Vremenske i svjetlosne plohe u Lorentz-Minkowskijevom prostoru

Martinović, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Martinović

VREMENSKE I SVJETLOSNE PLOHE U LORENTZ-MINKOWSKIJEVOM PROSTORU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojim sestrama

Sadržaj

Uvod

U ovom radu cilj nam je proučiti vremenske i svjetlosne ploha Lorentz-Minkowskijevog prostora. Pod pojmom Lorentz-Minkowskijevog prostora podrazumijevamo realne n-dimenzionalne vektorske prostore koji umjesto klasičnog (pozitivno definitnog) skalarnog produkta imaju nedegeneriran simetrični bilinearni funkcional (ubuduće zvanog metrika). Ovdje ćemo se konkretno baviti realnim trodimenzionalnim prostorima zajedno s (nedegeneriranom) metrikom indeksa 1 - taj prostor ćemo ubuduće označavati oznakom $\mathbb{R}^3_1$. Cilj nam je proučiti geometriju tog prostora, definirati i proučiti krivulje i plohe i njihova svojstva. Plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$ ćemo razvrstati u tri tipa: prostorne, vremenske i svjetlosne. Razlog iz kojeg nas zanimaju baš vremenske i svjetlosne plohe ovog prostora jest taj što metrika koju prostor inducira na plohama nije pozitivno definitna, već indefinitna ili degenerirana metrika. Prostorne plohe su geometrijski izomorfne plohama iz klasične trodimenzionalne euklidske geometrije i stoga na te plohe možemo primijeniti poznatu teoriju tog prostora. S druge strane, vremenske i svjetlosne plohe nisu izomorfne plohama euklidskog prostora pa je stoga za njih potrebno posebno razviti teoriju i to je ono čime ćemo se mi baviti.

Kroz cijeli rad često ćemo se referirati na teoriju razvijenu za euklidski prostor pa je stoga preporučljivo poznavanje diferencijalne geometrije tog trodimenzionalnog realnog prostora. Teoriju u ovom radu razvijamo za prostor $\mathbb{R}^3$ zajedno s nedegeneriranom metrikom indeksa 1, no argumentirat ćemo da nam je sasvim dovoljno baviti se prostorom $\mathbb{R}^3$ zajedno s metrikom

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Stoga ćemo ubuduće kada kažemo Lorentz-Minkowsijev prostor, podrazumijevati upravo realni prostor s ovom metrikom. Štoviše, pokazat ćemo da će se s ovom teorijom, uključujući i poznatu teoriju klasične euklidske diferencijalne geometrije, zapravo razviti teorija za proizvoljan trodimenzionalan vektorski prostor zajedno s proizvoljnim simetričnim bilinearnim funkcionalom.

U prvom poglavlju ćemo uvesti osnovne pojmove koji će se prožimati kroz ovaj diplomski rad, argumentirat ćemo da nam je dovoljno razviti teoriju u Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ i zatim ćemo pobliže razmotriti taj prostor. U njemu ćemo uvesti pojam prostornih, vremenskih i svjetlosnih vektora te ćemo definirati i dokazati analogone ključnih pojmova i tvrdnji koje smo imali u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ (poput vektorskog produkta i njegovih svojstava). Ovdje ćemo koristiti poznate tvrdnje linearne algebre i vektorskih prostora te je preporučljivo poznavanje osnovnih svojstava euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$ i njegove metrike.

U drugom poglavlju uvodimo osnovne geometrijske objekte prostora $\mathbb{R}^3_1$ - definiramo krivulje, razvrstavamo ih na prostorne, vremenske i svjetlosne te za njih definiramo Freneteovu bazu. Zatim izvodimo Freneteove jednadžbe i dokazujemo fundamentalne teoreme egzistencije i jedinstvenosti krivulja (koji nisu potpuno analogni euklidskom prostoru). Ovdje će nam biti potrebno poznavanje teorema o rješenju sustava običnih diferencijalnih jednadžbu prvog reda. Teorija krivulja Lorentz-Minkowskijevog prostora bit će nam korisna pri generiranju primjera vremenskih i svjetlosnih ploha kasnije.

Dalje, u trećem poglavlju uvodimo teoriju ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$, gdje je sama definicija plohe sasvim ista kao i u euklidskom trodimenzionalnom prostoru, no ovdje ćemo ih razvrstati na prostorne, vremenske i svjetlosne. Definiramo prvu fundamentalnu formu i Gaussovo preslikavanje obzirom na metriku Lorentz-Minkowskijevog prostora te proučavamo njihova svojstva, računamo diferencijal Gaussovog preslikavanja te definiramo pojmove Gaussove i srednje zakrivljenost. Konačno, uvodimo i drugu fundamentalnu formu i pripadne koeficijente, pomoću kojih izvodimo formule za efektivno računanje (pomoću lokalnih parametrizacija) operatora oblika plohe i navedenih zakrivljenosti. Za kraj, obrađujemo pojmove pravčastih i rotacijskih ploha Lorentz-Minkowskijevog prostora, gdje pronalazimo primjere vremenskih i svjetlosnih ploha, dakle ploha čija je inducirana metrika nedegenerirana indefinitna odnosno degenerirana i time nalazimo primjere ploha kakve nismo mogli sresti u klasičnoj euklidskom prostoru.

Poglavlje 1

Lorentz-Minkowskijev prostor $\mathbb{R}^3_1$

Predmet ovog poglavlja jest trodimenzionalan Lorentz-Minkowskijev prostor - proučit ćemo geometriju koju na njemu inducira nedegenerirana metrika indeksa 1, usporedit ćemo njegova svojstva s euklidskim prostorom (poput vektorskog produkta i ortonormiranih baza), ali ćemo proučiti i neka svojstva koja nemaju euklidski analogon (poput klasifikacije vektora i vektorskih potprostora). U posljednjoj ćemo sekciji proučiti izometrije prostora $\mathbb{R}^3_1$ koje će biti esencijalne u kasnijim poglavljima kada ćemo se baviti geometrijom krivulja i ploha. Da bismo to sve napravili, potrebno je za početak uvesti osnovne pojmove linearne algebre na kojoj se bazira cijela naša teorija i to je predmet iduće sekcije.

1.1 Uvodni pojmovi. Realni prostor s metrikom

U ovoj sekciji cilj je uvesti sve potrebne pojmove za definiciju realnog prostora s metrikom. Gotovo sve definicije i tvrdnje ove sekcije mogu se naći u [6], a sekciju započinjemo definicijom bilinearnog funkcionala.

Definicija 1.1.1. Označimo s V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Za preslikavanje $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ kažemo da je bilinearni funkcional na prostoru V, ako je linearan po svakoj varijabli, to jest, ako vrijedi

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y),\\
&\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2),\\
&\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y),\\
&\varphi(x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

za sve $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V$ i sve $\alpha \in \mathbb{R}$. Kažemo da je φ simetričan bilinearan funkcional, ako još zadovoljava

$$(\forall x, y \in V)\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x),$$

odnosno kažemo da je antisimetričan bilinearan funkcional, ako još zadovoljava

$$(\forall x, y \in V)\ \varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$

Fiksiranjem neke baze $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vektorskog prostora V lako se može vidjeti da je bilinearan funkcional φ jedinstveno određen svojim djelovanjem na toj bazi te njegovo djelovanje možemo zapisati matrično kao

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(a_i, a_j) x_i y_j \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(a_1,a_1) & \ldots & \varphi(a_1,a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_n,a_1) & \ldots & \varphi(a_n,a_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= X^{\mathrm{T}} A Y,
\end{aligned}$$

gdje su X i Y matrični prikazi vektora $x, y \in V$ u danoj bazi $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Primijetimo da naš bilinearni funkcional φ sada možemo interpretirati kao bilinearnu formu u sustavu varijabli $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ te svakim drugim izborom baze vektorskog prostora dobivamo (po definiciji) međusobno kongruentne bilinearne forme. Još kažemo da je matrica A matrica bilinearnog funkcionala φ. Budući da kongruentne bilinearne forme imaju jednak rang (to jest njihove matrice imaju isti rang), onda možemo definirati rang bilinearnog funkcionala kao rang njegove bilinearne forme (to jest rang njegove matrice). U slučaju da je rang bilinearnog funkcionala maksimalan (dakle, jednak n), tada kažemo da je riječ od regularnom, dok u suprotnom kažemo da je riječ o singularnom bilinearnom funkcionalu.

U našoj teoriji bavit ćemo se isključivo sa simetričnim bilinearnim funkcionalima; primijetimo da fiksiranjem proizvoljne baze prostora simetrični bilinearni funkcional zapisujemo kao simetričnu bilinearnu formu (to jest onu bilinearnu formu čija je matrica simetrična). Stoga navodimo nekoliko pojmova i glavnih rezultata iz teorije simetričnih bilinearnih formi. Prvo, može se pokazati da je svaka realna simetrična bilinearna forma kongruentna bilinearnoj formi oblika

$$x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \ldots - x_{p+q} y_{p+q}, \tag{1.1}$$

gdje su $p, q \in \mathbb{N}_0$ nenegativni brojevi takvi da je $p + q$ rang dane bilinearne forme; takvu bilinearnu formu zovemo normalni oblik početne bilinearne forme. Drugo, za simetrične bilinearne forme vrijedi SYLVESTEROV[1] ZAKON INERCIJE[2] koji kaže da je takav normalan oblik početne bilinearne forme jedinstven. Iz ovih rezultata možemo zaključiti da za svaki simetrični bilinearni funkcional na realnom prostoru V možemo izabrati takvu bazu prostora da se taj bilinearni funkcional zapisuje u njegovom normalnom obliku te možemo jednoznačno definirati pojam indeksa bilinearnog funkcionala kao broj negativnih predznaka u njegovom normalnom obliku (to bi u formuli (1.1) bio cijeli broj q).

Navedimo još neke pojmove koji će nam biti potrebni u razvoju teorije.

Definicija 1.1.2. Kažemo da je simetrični bilinearni funkcional $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$

- pozitivno semidefinitan, ako je $(\forall x \in V)\ \varphi(x, x) \geq 0$,
- pozitivno definitan, ako je $(\forall x \in V \setminus \{0\})\ \varphi(x, x) > 0$,
- negativno semidefinitan, ako je $(\forall x \in V)\ \varphi(x, x) \leq 0$,
- negativno definitan, ako je $(\forall x \in V \setminus \{0\})\ \varphi(x, x) < 0$,
- indefinitan, ako nije niti pozitivno niti negativno semidefinitan funkcional.

Napomena 1.1.3. Vrijede i slijedeće karakterizacije danih definicija; označimo li s r rang i s i indeks simetričnog bilinearnog funkcionala $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, tada se može pokazati da je

- φ pozitivno semidefinitan $\iff$ njegov indeks jednak nula
  $(\iff i = 0)$,
- φ pozitivno definitan $\iff$ regularan i pozitivno semidefinitan
  $(\iff r = n$ i $i = 0)$,
- φ negativno semidefinitan $\iff$ njegov indeks jednak njegovom rangu
  $(\iff i = r)$,
- φ negativno definitan $\iff$ regularan i negativno semidefinitan
  $(\iff n = r = i)$,
- φ indefinitan $\iff$ indeks manji od njegova ranga, a veći od nule
  $(\iff 0 < i < r)$.

[1] James Joseph Sylvester, 1814-1897

[2] Ime ovog teorema nema veze s pojmom inercije u fizici, a naziv potječe od Sylvestera, za više informacija o tome pogledati odgovor Billa Dubuquea na [3]

Konačno smo sada spremni formalno uvesti iduću definiciju.

Definicija 1.1.4. Ako je φ simetrični bilinearni funkcional definiran na realnom n-dimenzionalnom prostoru V, onda za uređeni par (V, φ) kažemo da je (realni) prostor s metrikom φ.

Budući da ćemo se ovdje baviti isključivo s regularnim metrikama, za uređeni par (V, φ) još možemo reći da je (realni) pseudounitarni prostor te da je preslikavanje φ pseudoskalarni produkt na V.

Definicija 1.1.5. Kažemo da su dva prostora s metrikom (V_1, φ_1) i (V_2, φ_2) izomorfna, ako postoji izomorfizam vektorskih prostora $f : V_1 \to V_2$ takav da je

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^3_1)\ \varphi_1(x, y) = \varphi_2(f(x), f(y)),$$

to jest preslikavanje f čuva metriku prostora, te u tom slučaju kažemo da je preslikavanje f izometrija između prostora s metrikom (V_1, φ_1) i (V_2, φ_2).

Za kraj definirajmo još nekoliko izraza vezanih za metrike koji se često koriste u literaturi (te ćemo ih stoga i mi nadalje koristiti).

Definicija 1.1.6. Kažemo da je metrika φ

- nedegenerirana, ako je φ regularan bilinearan funkcional,
- degenerirana, ako je φ singularan bilinearan funkcional,
- indefinitna, ako je φ indefinitan bilinearan funkcional,

a isto tako se nasljeđuju i pojmovi matrice, ranga i indeksa metrike φ. Također ćemo govoriti o definitnosti metrike φ kao što smo to definirali u Definiciji 1.1.2.

Sada, kako su svi n-dimenzionalni prostori nad $\mathbb{R}$ međusobno izomorfni, lako možemo vidjeti da je dovoljno ograničiti se na proučavanje prostora s metrikom oblika $(\mathbb{R}^n, \psi)$ (naprosto definiramo metriku ψ na način da je izomorfizam vektorskih prostora $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$ ujedno i izomorfizam prostora s metrikom). Takve prostore zovemo pseudoeuklidski prostori te oni čine osnovni model za proučavanje pseudoriemannovskih mnogostrukosti. Kao što smo najavili i u uvodu, u ovom ćemo se radu baviti isključivo s trodimenzionalnim prostorima - dakle, od sada nadalje se ograničavamo samo na prostore $(\mathbb{R}^3, \psi)$.

Već smo ustvrdili da za danu metriku ψ na $\mathbb{R}^3$ postoji baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ u kojoj se ta metrika zapisuje u normalnom obliku:

$$\psi(x, y) = \varepsilon_1\, x_1y_1 + \varepsilon_2\, x_2y_2 + \varepsilon_3\, x_3y_3, \qquad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, gdje su (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) prikazi vektora x i y u navedenoj bazi respektivno. Slučaj u kojem su svi ε_i jednaki 1 je upravo slučaj euklidske geometrije, to jest u tom slučaju je $(\mathbb{R}^3, \psi)$ izomorfan trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa klasičnom euklidskom metrikom. Za slučaj da su svi ε_i jednaki -1, tada je ustvari prostor $(\mathbb{R}^3, -\psi)$ izomorfan euklidskom trodimenzionalnom prostoru pa primjenom rezultata iz te teorije na metriku $-\psi$ indirektno dobivamo sve geometrijske informacije o prostoru s metrikom ψ. Dalje, situacija da je samo jedan od ε_i jednak -1 jest ono čime ćemo se baviti u ovom radu, dakle radit ćemo s prostorom koji je snabdjeven nedegeneriranom metrikom indeksa 1. Konačno, pitanje metrike kojoj su dva broja ε_i jednaka -1 rješavamo tako da primijetimo da je tada metrika $-\psi$ upavo ona s jednim minusom u normalnom obliku funkcionala - tada za nju možemo primijeniti teoriju razvijenu u ovom radu i na taj način dobiti sve geometrijske informacije o prostoru $\mathbb{R}^3$ s metrikom ψ.

Zaključimo: da bismo obradili pojam trodimenzionalnog pseudounitarnog prostora, uz poznatu teoriju euklidskog realnog prostora, dovoljno nam je još obraditi prostor $(\mathbb{R}^3, \psi)$ s nedegeneriranom metrikom indeksa 1. Konkretno, mi ćemo se u ovom radu baviti isključivo s metrikom $\langle\ ,\ \rangle$ definiranoj na $\mathbb{R}^3$ s

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

gdje su (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) prikazi vektora x i y u kanonskoj bazi $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Razlog zašto nam je dovoljno baviti se samo prostorom $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ jest taj što za bilo koji prostor $(\mathbb{R}^3, \psi)$ s nedegeneriranom metrikom indeksa 1 tada imamo dobro definiran izomorfizam prostora s metrikom $\Psi : a_i \mapsto e_i$ čime teoriju razvijenu u $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ lagano prenosimo na $(\mathbb{R}^3, \psi)$.

1.2 Lorentz-Minkowskijev prostor $\mathbb{R}^3_1$

Kao što smo obrazložili u uvodnoj sekciji ovo poglavlja, do kraja ovog rada bavit ćemo se realnim trodimenzionalnim prostorom i metrikom koju sada formalno definiramo:

Definicija 1.2.1. Na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ definiramo preslikavanje

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

za sve $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Lako vidimo da je $\langle\ ,\ \rangle$ simetrični bilinearni funkcional čime zaključujemo da je

$$\mathbb{R}^3_1 := \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\big)$$

prostor s metrikom kojeg ćemo zvati (trodimenzionalni) Lorentz-Minkowskijev prostor s Lorentzovom metrikom $\langle\, , \,\rangle$ - nekad ćemo ju zvati samo metrika ili, alternativno, Lorentzov pseudoskalarni produkt odnosno samo pseudoskalarni produkt. Nadalje, definiramo Lorentzovu normu vektora $x \in \mathbb{R}^3_1$ kao realni broj

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x\rangle|},$$

te kažemo da je $x \in \mathbb{R}^3_1$ jedinični vektor, ako je $\|x\| = 1$.

Za početak ističemo neka svojstva Lorentzove metrike i Lorentzove norme.

Napomena 1.2.2. Za sve vektore $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3_1$ i sve skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(3) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,

(4) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,

(5) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$.

Također, za sve $x \in \mathbb{R}^3_1$ i sve $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(6) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(7) $\|x\| \geq 0$.

Konačno, vrijedi i iduća jednostavna ekvivalencija:

(8) x jedinični vektor u $\mathbb{R}^3_1 \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle = \pm 1$.

Primjer 1.2.3. Primijetimo da Lorentzov pseudoskalarni produkt ne zadovoljava klasični oblik Cauchy[3]-Schwarz[4]-Bunyakovsky[5] nejednakosti (CSB) - naime, uzmemo li $x = (1, 1, 0)$ i $y = (0, 1, 1)$ lako možemo vidjeti da je

$$\langle x, y\rangle^2 = 1 \nleq 2 \cdot 0 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Istaknimo još da $\|\cdot\|$ nije norma prostora $\mathbb{R}^3_1$ u klasičnom smislu jer ona ne razlikuje točke, to jest ne zadovoljava ekvivalenciju

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

[3]Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

[4]Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921

[5]Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804-1889

što lako možemo vidjeti uzmemo li na primjer $x = (0, 1, 1)$. Štoviše, preslikavanje $\|\cdot\|$ nije niti polunorma na $\mathbb{R}^3_1$ jer ne zadovoljava nejednakost trokuta, a to se možemo uvjeriti na primjer s

$$\|(0,1,2) + (0,0,1)\| = 2\sqrt{2} \not\leq \sqrt{3} + 1 = \|(0,1,2)\| + \|(0,0,1)\|.$$

Ovo pokazuje kako Lorentzova norma nije norma u klasičnom smislu te da pojmovima Lorentzove metrike i norme ne možemo na klasičan način generirati topologiju na $\mathbb{R}^3_1$ (kao što smo to radili za euklidski unitaran prostor). Iz ovog razloga se Lorentzova norma često naziva i *pseudonorma*.

Budući da ćemo u više navrata ovaj Lorentz-Minkowskijev prostor uspoređivati s euklidskim prostorom posebno uvodimo oznaku za standardni euklidski skalarni produkt

$$\langle x, y\rangle_{\mathrm{E}} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

i standardnu euklidsku normu

$$\|x\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathrm{E}}}.$$

Istaknimo ovdje ponovno da je, kao što smo vidjeli u uvodnoj sekciji, $\langle\ ,\ \rangle$ nedegenerirana metrika indeksa 1, dok je s druge strane $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}}$ pozitivno definitna metrika. Primijetimo i slijedeće:

Napomena 1.2.4. Za proizvoljne vektore $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3\\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + (-x_3)y_3\\ &= \big\langle (x_1,x_2,-x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle_{\mathrm{E}}.\end{aligned}$$

Odavde možemo iščitati da Lorentzov pseudoskalarni produkt vektora možemo zapisati preko euklidskog skalarnog produkta i obratno - u tom slučaju u produktu vektor (x_1, x_2, x_3) mijenjamo vektorom $(x_1, x_2, -x_3)$ što je zapravo samo refleksija vektora obzirom na xy-ravninu. Napomenimo da smo sasvim istu stvar mogli napraviti i na vektoru (y_1, y_2, y_3).

U ovom ćemo paragrafu sada iznijeti vrlo kratki povijesni pregled Lorentz-Minkowskijevih prostora čime ćemo dobiti motivaciju za narednu definiciju. Lorentz[6] je još na samom kraju 19. st. proučavao odnose koordinata četverodimenzionalnog prostora koji se sastojao od vektora (x, y, z, t) kod kojih su prve tri koordinate

[6] Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928

predstavljale točku u prostoru, a koordinata t je predstavljala vrijeme i stoga dani prostor zovemo prostorvrijeme. Početkom 20. st. su Poincaré[7] i Minkowski[8] nastavili njegovo proučavanje definiranjem metrike

$$\langle(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)\rangle_{\mathrm{M}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - ct_1t_2$$

(gdje je c brzina svjetlosti) kojom su uveli način mjerenja prostornovremenske udaljenosti u danom prostorvremenu. Ovaj prostor stoga glavnu primjenu nalazi u Einsteinovoj[9] specijalnoj teoriji relativnosti. Jedan od postulata Einsteinove specijalne teorije relativnosti jest da je brzina svjetlosti konačna pa se postavlja pitanje koje točke prostorvremena mogu i koje ne mogu utjecati na neku drugu točku u prostorvremenu. Tu nam u igru ulazi metrika $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{M}}$ koja nam daje odgovor na to pitanje relativno na ishodište koordinatnog sustava. Naime, za neku informaciju koja se nalazi u točki w prostorvremena vrijedi da

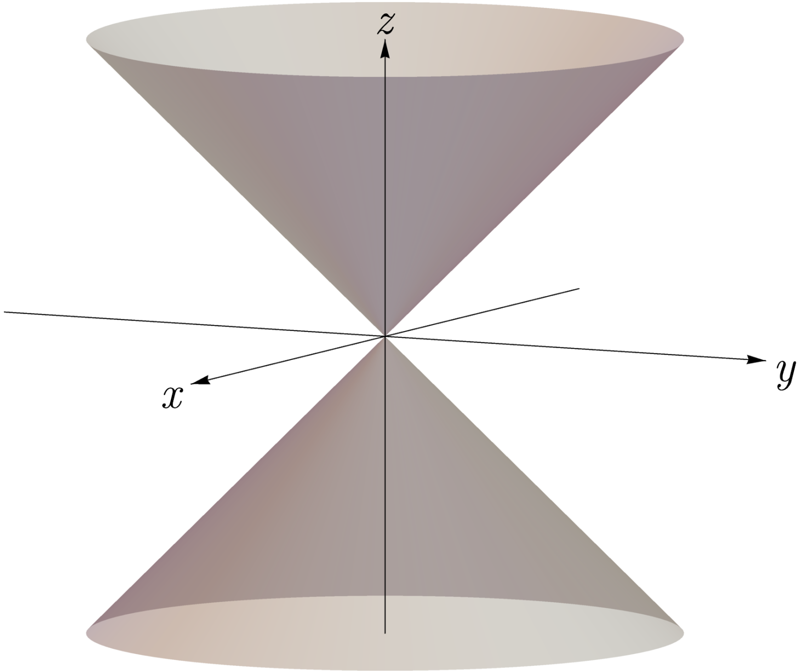
- može doći u ishodište koordinatnog sustava kretanjem brzinom manjom od brzine svjetlosti ako i samo ako je $\langle w, w\rangle_{\mathrm{M}} < 0$,
- može doći u ishodište koordinatnog isključivo kretanjem brzinom svjetlosti ako i samo ako je $\langle w, w\rangle_{\mathrm{M}} = 0$,
- ne može doći u ishodište koordinatnog sustava niti na njega utjecati na bilo kakav način ako i samo ako je $\langle w, w\rangle_{\mathrm{M}} > 0$.

Iz ovih razmatranja možemo zaključiti da naš trodimenzionalni Lorentz-Minkowskijev prostor $\mathbb{R}^3_1$ možemo interpretirati kao prostor koji se sastoji od vektora (x, y, z) gdje prve dvije koordinate predstavljaju točku prostora, a zadnja koordinata predstavlja vrijeme. Dakle, vizualni prikaz trodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^3_1$ predstavljat će evoluciju dvodimenzionalnog prostora (xy-ravnina i njoj paralelne ravnine) kroz vrijeme (z-os). Motivirani ovom diskusijom definiramo iduće pojmove.

Definicija 1.2.5. Klasificiramo vektore Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$ na sljedeći način: kažemo da je $x \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\}$

- <u>vremenski vektor</u>, ako je $\langle x, x\rangle < 0$,
- <u>svjetlosni vektor</u>, ako je $\langle x, x\rangle = 0$,
- <u>prostorni vektor</u>, ako je $\langle x, x\rangle > 0$.

[7] Jules Henri Poincaré, 1854-1912
[8] Hermann Minkowski, 1864-1909
[9] Albert Einstein, 1879-1955



Slika 1.1: Svjetlosni stožac $\mathcal{C}$

Također, posebno definiramo skup svih svjetlosnih vektora s

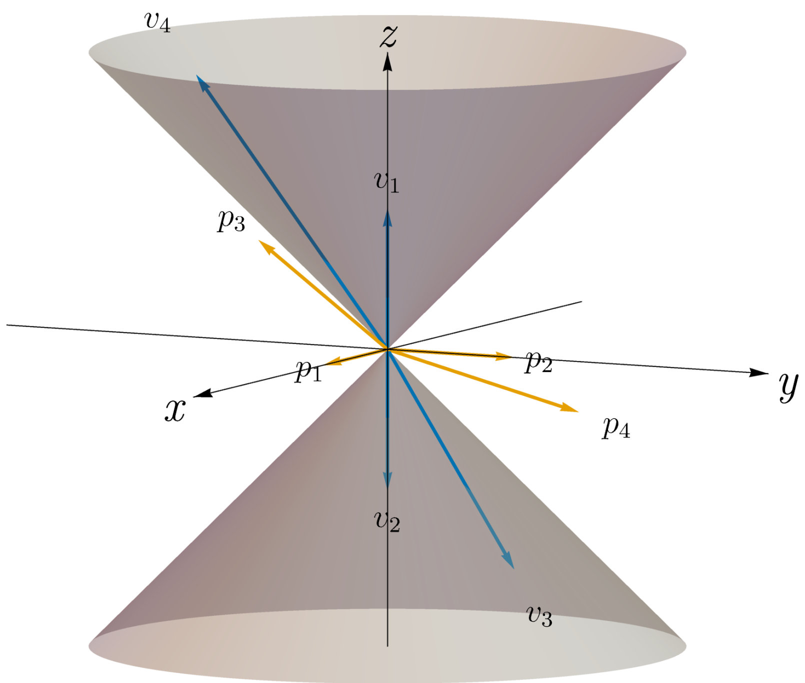
$$\mathcal{C} = \big\{x \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; \langle x, x\rangle = 0\big\}$$

te ćemo ga ubuduće zvati svjetlosni stožac prostora $\mathbb{R}^3_1$. Istaknimo za kraj da se nulvektor obično definira kao prostorni vektor, no mi ga u ovom radu nećemo posebno svrstavati kao takvog da ga kasnije ne bismo morali (u više navrata) posebno isključivati iz skupa svih prostornih vektora kod nekih tvrdnji.

Prvo opravdavamo ime *svjetlosni stožac* - naime, taj skup možemo raspisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle = 0\big\} \\
&= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\big\} \\
&= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\big\}.
\end{aligned}$$

Dobivena jednadžba koju zadovoljavaju vektori skupa $\mathcal{C}$ je upravo jednadžba stošca,



Slika 1.2: Prostorni i vremenski vektori p_i i v_i

što nam zorno pokazuje Slika 1.1. Dakle, svjetlosni vektori prostora $\mathbb{R}^3_1$ su točke na svjetlosnom stošcu.

Koji bi onda bili prostorni i vremenski vektori? Analognim raspisivanjem jednakosti $\langle x, x\rangle > 0$ odnosno $\langle x, x\rangle < 0$ po koordinatama lako se možemo uvjeriti da su vremenski vektori oni koji se nalaze „unutar" svjetlosnog stošca, dok su prostorni vektori „izvan" svjetlosnog stošca. Zorno prikazujemo nekoliko prostornih i vremenskih vektora Slikom 1.2 - tu su istaknuti prostorni vektori

$$p_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad p_2 = (0, 1, 0) \quad , \quad p_3 = (2, 0, 1) \quad , \quad p_4 = (-1, 1, -1/2)$$

i vremenski vektori

$$v_1 = (0, 0, 1) \quad , \quad v_2 = (0, 0, -1) \quad , \quad v_3 = (0, 1, -3/2) \quad , \quad v_4 = (1, -1, 2).$$

Istaknimo neke osnovne primjedbe vezane uz uvedenu definiciju -

Napomena 1.2.6. Vrijede naredne tvrdnje:

- svaka dva kolinearna nenul vektora su istog tipa (prostornog, vremenskog, svjetlosnog),

- za svaki prostorni ili vremenski vektor postoji jedinični vektor kolinearan s njim,
- refleksijom obzirom na xy-ravninu vektori ostaju istog tipa (prostornog, vremenskog, svjetlosnog).

Da se uvjerimo u prvu tvrdnju uzmimo dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\}$ za koja pretpostavimo da su kolinearni. Tada postoji neki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koji je $x = \alpha y$ pa čisto računski možemo dobiti da je

$$\langle x, x\rangle = \langle \alpha y, \alpha y\rangle = \alpha^2 \langle y, y\rangle;$$

budući da je $\alpha \neq 0$ odavde zaključujemo da su $\langle x, x\rangle$ i $\langle y, y\rangle$ istog predznaka odnosno u slučaju da je jedan broj jednak 0 tada je i drugi također jednak 0. Iz ovoga dakle zaključujemo da su x i y zaista vektori istog tipa.
Da bismo provjerili da vrijedi druga točka, uzmimo proizvoljan $x \in \mathbb{R}^3_1$ te pretpostavimo da je on prostorni ili vremenski vektor. Promotrimo vektor λx, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, te potražimo uvjete na λ za koje je λx jedinični. Prvo, po Napomeni 1.2.2 imamo:

$$\lambda x \text{ jedinični vektor} \iff \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \pm 1,$$

no budući da su λx i x kolinearni, tada po prvoj točki zaključujemo da je

$$\lambda x \text{ jedinični vektor} \iff \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \operatorname{sgn}(\langle x, x\rangle),$$

gjde sgn prestavlja signum funkciju. To sada dalje raspisujemo s

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \operatorname{sgn}(\langle x, x\rangle) &\iff \lambda^2 \langle x, x\rangle = \operatorname{sgn}(\langle x, x\rangle) \\
&\iff \lambda^2 = \frac{1}{|\langle x, x\rangle|} \\
&\iff \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{|\langle x, x\rangle|}} \\
&\iff \lambda = \pm \frac{1}{\|x\|},
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj ekvivalenciji dijelili s $\langle x, x\rangle$ (što možemo jer x nije svjetlosni niti nulvektor) te smo u zadnjoj ekvivalenciji iskoristili definiciju Lorentzove norme vektora. Prema tome, zaključujemo da su $\frac{x}{\|x\|}$ i $-\frac{x}{\|x\|}$ dva jedinična vektora kolinearna s x što smo i htjeli pokazati. Istaknimo još ovdje da naziv *Lorentzova norma* sada ima smisla, budući da normiranjem vektora Lorentzovom normom dobivamo jedinični vektor.

Konačno, da se uvjerimo u treću tvrdnju uzmimo proizvoljni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1$ - tada je njegova refleksija vektor $(x_1, x_2, -x_3)$ pa računamo:

$$\begin{aligned}\big\langle (x_1, x_2, -x_3), (x_1, x_2, -x_3) \big\rangle &= x_1^2 + x_2^2 - (-x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ &= \big\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \big\rangle.\end{aligned}$$

Iz ovog izraza se jasno vidi da vektori (x_1, x_2, x_3) i $(x_1, x_2, -x_3)$ moraju biti istog tipa i time zaključujemo ovu napomenu.

Analogno definiciji iz euklidskog prostora sada uvodimo pojam ortogonalnosti u Lorentz-Minkowskijevom prostoru.

Definicija 1.2.7. Za par vektora $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da su Lorentz-ortogonalni (ili samo ortogonalni), ako je $\langle x, y \rangle = 0$. Također, za par ortogonalnih vektora x i y uvodimo oznako $x \perp y$.

Ako ćemo to svojstvo uspoređivati s ortogonalnošću u euklidskom prostoru, onda ćemo to analogno svojstvo označavati oznakom $\perp^{\mathrm{E}}$. Istaknimo kako ćemo bolje shvaćanje ortogonalnosti u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ steći nešto kasnije kada ćemo proučavati ortogonalne komplemente vektorskih potprostora, a za sada ćemo samo istaknuti iduću napomenu.

Napomena 1.2.8. Vrijedi:

- nulvektor i svjetlosni vektori su svi vektori koji su ortogonalni sami sebi,
- ako su dva svjetlosna vektora kolinearna, tada su oni i ortogonalni,
- ako su dva vektora Lorentz-ortogonalna, tada reflektiranjem jednog od vektora obzirom na xy-ravninu dobivamo par vektora ortogonalnih obzirom na euklidsku metriku, a vrijedi i obratna tvrdnja.

Prvu i treću točku nećemo posebno raspisivati kako te tvrdnje slijede jednostavno iz Definicije 1.2.5 te Napomene 1.2.4. Komentirajmo ukratko drugu točku: ako su s_1 i s_2 dva kolinearna svjetlosna vektora, tada postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $s_2 = \lambda s_1$ - sada kratkim računom koristeći bilinearnost metrike možemo vidjeti da je

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \langle s_1, \lambda s_1 \rangle = \lambda \langle s_1, s_1 \rangle = 0,$$

što pokazuje da su s_1 i s_2 međusobno ortogonalni vektori.

Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3_1$

Idući nam je cilj uvesti pojam vektorskog produkta u $\mathbb{R}^3_1$ isto kao što smo to imali u euklidskom prostoru; označimo euklidski vektorski produkt sa $\times_{\mathrm{E}}$. Obrazložimo da nam ovdje nije korisno direktno primijeniti euklidsku definiciju vektorskog produkta $\times_{\mathrm{E}}$ - to znači definirati vektorski produkt vektora iz $\mathbb{R}^3_1$ kao vektor duljine jednake umnošku normi vektora i sinusa (euklidskog) kuta među njima u smjeru određenim pravilom desne ruke. Na primjer, takvim vektorskim umnoškom vektora $(0, 1, 0)$ i $(\sqrt{2}, 0, 1)$ bismo dobili vektor $(1, 0, -\sqrt{2})$ za koji lako vidimo da nije Lorentz-ortogonalan vektoru $(\sqrt{2}, 0, 1)$:

$$\big\langle(\sqrt{2}, 0, 1), (1, 0, -\sqrt{2})\big\rangle = \sqrt{2} + 0 - \big(-\sqrt{2}\big) = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Stoga nam je cilj definirati takav vektorski produkt u $\mathbb{R}^3_1$ koji bi poštivao geometriju metrike $\langle\ ,\ \rangle$ i to možemo postići na slijedeći način. Naime, prisjetimo se kako u euklidskom slučaju vrijedi idući izraz za mješoviti produkt:

$$\langle x \times_{\mathrm{E}} y, z\rangle_{\mathrm{E}} = \det(x, y, z), \tag{1.2}$$

gdje $\det(x, y, z)$ predstavlja determinantu matrice čiji stupci čine vektori x, y i z. Primijetimo da se lako pokaže da je euklidski vektorski produkt $\times_{\mathrm{E}}$ jedinstveno preslikavanje $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ koje zadovoljava izraz (1.2). Ovakva karakterizacija vektorskog produkta nam odgovara pošto uključuje metriku prostora zbog čega možemo očekivati kompatibilnosti s geometrijom proučavanog prostora.

Definicija 1.2.9. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ proizvoljni vektori. Definiramo vektor $x \times y$ kao jedinstveni vektor $w \in \mathbb{R}^3_1$ koji zadovoljava relaciju

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle z, w\rangle = \det(x, y, z). \tag{1.3}$$

Time definiramo preslikavanje

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$$

te ga zovemo <u>vektorski produkt</u> (nekad ćemo reći i <u>Lorentzov vektorski produkt</u>).

Ovdje je potrebno provjeriti da je definicija dobra, to jest da zaista postoji jedinstveni vektor w koji zadovoljava (1.3). Primijetimo da je ova tvrdnja svojevrsna verzija Rieszovog teorema o reprezentaciji (koji nam je od prije poznat iz Linearne algebre), no njega ovdje ne možemo direktno primijeniti pošto $\mathbb{R}^3_1$ nije unitaran prostor, već pseudounitaran. Egzistenciju i jedinstvenost ćemo u ovom slučaju pokazati direktno računanjem preko koordinata. Naime, s jedne strane imamo

$$\det(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3.$$

S druge strane možemo zapisati

$$\langle z, w\rangle = z_1w_1 + z_2w_2 - z_3w_3.$$

Izjednačavanjem tih dviju jednakosti dobivamo da je

$$w_1z_1 + w_2z_2 - w_3z_3 = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \tag{1.4}$$

iz čega zaljučujemo da uzimanjem

$$w = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_2y_1 - x_1y_2)$$

nalazimo vektor w koji zadovoljava uvjet (1.3) te također vidimo da je takav w jedinstveno određen uzimajući vektore kanonske baze e_1, e_2, e_3 na mjesto vektora z u (1.4). Time konačno slijedi da je Definicija 1.2.9 dobra te zaključujemo da za proizvoljne vektore $x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$ vrijedi

$$\langle x \times y, z\rangle = \det(x, y, z). \tag{1.5}$$

Proučimo sada osnovna svojstva ovog vektorskog preslikavanja.

Napomena 1.2.10. Za početak izvodimo formulu za računanje ovog novodefiniranog vektorskog produkta koja je zapravo analogon takve formule u euklidskom slučaju. Prvo primijetimo da $x \times y$ možemo zapisati na slijedeći način:

$$\begin{aligned} x \times y &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_2y_1 - x_1y_2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

što sada možemo simbolički zapisati kao

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Sjetimo se da je u euklidskom slučaju takva formula glasila:

$$x \times_{\mathrm{E}} y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

iz čega možemo vidjeti da je vektor $x \times y$ zapravo jednak vektoru $x \times_{\mathrm{E}} y$ nakon refleksije obzirom na xy-ravninu.

Refleksiju vektora obzirom na xy-ravninu možemo prikazati i matrično. Zaista, uzmemo li proizvoljan $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1$, tada lako vidimo da je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Stoga, definiramo oznaku

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

te zaključujemo da refleksiju vektora $x \in \mathbb{R}^3_1$ obzirom na xy-ravninu možemo zapisati s Jx. Prema tome, tvrdnju prethodne Napomene 1.2.10 sada možemo zapisati kao

$$x \times y = J(x \times_{\mathrm{E}} y).$$

Primijetimo da množenje matricom J ovdje može i ući u euklidski vektorski produkt - preciznije, euklidski vektorski produkt vektora Jy i Jx je jednak vektoru $J(x \times_{\mathrm{E}} y)$. To se možemo uvjeriti proučavanjem pravila desne ruke, a mi ćemo tu tvrdnju dokazati algebarski:

Lema 1.2.11. Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ vrijedi jednakost:

$$(Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx) = J(x \times_{\mathrm{E}} y).$$

Posebno, zaključujemo da je

$$x \times y = (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx).$$

Još istaknimo ovdje da sada možemo pisati i

$$\langle x, y\rangle = \langle Jx, y\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, Jy\rangle_{\mathrm{E}}.$$

DOKAZ Neka su $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ dva proizvoljna vektora iz $\mathbb{R}^3_1$. S jedne strane, koristeći Napomenu 1.2.10 imamo

$$x \times_{\mathrm{E}} y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

pa množenjem matricom J slijedi

$$J(x \times_{\mathrm{E}} y) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

S druge strane, jasno imamo $Jy = (y_1, y_2, -y_3)$ i $Jx = (x_1, x_2, -x_3)$ pa koristeći tvrdnje iste NAPOMENE slijedi da je

$$(Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx) = \left(\begin{vmatrix} y_2 & -y_3 \\ x_2 & -x_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} y_1 & -y_3 \\ x_1 & -x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \right).$$

Direktnim računom sada se može provjeriti da su vektori s desne strane u posljednje dvije jednakosti međusobno jednaki (ili, alternativno, koristeći prikladna svojstva determinante matrica) iz čega zaista slijedi

$$J(x \times_{\mathrm{E}} y) = (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx).$$

Druga tvrdnja iz iskaza slijedi direktno primjenom jednakosti $x \times y = J(x \times_{\mathrm{E}} y)$, dok zadnja tvrdnja slijedi odmah iz diskusije napravljene u NAPOMENI 1.2.4 čime je ovaj dokaz zaključen. □

Ovime smo našli efektivan algebarski način za zapisivanje Lorentzove metrike i Lorentzovog vektorskog produkta preko klasičnog euklidskog skalarnog i vektorskog produkta. To će nam se pokazati izrazito korisno nešto kasnije kada ćemo dokazivati neka svojstva Lorentzove metrike i Lorentzovog vektorskog produkta koristeći poznata analogna svojstva pripadnih preslikavanja u euklidskom prostoru.

Za početak dokazujemo neka svojstva vektorskog produkta $\times$ i njegovog odnosa s metrikom $\langle\ ,\ \rangle$ čije analogone u euklidskom slučaju zapisujemo sasvim isto. Pri dokazivanju tih rezultata koristit ćemo dobro poznata svojstva determinante koja navodimo bez dokaza u idućoj lemi.

Lema 1.2.12. Za proizvoljne vektore $x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$ neka $\det(x, y, z)$ predstavlja determinantu matrice kojoj su stupci redom vektori x, y i z. Tada za preslikavanje

$$\mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x, y, z) \mapsto \det(x, y, z)$$

možemo reći da je alternirajuće 3-multilinearno preslikavanje, to jest ono je linearno po svakom argumentu te zamjenom bilo koja dva vektora determinanta matrice mijenja predznak. Posebno, determinanta matrice koja ima dva ista stupca jednaka je 0 te vrijedi ekvivalencija: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3_1)\ \det(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow \{x, y, z\}$ linearno zavisan skup.

Propozicija 1.2.13. Za sve vektore $x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$ i sve skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijede slijedeća svojstva

(1) $\begin{array}{l} x \perp x \times y, \\ y \perp x \times y, \end{array}$

(2) $x \times y = -y \times x$,

(3) $\langle x \times y, z\rangle = \langle x, y \times z\rangle$, (mješoviti produkt vektora)

(4) $(\alpha x) \times y = x \times (\alpha y) = \alpha(x \times y)$,

(5) $\begin{matrix} (x+y) \times z = x \times z + y \times z \\ x \times (y+z) = x \times y + x \times z \end{matrix}$

(6) $x \times y = 0 \Longleftrightarrow x$ i y kolinearni vektori.

<u>DOKAZ</u> Fiksirajmo vektore x i y te skalar α kao što je zadano pa dokazujemo tvrdnje uz pomoć LEME 1.2.12.

$\boxed{1}$ Prva tvrdnja slijedi direktno koristeći formulu (1.5) tako da na mjesto vektora z stavimo baš vektore x i y. Zaista, imamo

$$\langle x \times y, x\rangle = \det(x, y, x) \quad \text{i} \quad \langle x \times y, y\rangle = \det(x, y, y),$$

iz čega direktno slijedi $\langle x \times y, x\rangle = 0$ i $\langle x \times y, y\rangle = 0$ (jer je determinanta matrice koja ima dva ista stupca jednaka 0) što po definiciji znači upravo $x \times y \perp x$ i $x \times y \perp y$.

$\boxed{2}$ Koristeći formulu (1.5), za proizvoljan $z \in \mathbb{R}^3_1$ direktno možemo računati:

$$\begin{aligned}\langle x \times y, z\rangle &\overset{1.5}{=} \det(x, y, z) = -\det(y, x, z) \overset{1.5}{=} -\langle y \times x, z\rangle \\ &= \langle -y \times x, z\rangle,\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili svojstvo da determinanta matrice mijenja predznak međusobnom zamjenom dva stupca matrice, dok smo u zadnjoj jednakosti koristili linearnost metrike po prvoj varijabli. No budući da je vektor $x \times y$ jedinstveni vektor koji zadovoljava izraz (1.5) za sve $z \in \mathbb{R}^3_1$, koristeći dobivene jednakosti zaključujemo da mora biti upravo $x \times y = -y \times x$.

$\boxed{3}$ Fiksiramo $z \in \mathbb{R}^3_1$ te računamo direktno

$$\begin{aligned}\langle x \times y, z\rangle &\overset{1.5}{=} \det(x, y, z) = -\det(y, x, z) = \det(y, z, x) \\ &\overset{1.5}{=} \langle y \times z, x\rangle\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj i trećoj jednakosti ponovno koristili svojstvo da zamjenom dva stupca matrice determinanta mijenja predznak.

$\boxed{4}$ Budući da je determinanta linearna po stupcima matrice (LEMA 1.2.12), možemo direktno računati:

$$\begin{aligned}(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle (\alpha x) \times y, z\rangle &\overset{1.5}{=} \det(\alpha x, y, z) = \alpha \det(x, y, z) \overset{1.5}{=} \alpha\langle x \times y, z\rangle \\ &= \langle \alpha(x \times y), z\rangle, \\ (\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle x \times (\alpha y), z\rangle &\overset{1.5}{=} \det(x, \alpha y, z) = \alpha \det(x, y, z) \overset{1.5}{=} \alpha\langle x \times y, z\rangle \\ &= \langle \alpha(x \times y), z\rangle.\end{aligned}$$

Konačno, iz jedinstvenosti vektorskog produkta kao i u dokazu tvrdnje (2) zaključujemo da je $(\alpha x) \times y = \alpha(x \times y) = x \times (\alpha y)$.
$\boxed{5}$ Fiksirajmo neki $z \in \mathbb{R}^3_1$ - ovdje ponovno koristimo linearnost determinante po stupcima matrice da bismo izračunali:

$$\begin{aligned}(\forall w \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle (x+y) \times z, w\rangle &\overset{1.5}{=} \det(x+y, z, w) = \det(x, z, w) + \det(y, z, w)\\ &\overset{1.5}{=} \langle x \times z, w\rangle + \langle y \times z, w\rangle\\ &= \langle x \times z + y \times z, w\rangle.\end{aligned}$$

Odavde sasvim analogno ranijim slučajima zaključujemo da mora biti $(x+y) \times z = x \times z + y \times z$. Također bismo na isti način dokazali da je $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.
$\boxed{6}$ Za kraj dokazujemo ekvivalenciju, smjer po smjer. Napomenimo da ovdje smatramo da je svaki vektor iz $\mathbb{R}^3_1$ kolinearan nulvektoru - dakle, za vektore $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da su kolinearni, ako $(\exists \alpha \in \mathbb{R})\ x = \alpha y$ ili $y = \alpha x$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da je $x \times y = 0$ - tada očito vrijedi da je

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle x \times y, z\rangle = 0.$$

Posebno, koristeći formulu (1.5) zaključujemo da je

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \det(x, y, z) = 0$$

što je (koristeći poznati rezultat iz linearne algebre) ekvivalentno tvrdnji da je

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \{x, y, z\} \text{ linearno zavisan skup.}$$

Primijetimo da ovdje posebno možemo uzeti $z \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \operatorname{span}\{x, y\}$ - naime, taj skup je neprazan budući da je $\mathbb{R}^3_1$ trodimenzionalan vektorski prostor, a $\operatorname{span}\{x, y\}$ najviše dvodimenzionalan. Odavde sada lagano slijedi da je $\{x, y\}$ linearno zavisan skup, što je ekvivalentno tome da su x i y kolinearni čime je dokaz ove implikacije gotov.
$\boxed{\Longleftarrow}$ U slučaju da su x i y kolinearni vektori, stvar je također jednostavna. Ako je $x = \lambda y$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, tada je

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \det(x, y, z) = \det(\alpha y, y, z) = \alpha \det(y, y, z) = 0.$$

To s jedne strane pomoću (1.5) možemo zapisati kao

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle x \times y, z\rangle = \det(x, y, z),$$

dok s druge strane očito vrijedi

$$(\forall z \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle 0, z\rangle = \det(x, y, z).$$

Sada iz jedinstvenosti vektorskog produkta kao i ranije zaključujemo da je $x \times y = 0$ što smo i htjeli pokazati. Tvrdnja se sasvim analogno pokazuje u slučaju da je $y = \lambda x$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Međutim, postoje i neke razlike u usporedbi s euklidskim prostorom. Na primjer, znamo da vrijedi:

$$x \times_{\mathrm{E}} y \neq 0 \implies \{x, y, x \times_{\mathrm{E}} y\} \text{ baza vektorskog prostora } \mathbb{R}^3.$$

Takva tvrdnja općenito ne vrijedi u $\mathbb{R}^3_1$, što ističemo u idućem primjeru.

Primjer 1.2.14. Označimo s $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ vektore

$$x = (1, 0, 0) \quad \text{i} \quad y = (0, 1, -1).$$

Ti vektori su očito linearno nezavisni pa im je vektorski produkt netrivijalan (to znamo po Propoziciji 1.2.13.6). Njihov vektorski produkt sada lako računamo pomoću formule (1.6):

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_2 - e_3 = (0, 1, -1)$$

iz čega se jasno vidi da skup $\{x, y, x \times y\}$ nije baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Dakle, ovime smo pokazali smo da postoje vektori $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ takvi da je

$$x \times y \neq 0 \quad \text{i} \quad \{x, y, x \times y\} \text{ nije baza vektorskog prostora } \mathbb{R}^3.$$

No, pokazujemo da vrijedi iduća tvrdnja.

Propozicija 1.2.15. U Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ vrijedi:

$$x \times y \neq 0 \text{ i } x \times y \notin \mathcal{C} \implies \{x, y, x \times y\} \text{ baza vektorskog prostora } \mathbb{R}^3.$$

DOKAZ Uzmimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ koji zadovoljavaju uvjete

$$x \times y \neq 0 \quad \text{i} \quad x \times y \text{ nije svjetlosni vektor.}$$

Želimo pokazati da je tada $\{x, y, x \times y\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$, a da bismo to pokazali dovoljno je samo provjeriti da je ovaj skup linearno nezavisan. Stoga neka je

$$\alpha x + \beta y + \gamma(x \times y) = 0$$

za neke skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Tada jednostavnim uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\langle \cdot, x \times y \rangle$ s jedne i druge strane jednakosti dobivamo

$$\alpha\langle x, x \times y \rangle + \beta\langle y, x \times y \rangle + \gamma\langle x \times y, x \times y \rangle = 0.$$

No, pošto znamo da je $x, y \perp x \times y$ (vidi PROPOZICIJU 1.2.13.1) odavde direktno slijedi

$$\gamma\langle x \times y, x \times y\rangle = 0.$$

Kako $x \times y$ nije svjetlosni niti nulvektor, onda odavde zaključujemo da mora biti $\gamma = 0$ i ostajemo s izrazom

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Budući da je $x \times y \neq 0$ ekvivalentno tome da su x i y linearno nezavisni (vidi PROPOZICIJU 1.2.13.6), tada iz ove jednakosti zaključujemo da mora biti $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. To sada pokazuje da je skup $\{x, y, x \times y\}$ linearno nezavisan pa je on zapravo baza prostora $\mathbb{R}^3$ i time smo dokazali traženu tvrdnju. □

Pokazujemo sada još nekoliko tvrdnji za $\mathbb{R}^3_1$ čiji analogoni u euklidskom prostoru ne glase sasvim isto. Prvo navodimo bez dokaza poznate rezultate iz linearne algebre vezane za euklidski prostor, a zatim koristeći navedene tvrdnje dokazujemo njihove analogone za Lorentz-Minkowskijev prostor.

Lema 1.2.16. Za proizvoljne vektore $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$ vrijede tvrdnje:

(1) $(x \times_{\mathrm{E}} y) \times_{\mathrm{E}} z = \langle x, z\rangle_{\mathrm{E}}\, y - \langle y, z\rangle_{\mathrm{E}}\, x$,

(2) $\langle x \times_{\mathrm{E}} y, z \times_{\mathrm{E}} w\rangle_{\mathrm{E}} = \begin{vmatrix} \langle x, z\rangle_{\mathrm{E}} & \langle x, w\rangle_{\mathrm{E}} \\ \langle y, z\rangle_{\mathrm{E}} & \langle y, w\rangle_{\mathrm{E}} \end{vmatrix}$.

Propozicija 1.2.17. Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$ vrijedi

(1) $(x \times y) \times z = -\langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x$,

(2) $\langle x \times y, z \times w\rangle = -\begin{vmatrix} \langle x, z\rangle & \langle x, w\rangle \\ \langle y, z\rangle & \langle y, w\rangle \end{vmatrix}$,

(3) $\langle x \times y, x \times y\rangle = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. (Lagrangeov identitet)

DOKAZ Ove dokaze provodimo direktnim računom koristeći svojstva dokazana u LEMI 1.2.11 uz pomoć rezultata navedenih u LEMI 1.2.16. U ovim računima taktika nam je prevesti Lorentzov vektorski i pseudoskalarni produkt u euklidski vektorski i skalarni produkt koristeći prvu LEMU, zatim primjenjujemo tvrdnje koje vrijede za euklidske operacije i na kraju prevodimo rezultate nazad u Lorentzove operacije. Napomenimo da tvrdnje zapravo možemo dokazati i direktnim računom bez pomoći LEME 1.2.16, ali taj nam pristup nije od neke koristi i na ovaj način puno bolje

prolazimo - bez daljnjega slijede dokazi tvrdnji.
$\boxed{1}$ Za proizvoljne $x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$ računamo:

$$\begin{aligned}
(x \times y) \times z &= (Jz) \times_{\mathrm{E}} \big(J(x \times y)\big) && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= (Jz) \times_{\mathrm{E}} \big(J[(Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx)]\big) && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= (Jz) \times_{\mathrm{E}} \big((JJx) \times_{\mathrm{E}} (JJy)\big) && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= (Jz) \times_{\mathrm{E}} \big(x \times_{\mathrm{E}} y\big)\\
&= -(x \times_{\mathrm{E}} y) \times_{\mathrm{E}} (Jz)\\
&= -\langle x, Jz\rangle_{\mathrm{E}}\, y + \langle y, Jz\rangle_{\mathrm{E}}\, x && [\text{Lema } 1.2.16]\\
&= -\langle x, z\rangle\, y + \langle y, z\rangle\, x. && [\text{Lema } 1.2.11]
\end{aligned}$$

Komentirajmo da smo u računu u četvrtoj jednakosti koristili svojstvo da je $JJx = x$ za sve $x \in \mathbb{R}^3_1$ te smo u petoj jednakosti koristili poznato svojstvo antikomutativnosti euklidskog vektorskog produkta $\times_{\mathrm{E}}$.
$\boxed{2}$ Za proizvoljne $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3_1$ opet računamo:

$$\begin{aligned}
\langle x \times y, z \times w\rangle &= \big\langle (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx), (Jw) \times_{\mathrm{E}} (Jz)\big\rangle && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= \big\langle (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx), J[(Jw) \times_{\mathrm{E}} (Jz)]\big\rangle_{\mathrm{E}} && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= \big\langle (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx), (JJz) \times_{\mathrm{E}} (JJw)\big\rangle_{\mathrm{E}} && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= \big\langle (Jy) \times_{\mathrm{E}} (Jx), z \times_{\mathrm{E}} w\big\rangle_{\mathrm{E}}\\
&= \begin{vmatrix} \langle Jy, z\rangle_{\mathrm{E}} & \langle Jy, w\rangle_{\mathrm{E}} \\ \langle Jx, z\rangle_{\mathrm{E}} & \langle Jx, w\rangle_{\mathrm{E}} \end{vmatrix} && [\text{Lema } 1.2.16]\\
&= \begin{vmatrix} \langle y, z\rangle & \langle y, w\rangle \\ \langle x, z\rangle & \langle x, w\rangle \end{vmatrix} && [\text{Lema } 1.2.11]\\
&= -\begin{vmatrix} \langle x, z\rangle & \langle x, w\rangle \\ \langle y, z\rangle & \langle y, w\rangle \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Opet komentiramo da smo u četvrtoj jednakosti koristili svojstvo $JJx = x$ te smo u zadnjoj jednakosti koristili poznatu tvrdnju da determinanta mijenja predznak zamjenom dva retka matrice (Lema 1.2.12).
$\boxed{3}$ Konačno, dokazujemo Lagrangeov identitet koristeći upravo dokazano svojstvo (2). Naime, za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ imamo:

$$\langle x \times y, x \times y\rangle \overset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix} = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

čime zaključujemo dokaz ove propozicije. □

Primijetimo da iz Lagrangeovog identiteta možemo otprilike iščitati kako se ponaša CSB nejednakost u Lorentz-Mikowskijevom prostoru. Tu priču o CSB nejednakosti ćemo nastaviti nešto kasnije kada ćemo imati bolje razumijevanje o ortogonalnosti u prostoru $\mathbb{R}^3_1$.

Baze prostora $\mathbb{R}^3_1$

Idući nam je cilj riješiti pitanje ortonormirane baze u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ što će nam biti ključno pri definiranju Freneteove baze krivulja.

Definicija 1.2.18. Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je ortogonalan skup u $\mathbb{R}^3_1$, ako se sastoji od vektora koji su u parovima međusobno ortogonalni. Kažemo da je S ortonormiran skup u $\mathbb{R}^3_1$, ako još zadovoljava i da su svi elementi tog skupa jedinični vektori. Nadalje, kažemo da je skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortogonalna baza odnosno ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, ako je to baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i ako je to ortogonalan odnosno ortonormiran skup u $\mathbb{R}^3_1$. Analogno definiramo i pojam ortogonalne i ortonormirane baze potprostora Lorentz-Minkowskijevog prostora.

Primjer 1.2.19. Istaknimo da je kanonska baza

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

zapravo ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ (što se lagano provjeri po gornjoj definiciji).

Štoviše, slično kao i u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}})$ vrijedi teorem o prikazu vektora u ortonormiranoj baza pomoću metrike prostora $\mathbb{R}^3_1$:

Teorem 1.2.20. Neka je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ - tada se svaki vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ u toj ortonormiranoj bazi zapisuje na slijedeći način:

$$\begin{aligned} x &= \langle a_1, a_1\rangle\langle x, a_1\rangle\, a_1 + \langle a_2, a_2\rangle\langle x, a_2\rangle\, a_2 + \langle a_3, a_3\rangle\langle x, a_3\rangle\, a_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3}\langle a_i, a_i\rangle\langle x, a_i\rangle\, a_i. \end{aligned}$$

DOKAZ Naime, budući da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ posebno i baza, tada za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^3_1$ znamo da postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

Sada uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\langle\cdot, a_i\rangle$ s obje strane ove jednakosti te koristeći da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirani skup dobivamo:

$$\langle x, a_i\rangle = \alpha_i\langle a_i, a_i\rangle.$$

Budući da je a_i jedinični vektor, tada mora biti $\langle a_i, a_i \rangle = \pm 1$ (prisjetimo se NAPOMENE 1.2.2) pa dijeljenjem gornje jednakosti dobivamo upravo

$$\alpha_i = \langle a_i, a_i \rangle \langle x, a_i \rangle.$$

Pošto ovo možemo napraviti za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ slijedi tvrdnja teorema. □

Proučimo nešto pobliže pojam ortonormiranog skupa i baze:

Propozicija 1.2.21. U Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ vrijede slijedeće tvrdnje.

(1) Ako je S ortonormirani skup u $\mathbb{R}^3_1$, tada je S linearno nezavisan skup.

(2) Posebno, svaki ortonormirani skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\mathbb{R}^3_1$ je zapravo ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

(3) Svaka ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ sastoji se od dva prostorna i jednog vremenskog vektora.

