadovoljene pretpostavke teorema 1.0.13. Vrijedi $g(0) = a_0 \neq 0$ te za $|z| \leq 1$ vrijedi $|g(z)| \leq |a_n| + |a_0| - a_0 + 2a_\lambda - a_n$.

Stoga, ako $n\left(\frac{1}{2}\right)$ označava broj nultočaka polinoma g unutar $|z| \leq \frac{1}{2}$, onda prema teoremu 1.0.13 vrijedi:

$$n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} \cdot \log \frac{|a_n| + |a_0| - a_0 + 2a_\lambda - a_n}{|g(0)|},$$

odnosno,

$$n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{|a_n| + |a_0| - a_0 + 2a_\lambda - a_n}{|a_0|}.$$

Nadalje, polinomi p i g su povezani formulom $g(z) = p(z)(1-z)$. Dakle, polinom g ima sve nultočke kao i polinom p te još jednu dodatnu $z = 1$. Međutim, unutar kruga $|z| \leq \frac{1}{2}$ nultočke polinoma g i p se podudaraju, dakle, ima ih isti broj. Stoga zaključujemo da je broj nultočaka polinoma p koje se nalaze unutar kruga $|z| \leq \frac{1}{2}$ manji ili jednak $\frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{|a_n| + |a_0| - a_0 + 2a_\lambda - a_n}{|a_0|}$.
Time je dokaz teorema gotov. □

Pretpostavka prethodnog teorema se u slučaju $\lambda = n$ i $a_0 \geq 0$ svodi na pretpostavku Eneström-Kakeyinog teorema. Stoga dobivamo još jedno profinjenje Eneström-Kakeyinog teorema:

Korolar 3.2.4. *Ako je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom stupnja n takav da vrijedi $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0$, onda se sve nultočke polinoma p nalaze u krugu $|z| \leq 1$, a broj nultočaka u krugu $|z| \leq \frac{1}{2}$ jednak je $\frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{2a_n}{a_0}$.*

Bibliografija

[1] A. Aziz, B. A. Zargar, *Some extensions of Eneström-Kakeya theorem,* Glasnik matematički, 31 (51) (1996), 239-244.

[2] A. Aziz, Q. G. Mohammad, *On the zeros of a certain class of polynomials and related analytic functions,* Journal of mathematical analysis and applications, 75 (1980), 495-502.

[3] A. Aziz, Q. G. Mohammad, *Zero free-regions for polynomials and some generalizations of Eneström-Kakeya theorem,* Canadian mathematical bulletin, 27 (1984), 265-272.

[4] A. Cauchy, *Exercises de mathématique,* Oeuvres, 9 (2) (1829), 122.

[5] A. C. Schaeffer, *Inequalities of A. Markoff and S. Bernstein for polynomials and related functions,* Bulletin of the American Mathematical Society, 47 (1941), 565-579.

[6] A. Hurwitz *Über einen Satz des Harrn Kakeya,* Tôhoku Mathematical Journal, First series, 4 (1913-1914), 626-631.

[7] A. Joyal, G. Labelle, Q. I. Rahman, *On the location of zeros of polynomials,* Canadian mathematical bulletin, 10 (1) (1967), 53-63.

[8] B. Pavković, B. Dakić, *Polinomi,* Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[9] C. F. Gauss, *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen,* Abh. Ges. Wiss Göttingen, 4, 1850.

[10] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions,* Oxford university press, London, 1939.

[11] G. H. Eneström, *Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtyekling tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionslcassa,* Öfversigt af Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 50 (1893), 405-415.

[12] G. H. Eneström, *Remarque sur un théorème relatif aux racines l'equation* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ *où tous les coefficientes a sont réels et positifis,* Tôhoku Mathematical Journal, 18 (1920), 34-36.

[13] K. K. Dewan, M. Bidkham, *On the Eneström-Kakeya theorem,* Journal of mathematical analysis and applications, 180 (1993), 29-36.

[14] K. K. Dewan, N. K. Govil, *On the Eneström-Kakeya theorem,* Journal of appromaximation theory, 42 (1984), 239-244.

[15] M. Marden, *Geometry of polynomials,* Mathematical Surveys Number 3, American mathematical society, 1966.

[16] N. K. Govil, Q. I. Rahman, G. Schmeisser *On the derivative of a polynomial,* Illinois journal of mathematics, 23 (1979), 319-329.

[17] R. B. Gardner, N. K. Govil, *Eneström-Kakeya theorem and some of its generalizations,* Current topics in pure and computational complex analysis, (2014), 171-197.

[18] S. Kakeya, *On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients,* Tôhoku Mathematical Journal, First series, 2 (1912-1913), 140-142.

[19] T. Hayashi, *On a theorem of Mr. Kakeya's,* Tôhoku Mathematical Journal, First series, 2 (1912-1913), 215.

[20] T. Hayashi, *On the roots of an algebraic equation,* Tôhoku Mathematical Journal, First series, 3 (1913), 110-115.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je Eneström-Kakeyin teorem, jedan od osnovnih teorema koji opisuje položaj nultočaka polinoma, i njegove generalizacije. Najprije je iskazan i dokazan sam Eneström-Kakeyin teorem, a potom je dan kratki povijesni osvrt o njegovom nastanku. U spomenutom se teoremu promatraju polinomi s realnim koeficijentima koji su nenegativni i čine rastući niz. Promjenama pretpostavki teorema ili promatranjem posebnih slučajeva drugih teorema vezanih za položaj nultočaka polinoma dolazi se do generalizacija i profinjenja Eneström-Kakeyinog teorema. Pri tome je napravljena podjela na polinome čiji koeficijenti čine rastući niz i na polinome čiji koeficijenti čine niz koji je do nekog člana rastući, a zatim pada.

Summary

The topic of this thesis is the Eneström-Kakeya theorem, one of the basic theorems that describes the position of zeros of a polynomial, and its generalizations. The Eneström-Kakeya theorem is stated and proved in the second chapter. Also, a brief historical overview of its origin is given. In the mentioned theorem, we observe polynomials with real nonnegative monotone increasing coefficients. Generalizations and refinements of the Eneström-Kakeya theorem are made by changing the assumptions of the theorems or observing special cases of other theorems related to the position of the zeros of a polynomial. Our results are divided into two groups. The first group includes results about polynomials whose coefficients form an increasing sequence, while the second group includes results about polynomials whose coefficients form a sequence that is increasing until a certain member and then it is decreasing.

Životopis

Rođena sam 13.1.1995. godine u Novoj Gradišci. Osnovnoškolsko obrazovanje sam započela 2001. godine u Osnovnoj školi Ljudevita Gaja Nova Gradiška. Potom sam, 2009. godine, upisala Gimnaziju Nova Gradiška. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2013. godine te sam iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2018. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.