(4) Ako je $\{x, y\}$ ortonormirani skup u $\mathbb{R}^3_1$, tada je $\{x, y, x \times y\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

(5) Za svaki jedinični vektor u $\mathbb{R}^3_1$ postoji ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ koja ga sadrži.

DOKAZ $\boxed{1}$ Pa neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ortonormirani skup vektora - uzmimo tada proizvoljne $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0.$$

Sada jednostavnim uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\langle \cdot, a_i \rangle$ s obje strane ove jednakosti te koristeći ortonormiranost skupa S dobivamo

$$\alpha_i \langle a_i, a_i \rangle = 0.$$

No budući da je a_i jedinični vektor, tada je $\langle a_i, a_i \rangle = \pm 1$ (NAPOMENA 1.2.2) pa odavde slijedi $\alpha_i = 0$. Kako ovo možemo napraviti za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$, slijedi tražena tvrdnja.

$\boxed{2}$ Ovo slijedi direktno koristeći tvrdnju (1) - naime, ako je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirani skup, tada je prema navedenoj tvrdnji $\{a_1, a_2, a_3\}$ linearno nezavisan skup pa pošto je $\dim \mathbb{R}^3_1 = 3$ zaključujemo da je to i baza prostora.

$\boxed{3}$ Neka je $\{a_1, a_2, a_3\}$ proizvoljna ortonormirana baza - po SEKCIJI 1.1 tada znamo (vidi stranicu 4) da je matrica Lorentzove metrike $\langle\ ,\ \rangle$ obzirom na tu bazu dana s

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \langle a_1, a_3\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \langle a_2, a_3\rangle \\ \langle a_3, a_1\rangle & \langle a_3, a_2\rangle & \langle a_3, a_3\rangle \end{bmatrix}$$

pa koristeći da je baza ortogonalna dobivamo da je ta matrica jednaka

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle a_2, a_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle a_3, a_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Štoviše, budući da su vektori a_1, a_2 i a_3 normirani, tada znamo da se na dijagonali nalaze isključivo elementi -1 i 1 (NAPOMENA 1.2.2) pa odgovarajućom permutacijom baze $\{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}\}$ Lorentzovu metriku zapisujemo u njenom kanonskom obliku. Konačno, koristeći SYLVESTEROV ZAKON INERCIJE (vidi stranicu 5) zaključujemo da mora biti

$$\langle a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(1)}\rangle = 1 \quad , \quad \langle a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(2)}\rangle = 1 \quad , \quad \langle a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(3)}\rangle = -1.$$

otkuda iščitavamo da su $a_{\sigma(1)}$ i $a_{\sigma(2)}$ prostorni vektori i da je $a_{\sigma(3)}$ vremenski vektor, čime je tvrdnja dokazana.

$\boxed{4}$ Neka je $\{x, y\}$ proizvoljan ortonormiran skup u $\mathbb{R}^3_1$ - tvrdnju lako dokazujemo tako da se uvjerimo da je skup $\{x, y, x \times y\}$ ortonormiran skup. Za početak, lako vidimo da je vektor $x \times y$ jediničan vektor koristeći LAGRANGEOV IDENTITET i NAPOMENU 1.2.2:

$$\langle x \times y, x \times y\rangle = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0 - (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1,$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili da su x i y jedinični vektori. Odavde zaključujemo da je $\{x, y, x \times y\}$ skup jediničnih vektora, a isto tako vidimo da su svaka dva vektora u parovima ortogonalni koristeći $x \perp y$ i PROPOZICIJU 1.2.13.1. Stoga je $\{x, y, x \times y\}$ zapravo ortonormirani skup vektora pa koristeći dokazanu tvrdnju (2) odmah slijedi tražena tvrdnja.

$\boxed{5}$ Neka je $x \in \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan jedinični vektor - tada po NAPOMENI 1.2.2 znamo da je $\langle x, x\rangle = \pm 1$ odnosno da je x ili prostorni ili vremenski jedinični vektor. Primijetimo da je dovoljno pronaći neki jedinični vektor $y \in \mathbb{R}^3_1$ takav da je $y \perp x$ - tada je $\{x, y\}$ ortonormiran skup pa koristeći (4) odmah slijedi tražena tvrdnja. U tu svrhu, ako je x prostorni vektor, tada uzmimo vremenski vektor $y = e_3$, a ako je x vremenski vektor, tada uzmimo prostorni vektor $y = e_1$ - u svakom slučaju imamo:

$$\langle x, x\rangle = \pm 1 = -\langle y, y\rangle.$$

Ako je $x \perp y$, onda smo gotovi, stoga pretpostavimo da je $\langle x, y\rangle \neq 0$. Tada označimo $\hat{y} = x + \lambda y$, za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; želimo pronaći takav skalar λ za koji će vrijediti

$$\langle x, \hat{y}\rangle = 0.$$

Stoga raspisujemo:

$$\begin{aligned}\langle x, \hat{y}\rangle = 0 &\iff \langle x, x + \lambda y\rangle = 0\\ &\iff \lambda\langle x, y\rangle = -\langle x, x\rangle\\ &\iff \lambda\langle x, y\rangle = \mp 1\\ &\iff \lambda = \frac{\mp 1}{\langle x, y\rangle},\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj ekvivalenciji koristili bilinearnost Lorentzove metrike, a u zadnjoj ekvivalenciji pretpostavku da je $\langle x, y\rangle \neq 0$. Prema tome, definiramo li

$$\hat{y} := x + \lambda y = x + \frac{\mp 1}{\langle x, y\rangle}\, y$$

nalazimo vektor $\hat{y}$ koji je ortogonalan na x. Doduše, ne znamo je li $\hat{y}$ jedinični vektor, no, prisjetimo li se Napomene 1.2.6, lako vidimo (pošto je $\hat{y}$ prostorni ili vremenski vektor) da je tada

$$\tilde{y} := \frac{\hat{y}}{\|\hat{y}\|}$$

sigurno jedinični vektor. Iz bilinearnosti metrike tada proizlazi da je $\tilde{y}$ također ortogonalan na x, pa budući da je sada $\{x, \hat{y}\}$ ortonormiran skup po (4) znamo da se taj skup proširuje do ortonormirane baze i time je zaključen dokaz ove propozicije. □

Kao jedna od posljedica ove propozicije uvodimo slijedeće oznake: ortonormirane baze u $\mathbb{R}^3_1$ ćemo od sada simbolički označavati s *ppv*, *pvp* odnosno *vpp* ovisno i poretku dva prostorna i jednog vremenskog vektora u toj bazi - na primjer, kanonska baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ je prema tome *ppv*-ortonormirana baza.

Štoviše, iz prethodne propozicije možemo iščitati da ne postoji ortonormirana baza u $\mathbb{R}^3_1$ koja sadrži svjetlosni vektor. To će nam zapravo predstavljati problem jer ćemo u jednom trenutku htjeti zapisati svjetlosni vektor kao dio baze prostora $\mathbb{R}^3_1$. Stoga uvodimo iduću definiciju.

Definicija 1.2.22. Za skup vektora $\{A, B, C\}$ kažemo da je <u>nul baza</u>, ako je zadovoljeno:

- A i B su svjetlosni vektori,

- C je jedinični prostorni vektor,
- $\langle A, B\rangle = 1$, $C \perp A$, $C \perp B$.

Analogno definiramo pojam *sps*- i *pss*-nul baze za različite poretke vektora, dok izraz „nul baza” rezerviramo baš za *ssp*-nul baze prostora $\mathbb{R}^3_1$.

Ova će se definicija pokazati dovoljno dobra za ono čime ćemo se baviti u idućim poglavljima. Pokažimo su nul baze uistinu baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ te iskažimo i dokažimo teorem o prikazu vektora u nul bazi. Prije svega toga navedimo primjer jedne nul baze kako bismo se uvjerili da one zaista i postoje.

Primjer 1.2.23. Definiramo li vektore

$$A = (0, 1, -1) \quad , \quad B = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad C = (1, 0, 0)$$

tada se direktnim računom lako provjeri da je $\{A, B, C\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

Propozicija 1.2.24. Svaka nul baza Lorentz-Minkowskijevog prostora je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

<u>DOKAZ</u> Jasno je da ova tvrdnja ne ovisi o poretku vektora u bazi. Neka je $\{A, B, C\}$ proizvoljna nul baza u $\mathbb{R}^3$; mi ćemo ovdje bez smanjenja općenitosti uzeti da je to upravo *ssp*-nul baza. Budući da je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, dovoljno je pokazati da je skup $\{A, B, C\}$ linearno nezavisan. U tu svrhu neka je

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0, \tag{1.7}$$

za neke skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Tada uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\langle \cdot, C\rangle$ s obje strane jednakosti dobivamo:

$$0 = \alpha \overbrace{\langle A, C\rangle}^{=0} + \beta \overbrace{\langle B, C\rangle}^{=0} + \gamma \overbrace{\langle C, C\rangle}^{=1} = \gamma,$$

gdje smo u računu iskoristili svojstva vektora nul baze. Dakle, početna jednakost (1.7) se sada pojednostavljuje u

$$\alpha A + \beta B = 0.$$

Pretpostavimo da je jedan od skalara α i β različit od 0 - bez smanjenja općenitosti neka je to α. Tada iz ove jednakosti slijedi da je $A = -\frac{\beta}{\alpha} B$ pa su A i B kolinearni vektori. Budući da su A i B svjetlosni vektori, tada po tvrdnji NAPOMENE 1.2.8 zaključujemo da A i B moraju biti ortogonalni. To je sada u kontradikciji s pretpostavkom da je $\{A, B, C\}$ nul baza, jer tu moramo imati $\langle A, B\rangle = 1$. Dakle, pretpostavka je bila kriva i zaključujemo da mora biti $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ - prema tome $\{A, B, C\}$ je linearno nezavisan skup tri vektora i kao takav čini bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. □

Teorem 1.2.25. Neka je $\{A, B, C\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ - tada se svaki vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ u toj nul bazi zapisuje na slijedeći način:

$$x = \langle x, B\rangle A + \langle x, A\rangle B + \langle x, C\rangle C.$$

<u>DOKAZ</u> Naime, budući da je $\{A, B, C\}$ posebno i baza, tada za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^3_1$ znamo da postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C.$$

Sada uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\langle \cdot, D\rangle$ s obje strane ove jednakosti za različite $D \in \{A, B, C\}$ te koristeći odnose vektora u skupu $\{A, B, C\}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\langle x, A\rangle &= \alpha_1 \overbrace{\langle A, A\rangle}^{=0} + \alpha_2 \overbrace{\langle B, A\rangle}^{=1} + \alpha_3 \overbrace{\langle C, A\rangle}^{=0} = \alpha_2,\\
\langle x, B\rangle &= \alpha_1 \overbrace{\langle A, B\rangle}^{=1} + \alpha_2 \overbrace{\langle B, B\rangle}^{=0} + \alpha_3 \overbrace{\langle C, B\rangle}^{=0} = \alpha_1,\\
\langle x, C\rangle &= \alpha_1 \overbrace{\langle A, C\rangle}^{=0} + \alpha_2 \overbrace{\langle B, C\rangle}^{=0} + \alpha_3 \overbrace{\langle C, C\rangle}^{=1} = \alpha_3.
\end{aligned}$$

Odavde dakle slijedi da je

$$x = \langle x, B\rangle A + \langle x, A\rangle B + \langle x, C\rangle C$$

što smo i htjeli pokazati. □

Ovdje ostajemo dužni napraviti teoreme o proširenju skupa do nul baze - time ćemo se baviti krajem iduće potsekcije kada ćemo imati bolje razumijevanje o ortogonalnosti u Lorentz-Minkowskijevom prostoru. Za kraj ove potsekcije dokažimo iduću (tehničku) lemu koja će nam biti potrebna u onome što će nam slijediti.

Lema 1.2.26. U Lorentz-Minkowskijevom prostoru vrijede slijedeće tvrdnje:

(1) ako su dva svjetlosna vektora ortogonalna, tada oni moraju biti kolinearni,

(2) svjetlosni vektor i vremenski vektor ne mogu biti ortogonalni,

(3) dva vremenska vektora ne mogu biti međusobno ortogonalni.

DOKAZ $\boxed{1}$ Ovu tvrdnju morat ćemo dokazati čisto računski, a primijetimo da je ona zapravo obrat tvrdnje iz druge točke NAPOMENE 1.2.8. Pretpostavimo da su $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ dva međusobno ortogonalna svjetlosna vektora u $\mathbb{R}^3_1$. To znači da je

$$\langle x, x\rangle = 0 \quad , \quad \langle y, y\rangle = 0 \quad , \quad \langle x, y\rangle = 0,$$

što u koordinatama zapisujemo s

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{1.8}$$
$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0, \tag{1.9}$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0. \tag{1.10}$$

Odavde raspisujemo zadnju jednakost:

$$\begin{aligned}
x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0 &\implies x_1y_1 + x_2y_2 = x_3y_3 \\
&\implies x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 = x_3^2y_3^2 \\
&\implies x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \\
&\implies x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2 \\
&\implies x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 = 0 \\
&\implies (x_2y_1 - x_1y_2)^2 = 0 \\
&\implies x_2y_1 - x_1y_2 = 0 \\
&\implies x_2y_1 = x_1y_2.
\end{aligned}$$

Komentirajmo: u drugoj implikaciji smo kvadrirali obje strane jednakosti, dok smo u trećoj implikaciji primijenili jednakosti (1.8) i (1.9). Pretpostavimo sada na trenutak da su x_2 i y_2 različiti od 0 - tada iz dobivene jednakosti slijedi da je $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ te označimo tu vrijednost s

$$k := \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Odavde zaključujemo da je

$$x_1 = k\,x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = k\,y_2$$

iz čega uvrštavanjem u jednakosti (1.8) i (1.9) dobivamo:

$$x_3^2 = (1 + k^2)x_2^2 \quad \text{i} \quad y_3^2 = (1 + k^2)y_2^2.$$

Odavde vidimo da su i $x_3, y_3 \neq 0$ te imamo

$$x_3 = \lambda\sqrt{1 + k^2}x_2 \quad \text{i} \quad y_3 = \mu(1 + k^2)y_2,$$

gdje su $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$ pripadni koeficijenti. Sad kada smo izrazili svaku koordinatu preko x_2 i y_2 možemo pisati

$$x = x_2(k, 1, \lambda\sqrt{1+k^2}) \quad \text{i} \quad y = y_2(k, 1, \mu\sqrt{1+k^2}).$$

Odavde možemo vidjeti da su x i y kolinearni ako i samo ako su λ i μ jednaki pa stoga raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle = 0 &\implies x_2y_2\big\langle(k, 1, \lambda\sqrt{1+k^2}), (k, 1, \mu\sqrt{1+k^2})\big\rangle = 0 \\
&\implies \big\langle(k, 1, \lambda\sqrt{1+k^2}), (k, 1, \mu\sqrt{1+k^2})\big\rangle = 0 \\
&\implies k^2 + 1^2 - \lambda\mu(1+k^2) = 0 \\
&\implies \lambda\mu = 1,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj implikaciji koristili bilinearnost metrike, a u drugoj implikaciji dijelili s x_2y_2 (što smo mogli jer je različito od 0). Odavde zaključujemo da je $\lambda = \mu$ što pokazuje da su x i y kolinearni vektori. Još je sada potrebno prokomentirati slučaj kada je x_2 ili y_2 jednako 0. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_2 = 0$ - pokažimo da je tada i $y_2 = 0$. Naime, vrijedi

$$x_2 = 0 \overset{1.8}{\implies} x_1^2 = x_3^2 \implies x_3 = \pm x_1 \neq 0,$$

gdje smo zadnju nejednakost dobili jer je $x \neq 0$. Uvrštavajući to u (1.10) sada dobivamo

$$x_1y_1 + 0 - (\pm x_1)y_3 = 0 \implies y_1 = \pm y_3 \overset{1.9}{\implies} y_2^2 = y_3^2 - y_1^2 = 0 \implies y_2 = 0,$$

gdje smo u prvoj implikaciji samo dijelili sa x_1. Sada možemo pisati da je

$$x = x_1(1, 0, \pm 1) \quad \text{i} \quad y = y_1(1, 0, \pm 1)$$

iz čega konačno zaključujemo da su u svakom slučaju x i y kolinearni vektori.
$\boxed{2}$ Neka je s svjetlosni i v vremenski vektor u $\mathbb{R}^3_1$ te pretpostavimo da su oni ortogonalni. Označimo s $\hat{v}$ jedinični vremenski vektor koji je kolinearan s v (dobijemo ga normiranjem, vidi Napomenu 1.2.6) - tada je također $s \perp \hat{v}$. Nadalje, prema Propoziciji 1.2.21 znamo da postoji ortonormirana baza $\{\hat{v}, p_1, p_2\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ gdje su p_1 i p_2 prostorni vektori. S jedne strane, ovdje imamo $\langle s, s\rangle = 0$ jer je s svjetlosni vektor. S druge strane, po Teoremu 1.2.20 imamo

$$\begin{aligned}
s &= \langle \hat{v}, \hat{v}\rangle\langle s, \hat{v}\rangle\, \hat{v} + \langle p_1, p_1\rangle\langle s, p_1\rangle\, p_1 + \langle p_2, p_2\rangle\langle s, p_2\rangle\, p_2 \\
&= \langle s, p_1\rangle\, p_1 + \langle s, p_2\rangle\, p_2 \\
&= \alpha p_1 + \beta p_2,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili da je $s \perp \hat{v}$ te da su vektori p_i jedinični prostorni vektori, dok smo u zadnjoj jednakosti samo uveli oznake za koeficijente. Sada koristeći dobivene jednakost računamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle s, s \rangle \\ &= \langle \alpha p_1 + \beta p_2, \alpha p_1 + \beta p_2 \rangle \\ &= \alpha^2 \langle p_1, p_1 \rangle + 2\alpha\beta \langle p_1, p_2 \rangle + \beta^2 \langle p_2, p_2 \rangle \\ &= \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

od kuda zaključujemo da je $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. No to znači da je

$$s = \alpha p_1 + \beta p_2 = 0,$$

što je očita kontradikcija - zaključujemo da je pretpostavka bila kriva pa s i v ne mogu biti ortogonalni u $\mathbb{R}^3_1$.

$\boxed{3}$ Pretpostavimo da su v_1 i v_2 dva ortogonalna vremenska vektora iz $\mathbb{R}^3_1$. Označimo s $\hat{v}_1$ i $\hat{v}_2$ jedinične vremenske vektore kolinearni s v_1 i v_2 respektivno (dobijemo ih normiranjem vektora, vidi Napomenu 1.2.6). Tada su također i vektori $\hat{v}_1$ i $\hat{v}_2$ međusobno ortogonalni. Štoviše, $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ tada čini ortonormirani skup što po Propoziciji 1.2.21 onda znači da je skup

$$\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_1 \times \hat{v}_2\}$$

ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. To je naravno nemoguće jer po istoj Propoziciji znamo da ortonormirana baza ima samo jedan vremenski vektor, dok ovaj skup ima dva. Zaključujemo da je pretpostavka bila kriva te v_1 i v_2 ne mogu biti ortogonalni vektori. □

Vektorski potprostori od $\mathbb{R}^3_1$

U ovoj potsekciji proučavamo potprostore Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$ zajedno s metrikom koju nad njima inducira $\langle \, , \, \rangle$. Započinjemo narednom definicijom.

Definicija 1.2.27. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan pravi[10] potprostor Lorentz-Minkowskijevog prostora. Tada induciranu metriku $\langle \, , \, \rangle_V$ na vektorskom prostoru V definiramo s

$$(\forall x, y \in V) \; \langle x, y \rangle_V := \langle x, y \rangle.$$

Time je dobro definiran prostor s metrikom $(V, \langle \, , \, \rangle_V)$ te za metriku $\langle \, , \, \rangle_V$ kažemo da je

[10]Dakle, $V \neq \{0\}$ i $V \neq \mathbb{R}^3_1$

- prostorna metrika, ako je $\langle\ ,\ \rangle_V$ pozitivno definitna metrika,
- vremenska metrika, ako je $\langle\ ,\ \rangle_V$ nedegenerirana metrika indeksa 1,
- svjetlosna metrika, ako je $\langle\ ,\ \rangle_V$ degenerirana metrika.

Srodno tim definicijama još kažemo i da je prostor s metrikom $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ prostorni, vremenski odnosno svjetlosni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$.

Komentirajmo da su ovime klasificirani svi potprostori s induciranom metrikom. U slučaju da je potprostor dimenzije 1, tada metrika mora biti ranga 0 ili 1 te indeks mora biti 0 ili 1 što je sve pokriveno s ovim slučajevima. Ako je potprostor dimenzije 2, tada je slučaj ranga manjeg od 2 pokriveno sa svjetlosnom metrikom. Slučaj ranga jednakog 2 može se manifestirati indeksom metrike jednakim 0, 1 ili 2: kada je indeks metrike 0, tada je to prostorna metrika, a kada je indeks metrike 1, tada je to vremenska metrika. Argumentirajmo da indeks ove inducirane metrike ne može biti jednak 2. Kada bi indeks bio jednak 2, tada bi postojala baza $\{x, y\}$ potprostora V u kojoj bi se inducirana metrika zapisivala u normalnom obliku. Lako vidimo da su tada vektori x i y jedinični vremenski vektori u $\mathbb{R}^3_1$ koji su međusobno ortogonalni. To je sada u kontradikciji s tvrdnjom Leme 1.2.26 pa zaključujemo da je pretpostavka bila kriva i indeks ne može biti jednak 2.

Time možemo zaključiti da su ovime uistinu klasificirani svi mogući potprostori od $\mathbb{R}^3_1$ s induciranom metrikom. Istaknimo iduće karakterizacije klasificiranih potprostora u obliku teorema na slijedeći način.

Teorem 1.2.28. Neka je V proizvoljan pravi potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. Ako je V jednodimenzionalan, tada vrijedi:

(1) V je prostorni potprostor $\iff$ V sadrži jedinični prostorni vektor
$\iff$ V sadrži prostorni vektor
$\iff$ svaki nenul vektor iz V je prostorni vektor,

(2) V je svjetlosni potprostor $\iff$ V sadrži svjetlosni vektor
$\iff$ svaki nenul vektor iz V je svjetlosni vektor,

(3) V je vremenski potprostor $\iff$ V sadrži jedinični vremenski vektor
$\iff$ V sadrži vremenski vektor
$\iff$ svaki nenul vektor iz V je vremenski vektor.

Ako je V dvodimenzionalan, tada vrijedi:

(4) V je prostorni potprostor $\iff$ V ima ortonormiranu bazu koja se sastoji od dva prostorna vektora,

(5) V je svjetlosni potprostor $\iff$ V ima ortogonalnu bazu[11] koja se sastoji od jednog jediničnog prostornog i jednog svjetlosnog vektora,

(6) V je vremenski potprostor $\iff$ V ima ortonormiranu bazu koja se sastoji od jednog prostornog i jednog vremenskog vektora.

DOKAZ Dokaz ovog teorema se u suštini sastoji od iščitavanja teorije uvedene u SEKCIJI 1.1. Za početak samo komentirajmo da druge i treće ekvivalencije u (1) i (3) te druga ekvivalencija u (2) vrijede trivijalno pozovemo li se na NAPOMENU 1.2.6. Iz tog razloga ćemo se nadalje referirati samo na prve ekvivalencije u tvrdnjama (1), (2) i (3). Dakle, s jedne strane smo u SEKCIJI 1.1 vidjeli da za metriku $\langle\,,\,\rangle_V$ postoji baza $\{a_1,\ldots,a_k\}$ $(k=1,2)$ prostora V u kojoj se ona zapisuje u normalnom obliku (vidi stranicu 5) te je matrica metrike $\langle\,,\,\rangle_V$ u toj bazi dana s

$$\begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_1,a_k\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle a_k,a_1\rangle & \cdots & \langle a_k,a_k\rangle\end{bmatrix},$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $\langle\,,\,\rangle_V$ restrikcija metrike $\langle\,,\,\rangle$. S druge strane, po karakterizacijama danim NAPOMENOM 1.1.3 vidimo da je taj matrični prikaz određen na jedinstven način gdje po slučajevima imamo:

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\\
(2) &\iff \begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\\
(3) &\iff \begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix},\\
(4) &\iff \begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle\\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\\
(6) &\iff \begin{bmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle\\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};
\end{aligned}$$

napomenimo da smo ovdje s (i) označili lijevu stranu ekvivalencije u pojedinoj tvrdnji, $i\in\{1,2,3,4,6\}$. Iz danih matričnih jednakosti direktno iščitavamo da je redom: a_1 jedinični prostorni vektor, a_1 svjetlosni vektor, a_1 jedinični vremenski vektor, $\{a_1,a_2\}$ ortonormirana baza od V sastavljena od dva prostorna vektora, $\{a_1,a_2\}$ ortonormirana baza od V sastavljena od jednog prostornog i jednog vremenskog vektora. Prema tome, zaključujemo da vrijede ekvivalencije tvrdnji (1), (2), (3), (4) i (6).

[11] To znači da se baza sastoji od vektora koji su u parovima međusobno ortogonalni

Konačno, pozabavimo se i tvrdnjom (5). Naime za indefinitnu metriku $\langle\ ,\ \rangle_V$ dvodimenzionalnog prostora V postoje tri moguća normalna oblika te zapisivanjem tih normalnih oblika matrično dobivamo iduću ekvivalenciju:

$$(5) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

gdje (5) predstavlja lijevu stranu ekvivalencije pripadne tvrdnje. Pokažimo da naša matrica metrike $\langle\ ,\ \rangle_V$ mora biti jednaka matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naime kada bi bilo

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tada bi a_1 bio vremenski vektor, a_2 bi bio svjetlosni vektor i vektori a_1 i a_2 bi bili međuseobno ortogonalni - postavlja se pitanje postoji li takav par vektora u Lorentz-Minkowskijevom prostoru? Odgovor na to pitanje daje nam Lema 1.2.26 koja kaže da svjetlosni vektor i vremenski vektor ne mogu biti međusobno ortogonalni. S druge strane, kada bi bilo

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tada bi a_1 i a_2 bili svjetlosni vektor koji su međusobno ortogonalni. Tu nam ponovno uskače u pomoć Lema 1.2.26 koja kaže da dva ortogonalna svjetlosna vektora moraju biti kolinearna - dakle, ovdje bi a_1 i a_2 bili kolinearni vektori, što je pak u kontradikciji s time da je $\{a_1, a_2\}$ baza prostora V. Dakle, zaključujemo da mora biti

$$(5) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

te iščitavanjem ove matrične jednakosti vidimo da ona upravo znači da je $\{a_1, a_2\}$ ortogonalna baza prostora V, gdje je a_1 jedinični prostorni i a_2 svjetlosni vektor. $\square$

Sada analogno unitarnim prostorima uvodimo definiciju ortogonalnog komplementa potprostora te dokazujemo nekoliko osnovnih svojstava koja vrijede za takve prostore (napomenimo da ortogonalni komplement možemo, kao i inače, definirati na proizvoljnom prodskupu prostora, ne samo za potprostore, ali to će nam ovdje biti dovoljno).

Definicija 1.2.29. Neka je V proizvoljan potprostor Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$. Definiramo ortogonalni komplement od V kao podskup

$$V^\perp := \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall y \in V)\ x \perp y\}.$$

Proučimo pobliže ortogonalne komplemente u Lorentz-Minkowskijevom prostoru:

Propozicija 1.2.30. Neka je V proizvoljan potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ s induciranom metrikom. Tada vrijedi:

(1) $V^\perp$ je vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$.

Prema tome, od sada nadalje $V^\perp$ promatramo kao potprostor s induciranom metrikom obzirom na Definiciju 1.2.27. Još vrijedi:

(2) $\dim V^\perp = 3 - \dim V$,

(3) $(V^\perp)^\perp = V$,

(4) $$\begin{aligned} &V \text{ prostorni prostor} \iff V^\perp \text{ vremenski prostor},\\ &V \text{ svjetlosni prostor} \iff V^\perp \text{ svjetlosni prostor},\\ &V \text{ vremenski prostor} \iff V^\perp \text{ prostorni prostor}. \end{aligned}$$

DOKAZ $\boxed{1}$ Zapišimo skup $V^\perp$ kao

$$V^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^3_1 \,\middle|\, (\forall y \in V)\ \langle x, y\rangle = 0\right\}.$$

Da bismo pokazali da je to vektorski potprostor, dovoljno je pokazati da je skup zatvoren na linearne kombinacije svojih elemenata. To pak slijedi lagano zbog bilinearnosti metrike $\langle\ ,\ \rangle$ - zaista, uzmemo li proizvoljne $x_1, x_2 \in V^\perp$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in V^\perp &\implies (\forall y \in V)\ \langle x_1, y\rangle = 0 \text{ i } \langle x_2, y\rangle = 0\\ &\implies (\forall y \in V)\ \alpha_1\langle x_1, y\rangle = 0 \text{ i } \alpha_2\langle x_2, y\rangle = 0\\ &\implies (\forall y \in V)\ \langle \alpha_1 x_1, y\rangle = 0 \text{ i } \langle \alpha_2 x_2, y\rangle = 0\\ &\implies (\forall y \in V)\ \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = 0\\ &\implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in V^\perp. \end{aligned}$$

Time zaključujemo da je $V^\perp$ zaista potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. Sada $V^\perp$ također možemo promatrati kao prostor s induciranom metrikom obzirom na Definiciju 1.2.27.
$\boxed{2}$ Ovu tvrdnju ćemo dokazati koristeći analognu tvrdnju poznatu iz linearne algebre koja vrijedi za unitarne prostore: ako je W proizvoljan potprostor s induciranom metrikom euklidskog prostora $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}})$, tada vrijedi

$$\dim W^{\perp_{\mathrm{E}}} = 3 - \dim W, \tag{1.11}$$

gdje smo s $\perp_{\text{E}}$ označili ortogonalni komplement u prostoru $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\text{E}})$. Naime, potprostor $V^\perp$ možemo zapisati koristeći euklidsku metriku $\langle\ ,\ \rangle_{\text{E}}$ na slijedeći način:

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall y \in V)\ \langle x, y\rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall y \in V)\ \langle x, Jy\rangle_{\text{E}} = 0\} && [\text{LEMA } 1.2.11] \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall y \in JV)\ \langle x, y\rangle_{\text{E}} = 0\}, && (1.12) \end{aligned}$$

gdje je s JV označen skup $\{Jy \mid y \in V\}$. Lako vidimo da je JV zapravo potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ čija je dimenzija jednaka $\dim V$ - naime, preslikavanje

$$V \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad x \mapsto Jx$$

je očito injektivan linearan operator pa je time i izomorfizam vektorskog prostora V i svoje slike JV. Koristeći tu tvrdnju, iz jednakosti (1.12) sada zaključujemo da je

$$V^\perp = (JV)^{\perp_{\text{E}}},$$

pa uz poznati analogon (1.11) unitarnog prostora $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\text{E}})$ sada direktno dobivamo

$$\dim V^\perp = \dim(JV)^{\perp_{\text{E}}} \overset{1.11}{=} 3 - \dim JV = 3 - \dim V.$$

$\boxed{3}$ Za početak pokažimo da je V sadržan u $(V^\perp)^\perp$. Naime, po definiciji je $y \in V^\perp \iff (\forall x \in V)\ x \perp y$ pa posebno zaključujemo da

$$x \in V \implies (\forall y \in V^\perp)\ x \perp y.$$

No primijetimo da je po definiciji $x \in (V^\perp)^\perp \iff (\forall y \in V^\perp)\ x \perp y$ pa koristeći gornju implikaciju odmah slijedi

$$x \in V \implies x \in (V^\perp)^\perp.$$

Time smo dakle pokazali da je V podskup od $(V^\perp)^\perp$. Štoviše, V je potprostor od $(V^\perp)^\perp$ - to možemo reći jer iz tvrdnje (1) slijedi da je $V^\perp$ pa time i $(V^\perp)^\perp$ potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. Konačno, koristeći tvrdnju (2) dokazujemo da su to prostori jednakih dimenzija:

$$\dim(V^\perp)^\perp = 3 - \dim V^\perp = 3 - (3 - \dim V) = \dim V,$$

iz čega zaključujemo da zapravo vrijedi jednakost vektorskih prostora $V = (V^\perp)^\perp$.
$\boxed{4}$ Za početak se uvjerimo da nam je dovoljno dokazati implikacije

$$V \text{ prostorni potprostor} \implies V^\perp \text{ vremenski potprostor}, \tag{1.13}$$

$$V \text{ vremenski potprostor} \implies V^\perp \text{ prostorni potprostor}. \tag{1.14}$$

Naime, ako je $V^\perp$ vremenski potprostor, tada iz (1.14) slijedi da je $(V^\perp)^\perp$ prostorni potprostor pa uz (3) dobivamo da je V prostorni potprostor - to dokazuje prvu ekvivalenciju. Ako je pak $V^\perp$ prostorni potprostor, tada iz (1.13) imamo da je $(V^\perp)^\perp$ vremenski potprostor pa ponovno iz (3) slijedi da je zapravo V vremenski potprostor i to dokazuje treću ekvivalenciju. Konačno, ako je V svjetlosni potprostor, tada znamo da $V^\perp$ mora isto biti svjetlosni potprostor - naime, on ne može biti prostorni niti vremenski potprostor, jer bi po prvoj i trećoj ekvivalenciji tada slijedilo da je V prostorni odnosno vremenski što je nemoguće. Sasvim isto bismo pokazali da u slučaju da je $V^\perp$ svjetlosni tada mora i $(V^\perp)^\perp$ biti svjetlosni potprostor iz čega uz korak (3) zaključujemo da vrijedi i druga ekvivalencija. Dakle, zaista su nam dovoljne implikacije (1.13) i (1.14) da bismo dokazali sve tri ekvivalencije pa dokažimo te dvije implikacije.
$\boxed{1.13}$ Neka je V prostorni potprostor, tada po Teoremu 1.2.28 znamo da postoji (ortonormirana) baza prostora V. Označimo tu bazu s B i komentirajmo da se prema navedenom Teoremu ta baza sastoji isključivo od prostornih vektora. Pozovimo se sada na Propoziciju 1.2.21 koja nam garantira da postoji proširenje B' takvo da je $B \cup B'$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Proučimo pobliže potprostor $\operatorname{span} B'$ - pokazat ćemo da je

- $\operatorname{span} B' = V^\perp$ i da je
- $\operatorname{span} B'$ vremenski potprostor.

S jedne strane, lako vidimo da je B' sadržan u $V^\perp$ jer su vektori iz B' ortogonalni na vektore iz $\operatorname{span} B = V$ - stoga je i $\operatorname{span} B'$ sadržan u $V^\perp$, dakle to je potprostor od $V^\perp$. Pokažimo da su oni iste dimenzije: zaista, koristeći tvrdnju (2) slijedi:

$$\dim \operatorname{span} B' = 3 - \dim \operatorname{span} B = 3 - \dim V \overset{(2)}{=} \dim V^\perp.$$

Prema tome, zaključujemo da su potprostori $\operatorname{span} B'$ i $V^\perp$ zapravo jednaki.
S druge strane, budući da je $B \cup B'$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, tada ona po Propoziciji 1.2.21 mora sadržavati (jedan) vremenski vektor. Kako se B sastoji samo od prostornih vektora, tada zaključujemo da B' mora sadržavati taj vremenski vektor. Konačno, kako je B' ortonormirana baza prostora $\operatorname{span} B'$ koja sadrži vremenski vektor, ponovno koristeći Teorem 1.2.28 zaključujemo da $\operatorname{span} B'$ mora biti vremenski potprostor. Sada koristeći tvrdnju prve točke slijedi da je $V^\perp$ vremenski potprostor čime je dokaz ove implikacije gotov.
$\boxed{1.14}$ Ovu implikaciju možemo dokazati sasvim analogno prethodnome, ali ju možemo pokazati i na drugi način. Pretpostavimo da je V vremenski potprostor. Budući da su V i $V^\perp$ potprostori s metrikom, tada prema Teoremu 1.2.28 znamo da oni imaju (ortonormirane) baze u kojima se njihove metrike zapisuju u normalnom obliku -

označimo s B i B' te baze respektivno. U slučaju potprostora V znamo da je to (ortonormirana) baza koja sadrži vremenski vektor, označimo ga s v. Budući da su elementi skupova B i B' međusobno ortogonalni, tada su posebno elementi iz B' ortogonalni na vremenski vektor v. No prema Lemi 1.2.26 vremenski vektor može biti ortogonalan samo s prostornim vektorom i nulvektorom - zaključujemo da se skup B' sastoji samo od prostornih vektora iz čega slijedi da $V^{\perp}$ mora biti prostorni potprostor što smo i htjeli pokazati. $\square$

Proučimo sada pobliže dvodimenzionalne potprostore od $\mathbb{R}^3_1$. Za početak navedimo nekoliko primjera dvodimenzionalnih potprostora i probajmo iz toga izvući neke zaključke.

Primjer 1.2.31. Označimo s $p := (1, 0, 0)$ jedinični prostorni vektor u $\mathbb{R}^3_1$ pa izaberemo različite vektore s kojima p generira vremenske, svjetlosne odnosno prostorne potprostore. Za početak primijetimo da, označimo li

$$v_1 := \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad , \quad v_2 := (0, 0, 1) \quad , \quad v_3 := \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

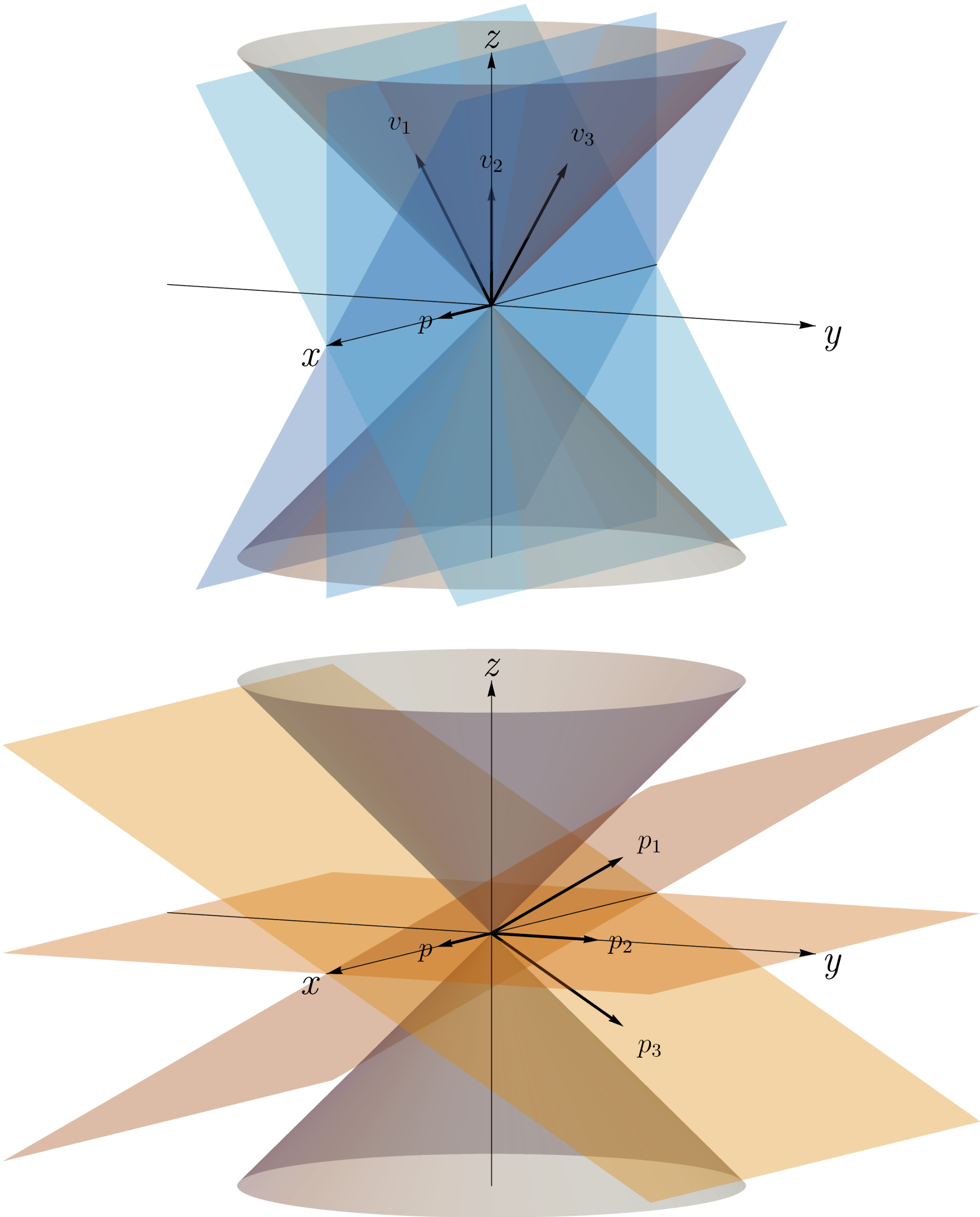
tada $\{p, v_i\}$ predstavlja ortonormiran skup pa time i ortonormiranu bazu prostora $\operatorname{span}\{p, v_i\}$. Budući da je ovdje p prostorni i v_i vremenski vektor, tada po Teoremu 1.2.28 zaključujemo da je $\operatorname{span}\{p, v_i\}$ vremenski potprostor za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ - kako oni izgledaju u koordinatnom sustavu možemo vidjeti na gornjem grafu u Slici 1.3 (plave ravnine). S druge strane, označimo li

$$p_1 := \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad p_2 := (0, 1, 0) \quad , \quad p_3 := \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

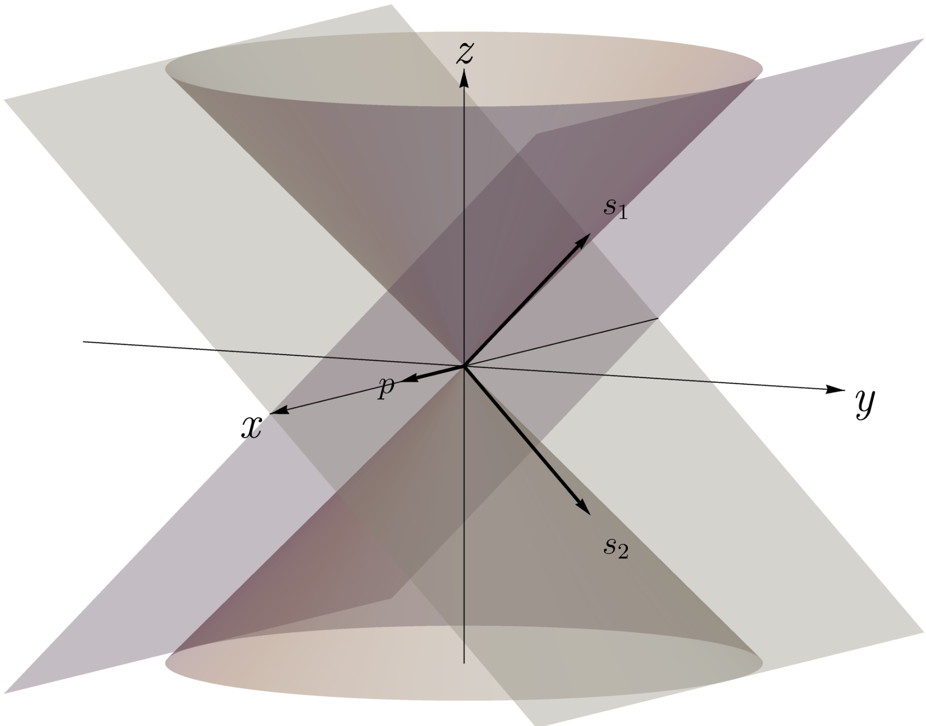
onda $\{p, p_i\}$ također predstavlja ortonormiran skup odnosno ortonormiranu bazu prostora $\operatorname{span}\{p, p_i\}$. Budući da su ovaj put p i p_i prostorni vektori, tada po istom Teoremu zaključujemo da je $\operatorname{span}\{p, p_i\}$ prostorni potprostor za sve $i \in \{1, 2, 3\}$ - njihove prikaze u koordinatnom sustavu možemo vidjeti na donjem grafu u Slici 1.3 (narančaste ravnine). Konačno, uzmemo li

$$s_1 = (0, 1, 1) \quad \text{i} \quad s_2 = (0, 1, -1),$$

lako možemo vidjeti da $\{p, s_i\}$ predstavlja ortogonalan skup odnosno ortogonalnu bazu prostora $\operatorname{span}\{p, s_i\}$. Kako je ovdje p prostorni, a s_i svjetlosni vektor, onda po Teoremu 1.2.28 zaključujemo da $\operatorname{span}\{p, s_i\}$ mora biti svjetlosni potprostor za $i = 1, 2$ - ta dva potprostora vizualno prikazujemo Slikom 1.4.



Slika 1.3: Vremenski potprostori span$\{p, v_i\}$ i prostorni potprostori span$\{p, p_i\}$



Slika 1.4: Potprostori span$\{p, s_i\}$

Kao posljedicu ovog primjera primijetimo slijedeće - vremenski potprostori u ovom primjeru sijeku svjetlosni stožac u dva pravca, prostorni potprostori ne sijeku svjetlosni stožac, dok svjetlosni potprostori tangiraju svjetlosni stožac, to jest njihov presjek je pravac koji prolazi ishodištem. Pretpostavimo li da su ovo karakterizacije ovih potprostora, tada bi to bio (vizualno) izrazito efektivan način raspoznavanja tipa dvodimenzionalnog potprostora. Motivirani ovim primjedbama dokazujemo iduće karakterizacije.

Propozicija 1.2.32. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan dvodimenzionalni vektorski potprostor. Ekvivalentno je:

(1) V je prostor sa vremenskom metrikom,

(2) V sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora,

(3) V sadrži vremenski vektor.

DOKAZ $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Neka je V prostor s vremenskom metrikom, tada postoji ortonormirana baza $\{p, v\}$ prostora V (TEOREM 1.2.28) gdje je p prostorni vektor i v vremenski vektor. Računom u ovoj bazi pokažimo da V sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora. Označimo sa $s = \alpha p + \beta v$ neki vektor iz V, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalari - želimo naći uvjete na te skalare za koje je s svjetlosni vektor. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}\langle s, s\rangle = 0 &\iff \langle \alpha p + \beta v, \alpha p + \beta v\rangle = 0,\\ &\iff \alpha^2\langle p, p\rangle + 2\alpha\beta\langle p, v\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle = 0,\\ &\iff \alpha^2 - \beta^2 = 0,\\ &\iff \alpha^2 = \beta^2.\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da uzimanjem $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ odnosno $\alpha = 1$ i $\beta = -1$ nalazimo dva svjetlosna vektora $p + v$ i $p - v$ sadržana u V. Pokažimo da ti vektori nisu kolinearni. Prvo, budući da su p i v vektori različitog tipa, slijedi da je $p + v \neq 0$ i $p - v \neq 0$. Sada pretpostavimo da su $p + v$ i $p - v$ kolinearni - tada postoji neki skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $p + v = \lambda(p - v)$. Odavde pak slijedi da je $(1 - \lambda)p = (-1 - \lambda)v$ pa su vektori p i v kolinearni što je nemoguće jer su to vektori različitog tipa (prisjetimo se Napomene 1.2.6). Dakle, dobili smo kontradikciju pa je pretpostavka bila kriva - vektori $p+v$ i $p-v$ su dva nekolinearna svjetlosna vektora u V.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Pretpostavimo da V sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora s_1 i s_2. Inspirirani dokazom prethodnog koraka označimo s $x = s_1 + s_2$ i $y = s_1 - s_2$ dva elementa prostora V. Tada direktnim računom možemo naći da je

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle s_1 + s_2, s_1 + s_2\rangle\\ &= \langle s_1, s_1\rangle + 2\langle s_1, s_2\rangle + \langle s_2, s_2\rangle\\ &= 2\langle s_1, s_2\rangle\end{aligned}$$

te sasvim analogno i

$$\langle y, y\rangle = -2\langle s_1, s_2\rangle.$$

Prisjetimo li se Leme 1.2.26 odavde možemo zaključiti da ni x ni y nije svjetlosni vektor (pošto su s_1 i s_2 oba svjetlosna vektora, tada je $\langle s_1, s_2\rangle \neq 0$). Štoviše, budući da su $\langle x, x\rangle$ i $\langle y, y\rangle$ različiti od 0 i suprotnog predznaka, zaključujemo da jedan od vektora x i y onda mora biti vremenski vektor čime je tvrdnja dokazana.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Dokažimo ekvivalentnu tvrdnju: obrat po kontrapoziciji ove implikacije. Pretpostavimo da V nije vremenski potprostor - tada je to prostorni ili svjetlosni potprostor. U svakom slučaju, tada po Teoremu 1.2.28 postoji ortogonalna baza $\{x, y\}$ prostora V, gdje su vektori x i y prostorni ili svjetlosni. Neka je sada $v \in V$ proizvoljan vektor - on se tada u toj bazi zapisuje kao $v = \alpha x + \beta y$ za neke skalare

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Odredimo računom kojeg je tipa vektor v:

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \alpha^2\langle x, x\rangle + 2\alpha\beta\langle x, y\rangle + \beta^2\langle y, y\rangle \\ &= \alpha^2\langle x, x\rangle + \beta^2\langle y, y\rangle \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili da su x i y međusobno ortogonalni vektori, te smo u zadnjoj nejednakosti koristili da su x i y prostorni ili svjetlosni vektori. Budući da je $\langle v, v\rangle \geq 0$ zaključujemo da v nije vremenski vektor pa po proizvoljnosti elementa $v \in V$ slijedi da V ne sadrži nijedan vremenski vektori i time je završen dokaz ovog teorema. □

Propozicija 1.2.33. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan dvodimenzionalni vektorski potprostor. Ekvivalentno je:

(1) V je prostor s prostornom metrikom,

(2) V ne sadrži vremenski niti svjetlosni vektor,

(3) V sadrži isključivo prostorne vektore (i nulvektor).

<u>DOKAZ</u> $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Pretpostavimo da je V prostorni potprostor. Tada prema TEOREMU 1.2.28 znamo da postoji ortognormirana baza $\{p_1, p_2\}$, gdje su vektori p_1 i p_2 prostorni vektori. Neka je $x \in V$ proizvoljan vektor - tada postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $x = \alpha p_1 + \beta p_2$. Izračunajmo kakvog tipa može biti vektor x:

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle \alpha p_1 + \beta p_2, \alpha p_1 + \beta p_2\rangle \\ &= \alpha^2\langle p_1, p_1\rangle + 2\alpha\beta\langle p_1, p_2\rangle + \beta^2\langle p_2, p_2\rangle \\ &= \alpha^2 + \beta^2.\end{aligned}$$

U slučaju da je $x \neq 0$, tada je barem jedan od α i β različit od 0 pa zaključujemo da x tada mora biti prostorni vektor. Dakle, x je ili prostorni ili nulvektor pa x sigurno nije niti svjetlosni niti vremenski vektor što smo trebali i pokazati.
$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Ovo slijedi trivijalno, budući da DEFINICIJA 1.2.5 klasificira sve nenul vektore prostora $\mathbb{R}^3_1$.
$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Pretpostavimo da V sadrži isključivo prostorne vektore i nulvektor. Kada bi V bio vremenski potprostor, tada bi po TEOREMU 1.2.28 on sadržavao (jedinični) vremenski vektor - dakle V nije vremenski potprostor. Kada bi V bio svjetlosni potprostor, tada bi po istom TEOREMU sadržavao neki svjetlosni vektor - dakle, zaključujemo da V ne može biti niti svjetlosni potprostor. Budući da DEFINICIJA 1.2.27 klasificira sve dvodimenzionalne potprostore od $\mathbb{R}^3_1$ zaključujemo da V mora biti prostorni potprostor. □

Radi elegantnijeg iskaza i dokaza posljednjih karakterizacija uvodimo oznaku:

$$\mathcal{C}^\circ = \mathcal{C} \cup \{0\}.$$

Propozicija 1.2.34. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan dvodimenzionalni vektorski potprostor. Ekvivalentno je:

(1) V je svjetlosni potprostor,

(2) V sadrži svjetlosni vektor i ne sadrži vremenski vektor,

(3) $\dim(V \cap \mathcal{C}^\circ) = 1$ - dakle, $V \cap \mathcal{C}^\circ$ je jednodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$.

DOKAZ $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Kako je V svjetlosni potprostor, tada po TEOREMU 1.2.28 on očito sadrži svjetlosni vektor. S druge strane, budući da je V svjetlosni potprostor, tada on nije vremenski potprostor pa iz PROPOZICIJE 1.2.32 slijedi da V ne sadrži vremenski vektor. Time je pokazano da ova implikacija vrijedi.
$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Pretpostavimo da V sadrži svjetlosni vektor i da ne sadrži vremenski vektor - označimo s s neki svjetlosni vektor iz V. Tada skup $V \cap \mathcal{C}^\circ$ očito sadrži jednodimenzionalan prostor $\operatorname{span} s$. Kada bi bilo $(V \cap \mathcal{C}^\circ) \neq \operatorname{span} s$, onda bi postojao vektor $\hat{s} \in (V \cap \mathcal{C}^\circ) \setminus \operatorname{span} s$ što bi značilo da V sadrži svjetlosni vektor $\hat{s}$ koji nije kolinearan s vektorom s. Ali to sada znači da V sadrži dva nekolinearna svjetlosna vektora, što po PROPOZICIJI 1.2.32 implicira da V sadrži vremenski vektor i time dolazimo do kontradikcije. Dakle pretpostavka je bila kriva i zaključujemo da je $V \cap \mathcal{C}^\circ = \operatorname{span} s$.
$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Za kraj pretpostavimo da je $V \cap \mathcal{C}^\circ$ jednodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. S jedne strane, kako V sadrži svjetlosni vektor, onda po PROPOZICIJI 1.2.33 zaključujemo da V nije prostorni potprostor. S druge strane, V ne može sadržavati dva nekolinearna svjetlosna vektora, jer su svi svjetlosni vektori od V sadržani u jednodimenzionalnom prostoru $V \cap \mathcal{C}^\circ$ - dakle, prema PROPOZICIJI 1.2.32 slijedi da V ne može biti vremenski potprostor. Konačno, budući da su DEFINICIJOM 1.2.27 klasificirani svi dvodimenzionalni vektorski potprostori, zaključujemo da tada V mora biti vremenski potprostor čime je završen dokaz ove propozicije. $\square$

Pozabavimo se sada ortogonalnošću Lorentz-Minkowskijevog prostora. Postavlja se pitanje koji su sve vektori u $\mathbb{R}^3_1$ ortogonalni na neki fiksni vektor $N \in \mathbb{R}^3_1$? Isto kao i u euklidskom prostoru, ispostavlja se da taj skup čini ravninu koja prolazi ishodištem, to jest dvodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. Naime, s jedne strane skup svih vektora ortogonalnih na vektor N zapisujemo kao

$$\{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle x, N \rangle = 0\},$$

dok s druge strane možemo primijetiti da je

$$\begin{aligned}(\operatorname{span} N)^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall y \in \operatorname{span} N)\ \langle x, y\rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \langle x, \alpha N\rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ \langle x, \alpha N\rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid (\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ \alpha\langle x, N\rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle x, N\rangle = 0\},\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili činjenicu da je N baza prostora $\operatorname{span} N$, u trećoj jednakosti riješili trivijalno pitanje nulvektora, u četvrtoj jednakosti koristili bilinearnost metrike te zadnjoj jednakosti dijelili skalarom i time ispustili kvantifikator. Dakle, zaključujemo da je skup svih vektora ortogonalnih na vektor N upravo potprostor $(\operatorname{span} N)^\perp$, čiju dimenziju znamo računati po Propoziciji 1.2.30.2:

$$\dim(\operatorname{span} N)^\perp = 3 - \dim \operatorname{span} N = 3 - 1 = 2$$

što pokazuje traženu tvrdnju.

Jednako tako, možemo se pitati postoji li i kako glasi normalan vektor na dani dvodimenzionalni potprostor V? Za vektor $N \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\}$ kažemo da je normalan na dvodimenzionalan potprostor V, ako je $(\forall x \in V)\ \langle x, N\rangle = 0$. Po definiciji se direktno vidi da je svaki vektor normalan na potprostor V sadržan u njegovom ortogonalnom komplementu $V^\perp$. Štoviše vrijedi i obratno: neka je $N \in V^\perp \setminus \{0\}$ proizvoljan vektor - tada po Propoziciji 1.2.30 znamo da je $\operatorname{span} N = V^\perp$, jer je $\dim V^\perp = 3 - \dim V = 1$. Sada po prethodnoj diskusiji i istoj Propoziciji slijedi da je

$$V = (V^\perp)^\perp = (\operatorname{span} N)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle x, N\rangle = 0\}.$$

Odavde zaključujemo da je N normalan vektor na potprostor V i da je $V^\perp \setminus \{0\}$ zapravo skup svih vektora normalnih na potprostor V. Time zaključujemo da imamo dobro ustanovljen odnos dvodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{R}^3_1$ i njihovih normalnih vektora.

Štoviše, obzirom na tip dvodimenzionalnog potprostora odnosno tip njegovog normalnog vektora možemo navesti iduće karakterizacije:

Propozicija 1.2.35. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan dvodimenzionalni vektorski potprostor. Označimo s N proizvoljan normalan vektor na potprostor V, to jest neka je $N \in V^\perp \setminus \{0\}$ proizvoljan. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}&V \text{ prostorni potprostor} \iff N \text{ vremenski vektor},\\ &V \text{ vremenski potprostor} \iff N \text{ prostorni vektor},\\ &V \text{ svjetlosni potprostor} \iff N \text{ svjetlosni vektor}.\end{aligned}$$

DOKAZ Ova propozicija direktna je posljedica činjenice da je $V^\perp \setminus \{0\}$ skup svih vektora normalnih na potprostor V, tvrdnje PROPOZICIJE 1.2.30.4 i karakterizacija iz TEOREMA 1.2.28. □

Međutim, u slučaju da nemamo dobru intuiciju o ortogonalnosti u Lorentz-Minkowskijevom prostoru, možemo koristiti i iduću karakterizaciju:

Korolar 1.2.36. Neka je $V \leq \mathbb{R}^3_1$ proizvoljan dvodimenzionalni vektorski potprostor. Označimo s N_{E} proizvoljan vektor normalan na potprostor V obzirom na euklidsku metriku $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
&V \text{ prostorni potprostor} \iff N_{\mathrm{E}} \text{ vremenski vektor},\\
&V \text{ vremenski potprostor} \iff N_{\mathrm{E}} \text{ prostorni vektor},\\
&V \text{ svjetlosni potprostor} \iff N_{\mathrm{E}} \text{ svjetlosni vektor}.
\end{aligned}$$

DOKAZ Neka je N_{E} vektor odabran kao u iskazu - pokažimo da je tada $JN_{\mathrm{E}} \in V^\perp \setminus \{0\}$, gdje kao i inače

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

predstavlja matricu refleksije vektora obzirom na xy-ravninu. Naime, po definiciji imamo

$$(\forall x \in V)\ \langle x, N_{\mathrm{E}} \rangle_{\mathrm{E}} = 0$$

pa primjenom LEME 1.2.11 dobivamo da je

$$(\forall x \in V)\ \langle x, JN_{\mathrm{E}} \rangle = 0$$

što po definiciji kaže da je vektor $JN_{\mathrm{E}} \neq 0$ normalan na potprostor V, odnosno da je $JN_{\mathrm{E}} \in V^\perp \setminus \{0\}$. Konačno, prisjetimo se da po NAPOMENI 1.2.6 znamo da je N_{E} istog tipa kao i vektor JN_{E}. Sada možemo lako vidjeti da iz prethodne PROPOZICIJE 1.2.35 kao posljedica slijedi ekvivalencija

$$N_{\mathrm{E}} \text{ vremenski vektor} \iff JN_{\mathrm{E}} \text{ vremenski vektor} \iff V \text{ prostorni potprostor}$$

te analogno pokazujemo da vrijede i ostale ekvivalencije iz iskaza, što zaključuje dokaz ovog korolara. □

Sve ove karakterizacije jesu korisne, ali još uvijek nemamo neki efektivan (računski) način da nađemo vektor normalan na dan dvodimenzionalan potprostor u $\mathbb{R}^3_1$ - tu nam u pomoć uskače iduća jednostavna propozicija:

Propozicija 1.2.37. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ dva proizvoljna linearno nezavisna vektora. Tada je vektor $x \times y$ normalan na dvodimenzionalni potprostor $\mathrm{span}\{x, y\}$.

<u>DOKAZ</u> Dovoljno je, dakako, uvjeriti se samo da je $x \times y \in (\mathrm{span}\{x, y\})^\perp \setminus \{0\}$ - odmah možemo reći da je $x \times y \neq 0$ jer su vektori linearno nezavisni (PROPOZICIJA 1.2.13.6). Štoviše, iz iste PROPOZICIJE imamo i da je $x \times y \perp x$ i $x \times y \perp y$ pa je po bilinearnosti metrike $x \times y$ također okomit na svaki vektor iz $\mathrm{span}\{x, y\}$ - dakle $x \times y \in (\mathrm{span}\{x, y\})^\perp \setminus \{0\}$ pa je $x \times y$ traženi normalni vektor. $\square$

Primjer 1.2.38. U ovom primjeru navodimo nekoliko različitih dvodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{R}^3_1$ i njihovih pripadnih normalnih vektora. Zapravo, preuzmimo primjere dvodimenzionalnih potprostora iz PRIMJERA 1.2.31 - označimo

$$\begin{aligned} V_i &:= \mathrm{span}\{p, v_i\}, & i &\in \{1, 2, 3\} \\ P_i &:= \mathrm{span}\{p, p_i\}, & i &\in \{1, 2, 3\} \\ S_i &:= \mathrm{span}\{p, s_i\} & i &\in \{1, 2\} \end{aligned}$$

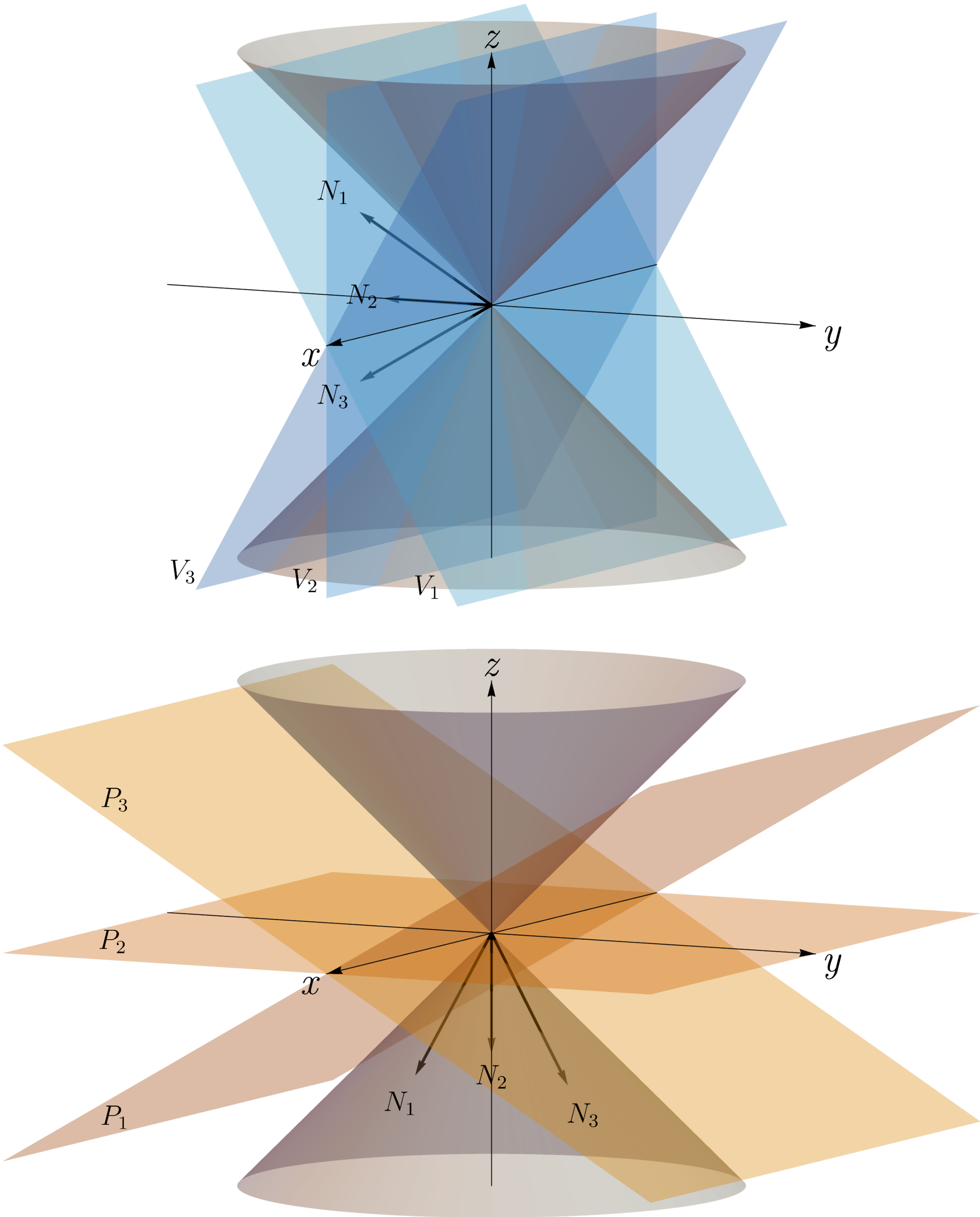
kao što smo to imali u navedenom PRIMJERU. Tada normalne vektore na dane potprostore lagano računamo pomoću prethodne PROPOZICIJE 1.2.37 i NAPOMENE 1.2.10 - vizualni prikaz potprostora i njihovih pripadnih normalnih vektora možemo vidjeti na SLIKAMA 1.5 i 1.6 (s N_i označavamo normalni vektor pripadnog potprostora na pojedinoj slici).

Primijetimo da iz prošlog primjera možemo vidjeti da je normalan vektor na svjetlosni potprostor S_i sadržan u samom potprostoru! To nije slučajnost - štoviše, to je i pravilo. Naime, lako se može pokazati da je za svaki dvodimenzionalni svjetlosni potprostor njegov ortogonalni komplement sadržan u njemu. S druge strane, ortogonalni komplement dvodimenzionalnog prostornog i vremenskog potprostora se sječe s početnim prostorom samo u nulvektoru - dakle, on s njime u ortogonalnoj sumi daje cijeli ambijentalni prostor $\mathbb{R}^3_1$. Na takvo što smo naviknuti u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle_{\mathrm{E}})$, dok je ova „anomalija" kod svjetlosnih potprostora nešto što se nije moglo sresti u unitarnim prostorima, a ona je posljedica indefinitnosti Lorentzove metrike.

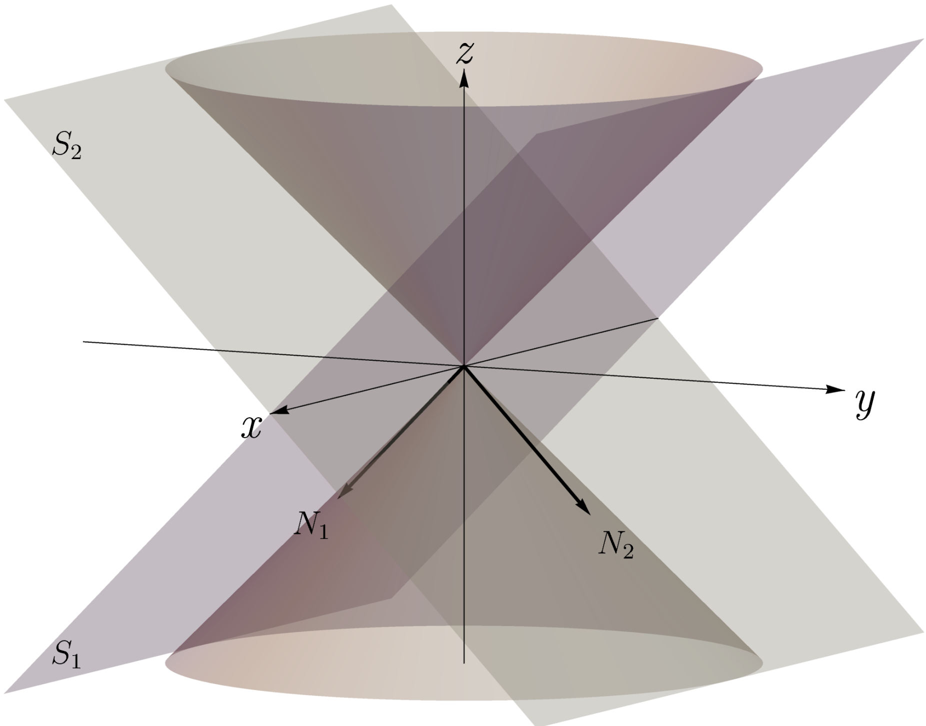
Konačno, sada smo u poziciji dokazati CSB nejednakosti Lorentz-Minkowskijevog prostora, prvo jedna korisna pomoćna tvrdnja i onda dokaz teorema:

Teorem 1.2.39 (CSB nejednakosti)**.** Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ dva proizvoljna vektora Lorentz-Minkowskijevog prostora te označimo $V = \mathrm{span}\{x, y\}$. Ako su x i y kolinearni, tada su oni vektori istog tipa te vrijedi

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$



Slika 1.5: Normalni vektori potprostora V_i i P_i



Slika 1.6: Normalni vektori potprostora S_i

gdje znamo sa su obje strane jednakosti jednake 0 samo kada je riječ o svjetlosnim vektorima. S druge strane, kada su x i y linearno nezavisni, nejednakosti dijelimo na iduće slučajeve:

(1) u slučaju da su x i y prostorni vektori, tada je

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle^2 > \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle &\iff x\times y \text{ prostorni vektor}\\
&\iff V \text{ vremenski potprostor},\\
\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle &\iff x\times y \text{ svjetlosni vektor}\\
&\iff V \text{ svjetlosni potprostor},\\
\langle x,y\rangle^2 < \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle &\iff x\times y \text{ vremenski vektor}\\
&\iff V \text{ prostorni potprostor},
\end{aligned}$$

(2) u slučaju da jedan od vektora x i y prostorni, a drugi vremenski, tada je

$$\langle x,y\rangle^2 > \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

(3) u slučaju da jedan od vektora x i y prostorni, a drugi svjetlosni, tada je

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle^2 > 0 &\Longleftrightarrow x \times y \text{ prostorni vektor}\\ &\Longleftrightarrow V \text{ vremenski potprostor},\\ \langle x, y\rangle^2 = 0 &\Longleftrightarrow x \times y \text{ svjetlosni vektor}\\ &\Longleftrightarrow V \text{ svjetlosni potprostor},\end{aligned}$$

(4) u slučaju da su x i y vremenski vektori, tada je

$$\langle x, y\rangle^2 > \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

(5) u slučaju da jedan od vektora x i y vremenski, a drugi svjetlosni, tada je

$$\langle x, y\rangle^2 > 0,$$

(6) u slučaju da su x i y svjetlosni vektori, tada je

$$\langle x, y\rangle^2 > 0.$$

<u>DOKAZ</u> Dokaz ovog teorema u suštini se sastoji od iščitavanja LAGRANGEOVOG IDENTITETA dokazanog u PROPOZICIJI 1.2.17.3. Komentirajmo prvo situaciju kada su x i y kolinearni - naime, tada pomoću PROPOZICIJE 1.2.13.6 imamo

$$\begin{aligned}x \text{ i } y \text{ kolinearni} &\Longleftrightarrow x \times y = 0\\ &\Longrightarrow \langle x \times y, x \times y\rangle = 0\\ &\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0\\ &\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,\end{aligned}$$

gjde smo u trećem retku koristili upravo LAGRANGEOV IDENTITET. Jasan nam je slučaj kada su x i y oba svjetlosna, a da su x i y istog tipa znamo iz NAPOMENE 1.2.6. Stoga pretpostavimo sada da su x i y linearno nezavisni vektori - tada ponovno po PROPOZICIJI 1.2.13.6 znamo da je ovog puta $x \times y \neq 0$. Sada za izraz $\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ pomoću LAGRANGEOVOG IDENTITETA ustvrđujemo da je

$$\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle > 0 \Longleftrightarrow x \times y \text{ prostorni vektor}, \tag{1.15}$$
$$\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0 \Longleftrightarrow x \times y \text{ svjetlosni vektor}, \tag{1.16}$$
$$\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle < 0 \Longleftrightarrow x \times y \text{ vremenski vektor}. \tag{1.17}$$

Dodatno komentirajmo da ekvivalencije

$$x \times y \text{ prostorni vektor} \Longleftrightarrow V \text{ vremenski potprostor},$$
$$x \times y \text{ svjetlosni vektor} \Longleftrightarrow V \text{ svjetlosni potprostor},$$
$$x \times y \text{ vremenski vektor} \Longleftrightarrow V \text{ prostorni potprostor}$$

vrijede trivijalno uz pomoć PROPOZICIJA 1.2.37 i 1.2.35 te ih stoga ubuduće nećemo posebno komentirati. Dokažimo sada individualno tvrdnje koristeći ekvivalencije (1.15), (1.16), (1.17).

$\boxed{1}$ Ovdje sve zapravo već slijedi iz spomenutih ekvivalencija, no samo iskažimo da su sva tri slučaja moguća. Naime, slučaj da je $x \times y$ prostorni vektor možemo dobiti uzmemo li na primjer $x = (0, 1, 1/2)$ i $y = (0, 1, -1/2)$, slučaj kada je $x \times y$ svjetlosni vektor dogodi se na primjer za $x = (1, 1, 1)$ i $y = (-1, 1, 1)$, dok se situacija kada je $x \times y$ vremenski vektor dogodi na primjer za $x = (1, 0, 0)$ i $y = (0, 1, 0)$.

$\boxed{2}$ Kada je jedan od vektora x i y prostorni, a drugi vremenski, tada vidimo da je V zapravo dvodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ koji sadrži vremenski vektor, iz čega po PROPOZICIJI 1.2.32 slijedi da je V upravo vremenski potprostor. Tada znamo da je $x \times y$ prostorni vektor pa po ekvivalenciji (1.15) slijedi tvrdnja.

$\boxed{3}$ Kada je jedan od vektora x i y svjetlosni, tada je $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ nužno jednako nula pa dobivamo očitu nejednakost $\langle x, y\rangle^2 \geq 0$ - no po LAGRANGEOVOM IDENTITETU ovdje imamo da je baš $\langle x, y\rangle^2 = \langle x \times y, x \times y\rangle$ iz čega vidimo da je $x \times y$ nužno prostorni ili svjetlosni vektor. Sada iz ekvivalencija (1.15) i (1.16) slijede tražene tvrdnje. Komentirajmo još da se obje situacije mogu dogoditi: prva se postiže na primjer za $x = (0, 1, 0)$ i $y = (0, 1, 1)$, dok drugu imamo na primjer kada je $x = (1, 1, 1)$ i $y = (0, 1, 1)$.

$\boxed{4}$ Kada su x i y oba vremenska vektora, tada slično tvrdnji (2) zaključujemo da je V vremenski potprostor - time je $x \times y$ prostorni vektor te pomoću (1.15) slijedi tvrdnja.

$\boxed{5}$ Isto kao i u dokazu tvrdnje (3) možemo zaključiti da je $x \times y$ nužno prostorni ili svjetlosni vektor - pokažimo da u ovom slučaju $x \times y$ mora biti prostorni vektor. Naime, budući da je jedan od vektora x i y vremenski vektor, tada kao i u dokazu tvrdnje (2) zaključujemo da je V vremenski potprostor i time $x \times y$ mora biti prostorni vektor iz čega slijedi tražena tvrdnja.

$\boxed{6}$ Konačno, kao i u dokazu prethodne tvrdnje, dobivamo da je $x \times y$ prostorni ili svjetlosni vektor. No ovog puta $x \times y$ mora biti prostorni vektor, jer budući da su x i y dva nekolinearna svjetlosna vektora, tada po PROPOZICIJI 1.2.32 zaključujemo da V mora biti vremenski potprostor i to nam je dovoljno za traženi zaključak. $\square$

Za kraj smo ostali dužni dokazati potrebne tvrdnje vezane uz pojam nul baze: izvesti pripadna dopunjavanja skupa do nul baze i to je predmet iduće propozicije.

Propozicija 1.2.40. U Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ vrijede slijedeće tvrdnje.

(1) Ako su A i B dva svjetlosna vektora u $\mathbb{R}^3_1$ za koja vrijedi $\langle A, B\rangle = 1$, tada postoje točno dva jedinična prostorna vektora C takva da je $\{A, B, C\}$ nul baza u $\mathbb{R}^3_1$.

(2) Ako je A svjetlosni vektor i C jedinični prostorni vektor te ako su ta dva vektora međusobno ortogonalna, tada postoji jedinstveni svjetlosni vektor B za koji je skup $\{A, B, C\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

(3) Ako je A svjetlosni vektor, tada postoje svjetlosni vektor B i jedinični prostorni vektor C takvi da je $\{A, B, C\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

DOKAZ $\boxed{1}$ Budući da su A i B dva svjetlosna vektora za koja vrijedi $\langle A, B\rangle = 1$, tada zaključujemo da su A i B linearno nezavisni. Naime, kada bi ti vektori bili kolinearni, tada bi iz NAPOMENE 1.2.8 slijedilo da su oni međusobno ortogonalni, što je u kontradikciji s pretpostavkom $\langle A, B\rangle = 1$. Dakle, budući da su A i B dva nekolinearna svjetlosna vektora, tada je prostor koji oni razapinju, $\operatorname{span}\{A, B\}$, zapravo (dvodimenzionalni) vremenski potprostor - to lako vidimo koristeći karakterizaciju danu PROPOZICIJOM 1.2.32. Štoviše, tada je njegov ortogonalni komplement $(\operatorname{span}\{A, B\})^\perp$ jednodimenzionalni prostorni potprostor pa po TEOREMU 1.2.28 zaključujemo da postoji jedinični prostorni vektor $C \in (\operatorname{span}\{A, B\})^\perp$. Dakle, našli smo jedinični prostorni vektor $C \in \mathbb{R}^3_1$ takav da je $C \perp A$ i $C \perp B$ - sada po definiciji vidimo da skup $\{A, B, C\}$ čini nul bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. Lako vidimo da je $-C$ tada također jedinični prostorni vektor te da $\{A, B, -C\}$ isto tako čini nul bazu - štoviše, C i $-C$ su jedini jedinični prostorni vektor u $(\operatorname{span}\{A, B\})^\perp$. Kada bi postojao još neki vektor D takav da je $\{A, B, D\}$ nul baza, tada bismo lako našli da je $D \in (\operatorname{span}\{A, B\})^\perp$ iz čega bi slijedilo da je $D = C$ ili $D = -C$.
$\boxed{2}$ Neka su vektori A i C dani kao i u iskazu tvrdnje - ovaj dokaz dijelimo na dva dijela: dokaz egzistencije i dokaz jedinstvenosti.
$\boxed{\exists}$ Trebamo pronaći svjetlosni vektor u $\mathbb{R}^3_1$ koji je ortogonalan na prostorni vektor C - stoga potragu započinjemo proučavajući potprostor $(\operatorname{span} C)^\perp$. Odmah vidimo da je $A \in (\operatorname{span} C)^\perp$ no nama je potreban neki drugi svjetlosni vektor koji nije kolinearan s A (jer svaki vektor koji je kolinearan s A u pseudoskalarnom produktu s A daje 0, NAPOMENA 1.2.8). Naime, budući da je C prostorni vektor, tada po TEOREMU 1.2.28 vidimo da je $\operatorname{span} C$ prostorni potprostor, pa koristeći PROPOZICIJU 1.2.30 slijedi da je $(\operatorname{span} C)^\perp$ vremenski potprostor. Dalje, koristeći karakterizaciju danu PROPOZICIJOM 1.2.32 zaključujemo da $(\operatorname{span} C)^\perp$ sadrži dva nekolinearna svjetlosna vektora - označimo te vektore s B i D. Pokažimo da je A tada kolinearan s jednim od ta dva vektora. Pa budući da su B i D linearno nezavisni te budući da je $(\operatorname{span} C)^\perp$

dvodimenzionalan potprostor, zaključujemo da je $(\operatorname{span} C)^\perp = \operatorname{span}\{B, D\}$ - dakle imamo $A \in (\operatorname{span} C)^\perp = \operatorname{span}\{B, D\}$ pa postoje neki skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$A = \alpha B + \beta D.$$

Sada koristeći da su vektori A, B i D svjetlosni lagano računamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A, A \rangle = \langle \alpha B + \beta D, \alpha B + \beta D \rangle \\ &= \alpha^2 \langle B, B \rangle + 2\alpha\beta \langle B, D \rangle + \beta^2 \langle D, D \rangle \\ &= 2\alpha\beta \langle B, D \rangle. \end{aligned}$$

Budući da su B i D linearno nezavisni, tada je $\langle B, D \rangle \neq 0$ (što znamo po prvoj tvrdnji Leme 1.2.26), pa odavde slijedi da mora biti

$$\alpha = 0 \quad \text{ili} \quad \beta = 0.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\alpha = 0$ - tada, dakle, slijedi da je $A = \beta D$ i zaključujemo da su A i D kolinearni vektori. Kako je $A \neq 0$, A i D kolinearni te B i D nekolinearni, tada mora slijediti da su A i B nekolinearni vektori. Konačno, kako su A i B svjetlosni nekolinearni vektori, tada po prvoj tvrdnji Leme 1.2.26 slijedi da je

$$\langle A, B \rangle \neq 0.$$

Pronađimo sada skaliranjem vektora B neki vektor $\tilde{B}$ za koji će $\{A, \tilde{B}, C\}$ biti nul baza. Naime, kako bi skup $\{A, \tilde{B}, C\}$ bio nul baza, nužan je uvjet da je $\langle A, \tilde{B} \rangle = 1$ - stoga označimo $\tilde{B} := \lambda B$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, te pronađimo uvjet na skalar za koji se postiže traženo:

$$\begin{aligned} \langle A, \tilde{B} \rangle = 1 &\iff \langle A, \lambda B \rangle = 1 \\ &\iff \lambda \langle A, B \rangle = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{1}{\langle A, B \rangle}, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj ekvivalenciji dijelili s $\langle A, B \rangle$, a to možemo jer znamo da je broj različit od 0. Dakle, definiramo li $\tilde{B} := \frac{1}{\langle A, B \rangle}$ tada vrijedi

$$\langle A, \tilde{B} \rangle = 1.$$

Prema tome, imamo dva svjetlosna vektora A i $\tilde{B}$ te jedinični prostorni vektor C za koje vrijedi: $\langle A, \tilde{B} \rangle = 1$, $\tilde{B} = \lambda B \in (\operatorname{span} C)^\perp$ (dakle $\tilde{B} \perp C$) i $A \in (\operatorname{span} C)^\perp$ (dakle $A \perp C$) - zaključujemo da je $\{A, B, C\}$ po definiciji nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ i time je

gotov dokaz egzistencije.
$\boxed{!}$ Potrebno je još pokazati da je takav vektor jedinstven - stoga pretpostavimo da je $E \in \mathbb{R}^3_1$ još jedan svjetlosni vektor za koji je $\{A, E, C\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Tada je $E \perp C$ pa imamo $E \in (\operatorname{span} C)^\perp = \operatorname{span}\{B, D\}$, gdje su B i D isti vektori kao iz dokaza egzistencije. Prema tome postoje neki skalari $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takvi da je $E = \gamma B + \delta D$ - isto kao i ranije, budući da je E svjetlosni vektor, odavde se može pokazati da mora biti

$$\gamma = 0 \quad \text{ili} \quad \delta = 0.$$

Kada bi bilo $\gamma = 0$, tada bi bilo $E = \delta D$, to jest E bi bio kolinearan s D, a budući je i A kolinearan s D (po prethodnom dokazu) te budući da su oba vektora svjetlosni slijedi da su E i A dva kolinearna svjetlosna vektora pa oni zadovoljavaju $\langle E, A\rangle = 0$ (Napomena 1.2.8) što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\{A, E, C\}$ nul baza. Dakle, zaključujemo da je $\gamma \neq 0$ pa mora biti $\delta = 0$ - dakle imamo

$$E = \gamma B$$

za neki $\gamma \in \mathbb{R}$. Sada se potpuno analogno raspisu iz dokaza egzistecije pokazuje da vrijedi ekvivalencija

$$\langle A, E\rangle = 1 \Longleftrightarrow \gamma = \frac{1}{\langle A, B\rangle}$$

iz čega zaključujemo da je $E = \tilde{B}$ i time je dokaz jedinstvenosti zaključen.
$\boxed{3}$ Primijetimo da je ovdje dovoljno pronaći neki jedinični prostorni vektor ortogonalan na A - tada će primjenom tvrdnje (3) slijediti egzistencija proširenja do nul baze. Stoga promotrimo skup svih vektora orotgonalnih na A: prostor $(\operatorname{span} A)^\perp$. Naime, budući da je A svjetlosni vektor, tada po Teoremu 1.2.28 znamo da je $\operatorname{span} A$ svjetlosni potprostor. Sada koristeći Propoziciju 1.2.30 slijedi da je $(\operatorname{span} A)^\perp$ također svjetlosni potprostor, no ovaj je dvodimenzionalan potprostor. Ponovno koristeći Teorem 1.2.28 možemo zaključiti da $(\operatorname{span} A)^\perp$ zapravo sadrži jedinični prostorni vektor, označimo ga s C. Budući da je $C \in (\operatorname{span} A)^\perp$ slijedi da je $C \perp A$ pa zaključujemo da smo našli jedinični prostorni vektor koji je ortogonalan na početni svjetlosni vektor A. Sada primjenom dokazane tvrdnje (3) slijedi egzistencija proširenja do nul baze prostora $\mathbb{R}^3_1$ i time okončavamo dokaz ove propozicije. □

1.3 Lorentzove transformacije prostora $\mathbb{R}^3_1$

U ovoj sekciji uvodimo pojam transformacije prostora $\mathbb{R}^3_1$ koji čuva njegovu metriku.

Definicija 1.3.1. Za preslikavanje $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je Lorentzova transformacija, ako je to preslikavanje koje čuva metriku prostora, to jest, ako je ϕ preslikavanje koji zadovoljava

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^3_1)\ \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Motivacija za proučavanje ovih transformacija potječe još od Lorentza koji je na samom kraju 19. stoljeća proučavao promjenu prostorvremenskih koordinata obzirom na različite referentne sustave. On je svoje transformacije koordinata izvodio upravo iz postulata da je prostorvremenska udaljenost jednaka obzirom na različite referentne sustave; neki od poznatih rezultata njegovih transformacija su dilatacija vremena i kontrakcija duljine.

Napomenimo da smo Lorentzovu transformaciju gore mogli definirati kao linearno preslikavanje koje čuva duljinu danu preslikavanjem $(x, y) \mapsto \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$, odnosno, duljinu induciranu „normom" $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - tada bi se lako moglo pokazati da je to ekvivalentno sa gornjom definicijom Lorentzovih transformacija. Razlog zašto nismo tako definirali jest taj smo već uveli definiciju Lorentzove norme $\|\cdot\|$ kojom ne bismo mogli dokazati ekvivalenciju sa gornjom definicijom (uzimanjem apsolutne vrijednosti pod korijenom gubimo ključne informacije o vektorima, ali tako definirana Lorentzova norma uvijek poprima realne vrijednosti).

Slično kao što je to vrijedilo u unitarnom prostoru, vrijedi iduća bitna karakterizacija Lorentzovih transformacija,

Teorem 1.3.2. Preslikavanje $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ je Lorentzova transformacija ako i samo ako je ϕ linearan operator i $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ čini *ppv*-ortonormiranu[12] bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$.

<u>DOKAZ</u> Napomenimo na početku samog dokaza da vektori $\{e_1, e_2, e_3\}$ predstavljaju kanonsku bazu $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da je $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ Lorentzova transformacija. Da je skup $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ *ppv*-ortonormirana baza lako vidimo jer po pretpostavci vrijedi

$$(\forall i, j = 1, 2, 3)\ \left\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \right\rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

te koristeći činjenicu da je $\{e_1, e_2, e_3\}$ također *ppv*-ortonormirana baza slijedi tvrdnja. Pokažimo sada da je preslikavanje ϕ linearno. Jasno nam je da je dovoljno pokazati da je ϕ linearno preslikavanje na linearnim kombinacijama elemenata baze, stoga za proizvoljne skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ pokažimo da vrijedi:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \phi(e_i). \tag{1.18}$$

[12] dakle, $\phi(e_1)$ i $\phi(e_2)$ su prostorni i $\phi(e_3)$ je vremenski vektor

Naime, budući da je $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3_1$ te budući da je $\phi\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) \in \mathbb{R}^3_1$, onda postoje neki skalari $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\phi\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right) = \beta_1 \phi(e_1) + \beta_2 \phi(e_2) + \beta_3 \phi(e_3).$$

Sada uzimanjem pseudoskalarnog produkta $\big\langle \cdot, \phi(e_j)\big\rangle$ s obje strane jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \phi\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i\right), \phi(e_j)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 \beta_i \phi(e_i), \phi(e_j)\right\rangle \\
\iff &\left\langle \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i, e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^3 \beta_i \langle \phi(e_i), \phi(e_j)\rangle \\
\iff &\sum_{i=1}^3 \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^3 \beta_i \langle e_i, e_j\rangle \\
\iff &\alpha_j \langle e_j, e_j\rangle = \beta_j \langle e_j, e_j\rangle \\
\iff &\alpha_j = \beta_j.
\end{aligned}$$

Komentirajmo da smo u ovom raspisivanju u prvoj i drugoj ekvivalenciji koristili bilinearnost metrike i svojstvo da je ϕ Lorentzova transformacija, da smo u trećoj ekvivalenciji koristili da je $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormirana baza te da smo u zadnjoj ekvivalenciji samo dijelili s $\langle e_j, e_j\rangle \neq 0$. Pošto smo ovo mogli napraviti za svaki $j \in \{1, 2, 3\}$, zaključujemo da vrijedi jednakost (1.18) i time je ϕ linearno preslikavanje.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Pretpostavimo da je preslikavanje ϕ linearno te da je $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ *ppv*-ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Fiksirajmo dva proizvoljna elementa $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ - budući da je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, tada znamo da postoje neki skalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ i $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^3 \beta_i e_i.$$

Da ϕ čuva Lorentzov pseudoskalarni produkt ovih elemenata pokazat ćemo direktnim računom, no prije toga komentirajmo da je

$$(\forall i, j = 1, 2, 3)\ \big\langle \phi(e_i), \phi(e_j)\big\rangle = \langle e_i, e_j\rangle, \tag{1.19}$$

a to znamo da vrijedi budući da su $\{e_1, e_2, e_3\}$ i $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ dvije *ppv*-ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^3_1$. Sada računamo:

$$\begin{aligned}
\big\langle \phi(x), \phi(y) \big\rangle &= \left\langle \phi\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i\right), \phi\left(\sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \phi\left(e_i\right), \sum_{i=1}^{3} \beta_i \phi\left(e_i\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \beta_j \big\langle \phi\left(e_i\right), \phi\left(e_j\right) \big\rangle \\
&\overset{1.19}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \beta_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i \right\rangle \\
&= \langle x, y \rangle ,
\end{aligned}$$

gdje smo u više navrata koristili linearnost preslikavanja ϕ i bilinearnost metrike $\langle\ ,\ \rangle$. Budući da su $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ bili proizvoljni, zaključujemo da je ϕ zaista Lorentzova transformacija. □

Štoviše, slično se može pokazati (uz rješavanje homogenog sustava 3 linearne jednadžbe s 3 nepoznanice) da vrijedi i slijedeća općenitija tvrdnja:

Teorem 1.3.3. Neka je $\{a_1, a_2, a_3\}$ proizvoljna baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Preslikavanje $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ je Lorentzova transformacija ako i samo ako je ϕ linearan operator koji čuva pseudoskalarni produkt na bazi, to jest ϕ je linearan operator koji zadovoljava da

$$(\forall i, j = 1, 2, 3)\ \big\langle \phi(a_i), \phi(a_j) \big\rangle = \langle a_i, a_j \rangle.$$

No teorem koji smo mi dokazali ranije pokazat će se sasvim dovoljan za naše potrebe. Kako su Lorentzova preslikavanja linearni operatori, sada nam je prirodno promatrati i matrični prikaz Lorentzove transformacije. Budući da nam je najjednostavnije raditi u kanonskoj bazi, onda ćemo za Lorentzovu transformaciju ϕ promatrat pripadnu matricu operatora obzirom na kanonsku bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$ kojoj stupci čine redom vektori $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\phi(e_3)$. Time zaključujemo da naše proučavanje Lorentzovih transformacija možemo prenijeti na proučavanje matrica - stoga uvodimo iduću definiciju i kao rezultat idući korolar.

Definicija 1.3.4. Za matricu $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ kažemo da je Lorentzova matrica, ako njeni stupci čine *ppv*-ortonormiranu bazu Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$.

Korolar 1.3.5. Postoji 1-1 korespondencija između Lorentzovih transformacija i Lorentzovih matrica te imamo iduću karakterizaciju: $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ je Lorentzova matrica ako i samo ako je preslikavanje na $\mathbb{R}^3_1$ definirao sa $x \mapsto Ax$ Lorentzova transformacija.

DOKAZ Naime, ako je matrica A Lorentzova matrica, tada je preslikavanje $x \mapsto Ax$ očito linearno te vektori Ae_1, Ae_2 i Ae_3 čine *ppv*-ortonormiranu bazu. Sada direktnom primjenom TEOREMA 1.3.2 zaključujemo da je preslikavanje $x \mapsto Ax$ Lorentzova transformacija. Obratno, ako je preslikavanje $x \mapsto Ax$ Lorentzova transformacija, tada po istom TEOREMU skup $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ čine *ppv*-ortonormiranu bazu što nam direktno govori da je A Lorentzova matrica. Za kraj, tražena 1-1 korespondencija počiva na tome da je po navedenom TEOREMU svaka Lorentzova transformacija linearno preslikavanje i kao takvo podliježe jedinstvenom matričnom prikazu u kanonskoj bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$ - sada primjenom upravo dokazane karakterizacije Lorentzovih matrica slijedi spomenuta 1-1 korespondencija. $\square$

Stoga se sada u potpunosti fokusiramo na Lorentzove matrice i za početak navodimo iduću definiciju.

Definicija 1.3.6. Definiramo Lorentzovu grupu realnih 3×3 matrica kao skup

$$O_1(3) := \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}^3_1) \mid A \text{ Lorentzova matrica}\}$$

zajedno sa standardnom operacijom matričnog množenja.

Lako vidimo da je $O_1(3)$ zaista grupa s danom operacijom jer je kompozicija Lorentzovih transformacija također Lorentzova transformacija pa koristeći ustanovljenu 1-1 korespondenciju Lorentzovih transformacija i Lorentzovih matrica slijedi tvrdnja.

Nadalje, prisjetimo se kako smo i ranije označavali

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a sada ćemo pomoću ove matrice navesti daljnje karakterizacije Lorentzovih matrica.

Teorem 1.3.7. Neka je $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica. Ekvivalentno je:

(1) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ (to jest preslikavanje $\mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ definirano s $x \mapsto Ax$ je Lorentzova transformacija),

(2) stupci matrice A čine *ppv*-ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$ (dakle, A je Lorentzova matrica),

(3) $A^{\mathrm{T}}JA = J$,

(4) $AJA^{\mathrm{T}} = J$,

(5) retci matrice A čine *ppv*-ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$.

DOKAZ $\boxed{1 \Longleftrightarrow 2}$ Pojašnjenja u zagradama posljedice su DEFINICIJA 1.3.1 i 1.3.4, dok je sama ekvivalencija upravo tvrdnja KOROLARA 1.3.5.
$\boxed{2 \Longleftrightarrow 3}$ Proučimo prvo što predstavlja umnožak $A^{\mathrm{T}}JA$. U tu svrhu označimo s $A = [a_{ij}]$ elemente matrice te neka su s_1, s_2 i s_3 redom stupci matrice A - dakle imamo

$$s_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) \quad , \quad s_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}) \quad , \quad s_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

Sada direktnim računom nalazimo:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}JA &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle s_1, s_1 \rangle & \langle s_1, s_2 \rangle & \langle s_1, s_3 \rangle \\ \langle s_2, s_1 \rangle & \langle s_2, s_2 \rangle & \langle s_2, s_3 \rangle \\ \langle s_3, s_1 \rangle & \langle s_3, s_2 \rangle & \langle s_3, s_3 \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zaključujemo: u suštini, $A^{\mathrm{T}}JA$ u terminima matrica izražava skalarni produkt elemenata skupa $\{s_1, s_2, s_3\}$ obzirom na metriku $\langle\ ,\ \rangle$. Iz dobivene jednakosti sada sasvim jednostavno možemo raspisati:

$$\begin{aligned} (2) &\Longleftrightarrow \{s_1, s_2, s_3\} \text{ čini } ppv\text{-ortonormiranu bazu} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \langle s_1, s_1 \rangle & \langle s_1, s_2 \rangle & \langle s_1, s_3 \rangle \\ \langle s_2, s_1 \rangle & \langle s_2, s_2 \rangle & \langle s_2, s_3 \rangle \\ \langle s_3, s_1 \rangle & \langle s_3, s_2 \rangle & \langle s_3, s_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}}JA = J. \end{aligned}$$

$\boxed{3 \Longleftrightarrow 4}$ Ovu ekvivalenciju dobivamo jednostavnom algebrom matrica. Naime, pretpostavimo li na trenutak da je A invertibilna matrica, tada lako računamo da je

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}JA = J &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = J(JA)^{-1} \\ &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = JA^{-1}J^{-1} \\ &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = JA^{-1}J, \\ AJA^{\mathrm{T}} = J &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = (AJ)^{-1}J \\ &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = J^{-1}A^{-1}J \\ &\Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} = JA^{-1}J. \end{aligned}$$

Odavde bi tada slijedilo da je

$$A^{\mathrm{T}}JA = J \Longleftrightarrow AJA^{\mathrm{T}} = J$$

što je upravo ono što i želimo pokazati. Stoga se uvjerimo da je A zaista invertibilna matrica. To možemo lako provjeriti računajući determinantu matrice A - pretpostavimo li da vrijedi (3) odnosno (4) tada uzimanjem determinante pripadnih izraza te koristeći tvrdnju Binet-Cauchyevog teorema (B-C) dobivamo:

$$\begin{aligned} (3) &\Longrightarrow \det(A^{\mathrm{T}}JA) = \det(J) \\ &\overset{\text{B-C}}{\Longrightarrow} \det(A^{\mathrm{T}})\det(J)\det(A) = \det(J) \\ &\Longrightarrow (-1)\cdot(\det A)^2 = -1 \\ &\Longrightarrow (\det A)^2 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) &\Longrightarrow \det(AJA^{\mathrm{T}}) = \det(J) \\ &\overset{\text{B-C}}{\Longrightarrow} \det(A)\det(J)\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(J) \\ &\Longrightarrow (-1)\cdot(\det A)^2 = -1 \\ &\Longrightarrow (\det A)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dakle, u svakom slučaju vrijedi $(\det A)^2 = 1$ iz čega slijedi da je $\det A \neq 0$ i matrica A je invertibilna čime je dokaz ove ekvivalencije gotov.
$\boxed{4 \Longleftrightarrow 5}$ Ova ekvivalencija dokazuje se sasvim analogno kao dokaz od $(2 \Longleftrightarrow 3)$. Naime, označimo li sa r_i i-ti redak matrice A, tada se direktnim raspisivanjem pokaže da je

$$AJA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \langle r_1, r_1\rangle & \langle r_1, r_2\rangle & \langle r_1, r_3\rangle \\ \langle r_2, r_1\rangle & \langle r_2, r_2\rangle & \langle r_2, r_3\rangle \\ \langle r_3, r_1\rangle & \langle r_3, r_2\rangle & \langle r_3, r_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Sada sasvim jednako pišemo

$$\begin{aligned} (5) &\Longleftrightarrow \{r_1, r_2, r_3\} \text{ čini } ppv\text{-ortonormiranu bazu} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \langle r_1, r_1\rangle & \langle r_1, r_2\rangle & \langle r_1, r_3\rangle \\ \langle r_2, r_1\rangle & \langle r_2, r_2\rangle & \langle r_2, r_3\rangle \\ \langle r_3, r_1\rangle & \langle r_3, r_2\rangle & \langle r_3, r_3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow AJA^{\mathrm{T}} = J \end{aligned}$$

čime zaključujemo dokaz ovog teorema. □

Kao što smo vidjeli i u dokazu, koristeći svojstvo (3) možemo zaključiti da je matrica operatora Lorentzove transformacije invertibilna, odnosno da je sama Lorentzova transformacija invertibilno preslikavanje - stoga o Lorentzovmim transformacijama možemo govoriti kao o izometrijama prostora s metrikom $\mathbb{R}^3_1$ u kontekstu DEFINICIJE 1.1.5. Dakle, pojam Lorentzovih transformacija prostora $\mathbb{R}^3_1$ i izometrija $\mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ je istovjetan.

Štoviše, koristeći svojstvo (3) prethodnog teorema možemo ustanoviti da svaka Lorentzova matrica A ne samo da je invertibilna, već da joj je determinanta nužno jednaka 1 ili -1. Zaista, uzimajući determinantu izraza $A^{\mathrm{T}}JA = J$ te koristeći tvrdnju Binet-Cauchyjevog teorema (B-C) dobivamo:

$$-1 = \det(J) \overset{(3)}{=} \det(A^{\mathrm{T}}JA) \overset{\text{B-C}}{=} \det(A^{\mathrm{T}})\det(J)\det(A) = -(\det A)^2$$

iz čega direktno slijedi $(\det A)^2 = 1$, odnosno $\det A = \pm 1$. Zapravo, uz pomoć Binet-Cauchyjevog teorema sada možemo vidjeti da je preslikavanje

$$\det : O_1(3) \to \{-1, 1\}$$

epimorfizam grupa, gdje $\{-1, 1\}$ promatramo kao grupu s klasičnom operacijom množenja. Odavde vidimo da je jezgra ovog epimorfizma (normalna) podgrupa indeksa 2 te ju ovdje posebno ističemo:

Definicija 1.3.8. Definiramo specijalnu Lorentzovu grupu realnih 3×3 matrica kao podgrupu

$$SO_1(3) := \{A \in O_1(3) \mid \det A = 1\}$$

zajedno s naslijeđenom operacijom matričnog množenja čije ćemo elemente zvati specijalne Lorentzove matrice.

Budući da je $SO_1(3)$ podgrupa indeksa 2, tada znamo da se grupa $O_1(3)$ zapisuje u disjunktnoj uniji kao

$$O_1(3) = SO_1(3) \cup T\,SO_1(3),$$

gdje je $T \in O_1(3) \setminus SO_1(3)$ proizvoljan element te gdje $T\,SO_1(3)$ predstavlja skup $\{TA \mid A \in SO_1(3)\}$. Na mjesto matrice T možemo na primjer uzeti refleksiju J (kako smo ju označavali i ranije) te ovime zaključujemo da je dovoljno nadalje baviti se samo pojmom specijalnih Lorentzovih matrica. Definiciju specijalnih Lorentzovih matrica vraćamo nazad na pojam Lorentzovih transformacija slijedećom definicijom:

Definicija 1.3.9. Za preslikavanje $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je specijalna Lorentzova transformacija, ako je $\phi(x) = Ax$ za neku matricu $A \in SO_1(3)$.

O specijalnim Lorentzovim transformacijama i specijalnim Lorentzovim matricama bit će više riječi krajem iduće potsekcije.

Rotacije prostora $\mathbb{R}^3_1$

Idući nam je cilj uvesti pojam rotacije u Lorentz-Minkowskijevom prostoru. Slično kao što se može definirati u euklidskom prostoru, pod rotacijom prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta smatrat ćemo izometrije $\mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ (dakle, Lorentzove transformacije prostora $\mathbb{R}^3_1$) koje po točkama fiksiraju pravac koji prolazi ishodištem. Za takav pravac ćemo u tom slučaju reći da je os rotacije te primijetimo da se tu u suštini radi o jednodimenzionalnom potprostoru prostora $\mathbb{R}^3_1$. Kako točno izgledaju rotacije u Lorentz-Minkowskijevom prostoru predmet je iduće propozicije:

Propozicija 1.3.10. Neka je $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ proizvoljna rotacija prostora $\mathbb{R}^3_1$ te označimo s V potprostor od $\mathbb{R}^3_1$ koji je pripadna os rotacije.

(1) U slučaju da je V prostorni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, tada postoje ortonormirana baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ i realan broj $\theta \in \mathbb{R}$ takvi da je $V = \operatorname{span} a_3$ i da je matrični prikaz transformacije ϕ obzirom na tu bazu dan s

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) U slučaju da je V vremenski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, tada postoje ortonormirana baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ i realan broj $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takvi da je $V = \operatorname{span} a_3$ i da je matrični prikaz transformacije ϕ obzirom na tu bazu dan s

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) U slučaju da je V svjetlosni potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, tada postoje *pss*-nul baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ i realan broj $t \in \mathbb{R}$ takvi da je $V = \operatorname{span} a_3$ i da je matrični prikaz transformacije ϕ obzirom na tu bazu dan s

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

DOKAZ $\boxed{1}$ Budući da je V prostorni potprostor, tada po TEOREMU 1.2.28 postoji jedinični prostorni vektor $a_3 \in \mathbb{R}^3_1$ koji čini bazu prostora V. Po PROPOZICIJI 1.2.21 skup $\{a_3\}$ možemo proširiti do *vpp*-ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ (dakle, a_1 je vremenski i a_2 je prostorni vektor). Kako bismo našli matrični prikaz rotacije ϕ u bazi

$\{a_1, a_2, a_3\}$, računamo prikaz vektora $\phi(a_1)$, $\phi(a_2)$ i $\phi(a_3)$ u toj bazi - tu nam u pomoć uskače TEOREM 1.2.20 pomoću kojeg računamo:

$$\begin{aligned}\phi(a_1) &= \sum_{i=1}^{3} \langle a_i, a_i\rangle \langle \phi(a_1), a_i\rangle a_i \\ &= \langle a_3, a_3\rangle \langle \phi(a_1), \phi(a_3)\rangle a_3 + \sum_{i=1}^{2} \langle a_i, a_i\rangle \langle \phi(a_1), a_i\rangle a_i \\ &= \langle a_3, a_3\rangle \overbrace{\langle a_1, a_3\rangle}^{=0} a_3 + \sum_{i=1}^{2} \langle a_i, a_i\rangle \langle \phi(a_1), a_i\rangle a_i \\ &= \langle a_1, a_1\rangle \langle \phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle a_2, a_2\rangle \langle \phi(a_1), a_2\rangle a_2 \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2.\end{aligned}$$

Kratko prokomentirajmo račun: u drugoj smo jednakosti istaknuli treći član sume te iskoristili činjenicu da je $a_3 = \phi(a_3)$ (jer ϕ fiskira po točkama pravac $\operatorname{span} a_3 = V$), u trećoj smo jednakost koristili da je ϕ izometrija te u četvrtoj primijenili da je baza ortogonalna. Na kraju smo uveli oznake za koeficijente α_1 i α_2 kako bismo kasnije imali ljepši raspis. Potpuno analogno se pokazuje i da je

$$\begin{aligned}\phi(a_2) &= \langle a_1, a_1\rangle \langle \phi(a_2), a_1\rangle a_1 + \langle a_2, a_2\rangle \langle \phi(a_2), a_2\rangle a_2 \\ &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2,\end{aligned}$$

gdje smo na kraju isto uveli oznake za koeficijente. Konačno, budući da ϕ fiksira prostor $V = \operatorname{span} a_3$, imamo

$$\phi(a_3) = a_3,$$

te pripadna matrica transformacije u navedenoj bazi glasi

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokažimo da možemo napraviti takav izbor *vpp*-ortonormirane baze u čijem prikazu matrica transformacije na mjestima koeficijenta α_1 i β_2 ima koeficijente $|\alpha_1|$ i $|\beta_2|$. Razlog zašto to uopće želimo je taj što će nam taj uvjet biti nužno potreban pri izvođenju matričnog prikaza iz iskaza.

Prvo je potrebno uvjeriti se da su α_1 i β_2 različiti od 0: budući da je ϕ izometrija i a_1 jedinični vremenski vektor, možemo raspisati

$$-1 = \langle a_1, a_1\rangle = \langle \phi(a_1), \phi(a_1)\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\rangle = -\alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

od kuda slijedi da je $\alpha_1^2 = 1 + \alpha_2^2 \neq 0$ pa dobivamo $\alpha_1 \neq 0$. Sasvim analogno bismo pokazali da je i $\beta_2 \neq 0$. Drugo, uvodimo oznake

$$\lambda := \operatorname{sgn} \alpha_1 \quad \text{i} \quad \mu := \operatorname{sgn} \beta_2,$$

gdje sgn predstavlja signum funkciju - budući da su $\alpha_1, \beta_2 \neq 0$ imamo $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$. Pokažimo sada da je

$$\{\lambda a_1, \mu a_2, a_3\}$$

tražena *vpp*-ortonormirana baza. Za početak, lako vidimo da to uistinu i je *vpp*-ortonormirana baza koristeći bilinearnost metrike. Analognim raspisom kao i ranije u toj bazi prikazujemo vektore $\phi(\lambda a_1)$, $\phi(\mu a_2)$ i $\phi(a_3)$ gdje čistim računom dobivamo iduće:

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda a_1) &= \lambda\alpha_1(\lambda a_1) + \lambda\mu\alpha_2(\mu a_2)\\
\phi(\mu a_2) &= \lambda\mu\beta_1(\lambda a_1) + \mu\beta_2(\mu a_2)\\
\phi(a_3) &= a_3.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je matrični prikaz izometrije ϕ u bazi $\{\lambda a_1, \mu a_2, a_3\}$ dan s

$$\begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\mu\beta_1 & 0 \\ \lambda\mu\alpha_2 & \mu\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je iz definicije skalara λ i μ jednako matrici

$$\begin{bmatrix} |\alpha_1| & \lambda\mu\beta_1 & 0 \\ \lambda\mu\alpha_2 & |\beta_2| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, zaključujemo da zaista možemo napraviti takav izbor *vpp*-ortonormirane baze

$$\{a_1, a_2, a_3\}$$

da je $\operatorname{span} a_3 = V$ i da je matrični prikaz izomorfizma ϕ dan s

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

gdje su α_1 i β_2 pozitivni realni brojevi. Pokažimo da se u toj bazi izomorfizam ϕ prikazuje baš u traženom obliku. Idući raspis zasniva se na slijedećim tvrdnjama:

- $(\forall \theta \in \mathbb{R})\ \operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$,
- $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je bijekcija,
- $(\forall \theta, \varphi \in \mathbb{R})\ \operatorname{sh}(\varphi - \theta) = \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\varphi$, (adicijska formula za sh)
- $\operatorname{sh}(0) = 0$.

Promotrimo koje jednadžbe zadovoljavaju koeficijenti α_i i β_i - naime, budući da je ϕ izometrija, tada posebno imamo

$$\begin{cases} \langle \phi(a_1), \phi(a_1) \rangle = \langle a_1, a_1 \rangle = -1 \\ \langle \phi(a_2), \phi(a_2) \rangle = \langle a_2, a_2 \rangle = 1 \\ \langle \phi(a_1), \phi(a_2) \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle = 0 \end{cases}.$$

Raspisivanjem lijevih strana jednakosti pomoću prikaza tih vektora u bazi $\{a_1, a_2, a_3\}$ s koeficijentima iz matrice (1.20) dobivamo da je taj sustav jednak

$$\begin{cases} -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -1 \\ -\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \\ -\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 1 \\ \beta_2^2 - \beta_1^2 = 1 \\ \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 \end{cases}. \tag{1.21}$$

Sada primijenjujemo spomenute tvrdnje o hiperboličkim funkcijama. Naime, budući da je $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, tada po drugoj točki postoji jedinstveni $\theta \in \mathbb{R}$ takav da je $\alpha_2 = \operatorname{sh}\theta$. Tada po prvoj točki uz prvu jednadžbu sustava (1.21) možemo zaključiti da je $\alpha_1^2 = \operatorname{ch}^2\theta$ pa budući da je α_1 pozitivan slijedi $\alpha_1 = \operatorname{ch}\theta$. Sasvim analogno zaključujemo da postoji jedinstveni $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da je $\beta_1 = \operatorname{sh}\varphi$ pa je onda i $\beta_2 = \operatorname{ch}\varphi$. Konačno, koristeći treću jednadžbu sustava (1.21) sada raspisujemo:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 &\implies \operatorname{ch}\theta \operatorname{sh}\varphi = \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\varphi \\ &\implies \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\varphi = 0 \\ &\implies \operatorname{sh}(\varphi - \theta) = 0 && [\text{četvrta točka}] \\ &\implies \varphi - \theta = 0 && [\text{druga i treća točka}] \\ &\implies \varphi = \theta. \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da postoji jedinstveni $\theta \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi

$$\alpha_1 = \operatorname{ch}\theta \quad , \quad \alpha_2 = \operatorname{sh}\theta \quad , \quad \beta_1 = \operatorname{sh}\theta \quad , \quad \beta_2 = \operatorname{ch}\theta$$

pa uvrštavanjem tih vrijednosti u matricu operatora dobivamo upravo traženo

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Ne sasvim isto, ali prilično slično, pokazujemo tvrdnju iz iskaza za slučaj da je prostor V vremenski potprostor. Ponovno po TEOREMU 1.2.28 znamo da postoji jedinični vremenski vektor $a_3 \in \mathbb{R}^3_1$ koji čini bazu prostora V pa po PROPOZICIJI 1.2.21 znamo da tada $\{a_3\}$ možemo proširiti do *ppv*-ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ (dakle, a_1 i a_2 su prostorni vektori). Isto kao i ranije računamo prikaz vektora $\phi(a_1)$, $\phi(a_2)$ i $\phi(a_3)$ u toj bazi pomoću TEOREMA 1.2.20 - dobivamo:

$$\begin{aligned}
\phi(a_1) &= \langle a_1, a_1\rangle\langle\phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle a_2, a_2\rangle\langle\phi(a_1), a_2\rangle a_2 \\
&= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \\
\phi(a_2) &= \langle a_1, a_1\rangle\langle\phi(a_2), a_1\rangle a_1 + \langle a_2, a_2\rangle\langle\phi(a_2), a_2\rangle a_2 \\
&= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, \\
\phi(a_3) &= a_3.
\end{aligned}$$

Time slijedi da je matrica operatora ϕ dana s

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Ovdje možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su α_1 i β_2 brojevi istog predznaka - naime, u slučaju da su ti skalari suprotnog predznaka, tada se izborom baze $\{a_1, -a_2, a_3\}$ dobije upravo traženo svojstvo (to ovdje nećemo raspisivati, lako se vidi slično kao i u dokazu prošle tvrdnje). Dakle, pretpostavljamo da smo dokaz ove tvrdnje započeli uz prikladan izbor baze - pokažimo da se sada matrica transformacije ϕ prikazuje u traženom obliku. Raspis će se ovog puta zasnivati na poznavanju svojstava trigonometrijskih funkcija kosinusa i sinusa. Promotrimo koje jednadžbe zadovoljavaju koeficijenti α_i i β_i - naime, budući da je ϕ izometrija, tada posebno imamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle\phi(a_1), \phi(a_1)\rangle = \langle a_1, a_1\rangle = 1 \\ \langle\phi(a_2), \phi(a_2)\rangle = \langle a_2, a_2\rangle = 1 \\ \langle\phi(a_1), \phi(a_2)\rangle = \langle a_1, a_2\rangle = 0 \end{array} \right. .$$

Raspisivanjem lijevih strana jednakosti pomoću prikaza tih vektora u bazi $\{a_1, a_2, a_3\}$ s koeficijentima iz matrice (1.22) dobivamo da je taj sustav jednak

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0 \end{array} \right. . \tag{1.23}$$

Lako vidimo iz prve jednadžbe da je $\alpha_2^2 \leq 1$ pa je $\alpha_2 \in [-1, 1]$ te se isto tako pokaže da je $\alpha_1 \in [-1, 1]$. Sada koristeći poznata svojstva funkcija kosinusa i sinusa znamo da postoji jedinstveni $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $\alpha_2 = \sin\theta$ i $\operatorname{sgn}(\cos\theta) = \operatorname{sgn}\alpha_1$. Tada koristeći relaciju $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ uz prvu jednadžbu sustava (1.23) slijedi da je $\alpha_1 = \cos\theta$. Analogno bismo pokazali da postoji jedinstveni $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da je $\beta_1 = \sin\varphi$ i $\beta_2 = \cos\varphi$. Konačno, koristeći treću jednadžbu sustava (1.23) sada raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0 &\implies \sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi = 0 \\
&\implies \sin(\varphi+\theta) = 0 \qquad \text{[adicijska formula za sin]} \\
&\implies (\exists k \in \mathbb{Z})\; \varphi + \theta = k\pi \\
&\implies (\exists k \in \mathbb{Z})\; \varphi = k\pi - \theta.
\end{aligned}$$

Pokažimo da je cijeli broj k nužno jednak 0 ili 2. Prvo, budući da su $\varphi, \theta \in [0, 2\pi\rangle$, odavde slijedi $\varphi + \theta \in [0, 4\pi\rangle$ pa mora biti $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Da je $k \neq 1, 3$ vidimo na slijedeći način, računamo:

$$\beta_2 = \cos\varphi = \cos(k\pi - \theta) = \cos(k\pi)\cos(\theta) + \sin(k\pi)\sin(\theta) = \cos(k\pi)\alpha_1.$$

Budući da su po našem izboru baze brojevi α_1 i β_2 istog predznaka, zaključujemo da mora biti $\cos(k\pi) = 1$ iz čega zaključujemo da je $k \neq 1, 3$ te da mora biti

$$k = 0 \quad \text{ili} \quad k = 2.$$

Prema tome je $\sin\varphi = \sin(-\theta)$ i $\cos\varphi = \cos(-\theta)$, odnosno koristeći neparnost i parnost tih funkcija dobivamo:

$$\alpha_1 = \cos\theta \quad , \quad \alpha_2 = \sin\theta \quad , \quad \beta_1 = -\sin\theta \quad , \quad \beta_2 = \cos\theta.$$

Konačno, uvrštavanjem ovih vrijednosti u matricu transformacije dobivamo upravo traženo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Za kraj obradimo slučaj kada je V svjetlosni potprostor. Iznova, uporabom TEOREMA 1.2.28 znamo da postoji svjetlosni vektor $a_3 \in \mathbb{R}^3_1$ koji čini bazu prostora V, dok po PROPOZICIJI 1.2.40.4 znamo da se $\{a_3\}$ proširuje do *pss*-nul baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ (dakle, a_1 je prostorni i a_2 je svjetlosni vektor). Ponovno računamo prikaz vektora

$\phi(a_1)$, $\phi(a_2)$ i $\phi(a_3)$ u toj bazi, no ovog puta uz pažljivu uporabu Teorema 1.2.25:

$$\begin{aligned}
\phi(a_1) &= \langle \phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle \phi(a_1), a_3\rangle a_2 + \langle \phi(a_1), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle \phi(a_1), \phi(a_3)\rangle a_2 + \langle \phi(a_1), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle a_1, a_3\rangle a_2 + \langle \phi(a_1), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_1), a_1\rangle a_1 + \langle \phi(a_1), a_2\rangle a_3 \\
&= \alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3. \\
\phi(a_2) &= \langle \phi(a_2), a_1\rangle a_1 + \langle \phi(a_2), a_3\rangle a_2 + \langle \phi(a_2), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_2), a_1\rangle a_1 + \langle \phi(a_2), \phi(a_3)\rangle a_2 + \langle \phi(a_2), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_2), a_1\rangle a_1 + \langle a_2, a_3\rangle a_2 + \langle \phi(a_2), a_2\rangle a_3 \\
&= \langle \phi(a_2), a_1\rangle a_1 + a_2 + \langle \phi(a_2), a_2\rangle a_3 \\
&= \beta_1 a_1 + a_2 + \beta_3 a_3, \\
\phi(a_3) &= a_3.
\end{aligned}$$

Komentirajmo samo ukratko: u drugim jednakostima smo koristili da ϕ fiksira po točkama potprostor $\operatorname{span} a_3$ (dakle $\phi(a_3) = a_3$), u trećim jednakostima smo koristili da je ϕ izometrija, u četvrtim jednakostima smo koristili svojstva nul baze te smo na kraju samo uveli oznake za koeficijente. Time slijedi da je matrica transformacije ϕ dana s

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

Ovdje možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je α_1 pozitivan broj - inače se izborom baze $\{-a_1, a_2, a_3\}$ dobije upravo traženo svojstvo. Promotrimo koje jednadžbe zadovoljavaju koeficijenti α_i i β_i - naime, budući da je ϕ izometrija, tada posebno imamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \phi(a_1), \phi(a_1)\rangle = \langle a_1, a_1\rangle = 1 \\ \langle \phi(a_2), \phi(a_2)\rangle = \langle a_2, a_2\rangle = 0 \\ \langle \phi(a_1), \phi(a_2)\rangle = \langle a_1, a_2\rangle = 0 \end{array} \right. .$$

Raspisivanjem lijevih strana jednakosti pomoću prikaza tih vektora u bazi $\{a_1, a_2, a_3\}$ s koeficijentima iz matrice (1.24) dobivamo da je taj sustav jednak

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2 = 1 \\ \beta_1^2 + 2\beta_3 = 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Budući da je po našem izboru baze α_1 pozitivan broj, odavde slijedi da je $\alpha_1 = 1$ pa ovaj sustav dalje možemo zapisati kao

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1^2 + 2\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Uvedemo li oznaku $t := \alpha_3$, tada iz ovog sustava možemo iščitati da je $\beta_1 = -t$ te da je $\beta_3 = -\frac{t^2}{2}$. Dakle, zaključujemo da postoji jedinstveni $t \in \mathbb{R}$ kojim možemo koeficijente matrice zapisati kao

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_3 = t \quad , \quad \beta_1 = -t \quad , \quad \beta_3 = -\frac{t^2}{2}.$$

Konačno, uvrštavanjem tih vrijednosti u matricu operatora dobivamo upravo traženo

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Kao posljedicu ove propozicije primijetimo slijedeće: ako je ϕ rotacija prostora $\mathbb{R}^3_1$, tada je ϕ ujedno i specijalna Lorentzova transformacija. Zaista, budući da je ϕ posebno i Lorentzova transformacija, potrebno je samo provjeriti kakva je determinanta matričnog prikaza transformacije obzirom na bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$. No prisjetimo se da smo u linearnoj algebri vidjeli da determinanta matričnog prikaza operatora $\mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ ne ovisi o izboru baze - stoga determinantu možemo računati obzirom na matrične prikaze rotacija iz upravo dokazane propozicije. Odmah vidimo da je u svakom slučaju (obzirom na tip osi rotacije) determinanta matričnog prikaza transformacije jednaka 1 čime zaključujemo da je ϕ zaista specijalna Lorentzova transformacija.

Međutim, vrijedi i obrat - dokazujemo idući teorem.

Teorem 1.3.11. Pojmovi specijalne Lorentzove transformacije i rotacije prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta su istovjetni pojmovi.

<u>DOKAZ</u> Neka je $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ proizvoljno preslikavanje. S jedne strane, ako je ϕ rotacija prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta, tada po prethodnoj diskusiji znamo da je ϕ ujedno i specijalna Lorentzova transformacija. S druge strane, pretpostavimo da je ϕ specijalna Lorentzova transformacija te pokušajmo pokazati da je tada to i rotacija prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta. Prvo, po definiciji znamo postoji specijalna Lorentzova matrica A takva da je $\phi(x) = Ax$. Budući da je ϕ posebno izometrija prostora $\mathbb{R}^3_1$, potrebno je samo dokazati da ono fiksira pravac kroz ishodište po točkama. Kako je preslikavanje ϕ linearno, dovoljno je naći samo jednu fiksnu točku preslikavanja različitu od nulvektora - tada se množenjem skalarom lako vidi da preslikavanje fiksira sve točke pravca razapetog tim vektorom. Dakle, pitamo se postoji li fiksna točka (različita od nulvektora) preslikavanja $x \mapsto Ax$, to jest postoji li $y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\}$ takav

da je $Ay = y$. Prisjetimo li se linearne algebre vidimo da je to ekvivalentno pitanju je li broj 1 svojstvena vrijednost matrice A, odnosno možemo raspisati iduće:

$$\begin{aligned}(\exists y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\})\, Ay = y &\iff (\exists y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\})\, Ay - y = 0 \\ &\iff (\exists y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\})\, (A - I)y = 0 \\ &\iff \det(A - I) = 0.\end{aligned}$$

Stoga pokažimo da je determinanta matrice $A - I$ jednaka 0. Tu tvrdnju pokazujemo čisto algebarski koristeći identitet $A^{\mathrm{T}}JA = J$ (koji vrijedi po Teoremu 1.3.7 jer je A Lorentzova matrica) i manipulacije determinantama koristeći između ostalog i Binet-Cauchyjev teorem (B-C). Polazimo od matrice $A - I$ koju množimo slijeva matricom $A^{\mathrm{T}}J$ kako bismo iskoristili gornji identitet te dalje pojednostavljujemo:

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}J(A - I) &= A^{\mathrm{T}}JA - A^{\mathrm{T}}J = J - A^{\mathrm{T}}J = (I - A^{\mathrm{T}})J = -(A^{\mathrm{T}} - I)J \\ &= -(A - I)^{\mathrm{T}}J,\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili svojstvo da je transponiranje zbroja matrica jednako zbroju transponiranih matrica. Budući da znamo da je $\det A^{\mathrm{T}} = \det A = 1$ (po pretpostavci) i da je $\det J = -1$, uzimanjem determinante s lijeve i desne strane ovih jednakosti možemo dobiti:

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}J(A - I) = -(A - I)^{\mathrm{T}}J &\implies \det\big(A^{\mathrm{T}}J(A - I)\big) = \det\big(-(A - I)^{\mathrm{T}}J\big) \\ &\overset{\text{B-C}}{\implies} \det(A^{\mathrm{T}})\det(J)\det(A - I) = (-1)^3\det(A - I)\det(J) \\ &\implies -\det(A - I) = \det(A - I) \\ &\implies \det(A - I) = 0.\end{aligned}$$

Primijetimo da nam je ovdje ključno bilo da je dimenzija ambijentalnog prostora neparna! Dakle, zaključujemo da je 1 zaista svojstvena vrijednost i time postoji neki vektor $y \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\}$ takav da je $Ay = y$. Prema tome preslikavanje $\phi = x \mapsto Ax$ fiskira pravac $\operatorname{span} y$ i kao takvo predstavlja rotaciju prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta čime je zaključen dokaz ovog teorema. □

Nastavljajući se na diskusiju s kraja prošle potsekcije, sada možemo zaključiti da su sve Lorentzove transformacije dane kao rotacije prostora $\mathbb{R}^3_1$ oko ishodišta ili kao ta ista preslikavanja komponirana zajedno s refleksijom obzirom na xy-ravninu.

Gibanja u $\mathbb{R}^3_1$

Za kraj definiramo, analogno euklidskom unitarnom prostru, pojam krutog gibanja i nepravog gibanja Lorentz-Minkowskijevog prostora na slijedeći način.

Definicija 1.3.12. Za preslikavanje $\Phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je kruto gibanje prostora $\mathbb{R}^3_1$, ako je

$$\Phi(x) = Ax + b,$$

za neku matricu $A \in SO_1(3)$ te za neki vektor $b \in \mathbb{R}^3_1$. S druge strane, za preslikavanje $\Phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je nepravo gibanje prostora $\mathbb{R}^3_1$, ako je

$$\Phi(x) = Ax + b,$$

ovaj put za matricu $A \in O_1(3) \setminus SO_1(3)$ i neki vektor $b \in \mathbb{R}^3_1$. Dodatno, pojmove krutog gibanja i nepravog gibanja zajedno objedinjujemo pod pojmom gibanja Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$.

Primijetimo da kruta i neprava gibanja u $\mathbb{R}^3_1$ više nisu nužno linearna preslikavanja (jer nulvektor preslikavaju u b koji ne mora biti nulvektor). Pojam krutog i nepravog gibanja će nam biti potreban jer ćemo kasnije proučavati ponašanje krivulja pod utjecajem tih preslikavanja, analogno sličnim rezultima euklidske geometrije.

Poglavlje 2

Krivulje Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$

U ovom ćemo se poglavlju baviti krivuljama Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$; regularne parametrizirane krivulje definiramo sasvim isto kao i u euklidskom prostoru, ali ćemo ih ovdje razvrstati po tipu tangencijalnog vektora. Također ćemo i svakoj točki krivulje pridjenuti pripadnu Freneteovu bazu čijom varijacijom ustvrđujemo geometriju krivulja prostora $\mathbb{R}^3_1$. Konačno, poglavlje ćemo zaključiti teoremima egzistencije i jedinstvenosti za krivulje Lorentz-Minkowskijevog prostora.

Za početak istaknimo kako ćemo se od sada nadalje Lorentz-Minkowskijev prostor $\mathbb{R}^3_1$ promatrati kao prostor s metrikom snabdjeven s klasičnom euklidskom topologijom; sada smo u poziciji govoriti o neprekidnosti i derivabilnosti preslikavanja koja preslikavaju u ili sa $\mathbb{R}^3_1$ što će nam, naravno, i biti potrebno pri razvoju pripadne diferencijalne geometrije. Napomenimo unaprijed da ćemo u ovom radu pod glatkim preslikavanjem podrazumijevati sva preslikavanja $\Omega \to \mathbb{R}^m$ koja su klase C^∞ (gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren podskup), dakle postoje parcijalne derivacije svih redova i neprekidne su. Isto tako istaknimo da za preslikavanje kažemo da je difeomorfizam (klase C^∞), ako je glatko bijektivno preslikavanje čiji je inverz također glatko preslikavanje. Također istaknimo da ćemo derivaciju krivulja označavati s točkicom: dakle, ako je $c : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval) derivabilno u točki $t_0 \in I$, tada ćemo sa $\dot{c}(t_0)$ označavati derivaciju $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t)\big|_{t=t_0}$.

2.1 Definicija krivulja. Vrste krivulja. Osnovni teoremi

Definicija 2.1.1. Za preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je parametrizirana krivulja, ako je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i c glatko preslikavanje $I \to \mathbb{R}^3$. Ako još vrijedi da je $(\forall t \in I)\ \dot{c}(t) \neq 0$, tada kažemo da je c regularna parametrizirana krivulja, a ako još uz to imamo i da $(\forall t \in I)\ \ddot{c}(t) \neq 0$, tada kažemo da je c biregularna parametrizirana krivulja. Nadalje, ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja, tada ćemo vektore $\dot{c}(t)$ i $\ddot{c}(t)$ zvati vektor brzine i vektor akceleracije krivulje c u točki $t \in I$, respektivno.

U gornjoj definiciji nismo nigdje koristili metriku prostora $\mathbb{R}^3_1$, nju uvodimo u idućoj definiciji u kojoj razvrstavamo parametrizirane krivulje ovisno o tipu vektora brzine.

Definicija 2.1.2. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja i $t \in I$ proizvoljna točka. Tada kažemo da je parametrizirana krivulja c

- prostorna krivulja u točki t, ako je $\dot{c}(t)$ prostorni vektor,
- vremenska krivulja u točki t, ako je $\dot{c}(t)$ vremenski vektor,
- svjetlosna krivulja u točki t, ako je $\dot{c}(t)$ svjetlosni vektor.

Još, kažemo da je parametrizirana krivulja c

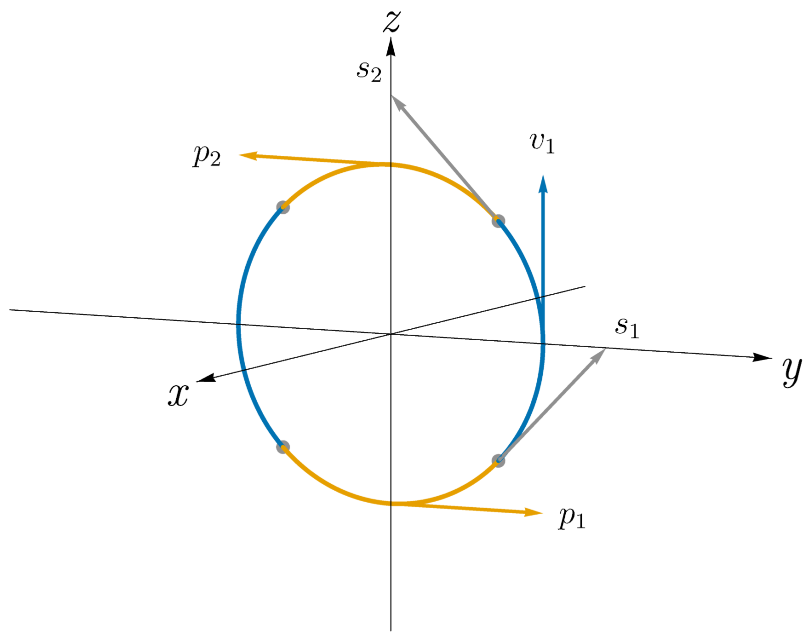
- prostorna krivulja, ako je c prostorna krivulja u svakoj točki svoje domene,
- vremenska krivulja, ako je c vremenska krivulja u svakoj točki svoje domene,
- svjetlosna krivulja, ako je c svjetlosna krivulja u svakoj točki svoje domene.

Dodatno, za vrijednosti $\|\dot{c}(t)\|$ i $\|\ddot{c}(t)\|$ respektivno kažemo da su brzina i akceleracija krivulje c u točki $t \in I$.

Primijetimo da u proizvoljnoj točki domene $t \in I$ regularna parametrizirana krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ mora biti ili prostorna ili vremenska ili svjetlosna u toj točki (jer Definicija 1.2.5 klasificira sve nenul vektore prostora $\mathbb{R}^3_1$). Ispitajmo ukratko kako se ponašaju ove definicije na idućem primjeru.

Primjer 2.1.3. Promotrimo na primjer parametriziranu krivulju

$$c : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) = (0, \cos t, \sin t).$$



Slika 2.1: Parametrizirana krivulja $c(t) = (0, \cos t, \sin t)$ i vektori brzine p_i, s_i i v_i

Nju prepoznajemo kao parametrizaciju jedinične kružnice u yz-ravnini - ispitajmo u kojim točkama domene je ta parametrizacija prostorna, vremenska odnosno svjetlosna. U tu svrhu raspisujemo:

$$\begin{aligned}
&\dot{c}(t) = (0, -\sin t, \cos t),\\
&\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 0 + \sin^2 t - \cos^2 t = -\cos 2t.
\end{aligned}$$

Jednostavnom primjenom poznatih trigonometrijskih tvrdnji odavde nalazimo da za proizvoljan $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$ imamo da je

$$\begin{aligned}
c \text{ prostorna krivulja u točki } t &\iff \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle > 0\\
&\iff -\cos 2t > 0\\
&\iff t \in \left\langle -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\rangle
\end{aligned}$$

te sasvim analogno vrijedi i da je

$$\begin{aligned} c \text{ vremenska krivulja u točki } t &\Longleftrightarrow t \in \left\langle -\pi, -\frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle \\ c \text{ svjetlosna krivulja u točki } t &\Longleftrightarrow t \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

Označimo s U, V odnosno W skup svih točaka domene u kojima je dana krivulja c prostorna, vremenska odnosno svjetlosna respektivno - tada na Slici 2.1 vizualno prikazujemo trag naše krivulje c gdje smo narančastom bojom istaknuli skup $c(U)$, plavom bojom skup $c(V)$ i sivom elemente skupa $c(W)$. Na toj Slici posebno ističemo i odabrane vektore brzine

$$p_1 := \dot{c}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big),\ s_1 := \dot{c}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big),\ v_1 := \dot{c}(0),\ s_2 := \dot{c}\Big(\frac{\pi}{4}\Big),\ p_2 := \dot{c}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

te napomenimo da smo slike tih vektora brzine $\dot{c}(t)$ radi jasnoće translatirali u pripadnu točku $c(t)$, za pojedine $t \in I$.

Primijetimo kako je u prethodnom primjeru skup svih točaka domene u kojima je krivulja prostorna ili vremenska otvoren skup, dok je skup svih točaka u kojima je krivulja svjetlosna zatvoren skup. To nije slučajnost, što nam pokazuje iduća

Napomena 2.1.4. Za regularnu parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ vrijedi:

- svojstvo da je c prostorna krivulja u točki domene jest otvoreno svojstvo,

to jest ovime želimo reći da sve točke domene I u kojima je c prostorna krivulja nužno čini otvoren skup (otvoren u I pa time otvoren i u $\mathbb{R}$). Tu tvrdnju lako provjeravamo na slijedeći način - označimo s U skup svih točaka iz I u kojima je c prostorna krivulja te pokažimo da je taj skup otvoren. Budući da je

$$\begin{aligned} c \text{ prostorna krivulja u točki } t &\Longleftrightarrow \dot{c}(t) \text{ prostorni vektor}, \\ &\Longleftrightarrow \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle > 0, \end{aligned}$$

lako dobivamo da je

$$U = \{t \in I \mid \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle > 0\}.$$

Označimo li s $\alpha : I \to \mathbb{R}$ preslikavanje

$$\alpha(t) = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle,$$

tada lako vidimo da je

$$U = \alpha^{-1}(\langle 0, +\infty \rangle).$$

Štoviše, budući da je preslikavanje c glatko, tada je posebno i naše preslikavanje $\alpha = t \mapsto \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ glatko, a time i neprekidno preslikavanje. Pa, kako je $\langle 0, +\infty \rangle$ otvoren podskup od $\mathbb{R}$, slijedi da je i njegova praslika po α, skup U, isto otvoren skup (otvoren u I). Time zaključujemo da navedena tvrdnja zaista vrijedi.
Primijetimo da smo sasvim analogno mogli dokazati i tvrdnju:

- svojstvo da je c vremenska krivulja u točki domene jest otvoreno svojstvo.

Konačno, koristeći ove dvije istaknute tvrdnje, lako se provjeri da vrijedi i slijedeće:

- svojstvo da je c svjetlosna krivulja u točki domene jest zatvoreno svojstvo.

Primjer 2.1.5. Navedimo sada primjere prostornih, vremenskih i svjetlosnih krivulja. U tu svrhu promotrimo parametriziranu krivulju

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) := (a \cos t, a \sin t, bt)$$

koju nazivamo obična cilindrična spirala, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, neki parametri. Ispitajmo njene vektore brzine - prvo računamo:

$$\begin{aligned} &\dot{c}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b), \\ &\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t - b^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

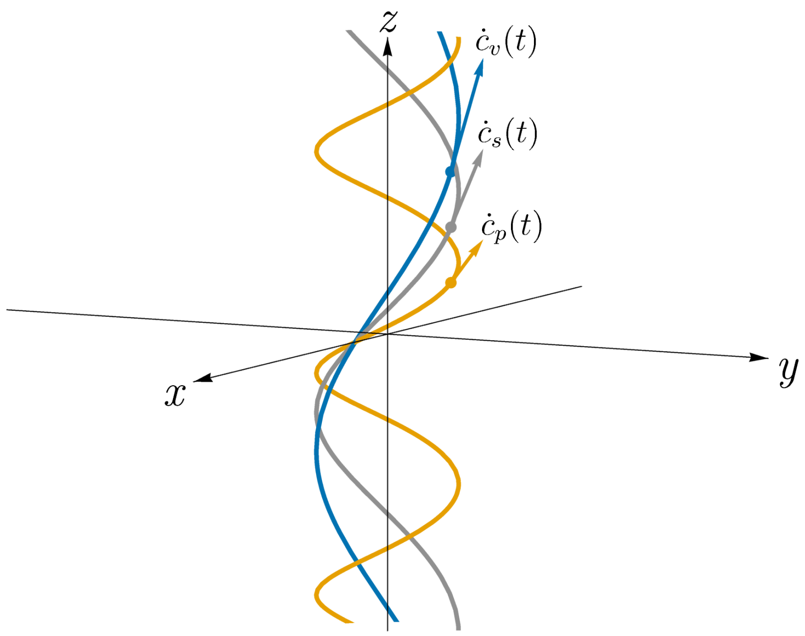
Odavde vidimo da je parametrizirana krivulja c konstantno istog tipa na cijeloj domeni I te da tip krivulje ovisi isključivo o konstantama a i b. Sada lako vidimo da je

$$\begin{aligned} &c \text{ prostorna krivulja} \iff b \in \langle -a, a \rangle, \\ &c \text{ vremenska krivulja} \iff b \in \langle -\infty, -a \rangle \cup \langle a, +\infty \rangle, \\ &c \text{ svjetlosna krivulja} \iff b = \pm a, \end{aligned}$$

Istaknimo sada specifično neke primjere prostornih, vremenskih i svjetlosnih krivulja: koristeći gornje ekvivalencije vidimo da su obične cilindrične spirale $c_p, c_v, c_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ definirane s

$$c_p(t) := (\cos t, \sin t, 0.5t) \quad , \quad c_v(t) := (\cos t, \sin t, 1.5t) \quad , \quad c_s(t) := (\cos t, \sin t, t)$$

redom daju prostornu, vremensku i svjetlosnu krivulju. Njih prikazujemo Slikom 2.2 gdje ih redom označavamo narančastom, plavom i sivom bojom, a također ističemo i pripadne vektore brzine u točki $t = \frac{\pi}{2}$ (te vektore brzine isto kao i ranije translatiramo u pripadnu točku $c_i(t)$).



Slika 2.2: Obične cilindrične spirale c_p, c_v i c_s te pripadni vektori brzine $\dot{c}_p(t)$, $\dot{c}_v(t)$ i $\dot{c}_s(t)$ u točki $t = \frac{\pi}{2}$

Napomena 2.1.6. Primijetimo da vrijede slijedeće tvrdnje:

- Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja i ako je $\Phi(x) = Ax + b$ gibanje Lorentz-Minkowskijevog prostora, tada je kompozicija $f := \Phi \circ c : I \to \mathbb{R}^3_1$ također parametrizirana krivulja.
- Za derivaciju krivulje f vrijedi jednakost: $\dot{f} = A\dot{c}$.
- Za drugu derivaciju krivulje f vrijedi jednakost: $\ddot{f} = A\ddot{c}$.
- Parametrizirana krivulja c je regularna ako i samo ako je f regularna parametrizirana krivulja.
- Parametrizirana krivulja c je biregularna ako i samo ako je f biregularna parametrizirana krivulja.
- Vektor brzine $\dot{c}(t)$ je istog tipa kao i vektor brzine $\dot{f}(t)$, za svaki $t \in I$ (istog tipa u smislu: prostorni, vremenski odnosno svjetlosni vektor).

- Vektor akceleracije $\ddot{c}(t)$ je istog tipa kao i vektor akceleracije $\ddot{f}(t)$, za sve $t \in I$.

Naime, prva i druga točka direktna su posljedica činjenice da su A i b konstante pa to nećemo posebno obrazlagati; treća točka slijedi iz prve i druge točke uočimo li da je $\dot{c}$ također parametrizirana krivulja i $x \mapsto Ax$ gibanje prostora $\mathbb{R}^3_1$. Četvrta i peta točka slijede iz jednakosti $\dot{f} = A\dot{c}$ i $\ddot{f} = A\ddot{c}$ uz primjedbu da je preslikavanje $x \mapsto Ax$ injektivan linearan operator (jer su Lorentzove matrice invertibilne kao poslijedica Teorema 1.3.7, vidi stranicu 61) pa jedino nulvektor preslikava u nulvektor. Šesta i sedma točka posljedica su idućeg računa:

$$\begin{aligned}\langle \dot{f}(t), \dot{f}(t)\rangle &= \langle A\dot{c}(t), A\dot{c}(t)\rangle = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle,\\ \langle \ddot{f}(t), \ddot{f}(t)\rangle &= \langle A\ddot{c}(t), A\ddot{c}(t)\rangle = \langle \ddot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle,\end{aligned}$$

gdje smo u računu u dva navrata koristili činjenicu da Lorentzova matrica čuva Lorentzov pseudoskalarni produkt vektora (Teorem 1.3.7).

Idući nam je cilj uvesti pojam reparametrizacije parametrizirane krivulje te pojam parametrizacije duljinom luka.

Definicija 2.1.7. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja te označimo s $J \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan otvoreni interval. Kažemo da je preslikavanje $\varphi : J \to I$ parametarska transformacija parametrizirane krivulje c, ako je φ difeomorfizam klase C^∞, te u tom slučaju kažemo da je preslikavanje $\tilde{c} := c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^3_1$ reparametrizacija parametrizirane krivulje c.

Napomena 2.1.8. Istaknimo nekoliko primjedbi vezanih uz uvedene pojmove.

- Slika preslikavanja parametrizirane krivulje i njene reparametrizacije su jednake.

- Reparametrizacija regularne parametrizirane krivulje je također regularna parametrizirana krivulja.

- Fiksirajmo neku parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$. Označimo s $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^3_1$ neku njenu reparametrizaciju te sa $\varphi : J \to I$ pripadnu parametarsku transformaciju. Tada vrijedi da je

$$\begin{aligned}&c \text{ prostorna krivulja u točki } t \iff \tilde{c} \text{ prostorna krivulja u točki } \varphi^{-1}(t),\\ &c \text{ vremenska krivulja u točki } t \iff \tilde{c} \text{ vremenska krivulja u točki } \varphi^{-1}(t),\\ &c \text{ svjetlosna krivulja u točki } t \iff \tilde{c} \text{ svjetlosna krivulja u točki } \varphi^{-1}(t).\end{aligned}$$

Tvrdnj prve točke slijedi direktno iz činjenice da je φ bijekcija. Tvrdnju druge i treće pokazujemo na slijedeći način: jednostavnim deriviranjem izraza $c = \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ dobivamo da je

$$(\forall t \in I)\ \dot{c}(t) = \dot{\tilde{c}}\big(\varphi^{-1}(t)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(t).$$

Budući da je $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$, odavde zaključujemo da je jedan od vektora $\dot{c}(t)$ i $\dot{\tilde{c}}\big(\varphi^{-1}(t)\big)$ različit od nulvektora ako i samo ako je i drugi različit od nulvektora čime dobivamo tvrdnju druge točke. Štoviše, u slučaju da su vektori različiti od nulvektora, tada su to dva kolinearna nenul vektora u $\mathbb{R}^3_1$ otkuda pozivanjem na Napomenu 1.2.6 zaključujemo da to moraju biti vektori istog tipa i time dobivamo tvrdnju zadnje točke.

Definicija 2.1.9. Za parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je parametrizirana duljinom luka, ako je jedinične brzine na cijeloj domeni, to jest, ako je

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \quad , \quad \forall t \in I.$$

Idući nam je cilj dokazati analogon klasičnog teorema euklidske geometrije koji garantira egzistenciju reparamerizacije krivulje duljinom luka. Primijetimo da takav teorem ima smisla samo za prostorne i vremenske krivulje. Kao prvo, po prethodnoj Napomeni 2.1.8 vidimo da u obzir možemo uzeti samo regularne parametrizirane krivulje (jer su krivulje parametrizirane duljinom luka nužno regularne). Sada, ako za regularnu parametriziranu krivulju postoji točka domene u kojoj je ona svjetlosna krivulja, tada ponovno po prethodnoj Napomeni vidimo da svaka njena reparametrizacija u pripadnoj točki mora imati brzinu jednaku 0 (dakle, ona ne može biti jednaka 1). Stoga jedine parametrizirane krivulje koje dolaze u obzir za ovakav teorem su one krivulje koje su u svakoj točki domene ili prostorne krivulje ili vremenske krivulje. Štoviše, odavde možemo zaključiti da su to onda krivulje koje su istog tipa (vremenske ili prostorne) u svakoj svojoj točki. Naime, kada je krivulja prostorna ili vremenska u svakoj točki svoje domene I, tada tu domenu možemo zapisati kao disjunktu uniju $I = U \cup V$, gdje je U skup svih točaka domene u kojoj je krivulja prostorna i V skup svih točaka u kojoj je krivulja vremenska. Zapravo, po Napomeni 2.1.4 je to disjunktna unija dva otvorena skupa, pa budući da je I povezan skup (I je neki otvoreni interval u $\mathbb{R}$) zaključujemo da mora biti $I = U$ ili $I = V$ što nam daje tvrdnju. Sada smo spremi iskazati i dokazati najavljeni

Teorem 2.1.10. Za svaku vremensku ili prostornu krivulju prostora $\mathbb{R}^3_1$ postoji njena reparametrizacija duljinom luka. To su i jedine parametrizirane krivulje koje imaju reparametrizaciju duljinom luka.

DOKAZ Da su to jedine krivulje koje mogu imati reparametrizaciju duljinom luka slijedi iz prethodne diskusije; stoga sada još pokažimo da svaka prostorna ili vremenska krivulja zaista i ima reparametrizaciju duljinom luka. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ proizvoljna takva krivulja - slično kao i u dokazu za prostor s eudklidskom metrikom izvedimo kako bi trebala izgledati parametarska transformacija φ. U tu svrhu neka je φ proizvoljan difeomorfizam $J \to I$ te pokušajmo odrediti uvjete na φ za koje je krivulja $\tilde{c} = c \circ \varphi$ parametrizirana duljinom luka. Stoga za proizvoljan $s \in J$ raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = 1 &\iff \|\dot{c}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\| = 1 \\
&\iff |\varphi'(s)| \cdot \|\dot{c}(\varphi(s))\| = 1 \\
&\iff \frac{1}{|\varphi'(s)|} = \|\dot{c}(\varphi(s))\| \\
&\iff \frac{1}{\varphi'(s)} = \pm\|\dot{c}(\varphi(s))\|
\end{aligned}$$

pa označimo li $t = \varphi(s)$ dalje raspisujemo

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \pm\|\dot{c}(t)\| \\
&\iff (\varphi^{-1})'(t) = \pm\|\dot{c}(t)\|.
\end{aligned}$$

Prokomentirajmo ovaj raspis: u prvoj smo ekvivalenciji koristili definiciju krivulje $\tilde{c}$ te smo derivirali po lančanom pravilu, u trećoj smo ekvivalenciji dijelili s $|\varphi'(s)|$ (a to možemo jer znamo da je različito od 0) te smo u posljednjoj ekvivalenciji iskoristili teorem o inverznom preslikavanju. Iz ovih ekvivalencija zaključujemo da nam je dovoljno pronaći neki difeomorfizam ψ definiran na otvorenom intervalu I čija je derivacija u točki $t \in I$ jednaka upravo $\|\dot{c}(t)\|$. U tu svrhu definiramo preslikavanje

$$\psi : I \to \mathbb{R} \quad , \quad \psi(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau,$$

gdje je $t_0 \in I$ proizvoljna točka intervala. Ovako definirano preslikavanje ψ je očito derivabilno te imamo $\psi'(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$, za sve $t \in I$, gdje nejednakost proizlazi iz toga da je c prostorna ili vremenska krivulja. Prema tome, ψ je strogo rastuće preslikavanje pa je posebno i injektivno - dakle, ono je bijektivno na svoju sliku $J := \psi(I)$ te zaključujemo da postoji njen inverz

$$\varphi : J \to I.$$

Uvjerimo se da je φ odnosno ψ difeomorfno preslikavanje. Naime, preslikavanje $t \mapsto \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ je očito glatko pa budući da je slika tog preslikavanja sadržana ili u $\langle -\infty, 0 \rangle$ ili u $\langle 0, \infty \rangle$ (ovisno o tome je li c vremenska ili prostorna krivulja) slijedi da je njegova kompozicija s preslikavanjem $x \mapsto \sqrt{|x|}$ također glatko preslikavanje. Zaključujemo: $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$ je glatko preslikavanje, pa budući da je $\psi'(t) = \|\dot{c}(t)\|$ slijedi da je ψ zapravo i samo glatko preslikavanje. Konačno, kako je ψ glatko bijektivno preslikavanje za koje vrijedi $(\forall t \in I)\ \psi'(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$, prema teoremu o inverznom preslikavanju (poznatom iz matematičke analize) zaključujemo da i pripadni inverz $\varphi : J \to I$ mora biti glatko preslikavanje. Dakle, φ i ψ su difeomorfna preslikavanja pa, kako imamo $\psi'(t) = \|\dot{c}(t)\|$, iz ekvivalencija s početka dokaza zaključujemo da je reparametrizacija $\tilde{c} := c \circ \varphi$ krivulja parametrizirana duljinom luka što smo i trebali pokazati. □

Time smo riješili pitanje vremenskih i prostornih krivulja, no mi ćemo se sada još pozabaviti parametriziranim krivuljama koje u nekim točkama domene jesu svjetlosne krivulje. Naime, postavlja se pitanje što napraviti s općenitim regularnim krivuljama koje nisu u svakoj točki domene prostorne ili vremenske. Označimo s W skup svih točaka domene u kojima je krivulja svjetlosna, dok su skupovi U i V one točke u kojima je krivulja prostorna i vremenska respektivno. Budući da je skup W općenito zatvoren tu ne možemo baš nešto napraviti, pa stoga uzimamo interior tog skupa $\operatorname{Int} W$. Tada je restrikcija krivulje na skup $\operatorname{Int} W$ svjetlosna krivulja i time ćemo se pozabaviti iduće; tada nam preostaju točke skupa ∂W za koje možemo pretpostaviti da čine, recimo, konačan ili diskretan skup. Zaključujemo: promatranju proizvoljne regularne krivulje u $\mathbb{R}^3_1$ možemo pristupiti tako da promatramo njene restrikcije na skupove U, V i $\operatorname{Int} W$ (to jest restrikcije na komponente povezanosti tih otvorenih skupova) te iz toga zaključivati njena geometrijska svojstva

Iz tog razloga ćemo se do kraja ove potsekcije baviti još samo sa svjetlosnim krivuljama. Budući da kod svjetlosnih krivulja ne možemo ništa napraviti po pitanju brzine u točki domene, možemo probati postići nešto po pitanju akceleracije. U tu svrhu fiksirajmo proizvoljnu svjetlosnu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$. Tada je naravno

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$$

za sve $t \in I$; preslikavanje $t \mapsto \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ je očito glatko pa diferenciranjem ove jednakosti po varijabli t dobivamo izraz

$$\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0. \tag{2.1}$$

Iz toga zaključujemo da je vektor akceleracije $\ddot{c}(t)$ nužno ortogonalan na vektor brzine $\dot{c}(t)$, što u duhu diskusije napravljene na stranici 45 zapisujemo kao

$$\ddot{c}(t) \in \big(\operatorname{span} \dot{c}(t)\big)^{\perp}.$$

Budući da je $\dot{c}(t)$ svjetlosni vektor, tada pomoću PROPOZICIJE 1.2.35 zaključujemo da je $\big(\operatorname{span}\dot{c}(t)\big)^{\perp}$ svjetlosni potprostor (i to dvodimenzionalan) te po karaketrizacijama danim PROPOZICIJOM 1.2.34 i TEOREMOM 1.2.28 tada slijedi da je

$$\ddot{c}(t) \text{ nužno prostorni, svjetlosni ili nulvektor.} \tag{2.2}$$

Ovu diskusiju sada rastavljamo na dva slučaja, od kojih prvi rješavamo idućom napomenom, dok je drugi dio bitnog teorema.

Napomena 2.1.11. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna krivulja - tada vrijedi slijedeća ekvivalencija:

$$c \text{ parametrizira dio pravca} \iff (\forall t \in I)\ \ddot{c}(t) \text{ svjetlosni ili nulvektor}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da c parametrizira dio pravca - tada je trag parametrizirane krivulje c sadržan u skupu $(\operatorname{span} a) + b$ za neke vektore $a, b \in \mathbb{R}^3_1$. Jasno nam je da sada postoji glatko preslikavanje $\alpha : I \to \mathbb{R}$ takvo da je $c(t) = \alpha(t)\, a + b$. S jedne strane deriviranjem dobivamo da je $\dot{c}(t) = \alpha'(t)\, a$ otkuda vidimo da je a nužno svjetlosni vektor (koristeći NAPOMENU 1.2.6 i činjenicu da je $\dot{c}(t)$ svjetlosni vektor). S druge strane, ponovnim deriviranjem nalazimo da je $\ddot{c}(t) = \alpha''(t)\, a$ iz čega nam je sada jasno da je vektor akceleracije $\ddot{c}(t)$ nužno svjetlosni ili nulvektor.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $\ddot{c}(t)$ svjetlosni ili nulvektor za sve $t \in I$. Ako je $\ddot{c}(t)$ svjetlosni vektor, tada iz razloga što je $\dot{c}(t)$ također svjetlosni vektor, pomoću jednakosti (2.1) i LEME 1.2.26 zaključujemo da oni moraju biti kolinearni pa za taj $t \in I$ znamo da $(\exists \alpha(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ \ddot{c}(t) = \alpha(t)\, \dot{c}(t)$. S druge strane, za $t \in I$ za koje je $\ddot{c}(t) = 0$ očito imamo da $(\exists \alpha(t) = 0 \in \mathbb{R})\ \ddot{c}(t) = \alpha(t)\, \dot{c}(t)$ - stoga zaključujemo da u svakom slučaju vrijedi tvrdnja

$$\big(\forall t \in I\big)\big(\exists \alpha(t) \in \mathbb{R}\big)\ \ddot{c}(t) = \alpha(t)\, \dot{c}(t).$$

No primijetimo da smo ovime dobili običnu diferencijalnu jednadžbu čijim rješavanjem na intervalu I lagano dobivamo da je

$$\dot{c}(t) = \left(e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau) \mathrm{d}\tau}\right) a,$$

za neki $a \in \mathbb{R}^3_1$, gdje je $t_0 \in I$ proizvoljna točka domene I. Konačno, označimo $g(t) := \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, \mathrm{d}\tau$, pa integiriranjem gornjeg izraza zaključujemo da je

$$c(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{g(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\right) a + b,$$

za neki vektor $b \in \mathbb{R}^3_1$. Prema tome, trag parametrizirane krivulje c je sadržan u pravcu $(\operatorname{span} a) + b$ čime je dokazana tražena ekvivalencija.

Sada se postavlja pitanje, slično kao što smo imali i ranije, možemo li za c napraviti reparametrizaciju jedinične akceleracije, a to očito jedino ima smisla za točke domene u kojima je vektor akceleracije prostorni vektor. Slično Napomeni 2.1.4 može se pokazati da skup svih točaka domene za koje je vektor akceleracije prostorni vektor čini otvoren podskup domene. Posebno, po prethodnoj Napomeni 2.1.11 odavde slijedi da c parametrizira dio pravca na interioru komplementa tog skupa. Srodno ranijoj diskusiji, za općenite svjetlosne krivulje možemo pretpostaviti da je rub tog komplementa konačan ili diskretan skup te ubuduće promatrati geometriju te krivulje na komponentama povezanosti domene na kojima je vektor akceleracije prostorni vektor.

Teorem 2.1.12. Svaka svjetlosna krivulja kojoj je vektor akceleracije prostorni vektor na cijeloj domeni ima reparametrizaciju jedinične akceleracije. Štoviše, to su jedine svjetlosne krivulje koje imaju reparametrizaciju jedinične akceleracije.

DOKAZ U ovom dokazu postupamo slično kao i u dokazu Teorema 2.1.10. Prvo komentirajmo kako je jasno da su krivulje iz iskaza jedine svjetlosne krivulje za koje ima uopće smisla tvrdnja teorema, što vidimo po tvrdnji (2.2) koja kaže da je vektor akceleracije svjetlosnih krivulja nužno prostorni, svjetlosni ili nulvektor. Pokažimo sada da svaka svjetlosna krivulja s prostornim vektorom akceleracije zaista ima traženu reparametrizaciju. U tu svrhu označimo s φ proizvoljan difeomorfizam $J \to I$ te pronađimo uvjete na φ za koje je $\tilde{c} = c \circ \varphi$ parametrizirana krivulja jedinične akceleracije. Zato za proizvoljan $s \in J$ označimo $t = \varphi(s)$ te raspisujemo uvjet:

$$
\begin{aligned}
\|\ddot{\tilde{c}}(s)\| = 1 &\iff \|\ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2 + \dot{c}(t)\varphi''(s)\| = 1 \\
&\iff \sqrt{\left|\left\langle \ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2 + \dot{c}(t)\varphi''(s), \ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2 + \dot{c}(t)\varphi''(s)\right\rangle\right|} = 1 \\
&\iff \sqrt{\left|\left\langle \ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2, \ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2\right\rangle + \cdots\right.} \\
&\qquad \overline{\left.\cdots + 2\left\langle \ddot{c}(t)(\varphi'(s))^2, \dot{c}(t)\varphi''(s)\right\rangle + \left\langle \dot{c}(t)\varphi''(s), \dot{c}(t)\varphi''(s)\right\rangle\right|} = 1 \\
&\iff \sqrt{\left|(\varphi'(s))^4\left\langle \ddot{c}(t), \ddot{c}(t)\right\rangle\right|} = 1 \\
&\iff \frac{1}{(\varphi'(s))^2} = \|\ddot{c}(t)\| \\
&\iff \frac{1}{\varphi'(s)} = \pm\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|} \\
&\iff \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \pm\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|} \\
&\iff (\varphi^{-1})'(t) = \pm\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|}.
\end{aligned}
$$

Ovaj raspis vrijedi slično kao i u dokazu TEOREMA 2.1.12, no istaknimo samo da smo u drugoj ekvivalenciji koristili definiciju Lorentzove norme i da smo u četvrtoj ekvivalenciji iskoristili činjenicu da su $\ddot{c}(t)$ i $\dot{c}(t)$ međusobno ortogonalni (vidi izraz (2.1)) te da je $\dot{c}(t)$ svjetlosni vektor. Iz ovih ekvivalencija slijedi da nam je dovoljno pronaći neki difeomorfizam ψ definiran na otvorenom intervalu I čija je derivacija u točki $t \in I$ jednaka baš $\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|}$. Stoga definiramo preslikavanje

$$\psi : I \to \mathbb{R} \quad , \quad \psi(t) := \int_{t_0}^{t} \sqrt{\|\ddot{c}(\tau)\|}\, \mathrm{d}\tau,$$

gdje je $t_0 \in I$ proizvoljna točka intervala. Dakle, preslikavanje ψ je očito derivabilno te imamo $\psi'(t) = \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|} > 0$, za sve $t \in I$, gdje nam je nejednakost dana činjenicom da je $\ddot{c}(t)$ uvijek prostorni vektor. Stoga je ψ posebno i injektivno preslikavanje pa time i bijektivno na svoju sliku $J := \psi(I)$ čime zaključujemo da postoji njen inverz

$$\varphi : J \to I.$$

Pokažimo da je φ odnosno ψ difeomorfno preslikavanje. Zaista, preslikavanje $t \mapsto \langle \ddot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle$ je očito glatko preslikavanje čija je slika sadržana u $\langle 0, \infty \rangle$ pa slijedi da je i njegova kompozicija s preslikavanjem $x \mapsto \sqrt{\sqrt{|x|}}$ također glatko preslikavanje. Dakle, $t \mapsto \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|}$ je glatko preslikavanje pa koristeći da je $\psi'(t) = \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|}$ slijedi da je i ψ glatko preslikavanje. Konačno, budući da je ψ glatko bijektivno preslikavanje za koje vrijedi $(\forall t \in I)\ \psi'(t) = \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|} > 0$, koristeći teorem o inverznom preslikavanju slijedi da je i pripadni inverz $\varphi : J \to I$ glatko preslikavanje. Zaključujemo: φ i ψ su difeomorfna preslikavanja pa, kako imamo $\psi'(t) = \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|}$, iz ekvivalencija s početka dokaza slijedi da je $\tilde{c} := c \circ \varphi$ parametrizirana krivulja jedinične akceleracije što smo i htjeli pokazati. $\square$

Povodom ovog teorema uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 2.1.13. Za svjetlosnu krivulju prostora $\mathbb{R}^3_1$ kojoj je vektor akceleracije prostorni vektor u svakoj točki domene kažemo da je pseudo-parametrizirana duljinom luka, ako je to parametrizacija jedinične akceleracije, to jest, ako vrijedi

$$(\forall t \in I)\ \|\ddot{c}(t)\| = 1.$$

Taj rezultat će nam biti od ključne važnosti u idućoj sekciji gdje ćemo definirati Freneteov trobrid i za, između ostalog, svjetlosne krivulje.

2.2 Freneteova baza i Frenet-Serreteove formule krivulja prostora $\mathbb{R}^3_1$

U ovoj sekciji bavit ćemo se definiranjem Freneteove[1] baze za krivulje Lorentz-Minkowskijevog prostora. U idealnom slučaju bismo definirali $T(t)$ kao jedinični vektor brzine krivulje, $N(t)$ kao jedinični vektor derivacije $\dot{T}(t)$, $B(t)$ kao vektorski produkt $T(t) \times N(t)$, te bismo željeli da je tada $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Problem nastaje kao prvo u tome da, kao što smo to diskutirali u prošloj sekciji, jedinični vektor brzine krivulje ima smisla samo za prostorne i vremenske krivulje, tako da nam u startu otpadaju svjetlosne krivulje (ili općenito krivulje koje nisu u svakoj točki domene prostorne ili vremenske). Problem isto nastaje u slučaju da $\dot{T}(t)$ ispadne svjetlosni vektor, jer tada ne možemo definirati $N(t)$ kao jedinični vektor od $\dot{T}(t)$. Općenito, kada bi $N(t)$ bio svjetlosni vektor, tada po Propozicije 1.2.21 znamo da $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nikako ne može biti ortonirmirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Iz ovakvih razloga definiranju Freneteove baze moramo pristupiti individualno po slučajevima - vidjet ćemo da će većina tih slučajeva imati međusobno sličan pristup do na par iznimaka gdje ćemo trebati koristiti alternativne metode.

Kao što je to bio u slučaj u euklidskom prostoru, Freneteov trobrid definiramo prvo za regularne krivulje parametrizirane duljinom luka, no ovdje ćemo uzimati u obzir i krivulje pseudo-parametrizirane duljinom luka.

Definicija 2.2.1. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka ili regularna krivulja pseudo-parametirizirana duljinom luka. Tada za svaki $t \in T$ definiramo vektor

$$T(t) := \dot{c}(t)$$

i kažemo da je to <u>tangencijalni vektor</u> krivulje c u točki t. Navedimo još kako ćemo regularne parametrizirane krivulje koje su parametrizirane duljinom luka i one koje su pseudo-parametirizirane duljinom luka sve zajedno ubuduće podrazumijevati pod izrazom <u>krivulje (pseudo-)parametrizirane duljinom luka</u>.

Napomena 2.2.2. Diskutirajmo iduće dvije primjedbe vezane uz prethodnu definiciju.

- Tangencijalni vektor krivulje (pseudo-)parametrizirane duljinom luka je konstantno istog tipa (prostorni, vremenski, svjetlosni vektor).
- Derivacija tangencijalnog vektora krivulje (pseudo-)parametrizirane duljinom lika nužno je ortogonalna na taj tangencijalni vektor.

[1] Jean Frédéric Frenet, 1816-1900

Tvrdnja prve točke slijedi iz TEOREMA 2.1.10 i 2.1.12 (jer su jedine krivulje koje dopuštaju takve parametrizacije prostorne, vremenske odnosno svjetlosne), dok tvrdnju druge točke pokazujemo sa slijedećim. Ako je $T(t)$ tangencijalni vektor neke krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ (pseudo-)parametrizirane duljinom luka, tada je (koristeći tvrdnju prve točke) nužno:

$$\big\langle T(t), T(t) \big\rangle = \text{const.} \in \{-1, 0, 1\}$$

i to vrijedi za svaki $t \in I$. Sada nam je cilj derivirati ovu jednakost po varijabli t, ali prije toga komentirajmo kako je preslikavanje $t \mapsto T(t)$, $I \to \mathbb{R}^3_1$, glatko preslikavanje, jer je $t \mapsto T(t) = \dot{c}(t)$ glatko preslikavanje kao derivacija glatkog preslikavanja. Dakle, diferencijarnjem po varijabli t dobivamo upravo

$$\big\langle \dot{T}(t), T(t) \big\rangle = 0$$

iz čega zaključujemo da je $\dot{T}(t)$ ortogonalan tangencijalnom vektoru $T(t)$. Taj zaključak možemo zapisati i kao

$$\dot{T}(t) \in \big(\operatorname{span} T(t)\big)^{\perp},$$

prisjetimo li se diskusije provedene na stranici 45.

Nadalje, prisjetimo se kako smo u euklidskom prostoru koristili pojam biregularnosti kojim se zahtjevom iz razmatranja isključuju krivulje koje parametriziraju pravac. Jasno nam je da su sve krivulje pseudo-parametrizirane duljinom luka ujedno i biregularne, no taj zahtjev ćemo morat posebno iskoristiti za prostorne i vremenske krivulje. Naime, prema NAPOMENI 2.1.11 krivulje pseudo-parametrizirane duljinom luka svakako ne parametriziraju dio pravca, dok se za prostorne i vremenske krivulje parametrizirane duljinom luka lako pokaže da zahtjev biregularnosti karakterizira kada ta krivulja parametrizira dio pravca.

Konačno smo sada spremni bez daljnjeg odgađanja definirati Freneteovu bazu u Lorentz-Minkowskijevom prostoru. Slijedi

Definicija 2.2.3 (Freneteova baza Freneteovih krivulja)**.** Za biregularnu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ (pseudo-)parametriziranu duljinom luka kažemo da je Freneteova krivulja, ako su pripadni tangencijalni vektor $T(t)$ i njegova derivacija $\dot{T}(t)$ prostorni ili vremenski vektori, za sve $t \in I$. Za Freneteovu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ sada lako definiramo Freneteovu bazu krivulje u točki domene na slijedeći način. Fiksirajmo $t \in I$ proizvoljan. Budući da je $\dot{T}(t)$ prostorni ili vremenski vektor, tada po NAPOMENI 1.2.6 znamo da taj vektor možemo normirati pa definiramo normalni vektor krivulje c u točki t kao jedinični vektor

$$N(t) := \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}.$$

Štoviše, sada definiramo i binormalni vektor krivulje c u točki t s

$$B(t) := T(t) \times N(t).$$

Budući da su vektori $T(t)$ i $N(t)$ dva jedinična međusobno ortogonalna vektora (to vidimo iz Napomene 2.2.2), pomoću Propozicije 1.2.21 sada zaključujemo da je skup

$$\{T(t), N(t), B(t)\}$$

ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ koju nazivamo Freneteova baza krivulje c u točki t (posebno, $B(t)$ je također jedinični vektor). Konačno, definiramo i zakrivljenost krivulje c u točki t kao koeficijent $\kappa(t)$ koji stoji uz vektor $N(t)$ pri prikazu vektora $\dot{T}(t)$ u pripadnoj Freneteovoj bazi, što je po Teoremu 1.2.20 dano s

$$\kappa(t) = \langle N(t), N(t)\rangle \langle \dot{T}(t), N(t)\rangle.$$

Također definiramo i torziju krivulje c u točki t kao koeficijent $\tau(t)$ koji stoji uz vektor $B(t)$ pri prikazu vektora $\dot{N}(t)$ u pripadnoj Freneteovoj bazi, što nam je po istom Teoremu dano s

$$\tau(t) = \langle B(t), B(t)\rangle \langle \dot{N}(t), B(t)\rangle.$$

Za početak istaknimo da radi jednakosti $\dot{T}(t) = \|\dot{T}(t)\|\, N(t)$ i radi jedinstvenosti prikaza vektora u bazi, zakrivljenost κ također možemo računati i kao

$$\kappa(t) = \|\dot{T}(t)\|,$$

a sada možemo vidjeti i da je zakrivljenost κ strogo veća od 0 na cijeloj domeni (jer je $\dot{T} = \ddot{c}$ konstantno prostorni ili vremenski vektor).

Ispitajmo sada koje su točno krivulje Freneteove krivulje; radi jednostavnosti ovdje pretpostavljamo da je vektor akceleracije (dakle, derivacija tangencijalnog vektora) konstanto istog tipa (prostorni, vremenski odnosno svjetlosni vektor).

- Prvo, u slučaju da je c biregularna vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka, tada je $T(t)$ jasno jedinični vremenski vektor, dok za vektor $\dot{T}(t)$ po Napomeni 2.2.2 znamo da vrijedi $\dot{T}(t) \in (\operatorname{span} T(t))^{\perp}$. Pozivajući se na Propoziciju 1.2.35 odavde lako zaključujemo da je $(\operatorname{span} T(t))^{\perp}$ (dvodimenzionalan) prostorni potprostor - sada uz karakterizaciju danu Propozicijom 1.2.33 zaključujemo da $\dot{T}(t)$ mora biti prostorni vektor. Prema tome, $T(t)$ je vremenski i $\dot{T}(t)$ je prostorni vektor pa zaključujemo da je c Freneteova krivulja.

- Drugo, neka je c biregularna prostorna krivulja parametrizirana duljinom luka. Tada je analogno prvoj točki $T(t)$ jedinični prostorni vektor, $\dot{T}(t) \in (\operatorname{span} T(t))^\perp$ te je ovdje $(\operatorname{span} T(t))^\perp$ (dvodimenzionalan) vremenski potprostor. Ovaj put, s druge strane, prema karakterizacijama danim Propozicijom 1.2.32 i Teoremom 1.2.28 znamo da $(\operatorname{span} T(t))^\perp$ sadrži vremenske, prostorne i svjetlosne vektore. U slučaju da je $\dot{T}(t)$ prostorni ili vremenski vektor, tada je c Freneteova krivulja, dok u slučaju da je $\dot{T}(t)$ svjetlosni, tada krivulja c nije Freneteova.

- Konačno, u slučaju da je c svjetlosna krivulja pseudo-parametrizirana duljinom luka, tada ona očito nije Freneteova krivulja: unatoč tome što je derivacija njenog tangencijalnog vektora svuda prostorni vektor, sam tangencijalni vektor je svjetlosni, čime slijedi zaključak.

Odavde sada zaključujemo da ćemo se nadalje kao i kod svjetlosnih krivulja ograničiti na promatranje prostornih i vremenskih krivulja s konstantnim tipom vektora akceleracije i taj ćemo zahtjev nadalje podrazumijevati bez posebnog isticanja.

Dakle, jedino za svjetlosne krivulje pseudo-parametrizirane duljinom luka i biregularne prostorne krivulje parametrizirane duljinom luka sa svjetlosnim vektorom akceleracije nemamo način kako im definirati Freneteovu bazu u točki domene. Razlog zašto one nisu uključene u prethodnu definiciju jest taj što svjetlosni vektor ne može biti dio ortonormirane baze (Propozicija 1.2.21), no tu nam u pomoć uskače upravo Definicija 1.2.22 kojom smo uveli pojam baze Lorentz-Minkowskijevog prostora koja sadrži svjetlosni vektor. Prema tome, pojam Freneteove baze ovih krivulja rješava iduća

Definicija 2.2.4 (Freneteova baza pseudonul i nul krivulja)**.** Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je pseudonul krivulja, ako je to biregularna prostorna krivulja parametrizirana duljinom luka kojoj je vektor akceleracija svjetlosni vektor na cijeloj domeni. Nadalje, za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je nul krivulja, ako je to svjetlosna krivulja pseudo-parametrizirana duljinom luka. Definirajmo sada Freneteovu bazu pseudonul i nul krivulja sa slijedećim. Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ pseudonul ili nul krivulja, tada definiramo normalni vektor krivulje c u točki $t \in I$ kao vektor

$$N(t) := \dot{T}(t).$$

U svakom slučaju, zaključujemo da je, za proizvoljan fiksni $t \in I$, skup $\{T(t), N(t)\}$ sastavljen od svjetlosnog i jediničnog prostornog vektora pa pozivajući se na Propoziciju 1.2.40 slijedi da postoji jedinstveni vektor

$$B(t)$$

za koji je skup

$$\{T(t), N(t), B(t)\}$$

nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ (točnije pss- ili sps-nul baza u $\mathbb{R}^3_1$): vektor $B(t)$ ćemo zvati binormalni vektor krivulje c u točki t te ćemo nul bazu $\{T(t), N(t), B(t)\}$ zvati Freneteova baza krivulje c u točki t. Ovdje sada nema smisla definirati zakrivljenost krivulje c u točki t kao koeficijent uz vektor $N(t)$ pri prikazu vektora $\dot{T}(t)$ u pripadnoj Freneteovoj bazi, jer tu po definiciji uvijek vrijedi jednakost $N(t) = \dot{T}(t)$. Doduše, ima smisla definirati pseudotorziju krivulje c u točki t kao koeficijent $\tau(t)$ koji pri prikazu vektora $\dot{N}(t)$ u pripadnoj Freneteovoj bazi stoji uz svjetlosni vektor te baze različit od $B(t)$, što to nam je eksplicite dano Teoremom 1.2.25 na slijedeći način:

$$\tau(t) = \langle \dot{N}(t), B(t) \rangle.$$

Uvjerimo se ukratko da zaista vrijedi navedena formula za pseudotorziju nul i pseudonul krivulja. Naime, u slučaju da je riječ o nul krivulji, tada su $T(t)$ i $B(t)$ svjetlosni vektori, pa pažljivom primjenom Teorema 1.2.25 slijedi da je

$$\dot{N}(t) = \langle \dot{N}(t), B(t) \rangle\, T(t) + \langle \dot{N}(t), N(t) \rangle\, N(t) + \langle \dot{N}(t), T(t) \rangle\, B(t),$$

dok u slučaju da je riječ o pseudonul krivulji, onda su $N(t)$ i $B(t)$ svjetlosni vektori te pomoću istog Teorema imamo:

$$\dot{N}(t) = \langle \dot{N}(t), T(t) \rangle\, T(t) + \langle \dot{N}(t), B(t) \rangle\, N(t) + \langle \dot{N}(t), N(t) \rangle\, B(t).$$

U svakom slučaju vidimo da zaista vrijedi navedena formula za pseudotoriziju.

Primjer 2.2.5. Budući da smo ovime definirali Freneteovu bazu i pripadne pojmove zakrivljenosti, torzije i pseudotorzije za sve biregularne krivulje (pseudo-)parametrizirane duljinom luka, sada navodimo nekoliko primjera krivulja za koje računamo spomenute vrijednosti (krivulje iz ovog primjera preuzete su iz [12]).

(1) Promotrimo za početak parametrizaciju kružnice radijusa $r > 0$ u xy-ravnini danu s

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c_1(t) = r\left(\cos\frac{t}{r}, \sin\frac{t}{r}, 0\right).$$

Lako provjeravamo da je to prostorna krivulja parametrizirana duljinom luka s prostornim vektorom akceleracije budući da je

$$\dot{c}_1(t) = \left(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r}, 0\right) \quad , \quad \ddot{c}(t) = \frac{1}{r}\left(-\cos\frac{t}{r}, -\sin\frac{t}{r}, 0\right).$$

Prema tome, c_1 je Freneteova krivulja pa možemo računati vektore Freneteove baze te pripadnu zakrivljenost i torziju:

$$\begin{aligned}
\kappa_1(t) &= \|\ddot{c}_1(t)\| = \frac{1}{r},\\
T_1(t) &= \left(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r}, 0\right),\\
N_1(t) &= \frac{\dot{T}_1(t)}{\kappa_1(t)} = \left(-\cos\frac{t}{r}, -\sin\frac{t}{r}, 0\right),\\
B_1(t) &= T_1(t) \times N_1(t) \overset{1.5}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ -\sin t/r & \cos t/r & 0 \\ -\cos t/r & -\sin t/r & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1),\\
\tau_1(t) &= \langle \dot{N}_1(t), B_1(t)\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Zaključujemo: kružnice u xy-ravnini, kao i kružnice euklidskog prostora, imaju konstantnu zakrivljenost i torziju jednaku 0.

(2) Promotrimo sada parametrizaciju hiperbole u yz-ravnini danu s

$$c_2(t) = a\left(0, \operatorname{sh}\frac{t}{a}, \operatorname{ch}\frac{t}{a}\right),$$

za neki parametar $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lako vidimo da je c_2 vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka budući da je $\dot{c}_2(t) = \left(0, \operatorname{ch}\frac{t}{a}, \operatorname{sh}\frac{t}{a}\right)$. Dakle, c_2 je također Freneteova krivulja pa slično prethodnom možemo izračunati:

$$\begin{aligned}
T_2(t) &= \left(0, \operatorname{ch}\frac{t}{a}, \operatorname{sh}\frac{t}{a}\right), & \kappa_2(t) &= \|\ddot{c}_2(t)\| = \frac{1}{a},\\
N_2(t) &= \left(0, \operatorname{sh}\frac{t}{a}, \operatorname{ch}\frac{t}{a}\right), & B_2(t) &= (1,0,0),\\
\tau_2(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Ovo je ponovno krivulja konstantne zakrivljenosti i torzije jednake 0, ali ne parametrizira kružnicu - to je bitno drugačije u odnosu na ono što smo navikli u unitarnom euklidskom prostoru.

(3) Slično ranijem može se pokazati da je krivulja

$$c_3 : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c_3(t) = a\left(0, \operatorname{ch}\frac{t}{a}, \operatorname{sh}\frac{t}{a}\right), a \in \mathbb{R}$$

Freneteova krivulja s prostornim vektorom brzine i vremenskim vektorom akceleracije za koju također imamo

$$\kappa_3 = \frac{1}{a} \quad \text{i} \quad \tau_3 = 0.$$

(4) Navedimo sada primjer pseudonul krivulje. Naime, promotrimo li parametriziranu krivulju

$$c_4 : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c_4(t) = a\left(\frac{t}{a}, \frac{t^2}{a^2}, \frac{t^2}{a^2}\right),$$

za neki $a \in \mathbb{R}$, lako možemo provjeriti da je to prostorna krivulja parametrizirana duljinom luka sa svjetlosnim vektorom akceleracije budući da tu imamo

$$\dot{c}_4(t) = \left(1, \frac{2}{a}\,t, \frac{2}{a}\,t\right) \quad , \quad \ddot{c}_4(t) = \left(0, \frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right).$$

Prema tome, dobro je definiran pojam pripadne Freneteove baze i pseudotorzije pa možemo pisati

$$T_4(t) = \left(1, \frac{2}{a}\,t, \frac{2}{a}\,t\right) \quad \text{i} \quad N_4(t) = \left(0, \frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right).$$

Odavde lako vidimo da je

$$\tau_4(t) = \langle \dot{N}_4(t), B_4(t)\rangle = 0$$

dok svjetlosni vektor $B_4(t)$ po potrebi nalazimo direktnim računom iz jednakosti $\langle T_4(t), B_4(t)\rangle = 0$ i $\langle N_4(t), B_4(t)\rangle = 1$:

$$B_4(t) = -\left(t, \frac{1}{8}(4t^2 - a^2), \frac{1}{8}(4t^2 + a^2)\right).$$

(5) Za kraj navedimo primjer nul krivulje. Prisjetimo se da smo u Primjeru 2.1.5 izveli uvjet kada su obične cilindrične spirale svjetlosne krivulje. Iz tog razloga definirajmo

$$c_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c_5(t) = \frac{1}{a^2}\left(\cos at, \sin at, at\right),$$

za neki parametar $a > 0$. Primijetimo da je ova parametrizirana krivulja zapravo pseudoparametrizirana duljinom luka, što možemo vidjeti budući da je

$$\dot{c}_5(t) = \frac{1}{a}\left(-\sin at, \cos at, 1\right) \quad , \quad \ddot{c}_5(t) = (-\cos at, -\sin at, 0).$$

Prema tome, c_5 je nul krivulja te stoga možemo pisati

$$T_5(t) = \frac{1}{a}\,(-\sin at, \cos at, 1) \quad \text{i} \quad N_5(t) = (-\cos at, -\sin at, 0).$$

Proučavajući sustave dane za vektor $B_5(t)$ relativno lagano možemo pronaći da mora biti

$$B_5(t) = \frac{a}{2}\,(\sin at, -\cos at, -3)$$

pa je pseudotorzija dana s

$$\tau_5(t) = \langle \dot{N}_5(t), B_5(t)\rangle = \frac{a^2}{2}.$$

Idući nam je korak, kao što smo to imali i u unitarom euklidskom prostoru, izvesti Frenet-Serreteove[2] formule za uvedene Freneteove baze. U tu svrhu uvodimo iduće oznake: za proizvoljnu biregularnu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ (pseudo-)parametriziranu duljinom luka definiramo

$$\varepsilon := \langle T, T\rangle \quad \text{i} \quad \delta := \langle N, N\rangle,$$

za svaki $t \in I$. Lako vidimo da su uvedeni brojevi ε i δ elementi skupa $\{-1, 0, 1\}$ (jer vektori T i N u svakom slučaju mogu biti jedino jedinični prostorni, jedinični vremenski ili svjetlsoni vektor) pa su posebno i konstanti na cijeloj domeni I. Koristeći uvedene oznake iskazujemo i dokazujemo najavljeni teorem i to kao prvo u slučaju Freneteovih krivulja; no prije samog teorema potrebno je ustanoviti da su preslikavanja $T, N, B : I \to \mathbb{R}^3_1$ diferencijabilna i to je predmet iduće leme i propozicije.

Lema 2.2.6. Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^3_1$ dva glatka preslikavanja definirana na nekom otvorenom podskupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Tada je i preslikavanje $Z : \Omega \to \mathbb{R}^3_1$ definirano s

$$Z(t) := X(t) \times Y(t)$$

također glatko preslikavanje.

DOKAZ Označimo s X_1, X_2, X_3 odnosno s Y_1, Y_2, Y_3 komponentne funkcije od X i Y respektivno. Sada, prisjetimo li se NAPOMENE 1.2.10 odmah vidimo da je

$$Z = X \times Y = \big(X_2Y_3 - X_3Y_2, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_2Y_1 - X_1Y_2\big).$$

No koristeći činjenicu da je preslikavanje glatko ako i samo ako su joj komponentne funkcije glatke, odavde zaključujemo da je Z glatka funkcija i to je to. □

[2]Joseph Alfred Serret, 1819-1885

Propozicija 2.2.7. Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ Freneteova krivulja, tada su preslikavanja

$$T : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad N : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad B : I \to \mathbb{R}^3_1$$

glatka preslikavanja (pa time i regularne krivulje).

DOKAZ Kao prvo, preslikavanje tangencijalnog vektora $T : I \to \mathbb{R}^3_1$ je očito glatko, jer je c glatko preslikavanje i $T = \dot{c}$. Drugo, da je $N : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatko preslikavanje uvjerit ćemo se nakon što pokažemo da je $t \mapsto \|\dot{T}(t)\|$ glatko preslikavanje $I \to \langle 0, \infty\rangle$. Naime, budući da je c Freneteova krivulja, tada je $\ddot{c}$ prostorni vektor na cijeloj domeni ili je vremenski vektor na cijeloj domeni. U svakom slučaj, odavde se slično dokazu TEOREMA 2.1.12 lako možemo uvjeriti da je preslikavanje

$$t \mapsto \|\dot{T}(t)\| = \sqrt{|\langle \ddot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle|}$$

glatko preslikavanje $I \to \langle 0, \infty\rangle$. Sada, budući da je $t \mapsto \dot{T}(t)$ (očito) glatko preslikavanje, te da je (po definiciji) dano $N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}$ zaključujemo da i $N : I \to \mathbb{R}^3_1$ također mora biti glatko preslikavanje. Za kraj, da je preslikavanje binormalnog vektora $B : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatko preslikavanje vidimo upravo iz definicije preslikavanja ($B = T \times N$) i prethodne LEME 2.2.6, čime završavamo dokaz ove leme. □

Propozicija 2.2.8 (Frenet-Serreteove formule za Freneteove krivulje)**.** Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ Freneteova krivulja, tada na cijeloj domeni krivulje c vrijedi jednakost

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\delta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

i nazivamo ju Frenet-Serreteove formule parametrizirane krivulje c.

DOKAZ Napomenimo na samom početku dokaza da su ovdje ε i δ elementi skupa $\{-1, 1\}$ pa vrijedi $\varepsilon^2 = 1$ i $\delta^2 = 1$ što ćemo prešutno koristiti u kasnijem računu. Neka je c proizvoljna Freneteova krivulja; tada po TEOREMU 1.2.20 odmah imamo slijedeće izraze:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle T,T\rangle\langle \dot{T},T\rangle & \langle N,N\rangle\langle \dot{T},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{T},B\rangle \\ \langle T,T\rangle\langle \dot{N},T\rangle & \langle N,N\rangle\langle \dot{N},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{N},B\rangle \\ \langle T,T\rangle\langle \dot{B},T\rangle & \langle N,N\rangle\langle \dot{B},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{B},B\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon\langle \dot{T},T\rangle & \delta\langle \dot{T},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{T},B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{N},T\rangle & \delta\langle \dot{N},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{N},B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{B},T\rangle & \delta\langle \dot{B},N\rangle & \langle B,B\rangle\langle \dot{B},B\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti uvrstili uvedene oznake ε i δ. Primijetimo da se i $\langle B, B\rangle$ može izraziti pomoću koeficijenata ε i δ: zaista, budući da $\{T, N, B\}$ čini ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^3_1$, tada se ona sastoji od dva prostorna i jednog vremenskog vektora, pa koristeći ekvivalencije

$$\varepsilon = 1 \Longleftrightarrow T \text{ prostorni vektor} \quad \text{i} \quad \delta = 1 \Longleftrightarrow N \text{ prostorni vektor},$$

lako provjeravamo da mora vrijediti jednakost

$$\langle B, B\rangle = -\varepsilon\delta.$$

Prema tome, početne jednakosti sada zapisujemo kao

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\langle \dot{T}, T\rangle & \delta\langle \dot{T}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{T}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{N}, T\rangle & \delta\langle \dot{N}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{N}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{B}, T\rangle & \delta\langle \dot{B}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{B}, B\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo sada koeficijente dobivene matrice - primijetimo da u startu po Definiciji 2.2.3 imamo

$$\dot{T} = \|\dot{T}\|\, N \quad , \quad \delta\langle \dot{T}, N\rangle = \kappa \quad \text{i} \quad -\varepsilon\delta\langle \dot{N}, B\rangle = \tau.$$

Treću vrijednost u matricu uvrštavamo direktno, dok po jedinstvenosti prikaza vektora u bazi iz prve i druge jednakosti slijedi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon\langle \dot{T}, T\rangle & \delta\langle \dot{T}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{T}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{N}, T\rangle & \delta\langle \dot{N}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{N}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{B}, T\rangle & \delta\langle \dot{B}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{B}, B\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \varepsilon\langle \dot{N}, T\rangle & \delta\langle \dot{N}, N\rangle & \tau \\ \varepsilon\langle \dot{B}, T\rangle & \delta\langle \dot{B}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{B}, B\rangle \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Odredimo sada i ostale koeficijente matrice koristeći činjenicu da je $\{T, N, B\}$ ortonormirana baza. Naime, za sve $t \in I$ imamo da je

$$\langle N, N\rangle = 1 \quad \text{i} \quad \langle B, B\rangle = 1$$

pa diferenciranjem obje jednakosti po varijabli t dobivamo:

$$2\langle \dot{N}, N\rangle = 0 \quad \text{i} \quad 2\langle \dot{B}, B\rangle = 0,$$

otkuda zaključujemo da se na dijagonali nalaze samo nule. Isto tako, za sve $t \in I$ imamo da je

$$\langle T, N\rangle = 0 \quad , \quad \langle N, B\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle T, B\rangle = 0,$$

pa diferenciranjem ovih jednakosti po varijabli t imamo:

$$\langle \dot{N}, T\rangle = -\langle \dot{T}, N\rangle \quad , \quad \langle \dot{B}, N\rangle = -\langle \dot{N}, B\rangle \quad \text{i} \quad \langle \dot{B}, T\rangle = -\langle \dot{T}, B\rangle.$$

Konačno, pažljivim iščitavanjem jednakosti (2.3) sada možemo izračunati:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\langle \dot{N}, T\rangle &= (-\varepsilon)\cdot\langle \dot{T}, N\rangle = (-\varepsilon)\cdot(\delta\kappa) = -\varepsilon\delta\kappa,\\
\varepsilon\langle \dot{B}, T\rangle &= (-\varepsilon)\cdot\langle \dot{T}, B\rangle = (-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon\delta\, 0) = 0,\\
\delta\langle \dot{B}, N\rangle &= (-\delta)\cdot\langle \dot{N}, B\rangle = (-\delta)\cdot(-\varepsilon\delta\tau) = \varepsilon\tau.
\end{aligned}$$

Prema tome, uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (2.3) dobivamo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon\langle \dot{T}, T\rangle & \delta\langle \dot{T}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{T}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{N}, T\rangle & \delta\langle \dot{N}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{N}, B\rangle \\ \varepsilon\langle \dot{B}, T\rangle & \delta\langle \dot{B}, N\rangle & -\varepsilon\delta\langle \dot{B}, B\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\delta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon\tau & 0 \end{bmatrix}$$

iz čega slijede tražene formule. □

Idući nam je cilj izvesti Frenet-Serreteove formule i za nul i pseudonul krivulje. Ovdje doduše nailazimo na jedan problem: ne znamo možemo li diferencirati preslikavanja $T, N, B : I \to \mathbb{R}^3_1$ - preciznije, lako to možemo provjeriti za preslikavanja T i N slično kao i u dokazu Propozicije 2.2.7, ali je pitanje preslikavanja B nešto problematičnije. Problem proizlazi iz toga što je egzistencija vektora $B(t)$ (u dokazu Propozicije 1.2.40) izvedena ne sasvim konstruktivno pa ne možemo na neki način direktno izvući traženi zaključak. S druge strane, intuitivno nam se čini kao da bi preslikavanje $B : I \to \mathbb{R}^3_1$ trebalo biti glatko u slučaju da su T i N glatki (obzirom na izvod trećeg svjetlosnog vektora nul baze). Iz tog razloga, sada radimo eksplicitnu konstrukciju trećeg svjetlosnog vektora nul baze kojim ćemo dokazati njegovu glatkoću. Za početak, dokazujemo jednu tehničku lemu,

Lema 2.2.9. Neka je $q : I \to \mathbb{R}^2$ glatko preslikavanje definirano na nekom otvorenom intevalu $I \subseteq \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da preslikavanje q zadovoljava da

$$(\forall t \in I)\; q_1(t)^2 + q_2(t)^2 = 1,$$

gdje su q_1 i q_2 komponentne funkcije preslikavanja q. Tada postoji glatko preslikavanje $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ takvo da je

$$(\forall t \in I)\; q(t) = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big).$$

<u>DOKAZ</u> Napomenimo da je ova lema svojevrsna verzija leme o podizanju puteva, teorema poznatog iz algebarske topologije i teorije homotopije. Za početak izvedimo

kako bi uopće trebalo izgledati preslikavanja ϑ; naime, kada bi ϑ bilo glatko preslikavanje koje zadovoljava traženo svojstvo, tada možemo naći da vrijedi:

$$\begin{aligned}
q_1(t) = \cos\vartheta(t) &\implies q_1'(t) = -\sin\vartheta(t)\cdot\vartheta'(t) \\
&\implies q_1'(t) = -q_2(t)\cdot\vartheta'(t) \\
&\implies q_1'(t)q_2(t) = -q_2(t)^2\cdot\vartheta'(t), \qquad (2.4)\\
q_2(t) = \sin\vartheta(t) &\implies q_2'(t) = \cos\vartheta(t)\cdot\vartheta'(t) \\
&\implies q_2'(t) = q_1(t)\cdot\vartheta'(t) \\
&\implies q_2'(t)q_1(t) = q_1(t)^2\cdot\vartheta'(t), \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

pa oduzimajući jednakosti (2.4) i (2.5) dobivamo

$$\begin{aligned}
\vartheta'(t) &= (q_1(t)^2+q_2(t)^2)\vartheta'(t) = q_1(t)^2\cdot\vartheta'(t) + q_2(t)^2\cdot\vartheta'(t) \\
&= q_2'(t)q_1(t) - q_1'(t)q_2(t),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili činjenicu da je $q_1(t)^2 + q_2(t)^2 = 1$. Prema tome, zaključujemo da ako je ϑ glatko preslikavanje iz iskaza leme, tada ono mora zadovoljavati jednakost $\vartheta' = q_2'q_1 - q_1'q_2$ čime smo ϑ' uspjeli prikazati isključivo preko preslikavanja q. Time inspirirani sada definiramo naše preslikavanje $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ s

$$\vartheta(t) := \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} q_2'(s)q_1(s) - q_1'(s)q_2(s)\,\mathrm{d}s,$$

gdje je $t_0 \in I$ proizvoljna točka intervala i $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ konstanta koju ćemo sada odrediti. Naime, budući da je $q_1(t_0)^2 + q_2(t_0)^2 = 1$, tada koristeći poznata svojstva trigonometrijskih funkcija znamo da postoji jedinstveni $\vartheta_0 \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $\cos\vartheta_0 = q_1(t_0)$ i $\sin\vartheta_0 = q_2(t_0)$ pa biramo upravo taj ϑ_0. Dakle, ϑ je glatko preslikavanje kao antiderivacija glatkog preslikavanja te pošto je $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$ imamo:

$$\big(\cos\vartheta(t_0), \sin\vartheta(t_0)\big) = q(t_0), \qquad (2.6)$$

pokažimo da ta jednakost vrijedi za sve $t \in I$. U tu svrhu definiramo preslikavanja $\Psi_1, \Psi_2 : I \to \mathbb{R}$ s

$$\begin{aligned}
\Psi_1(t) &:= \big\langle q(t), (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))\big\rangle_{\mathrm{E2}} = q_1(t)\cos\vartheta(t) + q_2(t)\sin\vartheta(t), \\
\Psi_2(t) &:= \big\langle q(t), (-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t))\big\rangle_{\mathrm{E2}} = -q_1(t)\sin\vartheta(t) + q_2(t)\cos\vartheta(t),
\end{aligned}$$

gdje $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E2}}$ predstavlja euklidski skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^2$. Istaknimo da su Ψ_1 i Ψ_2 glatka preslikavanja kao kompozicija glatkih preslikavanja te da vrijedi

$$\Psi_1(t_0) = 1 \quad \text{i} \quad \Psi_2(t_0) = 0,$$

što provjeravamo jednostavnim računom koristeći jednakost (2.6). Pokažimo da su preslikavanja Ψ_1 i Ψ_2 zapravo konstantna. To sada provjeravamo direktnim računamo na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
\Psi_1' &= q_1' \cos\circ\vartheta - q_1(\sin\circ\vartheta)\vartheta' + q_2' \sin\circ\vartheta + q_2(\cos\circ\vartheta)\vartheta' \\
&= q_1' \cos\circ\vartheta - q_2' q_1^2 \sin\circ\vartheta + q_1' q_1 q_2 \sin\circ\vartheta + q_2' \sin\circ\vartheta + q_2' q_1 q_2 \cos\circ\vartheta - q_1' q_2^2 \cos\circ\vartheta \\
&= q_1'(1-q_2^2)\cos\circ\vartheta + q_2'(1-q_1^2)\sin\circ\vartheta + q_1' q_1 q_2 \sin\circ\vartheta + q_2' q_1 q_2 \cos\circ\vartheta \\
&= q_1' q_1^2 \cos\circ\vartheta + q_2' q_2^2 \sin\circ\vartheta + q_1' q_1 q_2 \sin\circ\vartheta + q_2' q_1 q_2 \cos\circ\vartheta \\
&= q_1' q_1 (q_1 \cos\circ\vartheta + q_2 \sin\circ\vartheta) + q_2' q_2 (q_2 \sin\circ\vartheta + q_1 \cos\circ\vartheta) \\
&= (q_1' q_1 + q_2' q_2)(q_2 \sin\circ\vartheta + q_1 \cos\circ\vartheta) \\
&= \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)'(q_2 \sin\circ\vartheta + q_1 \cos\circ\vartheta) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili činjenicu da je $\vartheta' = q_2' q_1 - q_1' q_2$, u četvrtoj jednakosti koristili činjenicu da je $q_1^2 + q_2^2 = 1$ te u posljednoj jednakosti činjenicu da je derivacija konstnantne funkcije $q_1^2 + q_2^2$ jednako 0. Sasvim analogno bismo pokazali i da je

$$\begin{aligned}
\Psi_2' &= -q_1' \sin\circ\vartheta - q_1(\cos\circ\vartheta)\vartheta' + q_2 \cos\circ\vartheta - q_2(\sin\circ\vartheta)\vartheta' \\
&= \cdots \\
&= (q_1' q_1 + q_2' q_2)(q_2 \cos\circ\vartheta - q_1 \sin\circ\vartheta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da su Ψ_1 i Ψ_2 konstnatna preslikavanja, to jest vrijedi:

$$\Psi_1 = 1 \quad \text{i} \quad \Psi_2 = 0.$$

Prema tome, imamo da

$$\begin{aligned}
&(\forall t \in I)\ q_1(t)\cos\vartheta(t) + q_2(t)\sin\vartheta(t) = 1 \text{ i da} \\
&(\forall t \in I)\ -q_1(t)\sin\vartheta(t) + q_2(t)\cos\vartheta(t) = 0,
\end{aligned}$$

otkuda množenjem prve jednakosti skalarom $\cos\theta(t)$ i druge jednakosti skalarom $-\sin\theta(t)$ te zbrajanjem dobivamo da

$$(\forall t \in I)\ q_1(t) = \cos\vartheta(t),$$

dok množenjem prve jednakosti skalarom $\sin\theta(t)$ i druge jednakosti skalarom $\cos\theta(t)$ te zbrajanjem dobivamo da

$$(\forall t \in I)\ q_2(t) = \sin\vartheta(t).$$

Time je dovršen dokaz ove leme. $\square$

Teorem 2.2.10. Neka su $A : I \to \mathbb{R}^3_1$ i $C : I \to \mathbb{R}^3_1$ dva preslikavanja definirana na nekom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, takva da je $A(t)$ svjetlosni vektor i $C(t)$ jedinični prostorni vektor za svaki $t \in I$. Tada postoji jedinstveno preslikavanje $B : I \to \mathbb{R}^3_1$ takvo da je skup $\{A(t), B(t), C(t)\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, za svaki $t \in I$. Štoviše, ako su A i C glatka preslikavanja, tada je i B glatko preslikavanje.

DOKAZ Egzistencija i jedinstvenost preslikavanja B direktna je posljedica PROPOZICIJE 1.2.40, dok je prava tvrdnja ovog teorema upravo pitanje glatkoće, stoga pretpostavimo da su A i C glatka preslikavanja. Kao što smo i najavili ranije, ideja ovog dokaza jest konstruirati vektor B pomoću vektora A i C na način iz kojeg će se očitovati njegova glatkoća. Ideja konstrukcije koju ćemo ovdje provesti zasniva se na činjenici da ćemo moći pronaći glatko preslikavanje $p : I \to \mathbb{R}^3_1$ takvo da je $p \in (\operatorname{span} C)^\perp$ i da je p jedinični prostorni vektor na cijeloj svojoj domeni. Pa pronađimo to preslikavanje p. Naime, za početak definiramo preslikavanje

$$q : I \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad q(t) := \frac{1}{\sqrt{C_1(t)^2 + C_2(t)^2}}\big(C_1(t), C_2(t)\big),$$

gdje su C_i komponentne funkcije od C, $i = 1, 2, 3$. Potrebno je uvjeriti se da je ova definicija dobra, a time pokazati i da je preslikavanje q glatko. Naime, budući da je C jedinični prostorni vektor na cijeloj svojoj domeni, tada imamo da je

$$C_1^2 + C_2^2 = C_3^2 + 1 > 0$$

otkuda zaključujemo da je preslikavanje $C_1^2 + C_2^2$ glatko preslikavanje $I \to \langle 0, +\infty\rangle$. Tada je komponiranjem s $x \mapsto \sqrt{x}$ također i $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ glatko preslikavanje $I \to \langle 0, +\infty\rangle$ pa je posebno i $1/\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ glatko preslikavanje $I \to \langle 0, +\infty\rangle$. Stoga zaključujemo: preslikavanje $q : I \to \mathbb{R}^2$ je dobro definirano glatko preslikavanje (kao kompozicija glatkih preslikavanja). Štoviše, lako vidimo da po definiciji preslikavanja q vrijedi:

$$(\forall t \in I)\; q_1(t)^2 + q_2(t)^2 = \frac{C_1^2}{C_1^2 + C_2^2} + \frac{C_2^2}{C_1^2 + C_2^2} = 1.$$

Sada smo u poziciji pozvati se na prethodnu LEMU 2.2.9 otkuda zaključujemo da

$$(\exists \vartheta : I \to \mathbb{R}, \text{glatko preslikavanje})\; q(t) = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big).$$

Konačno, sada definiramo preslikavanje

$$p : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad p(t) := (-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t), 0).$$

Preslikavanje p je očito glatko preslikavanje kao kompozicija glatkih preslikavanja, te je $p(t)$ jedinični prostorni vektor za svaki $t \in I$:

$$\langle p(t), p(t)\rangle = \sin^2\vartheta(t) + \cos^2\vartheta(t) + 0 = 1.$$

Pokažimo još da je zadovoljeno:

$$(\forall t \in I)\; p(t) \in (\operatorname{span} C(t))^{\perp}.$$

Dovoljno je pokazati da je $p(t) \perp C(t)$ za sve $t \in I$ pa stoga računamo:

$$\begin{aligned}
\big\langle p(t), C(t) \big\rangle &= \big\langle \big(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t), 0\big), \big(C_1(t), C_2(t), C_3(t)\big)\big\rangle \\
&= \left[\text{radi jednostavnijeg raspisa uvodimo oznaku: } f := \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\right] \\
&= \left\langle \big(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t), 0\big), f(t) \left(\frac{C_1(t)}{f(t)}, \frac{C_2(t)}{f(t)}, \frac{C_3(t)}{f(t)} \right) \right\rangle \\
&= f(t) \left\langle \big(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t), 0\big), \left(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t), \frac{C_3(t)}{f(t)} \right) \right\rangle \\
&= f(t) \left(-\sin\vartheta(t)\cos\vartheta(t) + \cos\vartheta(t)\sin\vartheta(t) + 0 \cdot \frac{C_3(t)}{f(t)} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdje smo u četvrtom retku iskoristili činjenicu da je $\left(\frac{C_1}{f}, \frac{C_2}{f}\right) = q = (\cos\circ\vartheta, \sin\circ\vartheta)$. Prema tome zaključujemo da smo zaista pronašli traženo preslikavanje $p : I \to \mathbb{R}^3_1$. Koristeći preslikavanja p i C sada ćemo definirati „glatku" ortonormiranu bazu vremenskog potprostora $(\operatorname{span} C)^{\perp}$ na cijeloj domeni I; tada ćemo „glatkim" prikazom vektora B u toj „glatkoj" bazi dokazati traženu tvrdnju teorema. Naime, budući da su $p(t)$ i $C(t)$ dva jedinična prostorna vektora, tada po Propoziciji 1.2.21 znamo da skup $\{p(t), C(t), p(t) \times C(t)\}$ čini ortonormiranu bazu Lorentz-Minkowskijevog prostora pa je vektor $p(t) \times C(t)$ jedinični vremenski vektor ortogonalan na $C(t)$. Prema tome, definiramo li

$$v : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad v(t) := p(t) \times C(t)$$

dobivamo preslikavanje za koje znamo da je glatko po Lemi 2.2.6 te za koje vrijedi da je v jedinični vremenski vektor sadržan u prostoru $(\operatorname{span} C)^{\perp}$ u svakoj točki domene. Sada lako vidimo da skup

$$\{p, v\}$$

čini ortonormiranu bazu vremenskog potprostora $(\operatorname{span} C)^{\perp}$ u svakoj točki intervala I. No, prisjetimo li se dokaza Propozicije 1.2.32, možemo vidjeti da su tada vektori

$$s_1 := p + v \quad \text{i} \quad s_2 := p - v$$

dva nekolinearna svjetlosna vektora u $\mathbb{R}^3_1$, za sve $t \in I$. Preslikavanja $s_1, s_2 : I \to \mathbb{R}^3_1$ su očito glatka kao zbroj dva glatka preslikavanja te je jasno da skup

$$\{s_1, s_2\}$$

također čini bazu vremenskog prostora $(\operatorname{span} C)^{\perp}$ na cijeloj domeni I. Prema tome, budući da je $A(t)$ sadržan u $(\operatorname{span} C(t))^{\perp}$, tada postoje (i jedinstveni su) koeficijenti $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$A(t) = \alpha_1(t)s_1(t) + \alpha_2(t)s_2(t). \tag{2.7}$$

Budući da to možemo napraviti za svaki $t \in I$, zaključujemo da su time dobro definirana preslikavanja

$$\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R};$$

uvjerimo se da su ta preslikavanja glatka. Za početak istaknimo da ćemo s $A_1, A_2, A_3 : I \to \mathbb{R}$ odnosno s $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} : I \to \mathbb{R}$ označavati komponentne funkcije preslikavanja A odnosno s_i, za koja znamo da su glatka (kao komponentne funkcije glatkih preslikavanja), $i \in \{1, 2\}$. Prije samog dokaza glatkoće preslikavanja α_1 i α_2 potrebno nam je istaknuti iduću primjedbu: budući da su $A(t)$, $s_1(t)$ i $s_2(t)$ svjetlosni vektori, tada isto kao i u dokazu PROPOZICIJE 1.2.40 zaključujemo da mora biti $\alpha_1(t) = 0$ ili $\alpha_2(t) = 0$ te (budući da je $A(t) \neq 0$) jedan od tih skalara mora biti različit od 0; navedenu primjedbu možemo koncizno zapisati u obliku ekvivalencije

$$\alpha_1(t) \neq 0 \iff \alpha_2(t) = 0 \tag{2.8}$$

te napomenimo da ta ekvivalencija vrijedi za sve $t \in I$, jer navedenu primjedbu možemo provesti za proizvoljan $t \in I$. Koristeći tu tvrdnju sada možemo dokazati glatkoću preslikavanja α_i, $i \in \{1, 2\}$. U tu svrhu fiksirajmo proizvoljan $t_0 \in I$. Istaknimo da jednakost (2.7) možemo iskazati i po koordinatama, to jest vrijedi:

$$(\forall t \in I)\ A_k(t) = \alpha_1(t)s_{1k}(t) + \alpha_2(t)s_{2k}(t),$$

za svaki $k \in \{1, 2, 3\}$ - upravo iz tih jednakosti izvlačimo glatkoću preslikavanja α_i na nekoj otvorenoj okolini točke $t_0 \in I$. Prvo pokažimo da za oba $i \in \{1, 2\}$ vrijedi:

$$\alpha_i(t_0) \neq 0 \implies \big(\exists \lambda > 0\big)\big(\forall t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle \subseteq I\big)\ \alpha_i(t) \neq 0. \tag{2.9}$$

U tu svrhu fiksirajmo proizvoljan $i \in \{1, 2\}$, označimo s j preostali element skupa $\{1, 2\} \setminus \{i\}$ te pretpostavimo suprotno: dakle, imamo da je $\alpha_i(t_0) \neq 0$ te da za svaki odgovarajući $\lambda > 0$ postoji neki $t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle \subseteq I$ takav da je $\alpha_i(t) = 0$. Posebno, označimo li prirodan broj $n_0 := \lceil \frac{1}{\lambda} \rceil$ (gdje $\lceil \cdot \rceil$ predstavlja strop funkciju), tada imamo i da

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\right) \left(\exists t_n \in \left\langle t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n} \right\rangle\right)\ \alpha_i(t_n) = 0.$$

Sada s jedne strane, koristeći ekvivalenciju (2.8) znamo da $\alpha_i(t_0) \neq 0$ povlači $\alpha_j(t_0) = 0$ pa imamo:

$$A(t_0) = \alpha_i(t_0)s_i(t_0). \tag{2.10}$$

S druge strane, lako vidimo i da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\; A(t_n) = \alpha_j(t_n) s_j(t_n). \tag{2.11}$$

Primijetimo da bismo uzimanjem limesa u ovoj jednakosti uz pomoć prethodne jednakosti (2.10) mogli pokazati da su $s_i(t_0)$ i $s_j(t_0)$ kolinearni, čime bismo došli do kontradikcije; problem je u tome što ne možemo samo tako uzeti limes po n jer ne znamo postoji li $\lim_n \alpha_j(t_n)$. Iz tog razloga činimo slijedeće: budući da je $s_j(t_0)$ svjetlosni vektor, tada mora postojati neki $k \in \{1, 2, 3\}$ za koji je $s_{jk}(t_0) \neq 0$; štoviše, budući da je preslikavanje s_{jk} glatko, tada mora postojati neki $\xi > 0$ takav da je $\langle t_0 - \xi, t_0 + \xi \rangle \subseteq I$ i da je

$$(\forall t \in \langle t_0 - \xi, t_0 + \xi \rangle)\; s_{jk}(t) \neq 0.$$

Posebno, označimo li $n_1 := \max\left\{n_0, \left\lceil \frac{1}{\xi} \right\rceil\right\}$, tada primjećujemo da $n \geq n_1$ povlači da je $t_n \in \langle t_0 - \xi, t_0 + \xi \rangle$, odnosno imamo:

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1)\; s_{jk}(t_n) \neq 0.$$

Posebno sada iz jednakosti (2.11) dobivamo da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1)\; A_k(t_n) = \alpha_j(t_n) s_{jk}(t_n)$$

što sada možemo dijeliti brojem $s_{jk}(t_n) \neq 0$ čime dobivamo da

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1)\; \alpha_j(t_n) = \frac{A_k(t_n)}{s_{jk}(t_n)}.$$

Primijetimo da ovdje sada možemo uzeti limes po n: desna strana jednakosti ima limes po glatkoći preslikavanja A_k i s_{jk} te koristeći tvrdnje da je $(\forall n \geq n_1)\, s_{jk}(t_n) \neq 0$ i da je $\lim_n s_{jk}(t_n) = s_{jk}(t_0) \neq 0$. Dakle, postoji limes i vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_j(t_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_k(t_n)}{s_{jk}(t_n)}\right) = \frac{\lim_n A_k(t_n)}{\lim_n s_{jk}(t_n)} = \frac{A_k(t_0)}{s_{jk}(t_0)} \in \mathbb{R}.$$

Stoga, budući da je $n_1 \geq n_0$, iz (2.11) imamo

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1)\; A(t_n) = \alpha_j(t_n) s_j(t_n),$$

otkuda uzimanjem limesa po n nalazimo:

$$\begin{aligned} A(t_0) &= \lim_{n\to\infty} A(t_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\alpha_j(t_n) s_j(t_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \alpha_j(t_n) \cdot \lim_{n\to\infty} s_j(t_n) \\ &= \frac{A_k(t_0)}{s_{jk}(t_0)}\, s_j(t_0). \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem jednakosti (2.10) te dijeljenjem skalarom $\alpha_i(t_0) \neq 0$ dobivamo upravo

$$s_i(t_0) = \frac{A_k(t_0)}{s_{jk}(t_0)\alpha_i(t_0)}\, s_j(t_0)$$

što po definiciji pokazuje da su $s_i(t_0)$ i $s_j(t_0)$ dva kolinearna svjetlosna vektora, a to je kontradikcija jer smo ranije pokazali da su s_i i s_j dva nekolinearna svjetlosna vektora za sve $t \in I$. Prema tome, pretpostavka je bila kriva i zaključujemo da zaista vrijedi tvrdnja implikacije (2.9) - uporaba te tvrdnje bit će nam esencijalna u dokazu da su α_1 i α_2 glatka preslikavanja. Naime, za naš $t_0 \in I$ nam je po (2.8) jasno da jedan od brojeva

$$\alpha_1(t_0) \quad \text{i} \quad \alpha_2(t_0)$$

mora biti različit od 0, dok drugi broj mora biti jednak 0. Označimo s $i \in \{1, 2\}$ onaj indeks koji je dani broj različit od 0, dok s j onda označimo preostali element skupa $\{1, 2\} \setminus \{i\}$; dakle, imamo:

$$\alpha_i(t_0) \neq 0 \quad \text{i} \quad \alpha_j(t_0) = 0.$$

Tada po tvrdnji implikacije (2.9) znamo da $\exists\lambda > 0$ takav da je $\langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle \subseteq I$ te da je

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle\big)\ \alpha_i(t) \neq 0.$$

Tada prema ekvivalenciji (2.8) zaključujemo da je

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle\big)\ \alpha_j(t) = 0.$$

Prema tome, α_j je očito glatka funkcija na intervalu $\langle t_0-\lambda, t_0+\lambda\rangle$; pokažimo da je i α_i glatka funkcija na nekom otvorenom intervalu oko t_0. Naime, budući da je $\alpha_j(t) = 0$ za $t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle$, tada jednakost (2.7) možemo na tom intervalu zapisati kao

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle\big)\ A(t) = \alpha_i(t)s_i(t); \tag{2.12}$$

koristeći ovu jednakost po koordinatama dokazujemo traženu glatkoću na idući način. Budući da je $s_i(t_0)$ svjetlosni vektor, tada znamo da mora postojati neki $k \in \{1, 2, 3\}$ takav da je $s_{ik}(t_0) \neq 0$ - budući da je s_{ik} posebno i glatko preslikavanje na danom intervalu $\langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle$, tada znamo da mora postojati neki $\mu > 0$ takav da je $\langle t_0 - \mu, t_0 + \mu\rangle \subseteq \langle t_0 - \lambda, t_0 + \lambda\rangle$ i da je

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \mu, t_0 + \mu\rangle\big)\ s_{ik}(t) \neq 0.$$

Konačno, ispisivanjem jednakosti (2.12) po koordinati k na „smanjenom” intervalu zaključujemo da vrijedi

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \mu, t_0 + \mu\rangle\big)\ A_k(t) = \alpha_i(t)s_{ik}(t)$$

pa dijeljenjem s $s_{ik}(t) \neq 0$ dobivamo da je

$$\big(\forall t \in \langle t_0 - \mu, t_0 + \mu\rangle\big)\ \alpha_i(t) = \frac{A_k(t)}{s_{ik}(t)}.$$

Budući da su A_k i s_{ik} glatka preslikavanja na intervalu $\langle t_0 - \mu, t_0 + \mu\rangle$ te da je s_{ik} različito od 0 na tom intervalu, zaključujemo da je i njihov kvocijent glatko preslikavanje odnosno da je α_i glatko preslikavanje na otvorenom intervalu oko t_0. Dakle, time smo pokazali da su preslikavanja

$$\alpha_1 : I \to \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \alpha_2 : I \to \mathbb{R}$$

glatka preslikavanja na otvorenoj okolini točke $t_0 \in I$, pa po proizvoljnosti elementa t_0 zaključujemo da su to dva glatka preslikavanja $I \to \mathbb{R}$. Pokažimo sada da jedno od ta dva preslikavanja mora biti identički jednako 0, dok drugo mora svugdje biti različito od 0 i to konstantnog predznaka na cijeloj domeni. Naime, domenu I možemo raspisati kao disjunktnu uniju na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
I &= \{t \in I \mid \alpha_1(t) > 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_1(t) = 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_1(t) < 0\} \\
&= \{t \in I \mid \alpha_1(t) > 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_2(t) \neq 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_1(t) < 0\} \\
&= \{t \in I \mid \alpha_1(t) > 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_2(t) > 0\} \\
&\qquad\qquad \cup \{t \in I \mid \alpha_2(t) < 0\} \cup \{t \in I \mid \alpha_1(t) < 0\} \\
&= \alpha_1^{-1}\big(\langle 0, +\infty\rangle\big) \cup \alpha_2^{-1}\big(\langle 0, +\infty\rangle\big) \cup \alpha_2^{-1}\big(\langle -\infty, 0\rangle\big) \cup \alpha_1^{-1}\big(\langle -\infty, 0\rangle\big) \\
&= I_1^+ \cup I_2^+ \cup I_2^- \cup I_1^-.
\end{aligned}$$

Komentirajmo ukratko da smo u drugom retku koristili tvrdnju ekvivalencije (2.8), da smo u zadnjem retku samo uveli redom oznake za dobivene skupove te da su skupovi iz raspisa očito međusobno disjunktni. Budući da su preslikavanja α_1 i α_2 glatka te da su skupovi $\langle 0, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 0\rangle$ otvoreni skupovi, zaključujemo da su skupovi $I_i^\pm$, $i = 1, 2$, međusobno disjunktni otvoreni skupovi. No kako je I povezan skup (jer je I otvoreni interval) zaključujemo da je I jednak jednom od ovih skupova, dok su svi ostali skupovi jednaki $\emptyset$. Označimo s $i \in \{1, 2\}$ onaj indeks za koji je

$$I = I_i^\pm,$$

dok s j označimo preostali element skupa $\{1, 2\} \setminus \{i\}$ - tada jasno vidimo da je

$$\alpha_i : I \to \mathbb{R}^\pm \quad i \quad \alpha_j = 0,$$

gdje smo s $\mathbb{R}^+$ označili interval $\langle 0, +\infty\rangle$ i s $\mathbb{R}^-$ interval $\langle -\infty, 0\rangle$. Prema tome, jednakost (2.7) sada možemo zapisati kao

$$A = \alpha_i\, s_i.$$

Sada smo konačno spremni prikazati preslikavanje B kao kompoziciju glatkih preslikavanja. Naime, s jedne strane imamo

$$\langle s_i, s_j\rangle = \langle s_1, s_2\rangle = \langle p+v, p-v\rangle = \langle p,p\rangle + 2\langle p,v\rangle - \langle v,v\rangle = 1+0-(-1) = 2,$$

dok s druge strane, budući budući da je $\alpha_i : I \to \mathbb{R}^{\pm}$ glatko preslikavanje, tada je također i

$$\frac{1}{\alpha_i} : I \to \mathbb{R}^{\pm}$$

glatko preslikavanje. Koristeći te tvrdnje sada smo u poziciji raspisati slijedeće:

$$\begin{aligned}\langle s_i, s_j\rangle = 2 &\implies \left\langle \alpha_i\, s_i, \frac{1}{\alpha_i}\, s_j \right\rangle = 2\\ &\implies \left\langle \alpha_i\, s_i, \frac{1}{2\alpha_i}\, s_j \right\rangle = 1\\ &\implies \left\langle A, \frac{1}{2\alpha_i}\, s_j \right\rangle = 1,\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku iskoristili da je $A = \alpha_i\, s_i$. Prema tome, $\frac{1}{2\alpha_i(t)}\, s_j(t)$ je svjetlosni vektor koji leži u $(\operatorname{span} C(t))^{\perp}$ i koji u pseudoskalarnom produktu s $A(t)$ daje broj 1, dakle skup $\left\{A(t), \frac{1}{2\alpha_i(t)}\, s_j(t), C(t)\right\}$ čini nul bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. Pa to je upravo traženi vektor $B(t)$! Zaista, po Propoziciji 1.2.40 znamo da je $B(t)$ jedinstveni vektor koji zadovoljava to svojstvo, čime imamo jednakost

$$B(t) = \frac{1}{2\alpha_i(t)}\, s_j(t);$$

budući da ovo vrijedi za svaki $t \in I$ te budući da su preslikavanja $\frac{1}{\alpha_i}$ i s_j glatka preslikavanja, tada i B mora biti glatko preslikavanje, i time je ovaj teorem dokazan. $\square$

Korolar 2.2.11. Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ pseudonul ili nul krivulja, tada su preslikavanja

$$T : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad N : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad B : I \to \mathbb{R}^3_1$$

glatka preslikavanja (pa time i regularne krivulje).

DOKAZ Isto kao i u dokazu Propozicije 2.2.7 vidimo da je preslikavanje $T : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatko, a kako je ovdje $N = \dot{T}$ tada je očito i $N : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatko preslikavanje. Konačno, iz definicije preslikavanja B vidimo da sada po prethodnom Teoremu 2.2.10 slijedi da je i ono glatko preslikavanje $I \to \mathbb{R}^3_1$. $\square$

Sada konačno ima smisla promatrati diferencijal preslikavanja B kod pseudonul i nul krivulja pa možemo iskazati i dokazati teorem pripadnih Frenet-Serreteovih formula; ponovimo samo da ćemo isto kao i ranije koristiti oznake $\varepsilon = \langle T, T\rangle$ i $\delta = \langle N, N\rangle$.

Propozicija 2.2.12 (Frenet-Serreteove formule za pseudonul i nul krivulje)**.** Ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ pseudonul ili nul krivulja, tada na cijeloj domeni krivulje c vrijedi jednakost

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \delta\tau & \varepsilon\tau & -\delta \\ -\varepsilon & -\delta\tau & -\varepsilon\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

i nju također nazivamo <u>Frenet-Serreteove formule</u> parametrizirane krivulje c.

<u>DOKAZ</u> Dokaz ovog teorema slijedi sličnim postupkom kao i dokaz PROPOZICIJE 2.2.8, no ovdje ćemo pristupiti svakoj od krivulja individualno, a zatim ćemo ih objediniti u formuli kao iz iskaza. Prvo, pretpostavimo da je c pseudonul krivulja; odmah istaknimo da je tada $\varepsilon = \langle T, T\rangle = 1$ i $\delta = \langle N, N\rangle = 0$. Budući da je ovdje $\{T, N, B\}$ *pss*-nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, tada pažljivom primjenom TEOREMA 1.2.25 dobivamo iduće jednakosti:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \dot{T}, T\rangle & \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle \\ \langle \dot{N}, T\rangle & \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle \\ \langle \dot{B}, T\rangle & \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

Izračunajmo koeficijente dobivene matrice; za početak primijetimo da odmah možemo riješiti prvi redak matrice budući da je po DEFINICIJI 2.2.4 dano $\dot{T} = N$ pa iz jedinstvenosti prikaza vektora u bazi prostora zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{T}, T\rangle & \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle \\ \langle \dot{N}, T\rangle & \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle \\ \langle \dot{B}, T\rangle & \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \langle \dot{N}, T\rangle & \tau & \langle \dot{N}, N\rangle \\ \langle \dot{B}, T\rangle & \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

gdje smo također uvrstili pseudotorziju $\tau = \langle \dot{N}, B\rangle$ (što je dano istom DEFINICIJOM). Preostale koeficijente matrice dalje izvodimo koristeći odnose i svojstva vektora T, N i B danih činjenicom da oni čine *pss*-nul bazu. Slično kao i u dokazu PROPOZICIJE 2.2.8 iz jednakosti

$$\langle N, N\rangle = 0 \quad , \quad \langle B, B\rangle = 0 \quad , \quad \langle T, N\rangle = 0 \quad , \quad \langle N, B\rangle = 1 \quad \text{i} \quad \langle T, B\rangle = 0$$

diferenciranjem po varijabli t dobivamo:

$$\langle \dot{N}, N\rangle = 0\,,\ \langle \dot{B}, B\rangle = 0\,,\ \langle \dot{N}, T\rangle = -\langle \dot{T}, N\rangle\,,\ \langle \dot{B}, N\rangle = -\langle \dot{N}, B\rangle \text{ i } \langle \dot{B}, T\rangle = -\langle \dot{T}, B\rangle.$$

Dalje, pažljivim iščitavanjem jednakosti (2.13) dobivamo:

$$\langle \dot{N}, T\rangle = 0 \quad , \quad \langle \dot{B}, T\rangle = -1 \quad , \quad \langle \dot{B}, N\rangle = -\tau,$$

te konačno uvrštavanjem svih dobivenih vrijednosti dobivamo

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{T}, T\rangle & \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle \\ \langle \dot{N}, T\rangle & \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle \\ \langle \dot{B}, T\rangle & \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix}.$$

No kao što smo i komentirali na početku dokaza, u ovom slučaju imamo $\varepsilon = 1$ i $\delta = 0$ pa vidimo da zapravo vrijedi jednakost

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{T}, T\rangle & \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle \\ \langle \dot{N}, T\rangle & \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle \\ \langle \dot{B}, T\rangle & \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \delta\tau & \varepsilon\tau & -\delta \\ -\varepsilon & -\delta\tau & -\varepsilon\tau \end{bmatrix}$$

što nam upravo daje traženu jednakost iz iskaza; razlog zašto to uopće zapisujemo na ovaj način jest taj što ćemo uskoro vidjeti da ista matrična jednakost vrijedi i za nul krivulje pa je ovo zapravo elegantan način na koji objedinjujemo formule jednog i drugog slučaja. U tu svrhu sada pretpostavimo da je c nul krivulja prostora $\mathbb{R}^3_1$; ovdje pak imamo da je $\varepsilon = \langle T, T\rangle = 0$ i da je $\delta = \langle N, N\rangle = 1$. Budući da je ovdje $\{T, N, B\}$ *sps*-nul baza, tada sasvim analogno koristeći Teorem 1.2.25 i Definiciju 2.2.4 dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle & \langle \dot{T}, T\rangle \\ \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle & \langle \dot{N}, T\rangle \\ \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle & \langle \dot{B}, T\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & \langle \dot{N}, N\rangle & \langle \dot{N}, T\rangle \\ \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle & \langle \dot{B}, T\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Konačno, sasvim analogno bismo pokazali da vrijede jednakosti

$\langle \dot{N}, N\rangle = 0$, $\langle \dot{B}, B\rangle = 0$, $\langle \dot{N}, T\rangle = -\langle \dot{T}, N\rangle$, $\langle \dot{B}, N\rangle = -\langle \dot{N}, B\rangle$ i $\langle \dot{B}, T\rangle = -\langle \dot{T}, B\rangle$,

otkuda nalazimo i

$$\langle \dot{N}, T\rangle = -1 \quad , \quad \langle \dot{B}, T\rangle = 0 \quad , \quad \langle \dot{B}, N\rangle = -\tau.$$

Prema tome, ovdje dobivamo jednakost

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle & \langle \dot{T}, T\rangle \\ \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle & \langle \dot{N}, T\rangle \\ \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle & \langle \dot{B}, T\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno, kako je ovdje $\varepsilon = 0$ i $\delta = 1$, opet vidimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{T}, B\rangle & \langle \dot{T}, N\rangle & \langle \dot{T}, T\rangle \\ \langle \dot{N}, B\rangle & \langle \dot{N}, N\rangle & \langle \dot{N}, T\rangle \\ \langle \dot{B}, B\rangle & \langle \dot{B}, N\rangle & \langle \dot{B}, T\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \delta\tau & \varepsilon\tau & -\delta \\ -\varepsilon & -\delta\tau & -\varepsilon\tau \end{bmatrix}$$

pa zaključujemo da u svakom slučaju vrijede formule iz iskaza propozicije i time je ovaj dokaz gotov. $\square$

2.3 Fundamentalni teoremi krivulja prostora $\mathbb{R}^3_1$

Koristeći Freneteove formule izvedene u PROPOZICIJAMA 2.2.8 i 2.2.12, u ovoj sekciji dokazujemo analogone klasičnih rezultata dokazanih za krivulje u euklidskom trodimenzionalnom prostoru, poimence to su TEOREM EGZISTENCIJE i TEOREM JEDINSTVENOSTI dokazani za krivulje u $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}})$. Njihovi analogoni u $\mathbb{R}^3_1$ neće glasiti sasvim isto, a prije nego što se krenemo baviti njima potrebno je prvo dokazati pripadan analogon TEOREMA INVARIJANTNOSTI kao što je to vrijedilo i za krivulje u euklidskom prostoru. Za početak dokazujemo jednu pomoću lemu.

Lema 2.3.1. Za proizvoljnu Lorentzovu matricu $A \in O_1(3)$ vrijedi:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^3_1)\ (Ax) \times (Ay) = (\det A)\, A(x \times y).$$

DOKAZ Fiksirajmo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^3_1$, tada traženu jednakost jednostavno dokazujemo koristeći svojstva Lorentzovih matrica uz jednakost (1.5). Naime, za proizvoljan $z \in \mathbb{R}^3_1$ imamo:

$$\begin{aligned} \big\langle (Ax) \times (Ay), z \big\rangle &\overset{1.5}{=} \det\big(Ax, Ay, z\big) \\ &= \det\big(Ax, Ay, AA^{-1}z\big) \\ &= \det\big(A \cdot (x, y, A^{-1}z)\big) \\ &\overset{\text{B-C}}{=} (\det A)\ \cdot \det\big(x, y, A^{-1}z\big) \\ &\overset{1.5}{=} (\det A) \big\langle x \times y, A^{-1}z\big\rangle \\ &= (\det A) \big\langle A(x \times y), AA^{-1}z\big\rangle \\ &= \big\langle (\det A)\, A(x \times y), z\big\rangle. \end{aligned}$$

Komentirajmo ukratko: u drugoj smo jednakosti koristili činjenicu da su Lorentzove matrice invertibilne (kao posljedica TEOREMA 1.3.7, vidi stranicu 61), u trećoj smo jednakosti s $(x, y, A^{-1}z)$ označili matricu kojoj stupce redom čine upravo vektori x, y

i $A^{-1}z$ te smo u četvrtoj jednakosti koristili Binet-Cauchyjev teorem. Sada, posebno, uzimanjem na mjesto vektora z kanonske vektore e_1, e_2 i e_3 dobivamo da su vektori $(Ax) \times (Ay)$ i $(\det A)\, A(x \times y)$ jednaki po svakoj koordinati, što dokazuje traženu tvrdnju. $\square$

Teorem 2.3.2 (Teorem invarijantnosti)**.** Za Freneteove krivulje zakrivljenost je invarijantna na kruta i neprava gibanja u $\mathbb{R}^3_1$, te je torzija invarijantna u slučaju da je gibanje kruto, odnosno torzija mijenja predznak ako je gibanje nepravo. Za pseudonul i nul krivulje pseudotorzija je invarijantna na kruta i neprava gibanja u $\mathbb{R}^3_1$.

DOKAZ Neka je,

$$\Phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \Phi(x) = Ax + b,$$

proizvoljno gibanje Lorentz-Minkowskijevog prostora, gdje su $A \in O_1(3)$ i $b \in \mathbb{R}^3_1$. Uzmimo proizvoljnu parametriziranu krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ te pretpostavimo da je ona Freneteova, pseudonul ili nul krivulja. Tada je prema NAPOMENI 2.1.6 preslikavanje

$$f : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad f := \Phi \circ c$$

također parametrizirana krivulja i to isto Freneteova, pseudonul odnosno nul krivulja respektivno. Prema tome, krivulje c i f imaju dobro definiranu Freneteovu bazu T_c, N_c, B_c odnosno T_f, N_f, B_f. Odredimo kako su povezane ove baze; kao prvo primijetimo da je

$$T_f = \dot{f} = A\dot{c} = AT_c \quad \text{i} \quad \dot{T}_f = A\dot{T}_c,$$

gdje smo prvu jednakost dobili primjernom tvrdnje NAPOMENE 2.1.6, dok druga jednakost slijedi iz prve primjenom iste NAPOMENE (uz činjenicu da je T_c također parametrizirana krivulja). Ovakve jednakosti sada izvodimo i za normalne i binormalne vektore krivulja c i f; zbog različitih definicija tom problemu pristupamo u dva slučaja. Prvo za normalni vektor: ako je c Freneteova krivulja, tada je i f Freneteova krivulja te u tom slučaju možemo računati:

$$\begin{aligned} N_f &= \frac{\dot{T}_f}{\sqrt{|\langle \dot{T}_f, \dot{T}_f \rangle|}} = \frac{A\dot{T}_c}{\sqrt{|\langle A\dot{T}_c, A\dot{T}_c \rangle|}} = A\frac{\dot{T}_c}{\sqrt{|\langle \dot{T}_c, \dot{T}_c \rangle|}} = AN_c, \\ \dot{N}_f &= A\dot{N}_c, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili činjenicu da Lorentzove matrice čuvaju Lorentzov pseudoskalarni produkt (TEOREM 1.3.7), dok druga jednakost slijedi iz prve ponovno pomoću NAPOMENE 2.1.6. Ako je c pak psudonul ili nul krivulja, tada je to isto i f pa slično (i jednostavnije) nalazimo da je ovdje

$$N_f = \dot{T}_f = A\dot{T}_c = AN_c \quad , \quad \dot{N}_f = A\dot{N}_c.$$

Konačno, pokušajmo napraviti isto za binormalne vektore. Kada su c i f Freneteove krivulje, tada nalazimo:

$$\begin{aligned} B_f &= T_f \times N_f = (AT_c) \times (AN_c) = (\det A)\, A(T_c \times N_c) = (\det A)\, AB_c, \\ \dot{B}_f &= (\det A)\, A\dot{B}_c, \end{aligned}$$

gdje nam je u prvoj jednakosti u pomoć uskočila pomoćna Lema 2.3.1 (druga jednakost nam zapravo neće trebati, ali ju svejedno ističemo kada već možemo). U slučaju da su c i f psuedonul odnosno nul krivulja, tada je stvar mrvicu kompliciranija zbog prirode definicije binormalnog vektora. Naime, B_c i B_f se definiraju kao jedinstveni svjetlosni vektor za koji $\{T_c, N_c, B_c\}$ odnosno $\{T_f, N_f, B_f\}$ čini nul bazu u $\mathbb{R}^3_1$. Pokažimo da je ovdje i $\{T_f, N_f, AB_c\}$ također nul baza, tada će iz jedinstvenosti nužno slijediti jednakost $B_f = AB_c$. Naime, koristeći izraze $T_f = AT_c$ i $N_f = AN_c$ uz činjenicu da A čuva pseudoskalarni produkt vektora (Teorem 1.3.7) nalazimo da je

$$\begin{aligned} &\langle AB_c, AB_c\rangle = \langle B_c, B_c\rangle = 0 \quad , \quad \langle N_f, AB_c\rangle = \langle AN_c, AB_c\rangle = \langle N_c, B_c\rangle, \\ &\langle T_f, AB_c\rangle = \langle AT_c, AB_c\rangle = \langle T_c, B_c\rangle. \end{aligned}$$

Budući da su $\{T_c, N_c, B_c\}$ i $\{T_f, N_f, B_f\}$ nul baze odavde iščitavamo da su ispunjeni svi uvjeti i da je skup $\{T_f, N_f, AB_c\}$ zaista nul baza prostora $\mathbb{R}^3_1$. Zbog jedinstvenosti takvog vektora (Propozicija 1.2.40) zaključujemo da mora vrijediti jednakost

$$B_f = AB_c.$$

Unatoč tome što nam to neće biti potrebno, napomenimo da ovdje isto imamo $\dot{B}_f = A\dot{B}_c$. Sada smo konačno u poziciji dokazati tražene tvrdnje teorema. Prvo dokažimo tvrdnju vezanu za Freneteove krivulje: pretpostavimo da je c Freneteova krivulja, tada je (kao što smo već komentirali) i f Freneteova krivulja te po ranijim izvodima imamo iduće jednakosti:

$$\begin{aligned} T_f &= AT_c, & \dot{T}_f &= A\dot{T}_c, \\ N_f &= AN_c, & \dot{N}_f &= A\dot{N}_c, \\ B_f &= (\det A)\, AB_c, & \dot{B}_f &= (\det A)\, A\dot{B}_c. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Za c i f su ovdje dobro definirane njihove zakrivljenosti κ_c i κ_f te njihove torzije τ_c i τ_f respektivno; ono što mi trebamo dokazati jest da tu vrijedi jednakost preslikavnaja $\kappa_f = \kappa_c$ te da je ispunjeno

$$\begin{aligned} &\Phi \text{ kruto gibanje} \implies \tau_c = \tau_f, \\ &\Phi \text{ nepravo gibanje} \implies \tau_c = -\tau_f, \end{aligned}$$

a to sve dokazujemo upravo pomoću jednakosti (2.14). Za početak pojednostavimo gornje implikacije: po definicijama iz Sekcije 1.3 nam je jasno da imamo ekvivalencije

$$\begin{aligned}&\Phi \text{ je kruto gibanje} \iff A \in SO_1(3) \iff \det A = 1,\\ &\Phi \text{ je nepravo gibanje} \iff A \in O_1(3) \setminus SO_1(3) \iff \det A = -1,\end{aligned}$$

otkuda zaključujemo da tvrdnje spomenutih implikacija možemo objediniti jednakošću

$$\tau_f = (\det A)\, \tau_c.$$

Tražene jednakosti sada dokazujemo direktnim računom polazeći od formula danih Definicijom 2.2.3:

$$\begin{aligned}\kappa_f &= \langle N_f, N_f\rangle\langle \dot{T}_f, N_f\rangle = \langle AN_c, AN_c\rangle\langle A\dot{T}_c, AN_c\rangle\\ &= \langle N_c, N_c\rangle\langle \dot{T}_c, N_c\rangle\\ &= \kappa_c,\\ \tau_f &= \langle B_f, B_f\rangle\langle \dot{N}_f, B_f\rangle = \langle (\det A)\, AB_c, (\det A)\, AB_c\rangle\langle A\dot{N}_c, (\det A)\, AB_c\rangle\\ &= (\det A)^3\langle B_c, B_c\rangle\langle \dot{N}_c, B_c\rangle\\ &= (\det A)\, \tau_c.\end{aligned}$$

Komentirajmo samo da smo u zadnjoj jednakosti koristili činjenicu da je $\det A = \pm 1$ (to je posljedica Teorema 1.3.7, vidi stranicu 61) pa je posebno i $(\det A)^3 = \det A$. Prema tome, zaključujemo da tvrdnja teorema zaista vrijedi u slučaju Freneteove krivulje. Pretpostavimo sada da je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ pseudonul ili nul krivulja, tada je f opet ista takva krivulje te po ranijim izvodima imamo jednakosti:

$$\begin{aligned}T_f &= AT_c, & \dot{T}_f &= A\dot{T}_c,\\ N_f &= AN_c, & \dot{N}_f &= A\dot{N}_c,\\ B_f &= AB_c, & \dot{B}_f &= A\dot{B}_c.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Za c i f su dobro definirana preslikavanja pseudotorzije τ_c i τ_f respektivno pa koristeći njihove formule dane Definicijom 2.2.4 nalazimo:

$$\tau_f = \langle \dot{N}_f, B_f\rangle = \langle A\dot{N}_c, AB_c\rangle = \langle \dot{N}_c, B_c\rangle = \tau_c$$

što je upravo ono što smo i trebali pokazati i time je zaključen dokaz ovog teorema. $\square$

Idući nam je cilj dokazati teorem egzistencije za Lorentz-Minkowskijev prostor - kao i u euklidskom prostoru, taj teorem dokazujemo rješavajući pripadni sustav linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda pa iz tog razloga bez dokaza navodimo idući

Teorem 2.3.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te pretpostavimo da su $A : I \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i $b : I \to \mathbb{R}^n$ dva glatka preslikavanja. Tada

$$\begin{aligned}&(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)(\exists! x : I \to \mathbb{R}^n \text{ glatko preslikavanje})\\ &x(t_0) = x_0 \quad \text{i} \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \text{ za sve } t \in I.\end{aligned}$$

Teorem 2.3.4 (Teorem egzistencije za Freneteove krivulje)**.** Neka su $\kappa > 0$ i τ dva glatka preslikavanja $I \to \mathbb{R}$, za neki otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada postoje tri Freneteove krivulje $I \to \mathbb{R}^3_1$ međusobno različitog tipa[3] koje imaju zakrivljenst κ i torziju τ.

DOKAZ Istaknimo da ovaj iskaz ima smisla samo za Freneteove krivulje jer smo jedino za njih definirali pojam zakrivljenosti i torzije. Također, dokaz ovog teorema analogan je dokazu takvog teorema u euklidskom prostoru pa će postupak biti relativno isti. Za početak, primijetimo da kada bi $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ bila Freneteova krivulja sa zakrivljenošću κ i torzijom τ, tada bi ona po PROPOZICIJI 2.2.8 morala zadovoljavati sustav

$$\begin{cases} \dot{c} = T \\ \dot{T} = \kappa N \\ \dot{N} = -\varepsilon\delta\kappa T + \tau B \\ \dot{B} = \varepsilon\tau N \end{cases}, \tag{2.16}$$

gdje su ε i δ konstante koje ovise o tipu Freneteove krivulje. Inspirirani ovim diferencijalnim jednadžbama uz pomoć TEOREMA 2.3.3 dokazat ćemo egzistenciju tri tražene krivulje; dokaz za svaku od ove tri krivulje provodit ćemo paralelno ovisno o konstantnama ε i δ za koje znamo da mora biti

$$(\varepsilon, \delta) \in \big\{(-1, 1), (1, -1), (1, 1)\big\}.$$

Stoga fiksirajmo neki izbor (ε, δ) te definirajmo preslikavanje $A : I \to M_{12\times 12}(\mathbb{R})$ s

$$A(t) := \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \kappa I_3 & 0_3 \\ 0_3 & -\varepsilon\delta\kappa I_3 & 0_3 & \tau I_3 \\ 0_3 & 0_3 & \varepsilon\tau I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

[3] U smislu da nemaju istovremeno isti tip vektora brzine i akceleracije

gdje smo s 0_3 i I_3 simbolični označili 3×3 blok nulmatricu i jediničnu matricu respektivno. Istaknimo da je preslikavanje A očito glatko jer su joj komponentne funkcije glatke. Također definiramo $x_0 \in \mathbb{R}^{12}$ kao

$$x_0 := (0, 0, 0, a_1, a_2, a_3),$$

gdje su $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3_1$ vektori koje ćemo izabrati ovisno o izboru konstanti (ε, δ), i dodatno fiksirajmo proizvoljan $t_0 \in I$. Tada po prethodnom TEOREMU 2.3.3 znamo da postoji jedinstveno glatko preslikavanje $x : I \to \mathbb{R}^{12}$ takvo da je

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x} = Ax \end{cases}.$$

Sada definiramo preslikavanja $c, T, N, B : I \to \mathbb{R}^3_1$ kao

$$c := (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad T := (x_4, x_5, x_6) \quad , \quad N := (x_7, x_8, x_9) \quad , \quad B := (x_{10}, x_{11}, x_{12}),$$

gdje su x_i komponentne funkcije od x, $i = 1, \ldots, 12$, pa prema tome možemo reći da su c, T, N i B glatke funkcije. Pažljivim iščitavanjem odavde vidimo da ta četiri preslikavanja upravo zadovoljavaju sustav (2.16)! Ono što mi sada želimo postići jest da je c Freneteova krivulja te da $\{T, N, B\}$ čine njenu Freneteovu bazu - tada će upravo iz tog sustava slijediti da su zakrivljenost i torzija od c upravo κ i τ. To sve postižemo pogodnim izborom početnog uvjeta a_1, a_2 i a_3 na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon, \delta) = (-1, 1) &\implies a_1 = e_3, a_2 = e_1, a_3 = e_2, \\
(\varepsilon, \delta) = (1, -1) &\implies a_1 = e_2, a_2 = e_3, a_3 = e_1, \\
(\varepsilon, \delta) = (1, 1) \quad &\implies a_1 = e_2, a_2 = e_1, a_3 = e_3.
\end{aligned}$$

Naime, jasno možemo vidjeti da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ (PRIMJER 1.2.19) gdje u svakom slučaju vrijedi $a_1 \times a_2 = a_3$. Direktno možemo provjeriti da je u svakom slučaju $\langle a_1, a_1 \rangle = \varepsilon$ i $\langle a_2, a_2 \rangle = \delta$, otkuda isto kao i u dokazu PROPOZICIJE 2.2.8 također nalazimo i da je

$$\langle a_3, a_3 \rangle = -\varepsilon\delta.$$

Pokažimo sada da je $\{T, N, B\}$ ortonormirana baza u svakoj točki domene I i to konstantno istog tipa kao i $\{a_1, a_2, a_3\}$ (tipa u smislu *ppv-*, *pvp-* ili *vpp*-ortonormirane baze). Naime, jasno je da to vrijedi u točki t_0 pošto je $\{T(t_0), N(t_0), B(t_0)\} = \{a_1, a_2, a_3\}$ pa imamo

$$\left.\begin{bmatrix} \langle T, T \rangle \\ \langle N, N \rangle \\ \langle B, B \rangle \\ \langle T, N \rangle \\ \langle N, B \rangle \\ \langle B, T \rangle \end{bmatrix}\right|_{t=t_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \\ -\varepsilon\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Štoviše, jasno nam je da je preslikavanje $I \to M_{6\times 1}(\mathbb{R})$

$$t \mapsto \begin{bmatrix}\langle T,T\rangle & \langle N,N\rangle & \langle B,B\rangle & \langle T,N\rangle & \langle N,B\rangle & \langle B,T\rangle\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

glatko preslikavanje (jer su joj komponentne funkcije glatke) pa direktnim računom uz uporabu jednakosti iz sustava (2.16) dobivamo da vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\langle T,T\rangle\\ \langle N,N\rangle\\ \langle B,B\rangle\\ \langle T,N\rangle\\ \langle N,B\rangle\\ \langle B,T\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\kappa & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\varepsilon\delta\kappa & 2\tau & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon\tau & 0\\ -\varepsilon\delta\kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 & \tau\\ 0 & \varepsilon\tau & \tau & 0 & 0 & -\varepsilon\delta\kappa\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\tau & \kappa & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle T,T\rangle\\ \langle N,N\rangle\\ \langle B,B\rangle\\ \langle T,N\rangle\\ \langle N,B\rangle\\ \langle B,T\rangle\end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

No primijetimo da je $t \mapsto \begin{bmatrix}\varepsilon & \delta & -\varepsilon\delta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ također glatko preslikavanje $I \to M_{6\times 1}(\mathbb{R})$ koje u točki t_0 zadovoljava početni uvjet (2.17) te koje na cijeloj domeni I zadovoljava jednadžbu (2.18). Budući da je matrica tog sustava glatko preslikavanje $I \to M_{6\times 6}(\mathbb{R})$, tada ponovnom uporabom Teorema 2.3.3 zaključujemo da je to rješenje mora biti jedinstveno i imamo jednakost preslikavanja

$$\begin{bmatrix}\langle T,T\rangle\\ \langle N,N\rangle\\ \langle B,B\rangle\\ \langle T,N\rangle\\ \langle N,B\rangle\\ \langle B,T\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon\\ \delta\\ -\varepsilon\delta\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Prema tome, zaključujemo da je $\{T, N, B\}$ zaista ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ u svakoj točki domene I te da je konstantno istog tipa kao i $\{a_1, a_2, a_3\}$. Pokažimo da je također $B = T \times N$ na cijeloj domeni I; naime, jasno nam je da je B jedinični vektor i to onaj koji je koji je ortogonalan na T i N, stoga je $B \in (\operatorname{span}\{T, N\})^\perp$ pa budući da je taj prostor jednodimenzionalan slijedi $B \in \operatorname{span} T \times N$ (Propozicija 1.2.37). No budući da su T i N jedinični vektori, tada je i $T \times N$ jedinični vektor (Propozicija 1.2.21) pa su prema tome B i $T \times N$ dva kolinearna jedinična vektora otkuda nužno imamo $T \times N = \pm B$ (vidi Napomenu 1.2.6), odnosno dano je

$$\langle T \times N, B\rangle = \pm\langle B, B\rangle \in \{\varepsilon\delta, -\varepsilon\delta\} = \{-1, 1\}.$$

Koristeći Lemu 2.2.6 lako možemo vidjeti da je preslikavanje $t \mapsto \langle T \times N, B\rangle$ glatko preslikavanje $I \to \{-1, 1\}$ pa budući da imamo

$$\langle T(t_0) \times N(t_0), B(t_0)\rangle = \langle a_1 \times a_2, a_3\rangle = \langle a_3, a_3\rangle = -\varepsilon\delta,$$

po neprekidnosti zaključujemo da na cijelom intervalu I mora vrijediti

$$B = T \times N.$$

Uvjerimo se sada konačno da je c Freneteova krivulja te da je $\{T, N, B\}$ pripadna Freneteova baza. Koristeći jednakosti iz (2.16) sada lako vidimo da je

$$\begin{aligned}
\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle &= \langle T, T \rangle = \varepsilon, \\
\langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle &= \langle \dot{T}, \dot{T} \rangle = \langle \kappa N, \kappa N \rangle = \kappa^2 \delta,
\end{aligned}$$

pa budući da je $\kappa > 0$ po Definiciji 2.2.3 vidimo da je u svakom od slučajeva

$$(\varepsilon, \delta) = (-1, 1) \quad , \quad (\varepsilon, \delta) = (1, -1) \quad , \quad (\varepsilon, \delta) = (1, 1)$$

preslikavanje c zaista Freneteova krivulja. Tada su dobro definirani pripadni tangencijalni vektor T_c, normalni vektor N_c i binormalni vektor B_c za koje se ispostavlja da vrijedi:

$$\begin{aligned}
T_c &= \dot{c} = T, \\
N_c &= \frac{\dot{T}_c}{\|\dot{T}_c\|} = \frac{\dot{T}}{\sqrt{|\langle \dot{T}, \dot{T} \rangle|}} = \frac{\dot{T}}{\sqrt{|\kappa^2 \langle N, N \rangle|}} = \frac{\dot{T}}{|\kappa| \sqrt{|\delta|}} = \frac{1}{\kappa} \dot{T} = N, \\
B_c &= T_c \times N_c = T \times N = B,
\end{aligned}$$

gdje smo u računu opet koristili jednakosti iz (2.16), činjenicu da je $\kappa > 0$ te dokazano svojstvo da je $T \times N = B$. Prema tome, zaključujemo da je T tangencijalni, N normalni i B binormalni vektor krivulje c te da je $\{T, N, B\}$ zaista Freneteova baza krivulje c. Konačno, kako je c Freneteova krivulja, tada su za c dobro definirana preslikavanja zakrivljenosti κ_c i torzije τ_c; budući da se κ_c i τ_c definiraju kao koeficijenti uz određeni vektor pri prikazu vektora u bazi te budući da je prikaz u bazi jedinstven, tada iz jednakosti

$$\dot{T} = \kappa N \quad \text{i} \quad \dot{N} = -\varepsilon \delta \kappa T + \tau B$$

slijedi da mora biti

$$\kappa_c = \kappa \quad \text{i} \quad \tau_c = \tau$$

što zaključuje dokaz egzistencije za svaki od slučajeva

$$(\varepsilon, \delta) \in \big\{(-1, 1), (1, -1), (1, 1)\big\}.$$

$\square$

Teorem 2.3.5 (Teorem egzistencije za pseudonul i nul krivulje)**.** Neka je $\tau : I \to \mathbb{R}$ glatko preslikavanje, za neki otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada postoje dvije parametrizirane krivulje s pseudotorzijom τ, jedna od kojih je pseudonul krivulja, a druga nul krivulja.

DOKAZ Dokaz ovog teorema sličan je dokazu prethodnog TEOREMA EGZISTENCIJE 2.3.4 i stoga ovdje izostavljamo neke detalje koji se ponavljaju u oba dokaza. Slično kao i ranije, dokaz egzistencije tražene pseudonul i nul krivulje provodimo paralelno, ovisno o slučaju uzimamo koeficijente

$$(\varepsilon, \delta) \in \big\{(-1,1),(1,-1),(1,1)\big\}.$$

Neovisno o izboru definiramo preslikavanje

$$A : I \to M_{12\times 12}(\mathbb{R}) \quad , \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \delta\tau I_3 & \varepsilon\tau I_3 & -\delta I_3 \\ 0_3 & -\varepsilon I_3 & -\delta\tau I_3 & -\varepsilon\tau I_3 \end{bmatrix}$$

koje je očito glatko, te isto tako fiksiramo proizvoljan $t_0 \in I$ i definiramo

$$x_0 := (0,0,0,a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^{12},$$

gdje su vektori $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3_1$ određeni na slijedeći način:

$$\begin{aligned} (\varepsilon,\delta) = (1,0) &\implies a_1 = (1,0,0),\ a_2 = (0,0.5,0.5),\ a_3 = (0,1,-1), \\ (\varepsilon,\delta) = (0,1) &\implies a_1 = (0,0.5,0.5),\ a_2 = (1,0,0),\ a_3 = (0,1,-1). \end{aligned}$$

Prema PRIMJERU 1.2.23 znamo da skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ čini nul bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$ (preciznije, pss- odnosno sps-nul bazu) te zapravo direktnim računom možemo provjeriti da u svakom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_1\rangle = \varepsilon \quad &, \quad \langle a_2, a_2\rangle = \delta \quad , \quad \langle a_3, a_3\rangle = 0, \\ \langle a_1, a_2\rangle = 0 \quad &, \quad \langle a_2, a_3\rangle = \varepsilon \quad , \quad \langle a_3, a_1\rangle = \delta. \end{aligned}$$

Sada prema TEOREMU 2.3.3 zaključujemo da postoji jedinstveno glatko preslikavanje $x : I \to \mathbb{R}^{12}$ koje zadovoljava sustav

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x} = Ax \end{cases}$$

Odavde definiramo glatka preslikavanja $c, T, N, B : I \to \mathbb{R}^3_1$

$$c := (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad T := (x_4, x_5, x_6) \quad , \quad N := (x_7, x_8, x_9) \quad , \quad B := (x_{10}, x_{11}, x_{12}),$$

gdje su x_i komponentne funkcije od x, $i = 1, \dots, 12$. Pažljivim iščitavanjem odavde vidimo da ova četiri preslikavanja zadovoljavaju jednadžbe:

$$\begin{cases} \dot{c} = T \\ \dot{T} = N \\ \dot{N} = \delta\tau T + \varepsilon\tau N - \delta B \\ \dot{B} = -\varepsilon T - \delta\tau N - \varepsilon\tau B \end{cases} \tag{2.19}$$

Budući da je $\{T(t_0), N(t_0), B(t_0)\} = \{a_1, a_2, a_3\}$, tada iz ranijih jednakosti dobivamo

$$\left.\begin{bmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle N,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle N,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \end{bmatrix}\right|_{t=t_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

a primijetimo da glatko preslikavanje preslikavanje $I \to M_{6\times 1}(\mathbb{R})$

$$t \mapsto \begin{bmatrix} \langle T,T\rangle & \langle N,N\rangle & \langle B,B\rangle & \langle T,N\rangle & \langle N,B\rangle & \langle B,T\rangle \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

također riješava i jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle N,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle N,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon\tau & 0 & 2\delta\tau & -2\delta & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon\tau & 0 & -2\delta\tau & -2\varepsilon \\ \delta\tau & 1 & 0 & \varepsilon\tau & 0 & -\delta \\ 0 & -\delta\tau & -\delta & -\varepsilon & 0 & \delta\tau \\ -\varepsilon & 0 & 0 & -\delta\tau & 1 & -\varepsilon\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle N,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle N,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

što provjeravamo direktnim koristeći jednakosti iz sustava (2.19). Ponovno primijetimo da glatko preslikavanje $t \mapsto \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta & 0 & 0 & \varepsilon & \delta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ u točki t_0 također zadovoljava početni uvjet (2.20) i zadovoljava jednadžbu (2.21) koje na cijeloj domeni I (što provjeravamo direktnim računom koristeći činjenicu da je u svakom slučaju $\varepsilon \cdot \delta = 0$). Sada ponovnom uporabom tvrdnje jedinstvenosti Teorema 2.3.3 zaključujemo da vrijedi jednakost preslikavanja

$$\begin{bmatrix} \langle T,T\rangle \\ \langle N,N\rangle \\ \langle B,B\rangle \\ \langle T,N\rangle \\ \langle N,B\rangle \\ \langle B,T\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Ovo pokazuje da je $\{T, N, B\}$ nul baza prostora $\mathbb{R}_1^3$ (točnije, *pss*- ili *sps*-nul baza, ovisno o slučaju). Sada direktnim računom jasno vidimo da je c pseudonul odnosno nul krivulja:

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle &= \langle T, T \rangle = \varepsilon, \\ \langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle &= \langle \dot{T}, \dot{T} \rangle = \langle N, N \rangle = \delta, \end{aligned}$$

čime su dobro definirani tangencijalni vektor T_c, normalni vektor N_c i binormalni vektor B_c krivulje c. Za T_c i N_c odmah nalazimo jednakosti:

$$\begin{aligned} T_c &= \dot{c} = T, \\ N_c &= \dot{T}_c = \dot{T} = N, \end{aligned}$$

dok budući da su B i B_c jedinstveni vektori koji dopunjuju skup $\{T, N\} = \{T_c, N_c\}$ do *pss*- odnosno *sps*-nul baze, zaključujemo da je i $B_c = B$. Prema tome, $\{T, N, B\}$ čini Freneteovu bazu krivulje c pa budući da po (2.19) imamo jednakost

$$\dot{N} = \delta\tau T + \varepsilon\tau N - \delta B,$$

tada po Definiciji 2.2.4 zaključujemo da u svakom slučaju τ mora biti pseudotorzija krivulje c i time smo dobili traženu egzistenciju.

□

Radi jednostavnijeg i elegantnijeg iskaza i dokaza teorema jedinstvenosti uvodimo iduće pojmove.

Definicija 2.3.6. Za dvije Freneteove krivulje $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}_1^3$ kažemo da su iste parametrizirane krivulje, ako postoji kruto gibanje Φ prostora $\mathbb{R}_1^3$ takvo da je $c_1 = \Phi \circ c_2$. Slično, za dvije pseudonul ili nul krivulje $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}_1^3$ kažemo da su iste parametrizirane krivulje, ako postoji gibanje Φ prostora $\mathbb{R}_1^3$ takvo da je $c_1 = \Phi \circ c_2$.

Jasno nam je da od pet krivulja izvedenih u dokazima egzistencije nijedne dvije nisu iste parametrizirane krivulje, budući da bi inače po Napomeni 2.1.6 one morale imati isti tip vektora brzine i akceleracije. Sada dokazujemo da su to jedinstvene krivulje za dana preslikavanja zakrivljenosti i torzije odnosno pseudotorzije.

Teorem 2.3.7 (Teorem jedinstvenosti)**.** Neka su $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}_1^3$ dvije parametrizirane krivulje takve da su c_1 i c_2 ili Freneteove krivulje istog tipa[4] ili obje pseudonul krivulje ili obje nul krivulje. Tada vrijedi: ako c_1 i c_2 imaju istu zakrivljenost i torziju odnosno ako imaju istu pseudotorziju (ovisno o slučaju), tada su c_1 i c_2 iste parametrizirane krivulje.

[4]Dakle, c_1 i c_2 imaju isti tip vektora brzine i akceleracije

DOKAZ Neka su c_1 i c_2 krivulje kao iz iskaza teorema, fiksirajmo proizvoljan $t_0 \in I$ te označmo s T_1, N_1, B_1 odnosno s T_2, N_2, B_2 pripadnu Freneteovu bazu krivulja c_1 i c_2. Tada definiramo linearno preslikavanje $\phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ na bazi $\{T_1(t_0), N_1(t_0), B_1(t_0)\}$ s

$$\phi\big(T_1(t_0)\big) = T_2(t_0) \quad , \quad \phi\big(N_1(t_0)\big) = N_2(t_0) \quad , \quad \phi\big(B_1(t_0)\big) = B_2(t_0).$$

Uočimo da je tada ϕ zapravo Lorentzova transformacija, a to vidimo primjenom TEOREMA 1.3.3 budući je preslikavanje ϕ linearno preslikavanje koje čuva Lorentzov pseudoskalarni produkt na danoj bazi. Štoviše, primijetimo da je ϕ posebno specijalna Lorentzova transformacija u slučaju Freneteovih krivulja - to lagano provjeravamo računom koristeći formulu (1.5):

$$\begin{aligned}\det \phi &= \frac{\det\big(T_2(t_0), N_2(t_0), B_2(t_0)\big)}{\det\big(T_1(t_0), N_1(t_0), B_1(t_0)\big)} \overset{1.5}{=} \frac{\big\langle T_2(t_0) \times N_2(t_0), B_2(t_0)\big\rangle}{\big\langle T_1(t_0) \times N_1(t_0), B_1(t_0)\big\rangle} \\ &= \frac{\big\langle B_2(t_0), B_2(t_0)\big\rangle}{\big\langle B_1(t_0), B_1(t_0)\big\rangle} = 1.\end{aligned}$$

U svakom slučaju, jasno nam je da je ovdje dobro definirano gibanje Lorentz-Minkowskijevog prostora

$$\Phi : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \Phi(x) := \phi(x) - \phi(c_1(t_0)) + c_2(t_0)$$

čime definiramo preslikavanje

$$c_3 : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c_3 := \Phi \circ c_1$$

za koje znamo da je parametrizirana krivulja i to istog tipa kao krivulja c_1 (u smislu da kada je c_1 Freneteova krivulja, pseudonul ili nul krivulja, tada je to isto i c_3, jer imaju isti tip vektora brzine i akceleracije). Štoviše, po TEOREMU INVARIJANTNOSTI 2.3.2 znamo da tada c_3 i c_1 (pa onda i c_2) moraju imati istu zakrivljenost i torziju odnosno pseudotorziju. Pokažimo da je $c_2 = c_3$; u tu svrhu označimo s T_3, N_3 i B_3 vektore Freneteove baze od c_3. Naime, s jedne strane, direktnim računom nalazimo da je (po konstrukciji)

$$\begin{aligned}&c_3(t_0) = \phi(c_1(t_0)) - \phi(c_1(t_0)) + c_2(t_0) = c_2(t_0),\\ &T_3(t_0) = \phi(T_1(t_0)) = T_2(t_0),\\ &N_3(t_0) = \phi(N_1(t_0)) = N_2(t_0),\\ &B_3(t_0) = \phi(B_1(t_0)) = B_2(t_0),\end{aligned}$$

gdje smo u računu koristili formule (2.14) i (2.15) iz dokaza TEOREMA INVARIJANTNOSTI. No, s druge strane, po Frenet-Serreteovim formulama (PROPOZICIJE 2.2.8 i 2.2.12) lako vidimo da glatka preslikavanja $I \to \mathbb{R}^{12}$

$$(c_2, T_2, N_2, B_2) \quad \text{i} \quad (c_3, T_3, N_3, B_3)$$

zadovoljavaju istu običnu diferencijalnu jednadžbu $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ na I, za

$$A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \kappa I_3 & 0_3 \\ 0_3 & -\varepsilon\delta\kappa I_3 & 0_3 & \tau I_3 \\ 0_3 & 0_3 & \varepsilon\tau I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \delta\tau I_3 & \varepsilon\tau I_3 & -\delta I_3 \\ 0_3 & -\varepsilon I_3 & -\delta\tau I_3 & -\varepsilon\tau I_3 \end{bmatrix},$$

ovisno o slučaju (jer imaju istu zakrivljenost i torziju odnosno pseudotorziju). Prema tome, kako zadovoljavaju i isti početni uvjet te jednadžbe u točki $t_0 \in I$, po Teoremu 2.3.3 zaključujemo da ta dva preslikavanja moraju biti jednaka pa posebno imamo $c_3 = c_2$, odnosno

$$\Phi \circ c_1 = c_2$$

pa su c_1 i c_2 iste parametrizirane krivulje čime je ovaj dokaz zaključen. □

Za kraj ovog poglavlja komentirajmo kako bismo pristupili promatranju proizvoljnih krivulja prostora $\mathbb{R}^3_1$. Za početak uzmimo da je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ vremenska krivulja. Tada prvo nalazimo njenu reparametrizaciju duljinom luka $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^3_1$; budući da je onda $\tilde{c}$ vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka, onda je ona zapravo Freneteova krivulja pa su za nju dobro definirana preslikavanja $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B} : J \to \mathbb{R}^3_1$ i $\tilde{\kappa}, \tilde{\tau} : J \to \mathbb{R}$. U tom slučaju definiramo Freneteovu bazu, zakrivljenost i torziju krivulje c kao kompozicije

$$T := \tilde{T} \circ \varphi^{-1} \quad , \quad N := \tilde{N} \circ \varphi^{-1} \quad , \quad B := \tilde{B} \circ \varphi^{-1}$$
$$\kappa := \tilde{\kappa} \circ \varphi \quad , \quad \tau := \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}.$$

Ovdje se slično kao i u euklidskom trodimenzionalnom prostoru mogu izvesti formule za κ i τ preko derivacija preslikavanja c. Slično također postupamo i za prostorne krivulje, ali tu reparametrizaciju duljinom luka promatramo po restrikcijama domene na kojima je ona konstantnog tipa vektora akceleracije. Ovdje dalje postupamo analogno ranijim diskusijama iz ovog poglavlja, no to nam u ovom radu neće biti posebno bitno pa ćemo stvar ostaviti na tome.

Poglavlje 3

Plohe Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$

U ovom poglavlju cilj nam je obraditi pojam plohe u Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ te proučiti geometrijska svojstva ploha inducirana s metrikom $\langle\ ,\ \rangle$. Sam pojam plohe, pa tako i pojmove tangencijalne ravnine, glatkih preslikavanja na plohama i njihovih derivacija glasit će sasvim isto kao i u euklidskom prostoru, jer te definicije nigdje nisu uključivale metriku prostora. No metriku ćemo uključiti na način da ćemo definirati, kao što je to bio slučaj i za krivulje prostora $\mathbb{R}^3_1$, pojam prostorne, vremenske i svjetlosne plohe u točki. Dalje ćemo uvesti pojmove prve i druge fundamentalne forme te Gaussovog preslikavanja koji će potpuno uključivati metriku prostora $\mathbb{R}^3_1$, kao i Gaussova i srednja zakrivljenost. Za kraj ćemo posebno proučiti primjere vremenskih i svjetlosnih ploha koje nisu izometrične nijednoj plohi euklidskog prostora; tim primjerima otvaramo vrata proučavanju pseudoeuklidske geometrije i pseudoriemannovih mnogostrukosti.

Napomenimo još jednom, kao što smo to komentirali na početku prethodnog poglavlja, da ćemo prostor s metrikom $\mathbb{R}^3_1$ proučavati zajedno s klasičnom euklidskom topologijom, a također ćemo koristiti pojmove glatkog preslikavanja i difeomorfnog preslikavanja kao što smo ih tamo definirali. Ovdje samo dodatno komentirajmo kako ćemo parcijalne derivacije po prvoj i drugoj varijabli glatkog preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$, $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ (gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren podskup) označavati s φ_u i φ_v respektivno.

3.1 Definicija ploha i pripadnih pojmova. Klasifikacija ploha

Kao što smo i najavili, u ovoj sekciji bavit ćemo se pojmom ploha kao i pojmovima tangencijalne ravnine, glatkih preslikavanja na plohama i njihovih derivacija. Definicije ovih pojmova biti će potpuno iste kao i u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}})$ budući da te definicije ni na koji način ne uključuju metriku $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}}$. Stoga ćemo se mi ovdje većinom baviti motivacijom za te definicije i kako smo uopće došli do tih pojmova. Metriku $\langle\ ,\ \rangle$ prostora $\mathbb{R}^3_1$ ćemo u ovoj sekciji uključiti samo na slijedeći način: nakon što definiramo pojam tangencijalne ravnine, tada ćemo klasificirati plohe na prostorne, vremenske i svjetlosne u točki, isto kao što smo to napravili za parametrizirane krivulje obzirom na njihov tangencijalni vektor.

Sekciju, naravno, započinjemo definicijom plohe, no prije same definicije komentirajmo zašto se jednostavno ne bismo bavili parametriziranim plohama. Razloga za to ima više (vidi [1] i [2]), a mi ćemo ih ovdje istaknuti samo nekoliko. Jedan primjer jest da bismo takvom definicijom iz razmatranja isključili proučavanje sfere $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ kao *plohe*, dok ona predstavlja jedan od osnovnih primjera ploha trodimenzionalnog prostora. Naime, glatko preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, ne može imati kao sliku skup $\mathbb{S}^2$ (jer je φ posebno i neprekidno preslikavanje, a $\mathbb{S}^2$ zatvoren skup kodomene). Štoviše, parametrizirana ploha φ uopće ne mora biti homeomorfizam na svoju sliku - to se lako provjeri za preslikavanje

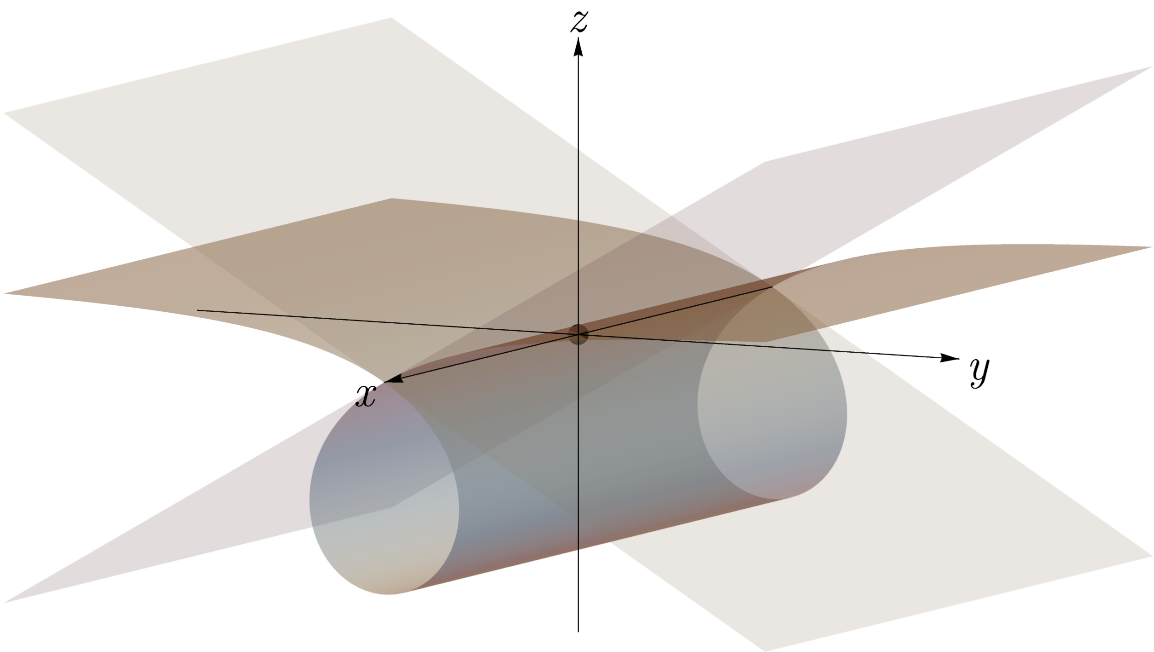
$$\varphi : \langle -1, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(t, u) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}, u\right)$$

gdje je podskup domene $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ otvoren, a njegova slika nije otvoren podskup od $\varphi(\langle -1, 1\rangle \times \mathbb{R})$. Nadalje, proučavanjem samo parametriziranih ploha gubimo mogućnost proučavanja globalnih svojstava poput orijentabilnosti - na primjer, za sferu $\mathbb{S}^2$ očito možemo reći da dijeli prostor na vanjski i unutarnji dio pa ju orijentirati (prema van ili prema unutra). Iz ovakvih razloga, odlučujemo se definiciju plohe kao podskupa trodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^3$ koji posjeduje neka posebna svojstva. Bez daljnjeg raspravljanja, slijedi

Definicija 3.1.1. Za povezani skup $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je <u>(regularna) ploha</u>, ako za svaku točku $p \in S$ postoji preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, za koje vrijedi:

(1) φ je glatko preslikavanje, $\varphi(U) \subseteq S$ i $\varphi(U)$ je otvorena okolina točke p u S,

(2) $\varphi : U \to \varphi(U)$ je homeomorfizam,



Slika 3.1: Parametrizirana ploha $(u,v) \mapsto \left(u, \frac{v^3-3v}{v^2+1}, \frac{v^2-3}{v^2+1}\right)$, istaknuta točka $(0,0,0)$ i ravnine koje se *prijanjaju* na parametriziranu plohu u toj točki

(3) $(\forall q \in U)$ diferencijal $\mathrm{d}\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je maksimalnog ranga (dakle, injektivan).

Nadalje, svako glatko preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^3_1$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, koje zadovoljava svojstva (1), (2) i (3) zovemo lokalna parametrizacija plohe S oko točke p. Za familiju $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to S\}_{\alpha\in\Lambda}$ lokalnih parametrizacija regularne plohe S kažemo da je atlas od S, ako je $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = S$.

Komentirajmo ovu definiciju. Prvi uvjet govori da je skup S lokalno (oko svake točke) sastavljen od parametriziranih ploha. Drugi uvjet ima više posljedica: očita posljedica jest da lokalne parametrizacije prenose topologiju ravnine na samu plohu. Nadalje, injektivnost lokalne parametrizacije zabranjuje samo-presijecanje lokalnih parametrizacija - to je nužno pri definiranju tangencijalne ravnine u točki (na Slici 3.1 jasno možemo vidjeti da u točki $(0,0,0)$ ove parametrizirane plohe ne možemo izabrati tangencijalnu ravninu). Konačno, neprekidnost inverza $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ bit će potrebna pri definiciji glatkih preslikavanja na plohama - tim svojstvom ćemo moći dokazati da definicija glatkih preslikavanja ne ovisi o tome koju smo lokalnu parametrizaciju u točki plohe izabrali (već ovisi o samoj plohi S). Za kraj, treći uvjet će nam garantirati egzistenciju tangencijalne ravnine u svakoj točki plohe S (slično kao što smo kod parametriziranih krivulja imali zahtjev regularnosti što nam je garantiralo postojanje tangencijalnog vektora). Dodatno istaknimo: lokalne parametrizacije imaju još jednu ulogu, a to je prenošenje koordinatnog sustava - naime, lokalna parametrizacija $\varphi : U \to S$ svakoj točki $p \in \varphi(U)$ pridružuje uređeni par $(u, v) = \varphi^{-1}(p) \in U$ koji igra ulogu koordinata točke p na S. Tu se naravno mora paziti na to da različite lokalne parametrizacije u točki njoj pridružuju različite koordinate.

Napomena 3.1.2. Istaknimo ovdje neke klasične primjere ploha; mi se ovdje nećemo baviti dokazivanjem da su ti skupovi zaista plohe, pošto se ta tema obrađuje u klasičnoj euklidskoj geometriji (gdje je definicija plohe ista).

- Ako je S regularna ploha i ako je $\varphi : U \to S$ njena lokalna parametrizacija, tada je $\varphi(U)$ također regularna ploha.
- Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatka funkcija i $a \in \mathbb{R}$ proizvoljna točka. Ako za sve $p \in f^{-1}(a)$ vrijedi $\mathrm{d}f_p \neq 0$, tada je svaka komponenta povezanosti od $f^{-1}(a)$ regularna ploha.

Tangencijalna ravnina i klasifikacija ploha

Sasvim isto kao što se to definira u euklidskoj diferencijalnoj geometriji, imamo:

Definicija 3.1.3. Neka je S proizvoljna regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Kažemo da je $v \in \mathbb{R}^3_1$ <u>tangencijalni vektor</u> plohe S u točki p, ako postoji parametrizirana krivulja $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$, $\varepsilon > 0$, takva da je $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = v$. Nadalje, definiramo skup

$$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3_1 \mid v \text{ tangencijalni vektor plohe } S \text{ u točki } p\}$$

i za njega kažemo da je <u>tangencijalna ravnina</u> plohe S u točki p.

Ovo je prilično prirodna definicija tangencijalne ravnine, ali je problem ove definicije u tome što ne možemo odmah zaključiti da je skup T_pS uistinu ravnina prostora $\mathbb{R}^3_1$ (za sada ga samo tako nazivamo). Zapravo, dokazujemo da je T_pS upravo dvodimenzionalni vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, što je predmet iduće propozicije.

Propozicija 3.1.4. Neka je S proizvoljna regularna ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Tada za svaku lokalnu parametrizaciju φ plohe S oko točke p vrijedi

$$T_pS = \mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2),$$

gdje smo s $q \in U$ označili točku za koju je $\varphi(q) = p$. Posebno, budući da je preslikavanje $\mathrm{d}\varphi_p$ injektivno, slijedi da je T_pS vektorski potprostor u $\mathbb{R}^3_1$ dimenzije 2 (dakle, T_pS je ravnina).

<u>DOKAZ</u> Fiksirajmo proizvoljnu lokalnu parametrizaciju φ oko točke p; ovdje je samo potrebno dokazati jednakost skupova (posljednja tvrdnja iskaza je jasna sama po sebi), a to dokazujemo utvrđivanjem da vrijede obje inkluzije.
$\boxed{\subseteq}$ Neka je $w \in T_pS$ proizvoljan tangencijalni vektor plohe S u točki p; tada jasno postoji parametrizirana krivulja $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to S$ (za neki $\varepsilon > 0$) takva da je $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = v$. Budući da je $\varphi(U)$ otvorena okolina točke p od S i budući da je c neprekidna, tada je $c^{-1}(\varphi(U))$ otvorena okolina od 0 u intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$ - stoga zaključujemo da postoji neki $\lambda > 0$ takav da je slika restrikcije $c : \langle -\lambda, \lambda\rangle \to S$ sadržana u $\varphi(U)$. Tada lako vidimo da je dobro definirano preslikavanje

$$\gamma := \varphi^{-1} \circ c : \langle -\lambda, \lambda\rangle \to U.$$

Kada bismo znali da je to preslikavanje γ glatko (a time i parametrizirana krivulja u $\mathbb{R}^2$), onda bismo jednostavnom primjenom lančanog pravila našli da je

$$\mathrm{d}\varphi_q\big(\gamma'(0)\big) = \mathrm{d}\varphi_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = c'(0) = v$$

otkuda bismo zaključili da je $v \in \mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2)$. Uvjerimo se da je γ zaista glatko preslikavanje (to jest da je glatko na nekoj okolini točke 0). Naime, budući da je $\mathrm{d}\varphi_q$ injektivan operator, tada znamo da mora biti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdje smo s φ_1, φ_2 i φ_3 označili koordinatne funkcije od φ. Prema tome, jedna od minora ove matrice mora biti različita od nule; bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sada definirajmo preslikavanje

$$F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad F(u, v, t) := (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v) + t)$$

za koje lako dobivamo da je

$$\det(\mathrm{d}F_{(q,0)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Odavde primjenom Teorema o inverznoj funkciji (poznatog iz diferencijalnog računa funkcija više varijabli) zaključujemo da postoje otvorena okolina W_1 od $(q, 0)$ u $U \times \mathbb{R}$ i otvorena okolina W_2 točke p u $\mathbb{R}^3_1$ takva da je $F|_{W_1} : W_1 \to W_2$ difeomorfno preslikavanje. Označimo li s $\tilde{U}$ skup $\{(u, v) \in U \ (u, v, 0) \in W_1\}$, tada slijedi da je $\tilde{U}$ otvorena okolina od q u U pa prikladnom restrikcijom krivulje c opet možemo dobiti da je njena slika sadržana u $\varphi(\tilde{U})$. Konačno, sada se lako možemo uvjeriti da je zapravo $\varphi^{-1} \circ c = F^{-1} \circ c$ otkuda zaključujemo da je γ zaista glatko preslikavanje (uz prikladnu restrikciju) kao kompozicija glatkih preslikavanje, i to pokazuje ovu inkluziju.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $v \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan vektor, pokažimo da je $\mathrm{d}\varphi_q(v) \in T_pS$. Ovo zapravo slijedi dosta jednostavno definiramo li

$$\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) = q + tv,$$

gdje je $\varepsilon > 0$ realan broj takav da je $\gamma(\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle) \subseteq U$ (takav jasno postoji). To preslikavanje je očito glatko pa je stoga i kompozicija

$$c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c := \varphi \circ \gamma$$

također glatko preslikavanje, a time i parametrizirana krivulja. Primijetimo da je očito $c(\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle) \subseteq \varphi(U) \subseteq S$ te da je

$$c(0) = \varphi \circ \gamma(0) = \varphi(q) = p \quad \text{i} \quad \dot{c}(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}\varphi_q(\gamma'(0)) = \mathrm{d}\varphi_q(v).$$

Prema tome, po definiciji zaključujemo da je $\mathrm{d}\varphi_q(v)$ tangencijalni vektor plohe S u točki p čime smo dokazali drugu inkluziju, a time i ovu propoziciju. $\square$

Napomena 3.1.5. Primijetimo slijedeće. Ako je $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S oko točke $\varphi(q) = p$, tada ona na tangencijalnoj ravnini T_pS inducira (kanonsku) bazu $\big\{\mathrm{d}\varphi_q\big((1,0)\big), \mathrm{d}\varphi_q\big((0,1)\big)\big\}$ koju ćemo ubuduće označavati s

$$\{\partial_1, \partial_2\}$$

te ćemo ju zvati inducirana baza tangencijalne ravnine T_pS (od strane lokalne parametrizacije φ). Jasno je da su ∂_1 i ∂_2 redom tangencijalni vektori obzirom na krivulje

$$c_1 = t \mapsto \varphi(q + t(1,0)) \quad \text{i} \quad c_2 = t \mapsto \varphi(q + t(0,1)),$$

(uz prikladan izbor domene) i te krivulje se respektivno nazivaju u-krivulja i v-krivulja plohe S (kroz točku p). Napomenimo da različite lokalne parametrizacije induciraju različite baze na T_pS i da daju različite u- i v-krivulje kroz točku p. Ova baza je prilično korisna pošto ju vrlo lako možemo računati budući da je

$$\partial_1 = \mathrm{d}\varphi_q((1,0)) = \varphi_u(q) \quad \text{i} \quad \partial_2 = \mathrm{d}\varphi_q((0,1)) = \varphi_v(q).$$

Štoviše, budući da bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$ možemo inducirati u svakoj točki $p \in \varphi(U)$, tada su dobro definirana preslikavanja

$$\partial_1 : U \to \mathbb{R}^3_1 \quad \text{i} \quad \partial_2 : U \to \mathbb{R}^3_1$$

za koja nam je jasno da su glatka preslikavanja (budući da je tada u suštini $\partial_1 = \varphi_u$ i $\partial_2 = \varphi_v$). Želimo li istaknuti da induciranu bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$ promatramo za neku određenu točku $p \in \varphi(U)$ (dakle, da promatramo induciranu bazu tangencijalne ravnine T_pS), onda ćemo ju po potrebi posebno označavati s

$$\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}.$$

Primijetimo da ravnina T_pS zapravo ne mora prolaziti točkom p - ona prolazi ishodištem prostora (jer je to vektorski potprostor) neovisno o položaju točke p i plohe S. Afina ravnina koja tangira plohu S u točki p jest ravnina $p + T_pS$ - štoviše, može se pokazati da je to ravnina koja *najbolje aproksimira* plohu S u točki p (vidi [1, str. 136]). Napomenimo također da se pojam tangencijalne ravnine može definirati u potpunosti intrinzično, dakle bez referiranja na vektorski prostor $\mathbb{R}^3_1$, već isključivo koristeći pojmove definirane na skupu S - za više informacija na tu temu pogledati [1, sekcija 3.4].

Sada je konačno trenutak za primjenu metrike prostora $\mathbb{R}^3_1$ - budući da je T_pS nužno vektorski potprostor u $\mathbb{R}^3_1$, tada se na njemu inducira metrika $\langle , \rangle_{T_pS}$. Prisjetimo se kako smo Definicijom 1.2.27 klasificirali vektorske potprostore obzirom na tip metrike koji je na njima induciran - konkretno, imali smo prostornu, vremensku i svjetlosnu metriku. Kao što je to bio slučaj i za krivulje, plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$ sada klasificiramo po tome kakva je pripadna tangencijalna ravnina obzirom na metriku $\langle\, , \,\rangle$, slijedi

Definicija 3.1.6. Neka je regularna ploha S prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Kažemo da je ploha S

- prostorna u točki p, ako je inducirana metrika na T_pS prostorna metrika,
- vremenska u točki p, ako je inducirana metrika na T_pS vremenska metrika,
- svjetlosna u točki p, ako je inducirana metrika na T_pS svjetlosna metrika.

Štoviše, kažemo da je S

- prostorna ploha, ako je ona prostorna u svakoj svojoj točki,
- vremenska ploha, ako je ona vremenska u svakoj svojoj točki,

- svjetlosna ploha, ako je ona svjetlosna u svakoj svojoj točki.

Navedimo još da ćemo metriku $\langle\ ,\ \rangle_{T_pS}$ ubuduće označavati samo s $\langle\ ,\ \rangle_p$.

Ovakva klasifikacija ploha nam govori kakva je lokalna geometrija plohe budući da opisuje ponašanje metrike lokalno na tangencijalnim vektorima plohe u danoj točki. Proučimo uvedene pojmove na primjeru klasične sfere $\mathbb{S}^2$ (slično kao što smo to za krivulje napravili u Primjeru 2.1.3).

Primjer 3.1.7. Promotrimo sferu

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

za koju znamo da je regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ (Napomena 3.1.2). Želimo odrediti koje su točke plohe prostorne, vremenske i svjetlosne, a za to moramo pronaći tangencijale ravnine točaka sfere. Budući da je definicija tangencijalne ravnine ista kao i u euklidskom prostoru, tada se možemo pozvati na poznate račune iz euklidske diferenijalne geometrije po kojima znamo da je

$$(\forall p \in \mathbb{S}^2)\ p \text{ je normala na } T_pS \text{ obzirom na euklidsku metriku } \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}}.$$

Koristeći tu tvrdnju i Korolar 1.2.36 možemo zaključiti da je

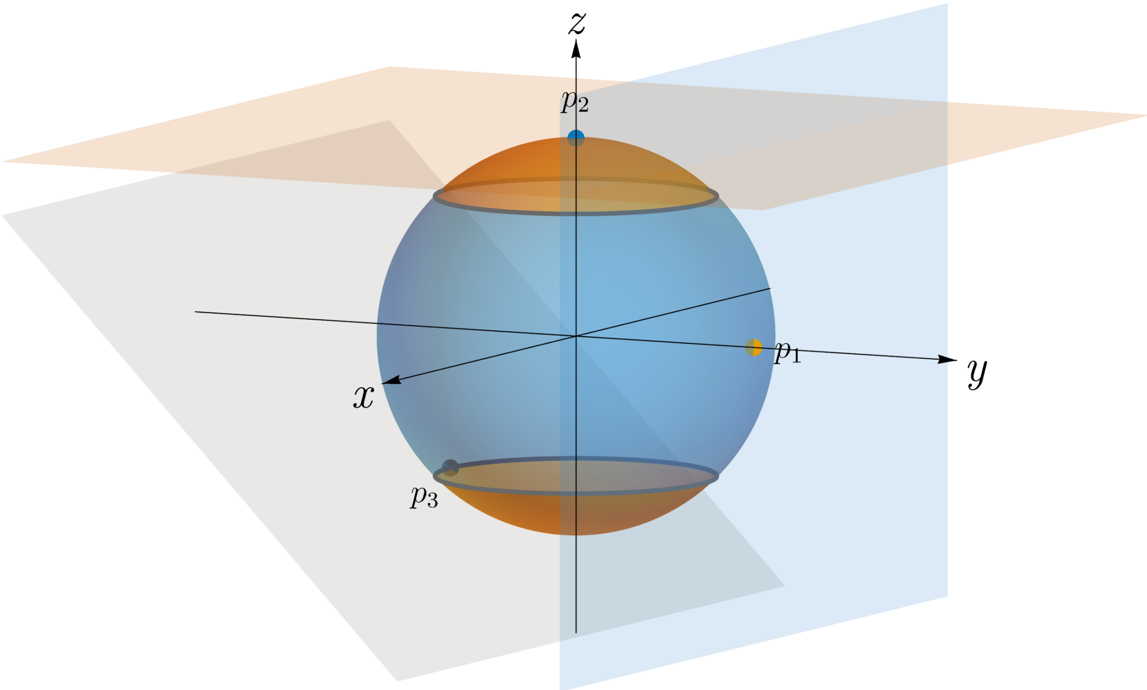
$$\begin{aligned} T_pS \text{ prostorni potprostor} &\iff p \text{ vremenski vektor},\\ T_pS \text{ svjetlosni potprostor} &\iff p \text{ svjetlosni vektor},\\ T_pS \text{ vremenski potprostor} &\iff p \text{ prostorni vektor}. \end{aligned}$$

Uzmimo stoga proizvoljni $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ te računajmo:

$$\begin{aligned} \langle p, p\rangle > 0 &\iff x^2 + y^2 - z^2 > 0\\ &\iff (1 - z^2) - z^2 > 0\\ &\iff z^2 < 1/2\\ &\iff |z| < 1/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

a sasvim analogno nalazimo i

$$\begin{aligned} \langle p, p\rangle = 0 &\iff |z| = 1/\sqrt{2},\\ \langle p, p\rangle < 0 &\iff |z| > 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$



Slika 3.2: Sfera $\mathbb{S}^2$, točke p_i i pripadne tangencijalne ravnine $T_{p_i}S$ $(i = 1, 2, 3)$

Prema tome, zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}^2 \text{ prostorna ploha u točki } (x, y, z) \iff |z| > 1/\sqrt{2},\\
&\mathbb{S}^2 \text{ svjetlosna ploha u točki } (x, y, z) \iff |z| = 1/\sqrt{2},\\
&\mathbb{S}^2 \text{ vremenska ploha u točki } (x, y, z) \iff |z| < 1/\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Tu situaciju vizualno prikazujemo Slikom 3.2 gdje smo narančastom bojom istakli prostorne točke plohe, plavom vremenske točke, a sivom krivuljom svjetlosne točke plohe. Također smo primjera radi istakli tri točke

$$p_1 = (0, 1, 0) \quad , \quad p_2 = (0, 0, 1) \quad , \quad p_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

te smo ucrtali pripadne tangencijalne ravnine $T_{p_i}S$ (i obojili ih pripadnim bojama). Napomenimo da ravnine $T_{p_i}S$ prolaze ishodištem, a mi smo ih na slici translatirali u pripadne točke p_i radi jasnoće (pa na slici zapravo vidimo skupove $p_i + T_{p_i}S$).

Sada slično Napomeni 2.1.4 dokazujemo tvrdnje iduće napomene.

Napomena 3.1.8. Ako je S regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$, tada vrijedi:

- svojstvo da je S prostorna ploha u svojim točkama jest otvoreno svojstvo,
- svojstvo da je S vremenska ploha u svojim točkama jest otvoreno svojstvo,
- svojstvo da je S svjetlosna ploha u svojim točkama jest zatvoreno svojstvo.

Istaknimo da pod pojmom *otvoreno* i *zatvoreno svojstvo* smatramo da je skup svih takvih točaka plohe čini otvoren odnosno zatvoren podskup od S (gdje na topologiju od S gledamo kao relativnu topologiju preuzetu od ambijenta $\mathbb{R}^3_1$). Slično ranijem, dovoljno nam je pokazati prvu točku, tada će tvrdnja druge točke slijediti sasvim analogno, dok će zadnja točka slijediti iz prve dvije. U tu svrhu, označimo s $\hat{S}$ skup svih točaka plohe S u kojima je ona prostorna. S ciljem da pokažemo da je skup $\hat{S}$ otvoren u S, mi ćemo pokazati da svaka točka skupa $\hat{S}$ ima otvorenu okolinu koja ju sadrži. U tu svrhu fiksirajmo proizvoljan $\hat{p} \in \hat{S}$ - tada po definiciji postoji lokalna parametrizacija $\varphi : U \to S$ od S oko točke $\hat{p}$ pa je $\varphi(U)$ otvorena okolina od $\hat{p}$ u S; označimo s $\hat{q} \in U$ element za koji je $\varphi(\hat{q}) = \hat{p}$. Definirajmo skup

$$\hat{U} := \{q \in U \mid S \text{ je prostorna ploha u točki } \varphi(q)\}.$$

Jasno nam je da je $\hat{q} \in \hat{U}$; cilj nam je pokazati da je $\hat{U}$ otvorena okolina od $\hat{q}$ u U, tada će $\varphi(\hat{U})$ zapravo biti otvorena okolina od $\hat{p}$ u $\hat{S}$ i to će nas navesti na traženu tvrdnju. Naime, prema Napomeni 3.1.5 postoji inducirana baza $\partial_1, \partial_2 : U \to \mathbb{R}^3_1$ tangencijalnih ravnina točaka skupa $\varphi(U)$. Primijetimo da tada za sve $p \in \varphi(U)$ vrijedi da je

$$\begin{aligned} T_pS \text{ prostorni potprostor} &\iff \operatorname{span}\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\} \text{ prostorni potprostor} \\ &\iff \partial_1|_p \times \partial_2|_p \text{ vremenski vektor} \\ &\iff \langle \partial_1|_p \times \partial_2|_p, \partial_1|_p \times \partial_2|_p \rangle < 0, \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj ekvivalenciji koristili tvrdnje Propozicija 1.2.37 i 1.2.35. Odavde možemo zaključiti da zapravo imamo

$$\hat{U} = \{q \in U \mid \langle \partial_1(q) \times \partial_2(q), \partial_1(q) \times \partial_2(q) \rangle < 0\}.$$

Štoviše, budući da su $\partial_1, \partial_2 : U \to \mathbb{R}^3_1$ glatka preslikavanja, tada je i $q \mapsto \partial_1(q) \times \partial_2(q)$, $U \to \mathbb{R}^3_1$, također glatko preslikavanje (Lema 2.2.6), otkuda zaključujemo da je preslikavanje

$$\alpha : U \to \mathbb{R} \quad , \quad \alpha(q) = \langle \partial_1(q) \times \partial_2(q), \partial_1(q) \times \partial_2(q) \rangle$$

također glatko. Sada, zapisivanjem

$$\hat{U} = \{q \in U \mid \alpha(q) < 0\} = \alpha^{-1}(\langle -\infty, 0\rangle)$$

zaključujemo da $\hat{U}$ mora biti otvoren skup kao praslika otvorenog skupa (otvoren skup u U). Prema tome, $\hat{U}$ je zaista otvorena okolina točke $\hat{q}$ u U čime zaključujemo da je $\varphi(\hat{U})$ otvorena okolina točke $\hat{p}$ u S. No primijetimo da je zapravo $\varphi(\hat{U}) \subseteq \hat{S}$, otkuda zaključujemo da je $\varphi(\hat{U})$ zapravo otvorena okolina točke $\hat{p}$ u $\hat{S}$! Dakle: svaka točka skupa $\hat{S}$ ima otvoren skup (otvoren otvoren obzirom na relativnu topologiju od S) koji ju sadrži, otkuda zaključujemo da je $\hat{S}$ otvoren podskup od S i to zaključuje tvrdnje ove napomene.

Primjer 3.1.9. Navedimo sada primjere prostornih, vremenskih i svjetlosnih ploha. Očiti primjeri prostornih, svjetlosnih odnosno vremenskih ploha su prostorni, svjetlosni i vremenski dvodimenzionalni potprostori i njima paralelne ravnine. No osim tih primjera, ovdje ćemo istaknuti još tri plohe (po jednu za svaki tip), a te plohe bit će nam potrebne i kasnije radi čega će nam ovaj primjer biti posebno važan.

(1) Promotrimo skup svih jediničnih vremenskih vektora

$$\{v \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle v, v\rangle = -1\}.$$

Naime, raspisivanjem desne strane jednakosti po koordinatama lako vidimo da se taj skup ekvivalentno može zapisati kao

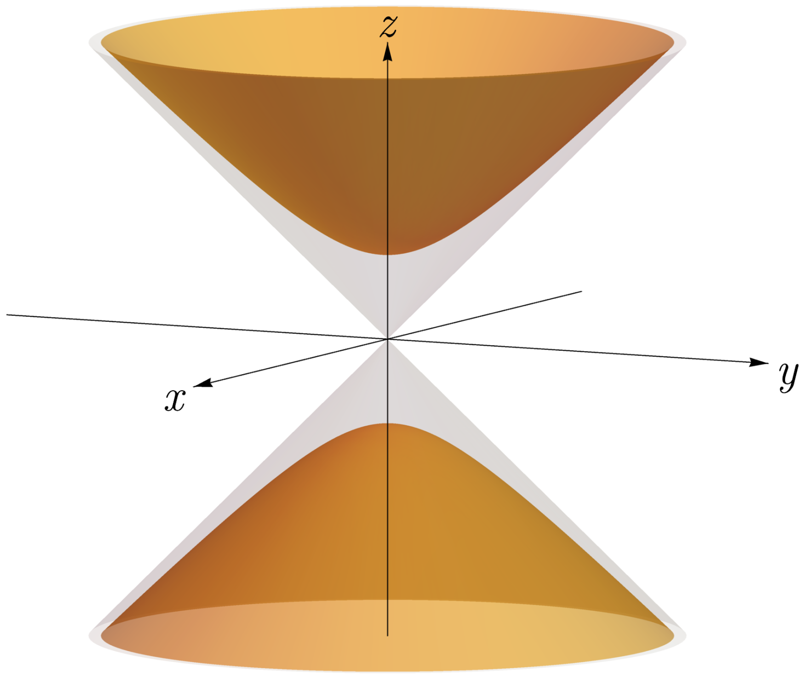
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \mid x^2 + y^2 = z^2 - 1\}.$$

Ovdje očito vidimo da taj skup ima dvije komponente povezanosti ($z \geq 1$ i $z \leq -1$) te prema Napomeni 3.1.2 vidimo da je svaka od tih komponenti povezanosti zapravo ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Označimo te plohe s

$$\mathbb{H}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \;\middle|\; z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right\}$$
$$-\mathbb{H}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \;\middle|\; z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right\},$$

gdje plohi $\mathbb{H}^2$ posebno nadjenjujemo ime <u>hiperbolička ravnina</u>. Naziv potječe od toga što se taj skup uzima kao model za promatranje hiperboličke geometrije - to je geometrija u kojoj vrijede sva četiri aksioma Euklidove[1] geometrije osim aksioma o paralelama (u hiperboličkoj geometriji paralele nisu jedinstvene). Kod modela $\mathbb{H}^2$ se uzima da su *točke* u proučavanoj geometriji elementi skupa $\mathbb{H}^2$, dok se za *pravce* uzimaju presjeci skupa $\mathbb{H}^2$ i vremenskih dvodimenzionalnih

[1] Euklid, grčki matematičar, 3. st. pr. Kr. - 2. st. pr. Kr.



Slika 3.3: Hiperbolička ravnina $\mathbb{H}^2$ gore i $-\mathbb{H}^2$ dole relativno na svjetlosni stožac $\mathcal{C}$

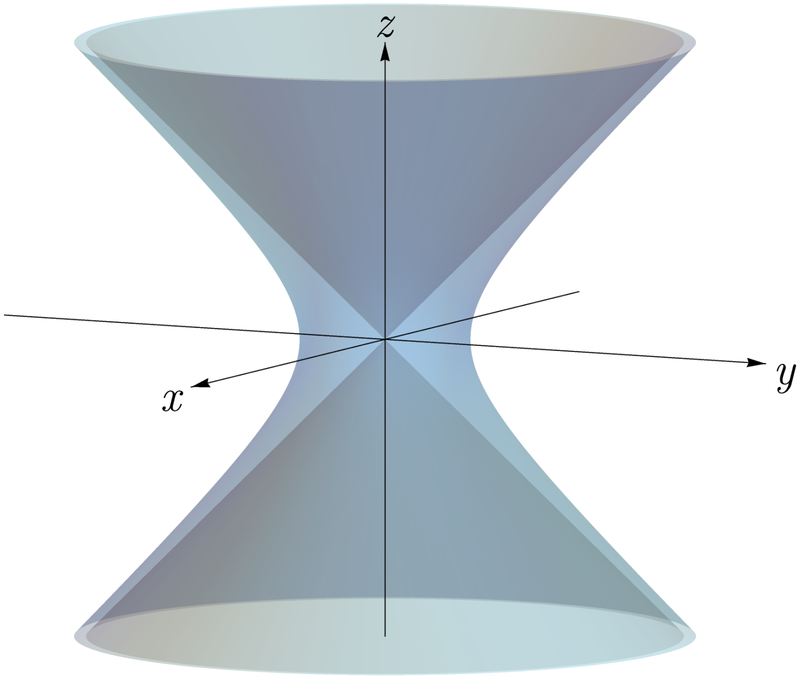
potprostora od $\mathbb{R}^3_1$ (pokazuje se da su to upravo geodetske krivulje plohe $\mathbb{H}^2$). No, bez obzira na naziv plohe, proučimo njena svojstva u geometriji Lorentz-Minkowskijevog prostora; pokažimo da je $\mathbb{H}^2$ prostorna ploha. To će slijediti kao posljedica iduće (jače) tvrdnje:

$$(\forall p \in \mathbb{H}^2)\; p \perp T_p\mathbb{H}^2. \tag{3.1}$$

U tu svrhu neka je $p \in \mathbb{H}^2$ proizvoljna točka i $v \in T_p\mathbb{H}^2$ proizvoljan tangencijalni vektor. Tada po definiciji postoji parametrizirana krivulja $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{H}^2$ takva da je $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = v$. Budući da se parametrizirana krivulja c nalazi na plohi $\mathbb{H}^2$, tada jasno imamo da je $(\forall t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle)\; \langle c(t), c(t)\rangle = -1$ pa deriviranjem te jednakosti po varijabli t dobivamo da je $\langle \dot{c}(t), c(t)\rangle = 0$ za sve $t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$. Posebno, uvrštavanjem $t = 0$ dobivamo upravo

$$\langle v, p\rangle = \langle \dot{c}(0), c(0)\rangle = 0$$

što znači da je $p \perp v$, pa po proizvoljnosti vektora v zaključujemo da je $p \perp T_p\mathbb{H}^2$ što smo i trebali pokazati. Prema tome, zaključujemo da je za svaki $p \in \mathbb{H}^2$



Slika 3.4: Pseudosfera $\mathbb{S}^2_1$ relativno na svjetlosni stožac $\mathcal{C}$

vektor p zapravo normala tangencijalne ravnine $T_p\mathbb{H}^2$ - budući da su svi elementi skupa $\mathbb{H}^2$ vremenski vektori, sada uporabom Propozicije 1.2.35 zaključujemo da je

$$(\forall p \in \mathbb{H}^2)\ T_p\mathbb{H}^2 \text{ prostorni potprostor}$$

što dokazuje da je $\mathbb{H}^2$ zaista prostorna ploha. Sasvim jednako se pokazuje da je i ploha $-\mathbb{H}^2$ prostorna ploha pa to nećemo posebno dokazivati.

(2) Analogno prethodnom primjeru, promotrimo skup svih jediničnih prostornih vektora:

$$\{v \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle v, v\rangle = 1\}.$$

Taj skup isto raspisujemo po koordinatama te uvodimo oznaku

$$\mathbb{S}^2_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$

i nazivamo ga pseudosfera. Lako se možemo uvjeriti da pseudosfera ima jednu komponentu povezanosti (može se pokazati da je skup povezan putevima, a time i povezan skup) pa prema NAPOMENI 3.1.2 zaključujemo da je zapravo $\mathbb{S}^2_1$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Pseudosfera $\mathbb{S}^2_1$ je vremenski potprostor što slijedi iz tvrdnje

$$(\forall p \in \mathbb{S}^2_1)\; p \perp T_p\mathbb{S}^2_1, \tag{3.2}$$

a te sve tvrdnje dokazuju se sasvim analogno prethodnom primjeru pa ih ovdje nećemo posebno pisati.

(3) Za kraj promotrimo skup svih svjetlosnih vektora: taj skup nam je poznat još iz DEFINICIJE 1.2.5 gdje smo mu nadjenuli ime *svjetlosni stožac* te kojeg zapisujemo kao

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Svjetlosni stožac smo mogli vidjeti na SLICI 1.1, a on očito ima dvije komponente povezanosti koje označavamo s

$$\mathcal{C}^+ = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; z = \sqrt{x^2 + y^2}\big\},$$
$$\mathcal{C}^- = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 \setminus \{0\} \;\big|\; z = -\sqrt{x^2 + y^2}\big\}$$

te napomenimo da su oba skupa zapravo plohe u $\mathbb{R}^3_1$ (što nam je isto dano NAPOMENOM 3.1.2). Analogno se pokazuje da i ovdje vrijedi

$$(\forall p \in \mathcal{C}^\pm)\; p \perp T_p\mathcal{C}^\pm \tag{3.3}$$

otkuda opet uz PROPOZICIJU 1.2.35 zaključujemo da su $\mathcal{C}^+$ i $\mathcal{C}^-$ svjetlosne plohe u $\mathbb{R}^3_1$.

Glatka preslikavanja na plohama i njihove derivacije

U ovoj potsekciji bavit ćemo se uvođenjem pojma glatkog preslikavanja na plohama. Glavni razlog za proučavanje glatkih preslikavanja na plohama dolazi od pitanja same zakrivljenosti plohe. Naime, pitanje zakrivljenosti krivulja klasično se rješava diferencijarnjem tangencijalnog vektora krivulja - isto tako bismo htjeli pitanje zakrivljenosti plohe riješiti diferenciranjem preslikavanja $p \mapsto T_pS$ definiranog na plohi. Problem je što derivacija takvog preslikavanja uopće nema smisla (što je kodomena tog preslikavanja?), ali ono što bi možda imalo smisla jest proučavati preslikavanje $p \mapsto N(p)$, gdje je $N(p)$ (jedinični) normalni vektor na T_pS, jer je kodomena tog preslikavanja $\mathbb{R}^3$. Naime, po diskusiji napravljenoj u SEKCIJI 1.2 (stranica 45) znamo da u Lorentz-Minkowskijevom prostoru imamo dobro ustanovljen odnos dvodimenzionalnih potprostora i pripadnih normalnih vektora, pa kada bismo imali preslikavanje

$p \mapsto N(p)$ koje svakoj točki pridružuje (jedinični) normalni vektor na plohu, tada bismo varijacijom tog preslikavanja indirektno dobili podatke o varijaciji tangencijalnih ravnina u toj točki, a time i informacije o samoj zakrivljenosti plohe. Da bismo mogli diferencirati takvo preslikavanje $S \to \mathbb{R}^3$, morali bismo uvesti neki način ispitivanja glatkoće takvog preslikavanja (koje bi dopuštalo diferenciranje), a zatim na dobar način definirati sam diferencijal tog preslikavanja - upravo to je ono čime ćemo se sada i baviti.

Od prije nam je poznato što bi značilo da je neko preslikavanje $\Omega \to \mathbb{R}^m$ glatko preslikavanje, gdje je Ω neki otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $A \to \mathbb{R}^m$, gdje je A proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^n$, se kaže da je glatko preslikavanje ako je ono (lokalna ili globalna) restrikcija glatkog preslikavanja (glatkog u uobičajenom smislu). Takve definicije ćemo navesti ispod kao 1-glatko preslikavanje i 2-glatko preslikavanje; za te definicije se pokazuje da su međusobno ekvivalentne. Ali budući da se ovdje konkretno bavimo preslikavanjima definiranim na plohama, tada ćemo zbog definicije plohe preko lokalnih parametrizacija imati još jednu moguću definiciju i taj pojam ćemo osloviti kao 3-glatko preslikavanje. Radi jednostavnosti uzmimo da je $m = 1$ te da je $A = S$ proizvoljna regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$, dakle proučavamo preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}$ - navodimo tri moguće definicije.

(1) Prvi pristup jest da definiramo da je f *1-glatka u točki* $p \in S$, ako

$$(\exists W \subseteq \mathbb{R}^3, W \text{ otvorena okolina od } p \text{ u } \mathbb{R}^3)$$
$$(\exists \hat{f} : W \to \mathbb{R}, f \text{ glatko preslikavanje}) \ \hat{f}|_{W\cap S} = f|_{W\cap S}.$$

Ideja ove definicije jest da je preslikavanje f lokalno restrikcija glatkog preslikavanja. Tada bismo rekli da je f *1-glatka na* S, ako je f 1-glatka u svakoj točki plohe $p \in S$.

(2) Drugi pristup bi bio definirati da je f *2-glatka na* S, ako

$$(\exists W \subseteq \mathbb{R}^3, W \text{ otvorena okolina od } S \text{ u } \mathbb{R}^3, S \text{ zatvoren skup u } W)$$
$$(\exists \hat{f} : W \to \mathbb{R}, f \text{ glatko preslikavanje}) \ \hat{f}|_S = f.$$

Ideja ove definicije, s druge strane, jest da je preslikavanje f restrikcija glatkog preslikavanja na otvorenoj okolini plohe S. Razlog zašto zahtijevamo zatvorenost skupa S u W je taj što bismo inače imali problema u gomilištima plohe S, jer bi tada postojale glatke funkcije na S sa singularitetima u gomilištima koje ne bismo mogli ukloniti (jedan takav primjer može se naći u [1, str. 163]).

(3) Konačno, treći pristup je nešto drugačiji, jer za razliku od drugih definicija koristi činjenicu ne samo da je S podskup od $\mathbb{R}^3$, već i samu definiciju plohe

preko lokalnih parametrizacija. Ovdje bismo rekli da je preslikavanje f *3-glatko u točki* $p \in S$, ako

$$(\exists \varphi : U \to S, \varphi \text{ lokalna parametrizacija oko } p)\ f \circ \varphi \text{ glatko preslikavanje}$$
$$\text{u okolini točke } \varphi^{-1}(p).$$

Napomenimo da kada kažemo da je $f \circ \varphi$ glatko preslikavanje to smatratmo na uobičajen način, dakle kao glatko preslikavanje $U \to \mathbb{R}$ (čije nam je značenje već otprije poznato). Smisao ove definicije jest očito iskoristiti definiciju plohe preko lokalnih parametrizacija. Ova definicija je dobra, ali mogući problem ove definicije jest da ona ovisi o izboru parametrizacije φ - pokazuje se da to nije slučaj, dakle pojam glatkoće u točki ovisi o samoj plohi S. Sada možemo definirati da je preslikavanje f *3-glatko na* S, ako je f 3-glatka u svakoj točki plohe $p \in S$.

Svaka od ovih definicija ima svoje prednosti i mane, ali se zapravo pokazuje da su ove tri definicije ekvivalentne, to jest imamo

$$f \text{ je 1-glatka na } S \Longleftrightarrow f \text{ je 3-glatka na } S \Longleftrightarrow f \text{ je 2-glatka na } S.$$

Dokaz prve ekvivalencije može se naći u [1, str. 134] te se dokaz druge ekvivalencije može naći u [1, str. 163]. Ove tvrdnja lako se poopćuju na slučaj kodomene $\mathbb{R}^m$ za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ koristeći činjenicu da je preslikavanje glatko ako i samo ako su joj komponentne funkcije glatke.

U svakom slučaju, mi se odlučujemo za definiciju 3-glatkoće jer će nam biti najjednostavnije raditi s lokalnim parametrizacijama te se opredjeljujemo na slučaj $m = 3$, dakle kao kodomenu ćemo promatrati prostor $\mathbb{R}^3_1$. Odmah napomenimo da tvrdnje u ovoj potsekciji nećemo posebno dokazivati, budući da su one također predmet klasične euklidske diferencijalne geometrije i kao takve se mogu naći u većini klasičnih literatura poput [2].

Definicija 3.1.10. Neka je S regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Kažemo da je preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^3_1$ <u>glatko preslikavanje u točki p</u>, ako

$$(\exists \varphi : U \to S, \varphi \text{ lokalna parametrizacija oko } p)\ f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^3 \text{ glatko preslikavanje}$$
$$\text{u okolini točke } \varphi^{-1}(p).$$

Štoviše, kažemo da je preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^3_1$ <u>glatko preslikavanje na S</u>, ako je

$$(\forall p \in S)\ f \text{ glatko preslikavanje u točki } p.$$

Kao što smo komentirali i ranije, potrebno je uvjeriti se da ova definicija glatkoće ne ovisi o izboru same parametrizacije φ. Ta se tvrdnja dobiva kao korolar idućeg teorema.

Teorem 3.1.11. Neka je S regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Neka su $\varphi : U \to S$ i $\psi : V \to S$ dvije lokalne parametrizacije plohe S, takve da je $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Označimo

$$\hat{U} := \varphi^{-1}\big(\varphi(U) \cap \psi(V)\big) \quad \text{i} \quad \hat{V} := \psi^{-1}\big(\varphi(U) \cap \psi(V)\big).$$

Tada je preslikavanje

$$\varphi^{-1} \circ \psi|_{\hat{V}} : \hat{V} \to \hat{U}$$

difeomorfno preslikavanje (dakle, glatka bijekcija čiji je inverz također glatko preslikavanje).

Korolar 3.1.12. Neka je S regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Neka je $f : S \to \mathbb{R}^3_1$ proizvoljno preslikavanje te neka su $\varphi : U \to S$ i $\psi : V \to S$ lokalne parametrizacije oko točke p. Tada je

$$\begin{aligned} &f \circ \varphi \text{ glatko preslikavanje u okolini točke } \varphi^{-1}(p) \\ &\quad \Longleftrightarrow f \circ \psi \text{ glatko preslikavanje u okolini točke } \psi^{-1}(p). \end{aligned}$$

Posebno, definicija glatkog preslikavanja funkcije $f : S \to \mathbb{R}^3_1$ u točki p ne ovisi o izboru lokalne parametrizacije plohe S oko točke p.

Ova će tvrdnja nam biti korisna jer nam omogućuje fleksibilnost izbora lokalne parametrizacije pri baratanju glatkim preslikavanjima na plohama.

Idući nam je cilj primijeniti istu ovu diskusiju na pojam preslikavanja između dvije plohe.

Definicija 3.1.13. Neka su S_1 i S_2 regularne plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S_1$ proizvoljna točka. Za preslikavanje $F : S_1 \to S_2$ kažemo da je glatko u točki p, ako

$$\begin{aligned} &(\exists \varphi : U \to W = \varphi(U), \varphi \text{ lokalna parametrizacija plohe } S \text{ oko } p) \\ &(\exists \psi : V \to Z = \psi(V), \psi \text{ lokalna parametrizacija plohe } S \text{ oko } F(p)) \\ &\quad \psi^{-1} \circ F \circ \varphi \text{ glatko preslikavanje u okolini točke } \varphi^{-1}(p), \end{aligned}$$

gdje preslikavanje $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ gledamo kao preslikavanje $\varphi^{-1}\big(F^{-1}(F(W) \cap Z)\big) \to V$. Nadalje, kažemo da je preslikavanje $F : S_1 \to S_2$ glatko preslikavanje između ploha, ako je F glatko preslikavanje u svakoj točki plohe S_1.

Isto kao što smo to vidjeli za glatka preslikavanja $S \to \mathbb{R}^3_1$, pokazuje se da ova definicija također ne ovisi o izboru lokalnih parametrizacija:

Korolar 3.1.14. Neka su S_1 i S_2 regularne plohe u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S_1$ proizvoljna točka. Neka je $F : S_1 \to S_2$ proizvoljno preslikavanje, te

$$\varphi_i : U_i \to W_i = \varphi(U_i) \quad \text{i} \quad \psi : V_i \to Z_i = \psi(V_i), \qquad i \in \{1, 2\},$$

lokalne parametrizacije plohe S_1 oko točke p i plohe S_2 oko točke $F(p)$ respektivno. Tada je

$$\psi_1^{-1} \circ F \circ \varphi_1 \text{ glatko preslikavanje u okolini točke } \varphi_1^{-1}(p)$$
$$\iff \psi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_2 \text{ glatko preslikavanje u okolini točke } \varphi_2^{-1}(p).$$

Napomenimo da ovdje preslikavanje $\psi_i^{-1} \circ F \circ \varphi_i$ promatramo kao preslikavanje $\varphi_i^{-1}\big(F^{-1}(F(W_i) \cap Z_i)\big) \to V_i$, za oba $i \in \{1, 2\}$.
Posebno, definicija glatkog preslikavanja funkcije $F : S_1 \to S_2$ u točki p ne ovisi o izboru lokalnih parametrizacija ploha S_1 i S_2 oko točaka p i $F(p)$.

Napomena 3.1.15. Vrijedi slijedeća tvrdnja: ako je $f : S_1 \to \mathbb{R}^3_1$ glatko preslikavanje na plohi S_1 i ako je S_2 regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ takva da je $f(S_1) \subseteq S_2$, tada je f zapravo glatko preslikavanje između ploha S_1 i S_2. Ova tvrdnja biti će nam posebno potrebna nešto kasnije kada ćemo proučavati Gaussovo preslikavanje za koje će se upravo pomoću ove napomene pokazati da je glatko preslikavanje između ploha.

Za kraj odredimo što bi to bio diferencijal glatkog preslikavanja na plohi. Ideja vodilja će nam ovdje biti poopćiti diferencijal u smjeru vektora kakvu smo imali za funkcije više varijabili. U tu svrhu istaknimo iduću lemu i zatim proučimo kako se preslikavaju tangencijalni vektori plohe prilikom glatkog preslikavanja između ploha.

Lema 3.1.16. Neka su S_1 i S_2 regularne plohe u $\mathbb{R}^3_1$ te $F : S_1 \to S_2$ glatko preslikavanje između njih. Ako je $\alpha : I \to S_1$ parametrizirana krivulja, tada je $F \circ \alpha : I \to S_2$ također parametrizirana krivulja.

Definicija 3.1.17. Neka su S_1 i S_2 regularne plohe u $\mathbb{R}^3_1$, $F : S_1 \to S_2$ glatko preslikavanje između ploha te $p \in S_1$ proizvoljna točka. Uzmimo $v \in T_pS_1$ proizvoljan tangencijalni vektor - tada po definiciji postoji parametizirana krivulja $\alpha : I \to S_1$ takva da je $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = v$. Uz prethodnu Lemu 3.1.16 je tada i preslikavanje $F \circ \alpha : I \to S_2$ također parametrizirana krivulja; budući da je $F \circ \alpha(0) = F(p)$, onda je $(F \circ \alpha)'(0) \in T_{F(p)}S_2$. Na ovaj način možemo definirati preslikavanje između tangencijalnih ravnina $T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ za koje ćemo pokazati da je dobro definirano (dakle da ne ovisi o izboru parametrizirane krivulje α). Tada uvodimo oznaku

$$\mathrm{d}F_p : T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2 \quad , \quad \mathrm{d}F_p(v) := (F \circ \alpha)'(0)$$

i to preslikavanje nazivamo diferencijal glatkog preslikavanja F.

Iduća propozicija pokazuje da je ova definicija zaista dobra, ali ona nam govori i nešto više.

Propozicija 3.1.18. Neka su S_1 i S_2 regularne plohe u $\mathbb{R}^3_1$, $F : S_1 \to S_2$ glatko preslikavanje između ploha te $p \in S_1$ proizvoljna točka. Označimo s $v \in T_pS_1$ proizvoljan tangencijalni vektor. Tada za proizvoljne krivulje $\alpha, \beta : I \to S_1$ vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v\\ \beta(0) = p, \beta'(0) = v\end{array}\right\} \implies (F \circ \alpha)'(0) = (F \circ \beta)'(0).$$

Posebno, definicija diferencijala glatkog preslikavanja $\mathrm{d}F_p$ je dobra. Štoviše, preslikavanje $\mathrm{d}F_p : T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ je linearno preslikavanje između vektorskih prostora.

Za diferencijal glatkih preslikavanja između ploha se u Diferencijalnoj topologiji pokazuje da su poopćenje diferencijala preslikavanja $\Omega \to \mathbb{R}^m$, gdje je Ω otvoren podskup od nekog $\mathbb{R}^n$. Preciznije, pokazuje se da ako je $\hat{F}$ proširenje preslikavanja F u smislu definicije 1-glatkoće, tada je zapravo $\mathrm{D}(\hat{F})(p)|_{T_pS_1} = \mathrm{d}F_p$. Kao što smo i najavili, diferencijal glatkog preslikavanja bit će nam ključan u idućoj sekciji kada ćemo se baviti zakrivljenošću plohe.

3.2 Prva i druga fundamentalna forma te Gaussovo preslikavanje. Gaussova i srednja zakrivljenost

Sad kada smo razvili osnovne pojmove vezane uz plohe Lorentz-Minkowsijevog prostora potpuno smo spremni za proučavanje njihove geometrije. U ovoj sekciji, analogno teoriji razvijenoj za euklidski prostori, uvodimo geometrijske pojmove vezane za plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$ pa će oni sasvim ovisiti o Lorentzovoj metrici $\langle\, , \rangle$. Prva na redu nam je, naravno, prva fundamentalna forma - ona je u euklidskom prostoru predstavljala način mjerenja lokalnih veličina na plohi (poput duljine krivulja, kuta između tangencijalnih vektora pa i površine). Time, prva fundamentalna forma predstavlja intrinzično svojstvo plohe, jer ta mjerenja činimo bez izlaženja u trodimenzionalni ambijent; na primjer, u [1, str. 169] možemo vidjeti kako je poznavanje prve fundamentalne forme ekvivalentno poznavanju duljina krivulja na plohi. Mi se doduše u ovom radu nismo uopće bavili duljinom krivulja, no sama ideja prve fundamentalne forme ostaje ista. Prve fundamentalne forme u $\mathbb{R}^3_1$ smo se zapravo već (prešutno) dotakli u Definiciji 3.1.6 kada smo klasificirali točke regularne plohe na prostorne, vremenske i svjetlosne, ali sada ju formalno uvodimo:

Definicija 3.2.1. Neka je S regularna ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ te $p \in S$ proizvoljna njena točka. Tada za induciranu metriku $\langle\ ,\ \rangle_p$ tangencijalne ravnine T_pS označavamo s

$$\mathrm{I}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{I}_p(v,w) = \langle v,w\rangle_p = \langle v,w\rangle$$

i kažemo da je prva fundamentalna forma plohe S u točki p.

Za prvu fundamentalnu formu koristit ćemo obje oznake, I_p i $\langle\ ,\ \rangle_p$. Naglasimo (ponovno) da je I_p simetričan bilinearan funkcional definiran na vektorskom prostoru T_pS. Još napomenimo da se u nekim literaturama prva fundamentalna forma plohe u točki definira kao kvadratni funkcional[2] $v \mapsto \mathrm{I}_p(v,v)$ generiran bilinearnim funkcionalom I_p - doduše, lako se pokaže da je poznavanje tog kvadratnog funkcionala ekvivalentno poznavanju metrike $\langle\ ,\ \rangle_p$ koristeći *polarizacijski identitet*:

$$\langle v,w\rangle_p = \frac{1}{4}\big(\langle v+w, v+w\rangle_p - \langle v-w, v-w\rangle_p\big).$$

Stoga nije toliko bitno koja se definicija zapravo koristi, a mi smo napravili takav izbor u DEFINICIJI 3.2.1 radi jednostavnije primjene.

Lokalna mjerenja na plohi izvodit ćemo pomoću prve fundamentalne forme obzirom na lokalne parametrizacije. Budući da je I_p bilinearni funkcional definiran na vektorskom prostoru T_pS, tada se I_p u nekoj bazi prostora T_pS zapisuje kao (simetrična) bilinearna forma (pogledati SEKCIJU 1.1). Prisjetimo li se NAPOMENE 3.1.5 možemo vidjeti da je u ovoj situaciji najprirodnija baza koju možemo odabrati jest ona koja je inducirana od strane lokalne parametrizacije. Taj prikaz u obliku bilinearne forme bit će nam važan te stoga formalno uvodimo definiciju.

Definicija 3.2.2. Neka je $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$. Fiksirajmo proizvoljnu točku $p = \varphi(u,v) \in S$; tada znamo da lokalna parametrizacija φ inducira bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$ tangencijalne ravnine T_pS u toj točki. Zapisivanjem metrike $\langle , \rangle_p$ kao bilinearne forme pomoću te baze dobivamo da je

$$\langle v,w\rangle_p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle\partial_1,\partial_2\rangle_p & \langle\partial_1,\partial_2\rangle_p \\ \langle\partial_2,\partial_1\rangle_p & \langle\partial_2,\partial_2\rangle_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = V^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} W,$$

gdje su V i W prikazi vektora $v, w \in T_pS$ u induciranoj bazi $\{\partial_1, \partial_2\}$ te su oznake E, F i G definirane s

$$\begin{aligned} E &:= \langle\partial_1,\partial_1\rangle_p, \\ F &:= \langle\partial_1,\partial_2\rangle_p = \langle\partial_2,\partial_1\rangle_p, \\ G &:= \langle\partial_2,\partial_2\rangle_p. \end{aligned}$$

[2] Ovo preslikavanje nije linearno. Kvadratni funkcionalni generirani bilinearnim funkcionalima općenito nisu linearna preslikavanja

Vrijednosti E, F i G na ovaj način definiramo za sve $(u,v) \in U$ i time su to dobro definirana preslikavanja
$$E, F, G : U \to \mathbb{R}$$
koja zovemo metrički koeficijenti plohe S obzirom na lokalnu parametrizaciju φ.

Napomena 3.2.3. Istaknimo da su preslikavanja E, F i G glatka preslikavanja $U \to \mathbb{R}$. Zaista, u Napomeni 3.1.5 smo vidjeli da je $\partial_1 = \varphi_u : U \to \mathbb{R}$ i $\partial_2 = \varphi_v : U \to \mathbb{R}$ otkuda direktno zaključujemo da su metrički koeficijenti E, F i G glatka preslikavanja (jer je φ glatko preslikavanje). Štoviše, metričke koeficijente dane lokalnom parametrizacijom φ možemo izrazit i kao

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \quad , \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \quad , \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

a te izraze ćemo u računu i češće koristiti.

Metrički koeficijenti plohe bit će nam glavni alat pri vršenju lokalnih mjerenja na plohi. Kao što smo to napravili u euklidskoj geometriji, uvedimo još jednu veličinu koja će se često pojavljivati u računu:

Definicija 3.2.4. Neka je $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S u Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ te neka su E, F i G metrički koeficijenti dani tom lokalnom parametrizacijom. Tada definiramo preslikavanje

$$W : U \to \mathbb{R} \quad , \quad W := \det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2.$$

Napomena 3.2.5. Jasno nam je da je preslikavanje W glatko, budući da su E, F i G glatka preslikavanja. Štoviše, primijetimo da po formulama iz Napomene 3.2.3 W možemo zapisati kao

$$W = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2$$

gdje izraz s desne strane jednakosti možemo prepoznati kao dio Lagrangeovog identiteta! Naime, primjenom tvrdnje Propozicije 1.2.17 odavde zaključujemo da je

$$W = -\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_u \times \varphi_v \rangle. \tag{3.4}$$

Koristeći ovu jednakost sada lako možemo vidjeti da za proizvoljan $p = \varphi(q) \in S$ vrijede ekvivalencije:

$$W(q) > 0 \Longleftrightarrow S \text{ je prostorna ploha u točki } p,$$
$$W(q) = 0 \Longleftrightarrow S \text{ je svjetlosna ploha u točki } p,$$
$$W(q) < 0 \Longleftrightarrow S \text{ je vremenska ploha u točki } p.$$

Naime, prisjetimo li se dokaza tvrdnje iz Napomene 3.1.8 možemo vidjeti da smo tamo pokazali da vrijedi da je

$$T_pS \text{ prostorni potprostor } \Longleftrightarrow \langle \varphi_u(q) \times \varphi_v(q), \varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \rangle < 0,$$

a analogno bi se pokazalo i da je

$$\begin{aligned} T_pS \text{ svjetlosni potprostor } &\Longleftrightarrow \langle \varphi_u(q) \times \varphi_v(q), \varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \rangle = 0, \\ T_pS \text{ vremenski potprostor } &\Longleftrightarrow \langle \varphi_u(q) \times \varphi_v(q), \varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \rangle > 0. \end{aligned}$$

Prema tome, kombinirajući ove tri tvrdnje s jednakošću (3.4) direktno vidimo da uistinu vrijede tražene ekvivalencije.

Gaussovo preslikavanje

Slijedeći geometrijski alat koji uvodimo jest Gaussovo preslikavanje čiji će nam diferencijal biti ključan pri proučavanju zakrivljenosti plohe. Tu je riječ o glatkom preslikavanju na plohi koje svakoj točki plohe pridružuje jedinični normalni vektor plohe. Razlog zašto biramo baš jedinične vektore jest taj što ne želimo da diferencijal tog preslikavanja ovisi o duljini vektora, već samo o njihovom smjeru (slična stvar je bila kod krivulja gdje smo zakrivljenost izvlačili iz derivacije jediničnog tangencijalnog vektora). Stoga, prije same definicije Gaussovog preslikavanja potrebno je komentirati normalne vektore plohe u prostoru $\mathbb{R}^3_1$.

Definicija 3.2.6. Neka je S regularna ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in S$ proizvoljna njena točka. Tada za svaki vektor $v \in (T_pS)^\perp \setminus \{0\}$ kažemo da je <u>normalan vektor</u> na plohu S u točki p. Štoviše, ako je vektor v još i jedinični vektor, tada kažemo da je to <u>jedinični normalni vektor</u> na plohu S u točki p.

U euklidskom prostoru jedinične normale plohe lokalno jednostavno dobivamo pomoću lokalnih parametrizacija na slijedeći način: ako je $\varphi : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe, tada ona inducira bazu $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ tangencijalne ravnine T_pS u točki plohe $p = \varphi(x, y)$ otkuda lako slijedi da je vektor $\partial_1|_p \times_{\mathrm{E}} \partial_2|_p$ ortogonalan (obzirom na euklidsku metriku) na tangencijalnu ravninu T_pS pa skaliranjem tog vektora dobivamo traženu jediničnu normalu. U Lorentz-Minkowsijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ stvar je slična, ali bitno drugačija. Naime, vektor $\partial_1|_p \times \partial_2|_p$ je u $\mathbb{R}^3_1$ ortogonalan na $\operatorname{span}\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\} = T_pS$ (Propozicija 1.2.37), ali on može biti svjetlosni vektor (Primjer 1.2.38 i Slika 1.6) - iz tog razloga normalni vektor plohe S u točki p općenito nećemo moći normirati. Situacija je slijedeća: pomoću Propozicije 1.2.30 vidimo da za tangencijalnu ravninu T_pS (isto kao i u euklidskom prostoru) vrijedi

$$\dim(T_pS)^\perp = 1$$

i to pokazuje da normalni vektor postoji u svakoj točki plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$. Štoviše, kada je $(T_pS)^\perp$ prostorni ili vremenski potprostor, tada postoje točno dva jedinična normalna vektora plohe S u točki p. S druge strane, ako je $(T_pS)^\perp$ svjetlosni potprostor, onda je svaki normalni vektor Lorentzove norme 0 i ne postoji jedinična normala plohe u toj točki. Baš taj slučaj predstavlja nam problem pri definiciji Gaussovog preslikavanja (općenito) na plohama Lorentz-Minkowsijevog prostora jer tada nismo u mogućnosti definirati jediničnu normalu prostora. Iz tog razloga Gaussovo preslikavanje ćemo definirati isključivo na plohama prostora $\mathbb{R}^3_1$ koje su u svakoj točki prostorne ili vremenske plohe.

Pokažimo da je tada riječ baš o prostornim plohama i vremenskim plohama; postupamo slično kao što smo to radili kod krivulja u u diskusiji prije Teorema 2.1.10 (na stranici 80). Naime, ako je S ploha koja je u svakoj svojoj točki prostorna ili vremenska ploha, tada prema Napomeni 3.1.8 skup S možemo zapisati kao disjunktnu uniju skupova U i V otvorenih u S, gdje je U skup svih točaka u kojoj je S prostorna ploha, a V skup svih točaka u kojoj je S vremenska ploha. Budući da je S po definiciji povezan skup, tada nužno slijedi da je jedan od skupova U ili V prazan skup. Dakle, zaključujemo da je $S = U$ ili $S = V$ pa je S prostorna ploha ili vremenska ploha. Sada konačno slijedi

Definicija 3.2.7. Neka je S prostorna ili vremenska ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$. Kažemo da je preslikavanje $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ Gaussovo preslikavanje na plohi S, ako je N glatko preslikavanje na plohi S koje zadovoljava

$$(\forall p \in S)\, N(p) \in (T_pS)^\perp \text{ i } \|N(p)\| = 1.$$

Istaknimo da Gaussovo preslikavanje možemo jednostavno dobiti na lokalnoj razini koristeći lokalne parametrizacije, što smo već mogli vidjeti i ranije kroz ovo poglavlje. Naime, ako je φ lokalna parametrizacija prostorne ili vremenske plohe S, tada koristeći induciranu bazu po Propoziciji 1.2.37 lako vidimo da je za sve $q \in U$ vektor $\partial_1(q) \times \partial_2(q)$ ortogonalan na ravninu T_pS, gdje je smo označili $p = \varphi(q)$. Taj vektor općenito nije jedinični pa normiranjem dobivamo da je za sve $q \in U$ vektor $\frac{\partial_1(q)\times\partial_2(q)}{\|\partial_1(q)\times\partial_2(q)\|}$ jedinični normalni vektor na plohu S u točki $\varphi(q)$. Da je preslikavanje

$$U \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad q \mapsto \frac{\partial_1(q) \times \partial_2(q)}{\|\partial_1(q) \times \partial_2(q)\|}$$

glatko preslikavanje što lako provjeravamo uz činjenicu da su ∂_1 i ∂_2 glatka preslikavanja (Napomena 3.1.5), Lemi 2.2.6 i činjenici da je $\partial_1 \times \partial_2$ svuda prostorni ili vremenski vektor. Konačno, da bismo od ovog preslikavanja dobili Gaussovo preslikavanje na plohi $\varphi(U)$ potrebno ga je još samo komponirati s φ^{-1} tako da dobijemo preslikavanje

$$\varphi(U) \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \frac{\partial_1 \times \partial_2}{\|\partial_1 \times \partial_2\|} \circ \varphi^{-1}$$

za koje se lako uspostavi da je zaista glatko preslikavanje po Definiciji 3.1.10.

S druge strane, ako je N neko odabrano Gaussovo preslikavanje prostorne ili vremenske plohe S i $\varphi : U \to S$ proizvoljna lokalna parametrizacija, tada po neprekidnosti lako ustanovljujemo da na $\varphi(U)$ mora vrijediti

$$N = \frac{\partial_1 \times \partial_2}{\|\partial_1 \times \partial_2\|} \circ \varphi^{-1} \quad \text{ili} \quad N = -\frac{\partial_1 \times \partial_2}{\|\partial_1 \times \partial_2\|} \circ \varphi^{-1}.$$

Mi ćemo nekad htjeti da nam baš vrijedi prva jednakost, a nju zapravo možemo uvijek postići promatranjem lokalne parametrizacije $\psi(v, u) := \varphi(u, v)$ na mjesto lokalne parametrizacije φ (da je ψ zaista lokalna parametrizacija i da se za nju dobije tražena jednakost lako se provjeri pa detalje ovdje izostavljamo). U tu svrhu uvodimo i idući pojam:

Definicija 3.2.8. Neka je $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ Gaussovo preslikavanje na plohi S i $\varphi : U \to S$ neka njena lokalna parametrizacija. Kažemo da se lokalna parametrizacija φ slaže s Gaussovim preslikavanje N, ako na $\varphi(U)$ vrijedi jednakost

$$N = \frac{\partial_1 \times \partial_2}{\|\partial_1 \times \partial_2\|} \circ \varphi^{-1}.$$

Dakle, kao što smo komentirali prije same definicije, uvijek možemo izabrati lokalnu parametrizaciju koja se slaže s Gaussovim preslikavanjem. Promotrimo sada nešto pobliže Gaussovo preslikavanje; za početak primijetimo da vrijede iduće tvrdnje napomene.

Napomena 3.2.9. Neka je S regularna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ Gaussovo preslikavanje na S. Tada je N glatko preslikavanje između ploha - zaista, vrijede iduće dvije točke:

- ako je S vremenska ploha, tada je N glatko preslikavanje između ploha S i $\mathbb{S}^2_1$, dakle Gaussovo preslikavanje glasi

$$N : S \to \mathbb{S}^2_1,$$

- ako je S prostorna ploha, tada je N glatko preslikavanje između ploha S i $\mathbb{H}^2$ ili između ploha S i $-\mathbb{H}^2$, dakle ono glasi

$$N : S \to \mathbb{H}^2 \quad \text{ili} \quad N : S \to -\mathbb{H}^2.$$

Naime, kada je S vremenska ploha, tada je svaka tangencijalna ravnina vremenski potprostor pa po PROPOZICIJI 1.2.35 zaključujemo da N mora biti prostorni vektor u svakoj točki plohe S. No pošto je $N(p)$ posebno jedinični prostorni vektor za sve $p \in S$, tada po definiciji pseudosfere $\mathbb{S}^2_1$ zaključujemo da slika preslikavanja N mora biti sadržana u $\mathbb{S}^2_1$. Konačno, budući da je N glatko preslikavanje $S \to \mathbb{R}^3_1$ kojem je slika sadržana u plohi $\mathbb{S}^2_1$, tada po NAPOMENI 3.1.15 odmah zaključujemo da je N zapravo glatko preslikavanje između ploha S i $\mathbb{S}^2_1$. S druge strane, kada je S prostorna ploha, tada analogno zaključujemo da je $N(p)$ jedinični vremenski vektor za sve $p \in S$; odavde pak zaključujemo da je slika preslikavanja N sadržana u disjunktnoj uniji $-\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2$. Pokažimo da tada slika od N mora biti sadržana u točno jednom od ovih skupova. Naime, primijetimo da je skup $\mathbb{H}^2$ sadržan skupu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ koji je otvoren u $\mathbb{R}^3_1$, te je isto tako $-\mathbb{H}^2$ sadržan u otvorenom skupu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ (gdje smo s $\mathbb{R}^+$ označili interval $\langle 0, +\infty\rangle$ i s $\mathbb{R}^-$ interval $\langle -\infty, 0\rangle$). Sada možemo raspisati skupovne jednakosti

$$\begin{aligned} S &= N^{-1}(-\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2) = N^{-1}(-\mathbb{H}^2) \cup N^{-1}(\mathbb{H}^2) \\ &= N^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-) \cup N^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

gdje su skupovi jasno disjunktni, ali i otvoreni budući da je preslikavanje N posebno i neprekidno (pa je praslika otvorenog skupa opet otvoren skup). Dakle, S smo zapisali kao uniju dva disjunktna otvorena skupa pa po povezanosti skupa S zaključujemo da je S jednak točno jednom od skupova, dok je drugi skup jednak $\emptyset$. Prema tome, imamo ili

$$S = N^{-1}(-\mathbb{H}^2) \quad \text{ili} \quad S = N^{-1}(\mathbb{H}^2)$$

otkuda nalazimo da je ili

$$N(S) \subseteq -\mathbb{H}^2 \quad \text{ili} \quad N(S) \subseteq \mathbb{H}^2.$$

Za svaki od ovih slučajeva, isto kao i u dokazu tvrdnje prve točke, pokazuje se da je N zaista preslikavanje između ploha S i $-\mathbb{H}^2$ odnosno između ploha S i $\mathbb{H}^2$.

Primijetimo sada da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Gaussovo preslikavanje prostorne plohe upravo oblika $S \to \mathbb{H}^2$ - zaista, ako je N Gaussovo preslikavanje oblika $S \to -\mathbb{H}^2$, tada je također i preslikavanje $-N$ Gaussovo preslikavanje i to oblika $S \to \mathbb{H}^2$. Od sada nadalje ćemo u obzir uzimati samo takav oblik Gaussovog preslikavanje prostornih ploha i tvrdnje koje ćemo dokazati da vrijedi vrijede za ta Gaussova preslikavanja vrijedit će također za Gaussova preslikavanja oblika $S \to -\mathbb{H}^2$, a budući se te tvrdnje dokazuju sasvim analogno nećemo ih posebno isticati.

Primijetimo da smo sada u poziciji računati diferencijal Gaussovo preslikavanja. Budući da je to glatko preslikavanje između ploha $S \to \mathbb{S}^2_1$ ili $S \to \mathbb{H}^2$, tada je njegov diferencijal preslikavanje oblika $T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2_1$ ili $T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{H}^2$, ovisno o slučaju. Tu nam sada u pomoć uskače PRIMJER 3.1.9 koji govori da je taj diferencijal zapravo endomorfizam vektorskih prostora, to jest da je u oba slučaja zapravo riječ o preslikavanju $T_pS \to T_pS$. Zaista, s jedne strane je $N(p)$ po definiciji normala prostora T_pS, dok je s druge strane po tvrdnjama (3.2) i (3.1) iz navedenog PRIMJERA dano da je $N(p)$ također normala prostora $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ odnosno $T_{N(p)}\mathbb{H}^2$, ovisno o slučaju. Odavde, radi dobro ustanovljenog odnosa dvodimenzionalnih potprostora i njihovih normala u $\mathbb{R}^3_1$ (vidi diskusiju na stranici 45) zaključujemo da imamo jednakost $T_pS = T_{N(p)}\mathbb{S}^2_1$ odnosno $T_pS = T_{N(p)}\mathbb{H}^2$ otkuda zaključujemo da je taj diferencijal zaista endofmorfizam vektorskih prostora. To preslikavanje on će nam biti posebno važno pa mu zato nadjenujemo i ime.

Definicija 3.2.10. Neka je S prostorna ili vremenska ploha te $N : S \to \mathbb{S}^2_1$ ili $N : S \to \mathbb{H}^2$ Gaussovo preslikavanje na S (ovisno o slučaju). Tada za diferencijal Gaussovog preslikavanja

$$\mathrm{d}N_p : T_pS \to T_pS$$

kažemo da je operator oblika plohe (nekad ćemo reći i Weingartenovo preslikavanje).

Kao što smo i najavili, ovaj diferencijal opisuje promjenu tangencijalne ravnine u točki, to jest ono opisuje kako se ploha u danoj točki zakrivljuje. Taj će operator biti ključan pri uvođenju pojmova koji nam sada slijede.

Gaussova i srednja zakrivljenost

Sada ćemo konačno definirati i zakrivljenost plohe Lorentz-Minkowskijevog prostora. U euklidskom se prostoru Gaussova zakrivljenost definirala kao determinanta Weingartenovog preslikavanja, dok se srednja zakrivljenost definirala kao (negativna) polovina traga Weingartenovog preslikavanja. Gaussova zakrivljenost je tu predstavljala magnitudu zakrivljenosti te ona nije ovisila o izboru Gaussovog preslikavanja (izabrati N ili $-N$), dok je predznak srednje zakrivljenosti ovisio o izboru Gaussovog preslikavanja. U Lorentz-Minkowskijevom prostoru ćemo imati analogne definicije zakrivljenosti, ali ipak nešto drugačije:

Definicija 3.2.11. Neka je S prostorna ili vremenska ploha te N pripadno Gaussovo preslikavanje. Tada definiramo Gaussovu zakrivljenost plohe S u točki $p \in S$ kao broj

$$K(p) = \begin{cases} \det(\mathrm{d}N_p) & , \ S \text{ prostorna ploha,} \\ -\det(\mathrm{d}N_p) & , \ S \text{ vremenska ploha} \end{cases} .$$

Slično, definiramo srednju zakrivljenost plohe S u točki $p \in S$ kao broj

$$H(p) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,\mathrm{trag}(\mathrm{d}N_p) & , \ S \text{ prostorna ploha}, \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{trag}(\mathrm{d}N_p) & , \ S \text{ vremenska ploha} \end{cases}.$$

Uvedemo li oznaku

$$\varepsilon := \big\langle N(p), N(p) \big\rangle,$$

tada pomoću ranije NAPOMENE 3.2.9 lako vidimo da je ε konstanta na S te da vrijedi

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & , \ S \text{ prostorna ploha}, \\ 1 & , \ S \text{ vremenska ploha} \end{cases}.$$

Prema tome, definiciju Gaussove i srednje zakrivljenosti u oba slučaja možemo objediniti formulama

$$K(p) = -\varepsilon \det(\mathrm{d}N_p) \quad \text{i} \quad H(p) = \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{trag}(\mathrm{d}N_p).$$

Da rezimiramo - prostorne plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$ nasljeđuju iste definicije kao plohe euklidskog prostora, dok vremenske plohe dobivaju predznak minus u definicijama Gaussove i srednje zakrivljenosti. Razlog tome ne možemo ovdje sasvim obrazložiti, ali jedan od glavnih razloga jest to što se primjenom određenih generalizacija zakrivljenosti (Riccijeva i skalarna zakrivljenost) na Lorentz-Minkowskijeve prostore dobiva upravo ovakva zavisnost od tipa plohe (prostorne ili vremenske). Jedan argument koji bismo ovdje mogli navesti jest slijedeći: u idućem PRIMJERU 3.2.12) pokazat ćemo da su plohe $\mathbb{S}^2_1$ i $\mathbb{H}^2$ obje plohe konstantne (Gaussove) zakrivljenosti, a za te plohe znamo da je jedna prostorna, a druga vremenska. U želji da istaknemo geometrijsku razliku između takvih ploha odlučujemo se za ovakav način definiranja njihovih zakrivljenosti, gdje će ploha $\mathbb{S}^2_1$ biti ploha konstantne pozitivne, a $\mathbb{H}^2$ ploha konstante negativne (Gaussove) zakrivljenosti (+ predznak smo pridjenuli prostornim plohama jer njihova prva fundamentalna forma, kao i kod ploha euklidskog prostora, pozitivno semidefinitna).

Primjer 3.2.12. Naime, označimo oznakom S pseudosferu $\mathbb{S}^2_1$ ili hiperboličku ravninu $\mathbb{H}^2$. Tada po PRIMJERU 3.1.9 znamo da je

$$(\forall p \in S)\, p \perp T_pS$$

što nam je u oba slučaja dano formulama (3.2) i (3.1). Odavde vidimo da definiramo li

$$N : S \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad N(p) = p$$

dobivamo preslikavanje za koje je jasno $N(p) \in (T_pS)^\perp$ i $\|N(p)\| = 1$, a po DEFINICIJI 3.1.10 odmah vidimo da je to i glatko preslikavanje na S. Prema tome, to je onda Gaussovo preslikavanje na plohi S. Diferencijal ovog preslikavanja vrlo se lako dobiva iz same DEFINICIJE 3.1.17 gdje vidimo da je ovdje zapravo

$$(\forall p \in S)\, \mathrm{d}N_p = \mathrm{id}_{T_pS}\,.$$

Konačno, uzimanjem determinante ovog operatora oblika plohe vidimo da je u oba slučaja

$$\det(\mathrm{d}N_p) = 1$$

za sve $p \in S$. Dakle, pseudosfera $\mathbb{S}^2_1$ i hiperbolička ravnina $\mathbb{H}^2$ su plohe konstantne Gaussove zakrivljenosti, i to (prema DEFINICIJI 3.2.11) redom zakrivljenosti -1 odnosno 1.

Druga fundamentalna forma i lokalne koordinate

Za računanje Gaussove i srednje zakrivljenosti potreban nam je efektivan način za računanje operatora oblika plohe (preko lokalnih parametrizacija) - u euklidskoj diferencijalnoj geometriji tu je u igru uskočila druga fundamentalna forma. U euklidskom prostoru je tu bila riječ o normalnoj zakrivljenosti (u točki p u smjeru jediničnog vektora v) za koju se pokazuje (vidi [2, str. 141–142]) da se može izrazit kao

$$\big\langle -\mathrm{d}N_p(v), v\big\rangle_{\mathrm{E}}$$

gdje je N (lokalno) Gaussovo preslikavanje. Taj izraz u suštini izražava koliko vektor v odstupa pri Weingartenovom preslikavanju. Potpuno analogno uvodimo pojam takvog bilinearnog funkcionala u Lorentz-Minkowskijev prostor i pomoću njega ćemo (isto kao u euklidskom prostoru) koristeći lokalne parametrizacije moći na jednostavan način računati operator oblika plohe.

Definicija 3.2.13. Neka je S prostorna ili vremenska ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ s Gaussovim preslikavanjem N te $p \in S$ proizvoljna njena točka. Tada definiramo bilinearan funkcional

$$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{II}_p(v, w) = \big\langle -\mathrm{d}N_p(v), w\big\rangle_p$$

i kažemo da je to <u>druga fundamentalna forma</u> plohe S (s Gaussovim preslikavanjem N) u točki p.

Isto kao što je bio slučaj i za prvu fundamentalnu formu, u nekim literaturama se druga fundamentalna forma plohe u točki definira kao kvadratni funkcional[3]

[3] Ovo preslikavanje nije linearno

$v \mapsto \mathrm{II}_p(v,v)$ generiran bilinearnim funkcionalom II_p - na isti način se pomoću polarizacijskog identiteta pokaže da je to ekvivalentno poznavanju metrike bilinearnog funkcionala II_p. Nadalje, II_p također možemo (kao bilinearni funkcional na T_pS) zapisati u obliku bilinearne forme. Pokazuje se da je to zapravo simetrična bilinearna forma, to jest da je II_p simetrični bilinearni funkcional.

Propozicija 3.2.14. Neka je S prostorna ili vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ s Gaussovim preslikavanjem N te neka je $p \in S$ proizvoljna njena točka. Tada je druga fundamentalna forma II_p simetričan bilinearan fuknecional, to jest vrijedi:

$$(\forall v, w \in T_pS)\ \mathrm{II}_p(v,w) = \mathrm{II}_p(w,v).$$

Ekvivalentno možemo to izreći tako da je operator oblika plohe $\mathrm{d}N_p$ simetričan obzirom na metriku prostora - dakle, da je

$$(\forall v, w \in T_pS)\ \big\langle \mathrm{d}N_p(v), w\big\rangle_p = \big\langle \mathrm{d}N_p(w), v\big\rangle_p.$$

DOKAZ Fiksirajmo proizvoljnu lokalnu parametrizaciju $\varphi : U \to S$ plohe S oko točke p te označimo $q \in U$ element za koji je $\varphi(q) = p$. Da bismo pokazali tvrdnju propozicije, radi linearnosti Weingartenovog preslikavanja dovoljno je uvjeriti se da je

$$\langle \mathrm{d}N_p(v), w\rangle_p = \langle \mathrm{d}N_p(w), v\rangle_p \tag{3.5}$$

na vektorima inducirane baze $\{\partial_1, \partial_2\}$ tangencijalne ravnine T_pS. Ta jednakost očito vrijedi kada je $v = \partial_1 = w$ i kada je $v = \partial_2 = w$ pa pokažimo da jednakost vrijedi i za slučaj kada je $v = \partial_1$ i $w = \partial_2$. Naime, budući da je za svaki $\hat{q} \in U$ vektor $N(\varphi(\hat{q}))$ normalan na potprostor $T_{\varphi(\hat{q})}S$, tada je on posebno ortogonalan i na elemente inducirane baze $\partial_1(\hat{q}) = \varphi_u(\hat{q})$ i $\partial_2(\hat{q}) = \varphi_v(\hat{q})$, otkuda zaključujemo da na U imamo jednakosti

$$\langle N \circ \varphi, \varphi_u\rangle = 0 \quad , \quad \langle N \circ \varphi, \varphi_v\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Sada, uzimanjem parcijalne derivacije po drugoj varijabli u točki q iz prve jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
0 &= \big\langle \partial_v(N\circ\varphi)(q), \varphi_u(q)\big\rangle + \big\langle N\circ\varphi(q), \varphi_{uv}(q)\big\rangle \\
&= \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{N\circ\varphi(q+t(0,1)) - N\circ\varphi(q)}{t}, \varphi_u(q)\right\rangle + \big\langle N\circ\varphi(q), \varphi_{uv}(q)\big\rangle \\
&= \big\langle \mathrm{d}N_{\varphi(q)}(\varphi_v(q)), \varphi_u(q)\big\rangle + \big\langle N\circ\varphi(q), \varphi_{uv}(q)\big\rangle \\
&= \big\langle \mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_1\big\rangle_p + \big\langle N\circ\varphi(q), \varphi_{uv}(q)\big\rangle,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili DEFINICIJU 3.1.17 i činjenicu da je derivacija parametrizirane v-krivulje $t \mapsto \varphi(q + t(0,1))$ u točki 0 jednaka upravo $\varphi_v(q)$

(NAPOMENA 3.1.5) te smo na kraju uvrstili $\varphi(q) = p$, $\varphi_u(q) = \partial_1$, $\varphi_v(q) = \partial_2$ i iskoristili činjenicu da su vektori ∂_1 i $\mathrm{d}N_p(\partial_2)$ sadržani u T_pS. Sasvim analogno, uzimanjem parcijalne derivacije po prvoj varijabli u točki q iz druge jednakosti u (3.6) dobiva se

$$0 = \big\langle \mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_2 \big\rangle_p + \big\langle N \circ \varphi(q), \varphi_{vu}(q) \big\rangle. \tag{3.8}$$

Konačno, prema Schwarzovom[4] teoremu (budući da je φ glatko preslikavanje) imamo da je

$$\varphi_{uv}(q) = \varphi_{vu}(q)$$

pa izjednačavanjem jednakosti (3.7) i (3.8) dobivamo upravo traženo

$$\langle \mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p = \langle \mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_1 \rangle_p$$

pa po linearnosti diferencijala $\mathrm{d}N_p$ zaključujemo da zaista vrijedi simetričnost tog operatora, a time i tvrdnja propozicije. $\square$

U unitarnim prostorima bismo za tu tvrdnju rekli da je operator $\mathrm{d}N_p$ hermitski operator. Konačno, sada smo (kao i za prvu fundamentalnu formu) spremni definirati koeficijente kojima ćemo računati drugu fundamentalnu formu u lokalnim koordinatama.

Definicija 3.2.15. Neka je S prostorna ili vremenska ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ pripadno Gaussovo preslikavanje te neka je φ proizvoljna lokalna parametrizacija. Fiksirajmo točku $p = \varphi(u, v) \in S$; tada znamo da lokalna parametrizacija φ inducira bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$ tangencijalne ravnine T_pS. Zapisivanjem bilinearnog funkcionala II_p kao bilinearne forme pomoću te baze dobivamo da je

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(v, w) &= \langle -\mathrm{d}N_p(v), w \rangle_p \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle -\mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_1 \rangle_p & \langle -\mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p \\ \langle -\mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_1 \rangle_p & \langle -\mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_2 \rangle_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= V^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} W, \end{aligned}$$

gdje su V i W prikazi vektora $v, w \in T_pS$ u induciranoj bazi $\{\partial_1, \partial_2\}$ te su oznake e, f i g definirane sa

$$\begin{aligned} e &:= \big\langle -\mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_1 \big\rangle_p, \\ f &:= \big\langle -\mathrm{d}N_p(\partial_1), \partial_2 \big\rangle_p = \big\langle -\mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_1 \big\rangle_p, \\ g &:= \big\langle -\mathrm{d}N_p(\partial_2), \partial_2 \big\rangle_p. \end{aligned}$$

[4]Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921

Vrijednosti e, f i g na ovaj način definiramo za sve $(u,v) \in U$ i time su to dobro definirana preslikavanja

$$e, f, g : U \to \mathbb{R}$$

koja zovemo koeficijenti druge fundamentalne forme plohe S obzirom na lokalnu parametrizaciju φ.

Napomena 3.2.16. Primijetimo da smo koeficijente e, f i g zapravo sreli u dokazu prethodne Propozicije 3.2.14. Naime, iz tog dokaza može se vidjeti da smo zapravo pokazali da na cijelom U vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_v, \varphi_u \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle, \\ 0 &= \langle \mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_u, \varphi_v \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle, \end{aligned}$$

a analogno se pokazuje i da vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_u, \varphi_u \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle, \\ 0 &= \langle \mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_v, \varphi_v \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Pa budući da je $\partial_1 = \varphi_u$ i $\partial_2 = \varphi_v$ (Napomena 3.1.5), odavde iščitavamo da je

$$\begin{aligned} e &= \big\langle -\mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_u, \varphi_u \big\rangle = \big\langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \big\rangle, \\ f &= \big\langle -\mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_u, \varphi_v \big\rangle = \big\langle N \circ \varphi, \varphi_{vu} \big\rangle, \\ f &= \big\langle -\mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_v, \varphi_u \big\rangle = \big\langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \big\rangle, \\ g &= \big\langle -\mathrm{d}N_\varphi \circ \varphi_v, \varphi_v \big\rangle = \big\langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \big\rangle. \end{aligned}$$

Odavde sada konačno vidimo da su preslikavanja e, f i g zapravo glatka preslikavanja $U \to \mathbb{R}$ (jer je N glatko preslikavanje na plohi S te su sve parcijalne derivacije od φ također glatke). Konačno, u slučaju da se lokalna parametrizacija φ slaže s Gaussovim preslikavanje N, tada zapravo imamo

$$N \circ \varphi = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

otkuda još dobivamo formule

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \big\rangle = \frac{1}{\sqrt{|W|}}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \big\rangle \overset{1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{|W|}} \det\big(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu}\big), \\ f &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{vu} \big\rangle = \frac{1}{\sqrt{|W|}}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{vu} \big\rangle \overset{1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{|W|}} \det\big(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv}\big), \\ f &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uv} \big\rangle = \frac{1}{\sqrt{|W|}}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uv} \big\rangle \overset{1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{|W|}} \det\big(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vu}\big), \\ g &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{vv} \big\rangle = \frac{1}{\sqrt{|W|}}\big\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{vv} \big\rangle \overset{1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{|W|}} \det\big(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv}\big), \end{aligned}$$

gdje smo u drugim jednakostima primijenili formulu (3.4) iz NAPOMENE 3.2.5.

Konačno, odredimo kako izgleda operator oblika plohe u lokalnim koordinatama:

Propozicija 3.2.17. Neka je S prostorna ili vremenska ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ pripadno Gaussovo preslikavanje te neka je φ proizvoljna lokalna parametrizacija. Tada je za svaki $p = \varphi(u, v) \in S$ matrični prikaz operatora oblika plohe $\mathrm{d}N_p$ obzirom na induciranu bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$ prostora T_pS dan s

$$-\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

što raspisivanjem daje

$$-\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}.$$

DOKAZ Ova tvrdnja posljedica je jednakosti bilinearnih funkcionala

$$(v, w) \mapsto \mathrm{II}_p(v, w) \quad \text{i} \quad (v, w) \mapsto \mathrm{I}_p(-\mathrm{d}N_p(v), w)$$

otkuda zbog jedinstvenosti matrice bilinearnog funkcionala (u odabranoj bazi) slijedi da matrice ovih funkcionala moraju biti jednake. U tu svrhu označimo s M matricu linearnog operatora $\mathrm{d}N_p$ obzirom na induciranu bazu $\{\partial_1, \partial_2\}$. Sada s jedne strane imamo da je matrica bilinearnog funkcionala II_p u toj bazi dana s

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

S druge pak strane, koristeći činjenicu da je

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

matrica bilinearnog funkcionala I_p u induciranoj bazi, možemo računati:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(-\mathrm{d}N_p(v), w) &= (-MV)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} W \\ &= V^{\mathrm{T}} \left(-M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) W, \end{aligned}$$

gdje su V i W matrične reprezentacije proizvoljnih vektora $v, w \in T_pS$ u induciranoj bazi $\{\partial_1, \partial_2\}$. Naime, budući da je V matrični prikaz vektora v i M matrični prikaz operatora $\mathrm{d}N_p$, tada je jasno matrični prikaz vektora $-dN_p(v)$ dan s $-MV$. Prema tome, po proizvoljnosti vektora $v, w \in T_pS$ zaključujemo da je matrica bilinearnog funkcionala $(v, w) \mapsto \mathrm{I}_p(-\mathrm{d}N_p(v), w)$ dana s

$$-M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Konačno, kao što smo i najavili na početku dokaza, zbog jedinstvenosti matrice bilinearnog funkcionala (u odabranoj bazi) zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = -M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Transponiranjem ove matrične jednakosti (i množenjem s -1) dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} M = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

a budući da je S prostorna ili vremenska u točki p, tada je prema Napomeni 3.2.5 imamo da je $W = EG - F^2 \neq 0$ pa je matrica metričkih koeficijenata E, F i G invertibilna. Prema tome, množenjem s inverzom dobivamo

$$\begin{aligned} M &= -\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili formulu za inverz invertibilne 2×2 matrice, čime je zaključujen dokaz ove propozicije. □

Posebno, kao korolar dobivamo efektivan način za računanje Gaussove i srednje zakrivljenosti obzirom na lokalnu parametrizaciju plohe:

Korolar 3.2.18. Neka je S prostorna ili vremenska ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i $N : S \to \mathbb{R}^3_1$ pripadno Gaussovo preslikavanje te neka je φ proizvoljna lokalna parametrizacija. Tada Gaussovu i srednju zakrivljenost u svakoj točki $p = \varphi(u, v) \in S$ možemo računati pomoću formula

$$\begin{aligned} K(p) &= \varepsilon \, \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H(p) &= \varepsilon \, \frac{1}{2} \, \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

DOKAZ Ovaj korolar direktna je posljedica DEFINICIJE 3.2.11, prethodne PROPOZICIJE 3.2.17 i jednostavnog računanja determinante i traga 2×2 matrice. $\square$

3.3 Primjeri vremenskih i svjetlosnih ploha prostora $\mathbb{R}^3_1$ i njihova svojstva

Sad kada smo razvili sve potrebne alate za ispitivanje geometrijskih svojstava ploha u Lorentz-Minkwoskijevom prostoru, vrijeme je da ih primijenimo da nekoliko primjera. Pri izboru primjera fokusirat ćemo se na vremenske i svjetlosne plohe, budući da su prostorne plohe one s pozitivno definitnom metrikom i kao takve imaju euklidske analogone.

Pravčaste plohe

Za početak ispitajmo pravčaste plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$:

Definicija 3.3.1. Neka su I i J dva otvorena intervala u $\mathbb{R}$. Tada za svako preslikavanje

$$\varphi : I \times J \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \varphi(u,v) = c(u) + vP(u)$$

kažemo da je pravčasta lokalna parametrizacija, ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna parametrizirana krivulja i $P : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizirana krivulja koja ne prolazi ishodištem. U tom slučaju kažemo da je parametrizirana krivulja c generatrisa i da je parametrizirana krivulja P direktrisa te pravčaste lokalne parametrizacije. Za podskup od $\mathbb{R}^3_1$ kažemo da je pravčasta ploha, ako je to regularna ploha koja ima atlas koji se sastoji isključivo od pravčastih lokalnih parametrizacija.

Istaknimo da za pravčastu lokalnu parametrizaciju $\varphi(u,v) = c(u) + vP(u)$ imamo:

$$\begin{aligned} &(\forall u \in I)(\forall v \in J)\ \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} \text{ je injektivno preslikavanje} \\ \iff &(\forall u \in I)(\forall v \in J)\ \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) \neq 0 \\ \iff &(\forall u \in I)(\forall v \in J)\ (\dot{c}(u) + v\dot{P}(u)) \times P(u) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pretpostavimo da pravčasta parametrizacija $\varphi : I \times J \to \mathbb{R}^3_1$, $\varphi(u,v) = c(u) + vP(u)$ parametrizira regularnu plohu u $\mathbb{R}^3_1$. Tada možemo računati pripadne metričke koeficijente kao

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \dot{c}(u), \dot{c}(u) \rangle + 2v\langle \dot{c}(u), \dot{P}(u) \rangle + v^2 \langle \dot{P}(u), \dot{P}(u) \rangle, \\ F(u,v) &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \dot{c}(u), P(u) \rangle + v\langle \dot{P}(u), P(u) \rangle, \\ G(u,v) &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle P(u), P(u) \rangle \end{aligned}$$

i tada je matrica prve fundamentalne forme dana s

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + 2v\langle \dot{c}, \dot{P} \rangle + v^2\langle \dot{P}, \dot{P} \rangle & \langle \dot{c}, P \rangle + v\langle \dot{P}, P \rangle \\ \langle \dot{c}, P \rangle + v\langle \dot{P}, P \rangle & \langle P, P \rangle \end{bmatrix}$$

Primjer 3.3.2. Uzmimo sada na mjesto krivulje c nul krivulju (dakle svjetlosnu krivulju pseudo-parametriziranu duljinom luka), a na mjesto preslikavanja P uzmimo pripadni tangencijalni vektor krivulje c kojeg označavamo s A. Tada parametrizaciju φ zovemo svjetlosna razvojna ploha (nekad kažemo i A-pravčasta ploha). Budući da je ovdje $A = \dot{c}$ svjetlosni vektor, $\dot{A}$ jedinični prostorni vektor te da je $\dot{A} \perp A$ (Napomena 2.2.2), tada lako možemo vidjeti da se matrica prve fundamentalne forme onda svodi na

$$\begin{bmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome uzmemo li na mjesto intervala J skup $\mathbb{R}^+$ ili $\mathbb{R}^-$ (to jest $\langle 0, +\infty \rangle$ ili $\langle -\infty, 0 \rangle$) dobivamo svjetlosnu plohu! Štoviše, lako vidimo da je kod ovakvih pravčastih lokalnih parametrizacija uvijek zadovoljeno (3.9), budući da se to onda svodi na $\dot{A} \times A \neq 0$ (što vidimo vrijedi za sve $u \in I$ koristeći Propoziciju 1.2.13 i Napomenu 1.2.6). Uzmimo sada konkretno svjetlosnu krivulju

$$c : I \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

iz Primjera 2.1.5, za koju smo kasnije u Primjeru 2.2.5 ustanovili da je nul krivulja čiji je tangencijalni vektor dan s

$$A(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Tada se za parametriziranu plohu

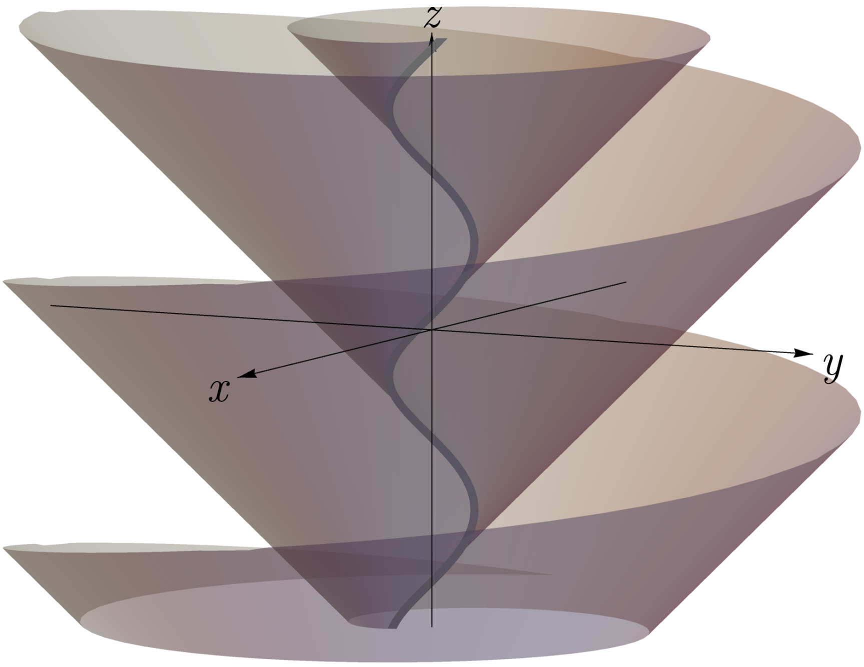
$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \varphi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v)$$

može provjeriti da ona zaista čini pravčastu plohu prostora $\mathbb{R}^3_1$ čime dobivamo još jedan primjer svjetlosnih ploha, a njen vizualni prikaz možemo vidjeti na Slici 3.5. S druge strane, uzmemo li

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) = \frac{1}{2}\big(- \sqrt{2}t, \mathrm{ch}(\sqrt{2}t), \mathrm{sh}(\sqrt{2}t)\big)$$

tada se lakim računom provjeri da je c također nul krivulja gdje je

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \mathrm{sh}(\sqrt{2}t), \mathrm{ch}(\sqrt{2}t)).$$



Slika 3.5: Parametrizirana ploha s generatrisom $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ i direktirsom $A(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

U ovom slučaju se također može pokazati da $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(u, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\sqrt{2}u) + \frac{1}{\sqrt{2}}v\operatorname{sh}(\sqrt{2}u), \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\sqrt{2}u) + \frac{1}{\sqrt{2}}v\operatorname{ch}(\sqrt{2}u) \right)$$

isto čini pravčastu plohu (napomenimo da je primjer ove plohe preuzet iz [9]).

S druge strane, u [10] možemo vidjeti da pravčasta ploha dana parametrizacijom φ nije svjetlosna (dakle ona je prostorna ili vremenska) u slijedećim slučajevima:

(1) $\dot{c}$ i P su linearno nezavisni prostorni ili vremenski vektori,

(2) $\dot{c}$ je svjetlosni vektor i P je prostorni ili vremenski vektor takav da je $\langle \dot{c}, P \rangle \neq 0$,

(3) $\dot{c}$ je prostorni ili vremenski vektor i P je svjetlosni vektor takav da je $\langle \dot{c}, P \rangle \neq 0$,

(4) $\dot{c}$ i P su svjetlosni vektori takvi da je $\langle \dot{c}, P \rangle \neq 0$.

Štoviše, tamo se pokazuje da se slučajevi (2) i (3) svode na slučajeve (1) i (4) respektivno, što je predmet iduće propozicije.

Propozicija 3.3.3. Neka je S prostorna ili vremenska pravčasta ploha. Tada S ima atlas koji se sastoji pravčastih lokalnih parametrizacija tipa (1) i (4).

DOKAZ Kao što smo komentirali, taj atlas se mora sastojati od pravčastih lokalnih parametrizacija tipa (1), (2), (3) ili (4). Mi pokazujemo da u atalsu na mjesto parametrizacija tipa (2) ili (3) lokalno možemo izabrati parametrizacije tipa (1) odnosno (4). U tu svrhu, neka je

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(u,v) = c(u) + vP(u)$$

pravčasta lokalna parametrizacija tipa (2). Tada krivulju P možemo skalirati tako da je svugdje jedinične duljine te svjetlosnu krivlju c reparametrizirati (uz prikladne promjene domene parametrizacije) tako da je

$$\langle P, P\rangle = \mu \in \{-1, 1\} \quad \text{i} \quad \langle \dot{c}, P\rangle = 1$$

na cijelom intervalu I. Tada za matricu metričkih koeficijenata obzirom na φ dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} 2v\langle \dot{c}, \dot{P}\rangle + v^2\langle \dot{P}, \dot{P}\rangle & 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix},$$

pa budući da je S nije svjetlosna ploha, a njene tangencijalne ravnine u točkama iz $\varphi(I \times J)$ sadrže svjetlosni vektor $\dot{c}$, tada po PROPOZICIJI 1.2.33 zaključujemo da ploha u tim točkama mora biti vremenska pa uz pomoć NAPOMENE 3.2.5 slijedi da za koeficijent W imamo

$$W = \mu\big(2v\langle \dot{c}, \dot{P}\rangle + v^2\langle \dot{P}, \dot{P}\rangle\big) - 1 < 0.$$

Potražimo sada parametriziranu krivulju $\hat{c}(t) = c(t) + v(t)P(t)$, takvu da je $\langle \dot{\hat{c}}, \dot{\hat{c}}\rangle = \mu$ i da su $\dot{\hat{c}}$ i P linearno nezavisni. Raspisujemo:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{c}}, \dot{\hat{c}}\rangle = \mu &\iff \langle \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P}, \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P}\rangle = \mu \\ &\iff \mu\dot{v}^2 + v^2\langle \dot{P}, \dot{P}\rangle + 2\dot{v} + 2v\langle \dot{c}, \dot{P}\rangle - \mu = 0 \\ &\iff \dot{v}^2 + 2\mu\dot{v} + \mu\big(v^2\langle \dot{P}, \dot{P}\rangle + 2v\langle \dot{c}, \dot{P}\rangle\big) - 1 = 0 \\ &\iff \dot{v}^2 + 2\mu\dot{v} + W(v) = 0 \\ &\iff \dot{v} = \mu \pm \sqrt{1 - W(v)}, \end{aligned}$$

otkuda uzimamo jednadžbu $\dot{v} = \mu + \mu\sqrt{1 - W(v)}$ pa, budući da je $W(v) < 0$, uz glatkoću preslikavanja $t \mapsto \langle \dot{c}, \dot{P} \rangle$ i $t \mapsto \langle \dot{P}, \dot{P} \rangle$ zaključujemo da prema Peanovom[5] teoremu egzistencije postoji lokalno rješenje ove obične diferencijalne jednadžbe. Primijetimo da je ovdje automatski ispunjeno i da su $\dot{\hat{c}}$ i P linearno nezavisni, budući da je

$$\langle \dot{\hat{c}}, P \rangle = \langle \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P}, P \rangle = 1 + \mu\dot{v} = 2 + \sqrt{1 - W(v)} \neq \pm\mu.$$

Sada uzimanjem parametrizirane krivulje $\hat{c}$ uz direktrisu P dobivamo da pripadna pravčasta lokalna parametrizacija (koja je po konstrukciji tipa (1)) lokalno parametrizira isti skup kao i parametrizacija φ što dokazuje traženu tvrdnju. Uzmimo sada pravčastu lokalnu parametrizaciju

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(u, v) = c(u) + vP(u)$$

te pretpostavimo da je ona tipa (3). Tada ponovno uz reparametrizaciju od c i skaliranje vektora P možemo pretpostaviti da je

$$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \mu \quad \text{i} \quad \langle \dot{c}, P \rangle = 1.$$

U ovom slučaju, za matricu metričkih koeficijenata obzirom na φ dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} \mu + 2v\langle \dot{c}, \dot{P} \rangle + v^2\langle \dot{P}, \dot{P} \rangle & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Isto, želimo pronaći parametriziranu krivulju $\hat{c}(t) = c(t) + v(t)P(t)$, no ovaj put takvu da je

$$\langle \dot{\hat{c}}, \dot{\hat{c}} \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle \dot{\hat{c}}, P \rangle \neq 0.$$

Odmah možemo vidjeti da je u svakom slučaju ispunjeno

$$\langle \dot{\hat{c}}, P \rangle = \langle \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P}, P \rangle = \langle \dot{c}, P \rangle = 1 \neq 0$$

S druge strane, raspisujemo iduće:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{c}}, \dot{\hat{c}} \rangle = 0 &\iff \langle \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P}, \dot{c} + \dot{v}P + v\dot{P} \rangle = 0 \\ &\iff \mu + v^2\langle \dot{P}, \dot{P} \rangle + 2\dot{v} + 2v\langle \dot{c}, \dot{P} \rangle = 0 \\ &\iff \dot{v} = -\frac{1}{2}\,\mu - \langle \dot{c}, \dot{P} \rangle v - \frac{1}{2}\langle \dot{P}, \dot{P} \rangle v^2. \end{aligned}$$

Odavde ponovno zbog glatkoće preslikavanja $t \mapsto \langle \dot{c}, \dot{P} \rangle$ i $t \mapsto \langle \dot{P}, \dot{P} \rangle$ pomoću Peanovog teorema egzistencije zaključujemo da postoji lokalno rješenje ove obične diferencijalne jednadžbe. Konačno, uzimanjem parametrizirane krivulje $\hat{c}$ uz direktrisu

[5] Giuseppe Peano, 1858-1932

P slijedi da pripadna pravčasta lokalna parametrizacija (koja je ovog puta tipa (4)) lokalno parametrizira isti skup kao i parametrizacija φ i time zaključujemo dokaz ove propozicije. $\square$

Prema tome, dovoljno je nadalje baviti samo s pravčastim parametrizacijama tipa (1) i (4), a mi ćemo se ovdje sada fokusirati na upravo one koje su tipa (4). Naime, tu je riječ o generatrisi koja je svjetlosna krivulja i direktrisi koja je svuda svjetlosni vektor nekolinearan s derivacijom generatrise; u tu svrhu navodimo idući teorem (koji se može naći u [10, str. 44]), a zatim i definiciju.

Teorem 3.3.4. Za fiksirane početne uvjete p i (k_0, k_1, k_2, k_3) postoji jedinstvena svjetlosna krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ i pripadna Freneteova baza $\{A, B, C\}$ takva da je $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = k_0(t)A(t)$ i da vrijede Frenet-Serreteove formule

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Napomenimo da ovdje c općenito nije pseudo-parametrizirana duljinom luka, već na pripadnu Freneteovu bazu gledamo na način kao što smo opisali na kraju Poglavlja 2 (vidi stranicu 120).

Definicija 3.3.5. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna krivulja i neka je $\{A, B, C\}$ njen Freneteov trobrid koji zajedno s krivuljom zadovoljava Frenet-Serreteove formule iz Teorema 3.3.4 za $k_0 = 1$ i $k_1 = 0$ (dakle A je tangencijalni vektor krivulje c i B je drugi svjetlosni vektor iz nul baze $\{A, B, C\}$). Tada svaku pravčastu parametriziranu plohu

$$\varphi : I \times J \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \varphi(u, v) = c(u) + vB(u)$$

nazivamo B-pravčasta ploha.

Pretpostavimo B-pravčasta ploha $\varphi(u, v) = c(u) + vB(u)$ parametrizira regularnu plohu u $\mathbb{R}^3_1$. Za početak, koristeći navedene Frenet-Serreteove formule računamo parcijalne derivacije

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= \dot{c} + v\dot{B} = A + k_3 vC, \\
\varphi_v &= B, \\
\varphi_{uu} &= \dot{A} + k_3' vC + k_3 v\dot{C} = -k_3^2 vA - k_2 k_3 vB + (k_2 + k_3' v)C, \\
\varphi_{uv} &= \dot{B} = k_3 C, \\
\varphi_{vv} &= 0.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da se metrički koeficijenti u ovom slučaju svode na

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle A, A\rangle + 2k_3 v\langle A, C\rangle + k_3^2 v^2 \langle C, C\rangle,\\
&= k_3^2 v^2,\\
F(u,v) &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle A, B\rangle + k_3 v\langle C, B\rangle,\\
&= 1,\\
G(u,v) &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle B, B\rangle = 0
\end{aligned}$$

pa za matricu prve fundamentalne forme obzirom na tu lokalnu parametrizaciju dobivamo:

$$\begin{bmatrix} k_3^2 v^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno, uzimanjem determinante dobivene matrice računamo da je koeficijent

$$W = -1$$

iz čega po Napomeni 3.2.5 slijedi da je regularna ploha vremenska u točkama lokalne parametrizacije φ. Pokušajmo odrediti i kako izgleda pripadni operator oblika plohe, a to ćemo napraviti koristeći formule dane Propozicijom 3.2.17. U tu svrhu pokušajmo odrediti lokalno Gaussovo preslikavanje na φ; naime primijetimo da je vektor N definiran kao $N \circ \varphi(u,v) := k_3 vB - C$ ortogonalan na induciranu bazu $\{\varphi_u, \varphi_v\}$:

$$\begin{aligned}
\langle k_3 vB - C, \varphi_u \rangle &= \langle k_3 B - C, A + k_3 vC\rangle\\
&= k_3\langle A, B\rangle - \langle A, C\rangle + k_3^2 v\langle B, C\rangle - k_3 v\langle C, C\rangle\\
&= k_3 v - 0 + 0 - k_3 v\\
&= 0\\
\langle k_3 vB - C, \varphi_v \rangle &= \langle k_3 B - C, B\rangle = k_3\langle B, B\rangle - \langle B, C\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Prema tome, N je ortogonalan na tangencijalne ravnine u točkama lokalne parametrizacije φ čime je N lokalno Gaussovo preslikavanje na φ. Odredimo sada koeficijente druge fundamentalne forme koristeći formule dane Napomenom 3.2.16:

$$\begin{aligned}
e &= \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \langle k_3 vB - C, -k_3^2 vA - k_2 k_3 vB + (k_2 + k_3' v)C\rangle\\
&= -k_3^3 v^2 - k_2 - k_3' v,\\
f &= \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle k_3 vB - C, k_3 C\rangle = k_3^2\langle B, C\rangle - k_3\langle C, C\rangle = -k_3,\\
g &= \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \langle k_3 vB - C, 0\rangle = 0,
\end{aligned}$$

Konačno sada možemo odrediti matricu operatora $\mathrm{d}N_{\varphi(u,v)}$ kao

$$\begin{aligned}
-\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} &= -\frac{1}{W}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & k_3^2 v^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k_3^3 v^2 - k_2 - k_3' v & -k_3 \\ -k_3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ k_2 + k_3' v & k_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da u ovom slučaju operator oblika plohe $\mathrm{d}N_{\varphi(u,v)}$ općenito nije dijagonalizabilan, i to točno u slučaju kada je $k_3 \neq \text{const.}$ ili $k_2 \neq 0$. To je sasvim različita situacija u odnosu na ono što smo navikli u klasičnoj euklidskoj trodimenzionalnoj geometriji. Za kraj, koristeći definiciju Gaussove i srednje zakrivljenosti za vremenske plohe dobivamo da je

$$K(\varphi(u,v)) = -k_3^2 \quad \text{i} \quad H(\varphi(u,v)) = k_3.$$

Zaključujemo: B-pravčaste plohe parametriziraju vremenske plohe i njihov operator oblika plohe nije dijagonalizabilan kada god je $k_3 \neq \text{const.}$ ili $k_2 \neq 0$. Štoviše, pokazuje se da vrijedi i obrat: B-pravčaste plohe su jedine plohe u $\mathbb{R}^3_1$ čiji operator oblika plohe nije dijagonalizabilan, za više informacija pogledati [10, str. 68–69].

Primjer 3.3.6. Za kraj navedimo primjer B-pravčaste plohe da se uvjerimo da one zaista i postoje. Ovdje ponovno možemo uzeti svjetlosnu krivulju

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

iz Primjera 2.1.5. U Primjeru 2.2.5 smo ustanovili da je to nul krivulja (dakle, svjetlosna krivulja pseudo-parametrizirana duljinom luka) kojoj su vektor binormale i pseudotorzija dani s

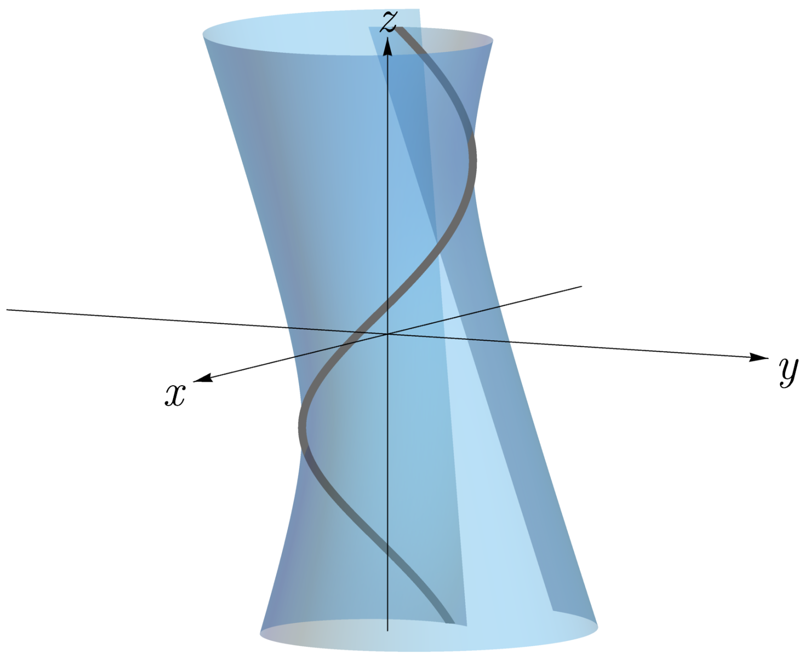
$$B(t) = \frac{1}{2}(\sin t, -\cos t, -3) \quad \text{i} \quad \tau = \frac{1}{2}.$$

Dakle, ovdje promatramo B-pravčastu plohu danu parametrizacijom

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad \varphi(u,v) = \frac{1}{2}(2\cos u + v \sin u, 2\sin u - v\cos u, 2u - 3v).$$

Sada, obzirom na zapis Frenet-Serreteovih formula iz Teorema 3.3.4 ovdje imamo da je

$$k_0 = 1 \quad , \quad k_1 = 0 \quad , \quad k_2 = 1 \quad , \quad k_3 = -\frac{1}{2}.$$



Slika 3.6: B-pravčasta ploha s generatrisom $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ i direktrisom $B(t) = \frac{1}{2}(\sin t, -\cos t, -3)$

Prema tome, iz prethodnih računa zaključujemo da je ovdje operator oblika plohe dan matricom

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

obzirom na induciranu bazu od strane lokalne parametrizacije φ, dok su Gaussova i srednja zakrivljenost dane s

$$K = -\frac{1}{4} \quad \text{i} \quad H = -\frac{1}{2}.$$

Za kraj ostavljamo vizualni prikaz B-pravčaste plohe φ na Slici 3.6.

Rotacijske plohe

Pozabavimo se za kraj s rotacijskim plohama Lorentz-Minkowskijevog prostora. Naime, u Sekciji 1.3 smo između ostalog proučili i rotacije oko osi u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ (to su bile Lorentzove transformacije koje su fiksirale pravac kroz ishodište po točkama).

U Propoziciji 1.3.10 smo pokazali da postoje tri klase rotacija Lorentz-Minkowskijevog prostora i te klase određene su pripadnim parametrima - mi ćemo ovdje proučavati familije Lorentzovih transformacija iz pojedine klase rotacija određenih tim parametrima iz nekog otvorenog intervala. Bez daljnjeg, slijedi

Definicija 3.3.7. Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ s osi rotacije V, ako je to regularna ploha koja se sastoji od točaka danih kao unija djelovanja familije Lorentzovih transformacija na trag regularne parametrizirane krivulje, gdje je ta familija Lorentzovih transformacija iz jedne od tri klase rotacija oko jednodimenzionalnog potprostora V i koje su određene pripadnim parametrima iz nekog otvorenog intervala, dok je regularna parametrizirana krivulja ravninska krivulja koja leži u nekoj ravnini koja sadrži potprostor V.

Cilj nam je odrediti kako izgledaju sve rotacijske plohe Lorentz-Minkowskijevog prostora. Idućom propozicijom određujemo sve prostorne i vremenske rotacijske plohe u $\mathbb{R}^3_1$, gdje iz razmatranja posebno izbacujemo svjetlosne rotacijske plohe. Naime, za svjetlosne rotacijske plohe se može pokazati (vidi [9, str. 272–274]) da su one nužno dijelovi stošca $\mathcal{C}^+$ i $\mathcal{C}^-$ ili da su dio svjetlosne ravnine (dakle ravnine paralelne sa svjetlosnim dvodimenzionalnim potprostorom) pa nam iz tog razloga svjetlosne rotacijske plohe nisu osobito zanimljive.

Propozicija 3.3.8. Neka je S prostorna rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ s rotacijskom osi V. Vrijedi slijedeće.

(S1) Ako je V prostorni potprostor, tada

$$(\exists\{a_1, a_2, a_3\} \text{ ortonormirana baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} a_3)$$
$$(\exists\varphi : I \times J \to S)(\exists t \mapsto (c_1(t), 0, c_3(t)) \text{ prostorna krivulja}, c_1(t) \neq 0)$$
$$\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ 0 \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t)\operatorname{ch}\theta \\ c_1(t)\operatorname{sh}\theta \\ c_3(t) \end{bmatrix},$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$.

(S2) Ako je V vremenski potprostor, tada

$$(\exists\{a_1, a_2, a_3\} \text{ ortonormirana baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} a_1)$$
$$(\exists\varphi : I \times J \to S)(\exists t \mapsto (c_1(t), c_2(t), 0) \text{ prostorna krivulja}, c_2(t) \neq 0)$$
$$\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t)\cos\theta \\ c_2(t)\sin\theta \end{bmatrix},$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$.

(S3) Ako je V svjetlosni potprostor, tada

$$
\begin{gathered}
(\exists\{A,B,C\} \text{ nul baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} B)\\
(\exists\varphi : I\times J \to S)(\exists t\mapsto (c_1(t),c_2(t),0) \text{ prostorna krivulja}, c_1(t)\neq 0)\\
\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{\theta^2}{2} & 1 & \theta\\ -\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1(t)\\ c_2(t)\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t)\\ -\frac{\theta^2}{2}\,c_1(t)+c_2(t)\\ \theta\, c_1(t)\end{bmatrix},
\end{gathered}
$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{A,B,C\}$.

Propozicija 3.3.9. Neka je S vremenska rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ s rotacijskom osi V. Vrijedi slijedeće.

(L1) Ako je V prostorni potprostor, tada ili

$$
\begin{gathered}
(\exists\{a_1,a_2,a_3\} \text{ ortonormirana baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} a_3)\\
(\exists\varphi : I\times J \to S)(\exists t\mapsto (0,c_2(t),c_3(t)) \text{ parametrizirana krivulja}, c_2(t)\neq 0)\\
\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ c_2(t)\\ c_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2(t)\operatorname{sh}\theta\\ c_2(t)\operatorname{ch}\theta\\ c_3(t)\end{bmatrix},
\end{gathered}
$$

ili

$$
\begin{gathered}
(\exists\{a_1,a_2,a_3\} \text{ ortonormirana baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} a_3)\\
(\exists\varphi : I\times J \to S)(\exists t\mapsto (c_1(t),0,c_3(t)) \text{ vremenska krivulja}, c_1(t)\neq 0)\\
\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1(t)\\ 0\\ c_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t)\operatorname{ch}\theta\\ c_1(t)\operatorname{sh}\theta\\ c_3(t)\end{bmatrix},
\end{gathered}
$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{a_1,a_2,a_3\}$.

(L2) Ako je V vremenski potprostor, tada

$$
\begin{gathered}
(\exists\{a_1,a_2,a_3\} \text{ ortonormirana baza od } \mathbb{R}^3_1, V = \operatorname{span} a_1)\\
(\exists\varphi : I\times J \to S)(\exists t\mapsto (c_1(t),c_2(t),0) \text{ vremenska krivulja}, c_2(t)\neq 0)\\
\varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1(t)\\ c_2(t)\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t)\\ c_2(t)\cos\theta\\ c_2(t)\sin\theta\end{bmatrix},
\end{gathered}
$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{a_1,a_2,a_3\}$.

(L3) Ako je V svjetlosni potprostor, tada

$$(\exists\{A,B,C\} \text{ nul baza od } \mathbb{R}^3_1, V=\operatorname{span} B)$$
$$(\exists\varphi : I\times J\to S)(\exists t\mapsto (c_1(t),0,c_3(t)) \text{ vremenska krivulja}, c_1(t)\neq 0)$$
$$\varphi(t,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{\theta^2}{2} & 1 & \theta\\ -\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(t)\\ 0\\ c_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1(t)\\ -\frac{\theta^2}{2}\,c_1(t)+c_3(t)\\ \theta\, c_1(t)\end{bmatrix},$$

gdje su matrični prikazi dani obzirom na navedenu bazu $\{A,B,C\}$.

DOKAZ OBJE PROPOZICIJE Tvrdnje ovih dviju propozicija dokazat ćemo istovremeno budući da su dokazi gotovo isti. Naime, neka je S proizvoljna prostorna ili vremenska rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i neka je V pripadna os rotacije. Također, označimo s P ravninu (dvodimenzionalni potprostor) koja sadrži os V i regularnu parametriziranu krivulju $c: I\to\mathbb{R}^3_1$. Dokaz rastavljamo po slučajevima ovisno o tipu jednodimenzionalnog potprostora V.

$\boxed{1}$ Pretpostavimo da je V prostorni potprostor te označimo s a_3 neki jedinični vektor koji ga razapinje. Ovdje ravnina P može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni potprostor pa razmatramo slučajeve.

P prostorni potprostor Jasno nam je da je a_3 sadržan u P, a tada možemo naći i još jedan (prostorni) vektor $a_2\in P$ takav da je $a_2\perp a_3$ (tu tvrdnju zapravo nismo dokazali, ali to se može relativno jednostavno dobiti primjenom teorije iz POGLAVLJA 1). Prema tome, $\{a_2,a_3\}$ stoga čini ortonormiranu bazu prostora P te se ona po PROPOZICIJI 1.2.21 proširuje do ortonormirane baze $\{a_1,a_2,a_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$. Istaknimo da su ovdje a_2 i a_3 prostorni vektori (kao elementi prostornog potprostora, PROPOZICIJA 1.2.33) i da je onda a_1 vremenski vektor. Budući da c leži u ravnini P, tada jasno postoje glatka preslikavanja $c_2,c_3: I\to\mathbb{R}$ takva da je $c(t)=c_2(t)a_2+c_3(t)a_3$ za sve $t\in I$. Sada pozivanjem na PROPOZICIJU 1.3.10 vidimo da su rotacije oko osi V u ovoj bazi nužno tipa

$$\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

za neke parametre $\theta\in\mathbb{R}$. Prema definiciji rotacijskih ploha zaključujemo da ju tada možemo parametrizirati preslikavanjem

$$\varphi : I\times J\to S \quad , \quad \varphi(t,\theta)=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ c_2(t)\\ c_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2(t)\operatorname{sh}\theta\\ c_2(t)\operatorname{ch}\theta\\ c_3(t)\end{bmatrix},$$

gdje je J pripadni otvoreni interval iz definicije, dok su matrični prikazi dani obzirom na bazu $\{a_1,a_2,a_3\}$. Budući da je φ parametrizacije regularna plohe, tada za nju možemo računati metričke koeficijente pa u tu svrhu deriviramo:

$$\varphi_t = \begin{bmatrix}\dot c_2(t)\operatorname{sh}\theta & \dot c_2(t)\operatorname{ch}\theta & \dot c_3(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$
$$\varphi_\theta = \begin{bmatrix}c_2(t)\operatorname{ch}\theta & c_2(t)\operatorname{sh}\theta & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T}.$$

Sada koristeći činjenicu da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ *vpp*-ortonormirana baza računamo

$$\begin{aligned}E &= \langle\varphi_t,\varphi_t\rangle = -\dot c_2(t)^2\operatorname{sh}^2\theta + \dot c_2(t)^2\operatorname{ch}^2\theta + \dot c_3(t)^2 = \dot c_2(t)^2 + \dot c_3(t)^2,\\ F &= \langle\varphi_t,\varphi_\theta\rangle = -c_2(t)\dot c_2(t)\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta + c_2(t)\dot c_2(t)\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta + 0 = 0,\\ G &= \langle\varphi_\theta,\varphi_\theta\rangle = -c_2(t)^2\operatorname{ch}^2\theta + c_2(t)^2\operatorname{sh}^2\theta + 0 = -c_2(t)^2\end{aligned}$$

Prema tome, za matricu prve fundamentalne forme obzirom na lokalnu parametrizaciju φ dobivamo:

$$\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot c_2(t)^2 + \dot c_3(t)^2 & 0\\ 0 & -c_2(t)^2\end{bmatrix}.$$

Konačno, uzimajući determinantu ove matrice nalazimo da je vrijednost W dana s

$$W = -c_2(t)^2(\dot c_2(t)^2 + \dot c_3(t)^2);$$

po regularnosti krivulje c znamo da je $\dot c_2(t)^2+\dot c_3(t)^2 \neq 0$, a budući da je S prostorna ili vremenska ploha, tada po Napomeni 3.2.5 zaključujemo da moramo ovdje zahtjevati i uvjet $c_2(t) \neq 0$ za sve $t \in I$. Sada zaključujemo da je $W < 0$ pa prema istoj Napomeni slijedi da je u ovom slučaju S vremenska ploha i to je upravo jedan od dva slučaja tvrdnje (L1) iz iskaza Propozicije 3.3.9 i time je ovaj slučaj zaključen.

<u>P vremenski potprostor</u> Slično kao i ranije, jasno nam je da je $a_3 \in P$ pa uzmimo neki $a_1 \in P$ jedinični vektor ortogonalan na a_3, a taj vektor a_1 onda mora biti vremenski jedinični vektor (Teorem 1.2.28). Taj skup ponovno proširujemo do ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ koja je ovog puta *vpp*-ortonormirana baza; također, ovdje imamo $c(t) = c_1(t)a_1 + c_3(t)a_3(t)$, za neke glatke funkcije c_1 i c_3. Ponovno nalazimo parametrizaciju plohe S, ovog puta kao

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(t,\theta) = \begin{bmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(t)\\ 0\\ c_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1(t)\operatorname{ch}\theta\\ c_1(t)\operatorname{sh}\theta\\ c_3(t)\end{bmatrix},$$

za neki otvoreni interval J, gdje su matrični prikazi obzirom na bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$. Analogno računamo:

$$\begin{aligned}&\varphi_t = \begin{bmatrix}\dot c_1(t)\operatorname{ch}\theta & \dot c_1(t)\operatorname{sh}\theta & \dot c_3(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T},\\ &\varphi_\theta = \begin{bmatrix}c_1(t)\operatorname{sh}\theta & c_1(t)\operatorname{ch}\theta & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T},\\ &E = -\dot c_1(t)^2 + \dot c_3(t)^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = c_1(t)^2.\end{aligned}$$

pa dobivamo da je matrica metrički koeficijenata obzirom na parametrizaciju φ dana s

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{c}_1(t)^2 + \dot{c}_3(t)^2 & 0 \\ 0 & c_2(t)^2 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, koeficijent W je dan s

$$W = c_2(t)^2(-\dot{c}_1(t)^2 + \dot{c}_3(t)^2)$$

otkuda jasno vidimo da činjenica da je S prostorna ili vremenska ploha impozira uvjet $c_2(t) \neq 0$ na cijelom I. Konačno, koristeći Napomenu 3.2.5 sada možemo raspisati:

$$\begin{aligned} S \text{ prostorna ploha } &\iff W > 0 \iff -\dot{c}_1^2 + \dot{c}_3^2 > 0 \iff \langle c, c\rangle > 0 \\ &\iff c \text{ prostorna krivulja}, \end{aligned}$$

a sasvim analogno dobivamo i

$$\begin{aligned} S \text{ svjetlosna ploha } &\iff c \text{ svjetlosna krivulja}, \\ S \text{ vremenska ploha } &\iff c \text{ vremenska krivulja}. \end{aligned}$$

Vidimo da prva i treća ekvivalencija upravo daju tvrdnju (S1) Propozicije 3.3.8 i tvrdnju (L1) Propozicije 3.3.9.

P svjetlosni potprostor Ovdje je opet $a_3 \in P$, a ovaj put ga proširujemo do *vpp*-ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ na proizvoljan način (Propozicija 1.2.21). Uzmimo proizvoljan svjetlosni vektor $s \in P$, lako se tada pokaže da je s nužno ortogonalan na vektor a_3, dakle $\langle s, a_3\rangle = 0$. Jasno nam je da tada skup $\{s, a_3\}$ zapravo čini (ortogonalnu) bazu prostora P; sada ponovno možemo zaključiti da je $c(t) = c_s(t)s + c_3(t)a_3$, za glatke c_s i c_3. Sada, koristeći Teorem 1.2.20 lako nalazimo da je ovdje $s = \alpha a_1 + \beta a_2$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. No budući da je s svjetlosni vektor, tada mora biti $\langle s, s\rangle = 0$ otkuda nalazimo da je $\alpha^2 = \beta^2$; označimo s $\mu \in \{-1, 1\}$ broj takav da je $\alpha = \mu\beta$. Primijetimo da sada možemo naći da za parametriziranu krivulju c vrijedi:

$$\begin{aligned} c(t) &= c_s(t)s + c_3(t)a_3 = c_s(t)\big(\alpha a_1 + \mu\alpha a_2\big) + c_3(t)a_3 \\ &= \alpha c_s(t)a_1 + \mu\alpha c_s(t)a_2 + c_3(t)a_3. \end{aligned}$$

Konačno, koristeći iste diskusije kao ranije zaključujemo da je parametrizacija plohe S dana s

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(t, \theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha c_s(t) \\ \mu\alpha c_s(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\operatorname{ch}\theta + \mu \operatorname{sh}\theta)c_s(t) \\ \alpha(\operatorname{sh}\theta + \mu \operatorname{ch}\theta)c_s(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix},$$

za neki interval J uz matrične zapise obzirom na bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$. Dakle, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \begin{bmatrix}\alpha(\operatorname{ch}\theta + \mu\operatorname{sh}\theta)\dot{c}_s(t) & \alpha(\operatorname{sh}\theta + \mu\operatorname{ch}\theta)\dot{c}_s(t) & \dot{c}_3(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\
\varphi_\theta &= \begin{bmatrix}\alpha(\operatorname{sh}\theta + \mu\operatorname{ch}\theta)c_s(t) & \alpha(\operatorname{ch}\theta + \mu\operatorname{sh}\theta)c_s(t) & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\
\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix} &= \dots = \begin{bmatrix}\dot{c}_3(t)^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pa je

$$W = 0$$

otkuda po Napomeni 3.2.5 zaključujemo da je S svjetlosna ploha, što je kontradikcija s pretpostavkom propozicija; dakle, P ne može biti svjetlosna ploha u ovom slučaju.

$\boxed{2}$ Pretpostavimo da je V vremenski potprostor i označimo s a_1 onaj (vremenski) jedinični vektor za koji je $V = \operatorname{span} a_1$. Budući da P sadrži V, tada P posebno sadrži i vremenski vektor pa po Propoziciji 1.2.32 zaključujemo da P mora biti vremenski potprostor. Izaberimo jedinični vektor $a_2 \in P$ takav da je $a_2 \perp a_1$ (to se može napraviti); tada je a_2 jasno prostorni jedinični vektor (Propozicija 1.2.21), $\{a_1, a_2\}$ čini ortonormiranu bazu prostora P te taj skup možemo proširiti do *vpp*-ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3_1$. Ponovno možemo zaključiti da je $c(t) = c_1(t)a_1 + c_2(t)a_2$ za neka glatka preslikavanja c_1 i c_2. Sada pažljivim iščitavanjem Propozicije 1.3.10 možemo vidjeti da su rotacije oko osi V nužno oblika

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \sin\theta\end{bmatrix},$$

za neke $\theta \in \mathbb{R}$ (u iskazu Propozicije je bio određen interval $[0, 2\pi\rangle$, no mi znamo da po periodičnosti to možemo proširiti na cijeli $\mathbb{R}$). Iz definicije rotacijskih ploha sada slijedi da je parametrizacija od S dana s

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(t, \theta) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\cos\theta\\ c_2(t)\sin\theta\end{bmatrix},$$

za neki otvoreni interval J, gdje su matrični prikazi dani obzirom na bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$. Analogno ranijem računamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \begin{bmatrix}\dot{c}_1(t) & \dot{c}_2(t)\cos\theta & \dot{c}_2(t)\sin\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\
\varphi_\theta &= \begin{bmatrix}0 & -c_2(t)\sin\theta & c_2(t)\cos\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\
\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\dot{c}_1(t)^2 + \dot{c}_2(t)^2 & 0\\ 0 & c_2(t)^2\end{bmatrix},\\
W &= c_2(t)^2(-\dot{c}_1(t)^2 + c_2(t)^2).
\end{aligned}$$

Sada zbog toga što je S prostorna ili vremenska ploha dobivamo uvjet $c_2(t) \neq 0$ za sve $t \in I$ te isto kao i ranije imamo iduće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} &S \text{ prostorna ploha} \iff c \text{ prostorna krivulja},\\ &S \text{ svjetlosna ploha} \iff c \text{ svjetlosna krivulja},\\ &S \text{ vremenska ploha} \iff c \text{ vremenska krivulja} \end{aligned}$$

otkuda slijede tvrdnje (S2) i (L2) PROPOZICIJA 3.3.8 i 3.3.9 respektivno.
$\boxed{3}$ Konačno pretpostavimo da je V svjetlosni potprostor, tada uzmimo proizvoljan $B \in V \setminus \{0\}$. Budući da P sadrži V, a time i svjetlosni vektor, tada prema PROPOZICIJI 1.2.33 zaključujemo da P mora biti vremenski ili svjetlosni potprostor.
P vremenski potprostor Označimo s A proizvoljni svjetlosni vektor u P koji nije kolinearan s B (PROPOZICIJA 1.2.32). Tada je jasno $\{A, B\}$ baza prostora P, a nju možemo proširiti i do nul baze $\{A, B, C\}$ po PROPOZICIJI 1.2.40. Ponovno je jasno da imamo $c(t) = c_1(t)A + c_2(t)B$, za neke glatke funkcije c_1 i c_2. Pažljivim iščitavanjem PROPOZICIJE 1.3.10 možemo vidjeti da su sve rotacije oko osi V u bazi $\{A, B, C\}$ dane s

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta^2}{2} & 1 & \theta \\ -\theta & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je $\theta \in \mathbb{R}$ neki parametar. Sada po definiciji rotacijskih ploha slijedi da je parametrizacija od S dana s

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(t, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta^2}{2} & 1 & \theta \\ -\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ -\frac{\theta^2}{2} c_1(t) + c_2(t) \\ -\theta c_1(t) \end{bmatrix},$$

za neki otvoreni interval J, gdje su matrični prikazi dani obzirom na bazu $\{A, B, C\}$. Slično kao i prije, odavde računamo:

$$\begin{aligned} &\varphi_t = \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) & -\frac{\theta^2}{2}\dot{c}_1(t) + \dot{c}_2(t) & -\theta \dot{c}_1(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\ &\varphi_\theta = \begin{bmatrix} 0 & -\theta c_1(t) & -c_1(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\\ &\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{c}_1(t)\dot{c}_2(t) & 0 \\ 0 & c_1(t)^2 \end{bmatrix},\\ &W = 2c_1(t)^2 \dot{c}_1(t)\dot{c}_2(t). \end{aligned}$$

Budući da je S prostorna ili vremenska ploha, odavde dobivamo uvjet $c_1(t) \neq 0$ za sve $t \in I$, dok radi jednakosti $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2\dot{c}_1\dot{c}_2$ dobivamo iduće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} S \text{ prostorna ploha } &\Longleftrightarrow c \text{ prostorna krivulja,} \\ S \text{ svjetlosna ploha } &\Longleftrightarrow c \text{ svjetlosna krivulja,} \\ S \text{ vremenska ploha } &\Longleftrightarrow c \text{ vremenska krivulja} \end{aligned}$$

Dakle, iz prve i treće ekvivalencije zaključujemo da vrijede tvrdnje (S3) i (L3) iz Propozicija 3.3.8 i 3.3.9 respektivno.
P svjetlosni potprostor U ovom slučaju za početak dopunimo vektor $B \in V \subseteq P$ do nul baze $\{A, B, C\}$ (Propozicija 1.2.40). Tada se lako provjeri da možemo naći jedinični prostorni vektor $p \in P$ takav da je $p \perp B$. Pošto je $\{p, B\}$ ortogonalna baza prostora P, jasno nam je da je $c(t) = c_p(t)p + c_2(t)B$, za neke glatke funkcije c_p i c_2. Sada prema Teoremu 1.2.25 možemo lako vidjeti da je $p = \beta B + \gamma C$, za neke skalare $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Budući da je p jedinični prostorni vektor, imamo $\langle p, p \rangle = 1$, otkuda raspisivanjem nalazimo da je $\gamma^2 = 1$ pa je $\gamma \in \{-1, 1\}$. Sada c možemo raspisati kao:

$$\begin{aligned} c(t) &= c_p(t)p + c_2(t)B = c_p(t)\big(\beta B + \gamma C\big) + c_2(t)B \\ &= (\beta c_p(t) + c_2(t))B + \gamma c_p(t)C. \end{aligned}$$

Sada isto kao i u prethodnoj diskusiji imamo da je parametrizacija plohe S dana s

$$\varphi : I \times J \to S \quad , \quad \varphi(t, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta^2}{2} & 1 & \theta \\ -\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta c_p(t) + c_2(t) \\ \gamma c_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta + \gamma\theta)c_p(t) + c_2(t) \\ \gamma c_p(t) \end{bmatrix}$$

za neki inverval J, gdje su matrični prikazi dani obzirom na bazu $\{A, B, C\}$. Iznova računamo:

$$\begin{aligned} &\varphi_t = \begin{bmatrix} 0 & (\beta + \gamma\theta)\dot{c}_p(t) + \dot{c}_2(t) & \gamma\dot{c}_p(t) \end{bmatrix}, \\ &\varphi_\theta = \begin{bmatrix} 0 & \gamma c_p(t) & 0 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2\dot{c}_p(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_p(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &W = 0, \end{aligned}$$

otkuda zaključujemo da je S svjetlosna ploha pa ovaj slučaj nije moguć, i time je završen dokaz ove propozicije. □

Primjer 3.3.10. Navedimo primjer jedne vremenske rotacijske plohe; ovaj primjer preuzet je iz [13], a dobivena ploha zove se Dinijeva[6] ploha. U tu svrhu definirajmo

[6] Ulisse Dini, 1845-1918

parametriziranu krivulju

$$c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3_1 \quad , \quad c(t) = \left(\int_0^t \sqrt{e^{2\tau} - 1}\, \mathrm{d}\tau, 0, e^t \right),$$

gdje smo s $\mathbb{R}^+$ označili interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Lako provjeravamo da je c vremenska krivulja (i to parametrizirana duljinom luka), budući da je

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \left(\sqrt{e^{2t} - 1}, 0, e^t \right), \\ \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle &= e^{2t} - 1 + 0 - e^{2t} = -1. \end{aligned}$$

Promotrimo sada rotaciju ove krivulje oko x-osi. Iščitavanjem drugog slučaja tvrdnje (L1) iz PROPOZICIJE 3.3.9 dobivamo da je parametrizacija te plohe dana s

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(t, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ 0 & \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t \sqrt{e^{2\tau} - 1}\, \mathrm{d}\tau \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t \sqrt{e^{2\tau} - 1}\, \mathrm{d}\tau \\ e^t \operatorname{sh}\theta \\ e^t \operatorname{ch}\theta \end{bmatrix}$$

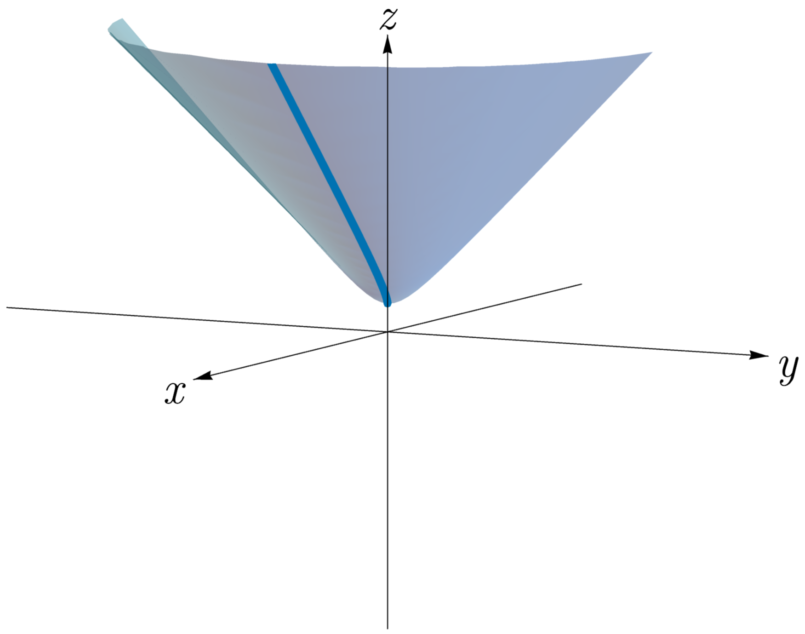
gdje su matrični prikazi dani upravo obzirom na kanonsku bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sada računamo:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \left(\sqrt{e^{2t} - 1}, e^t \operatorname{sh}\theta, e^t \operatorname{ch}\theta \right), \\ \varphi_\theta &= \left(0, e^t \operatorname{ch}\theta, e^t \operatorname{sh}\theta \right), \\ \varphi_{tt} &= \left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t} - 1}}, e^t \operatorname{ch}\theta, e^t \operatorname{sh}\theta \right), \\ \varphi_{t\theta} &= \left(0, e^t \operatorname{ch}\theta, e^t \operatorname{sh}\theta \right), \\ \varphi_{\theta\theta} &= \left(0, e^t \operatorname{sh}\theta, e^t \operatorname{ch}\theta \right). \end{aligned}$$

Odavde dalje nalazimo:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad W = -e^{2t}.$$

Odavde sada standardnim računom možemo ustanoviti da je ovo ploha konstantne Gaussove zakrivljenosti jednake -1. Za kraj, ostavljamo vizualni prikaz Dinijeve plohe $\varphi(t, \theta)$ sa SLIKOM 3.7.



Slika 3.7: Dinijeva ploha $\varphi(t,\theta) = \left(\int_0^t \sqrt{e^{2\tau}-1}\,\mathrm{d}\tau, e^t \operatorname{sh}\theta, e^t \operatorname{ch}\theta\right)$

Bibliografija

[1] M. Abate i F. Tovena, *Curves and Surfaces*, 1. izdanje, UNITEXT / La Matematica per il 3+2, Springer, 2012.

[2] Manfredo Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 3. izdanje, Prentice Hall, 1976.

[3] Bill Dubuque, *Why is it called Sylvester's Law of Inertia?*, 2010, `https://math.stackexchange.com/questions/6906/`, posjećeno 12.6.2021.

[4] Željka Milin-Šipuš, *Predavanja iz kolegija Uvod u diferencijalnu geometriju*, ak. god. 2017-2018, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu.

[5] Ilja Gogić, *Predavanja iz kolegija Diferencijalna geometrija 1*, ak. god. 2018-2019, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu.

[6] Krešimir Horvatic, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.

[7] Bruce Hunt i Wolfgang Kühnel, *Differential Geometry : Curves – Surfaces – Manifolds*, 3. izdanje, AMS Student mathematical library 77, American Mathematical Society, 2015.

[8] Zvonimir Iljazović, *Predavanja iz kolegija Diferencijalna topologija*, ak. god. 2019-2020, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu.

[9] Jun Ichi Inoguchi i Sungwook Lee, *Lightlike surfaces in Minkowski 3-space*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **6** (2009), 267–283.

[10] Jun Ichi Inoguchi i Sungwook Lee, *Null curves in Minkowski 3-space*, International Electronic Journal of Geometry **1** (2008), 40–83.

[11] Vedran Krčadinac, *Predavanja iz kolegija Neeuklidska geometrija*, ak. god. 2019-2020, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu.

[12] Rafael López, *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, International Electronic Journal of Geometry **7**, br. 1, 44–107.

[13] Louise Vincentia McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Disertacija, 1980.

[14] Igor Pažanin, *Predavanja iz kolegija Obične diferencijalne jednadžbe*, ak. god. 2017-2018, Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu.

[15] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2. izdanje, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.

Sažetak

Cilj ovog rada jest obraditi primjere vremenskih i svjetlosnih ploha Lorentz-Minkowskijevog prostora $\mathbb{R}^3_1$. Da bismo proučili te primjere, potrebno je razraditi diferencijalnu geometriju trodimenzionalnog realnog prostora s nedegeneriranom metrikom indeksa 1. U prvom poglavlju ispitujemo kakvu geometriju inducira ta metrika na sam prostor $\mathbb{R}^3_1$, klasificiramo vektore i potprostore tog prostora te ispitujemo svojstva ortogonalnosti. Zatim, u drugom poglavlju ispitujemo svojstva krivulja tog prostora, definiramo njihovu Freneteovu bazu, izvodimo Frenet-Serreteove formule te dokazujemo analogone fundamentalnog teorema krivulja. U trećom poglavlju proučavamo plohe prostora $\mathbb{R}^3_1$, klasificiramo ih na prostorne, vremenske i svjetlosne te proučavamo kakvu geometriju na njima inducira metrika prostora $\mathbb{R}^3_1$. Konačno, koristeći razrađenu teoriju, ispitujemo primjere vremenskih i svjetlosnih ploha, dakle ploha čija je inducirana metrika nedegenrirana indefinitna odnosno degenerirana i time nalazimo primjere ploha koje nemaju analogon u klasičnoj euklidskoj geometriji.

Summary

Goal of this paper is to examine examples of timelike and lightlike surfaces in Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$. To do so, we need to study differential geometry of the thre-edimensional real space with nondegenerate metric of index 1. In first chapter we inspect geometric properties that this metric induces on space $\mathbb{R}^3_1$, we classify vectors and subspaces of this space and we investigate properties of orthogonality. Next, in second chapter we explore properties of curves in this space, we define corresponding Frenet frame, we derive Frenet-Serret equations and we prove theorems analogous to standard fundamental theorems for curves. In third chapter we study surfaces of $\mathbb{R}^3_1$, we classify them as spacelike, timelike and lightlike and we examine what kind of geometry does the metric of $\mathbb{R}^3_1$ induces on the surfaces. Lastly, by using developed theory we inspect examples of timelike and lightlike surfaces, that is surfaces with induced nondegenerate indefinite metric or degenerate metric and with that we find examples of surfaces that have no analogues in standard Euclidean geometry.

Životopis

Rođen sam 8. studenog 1996. godine u Zagrebu. Djetinjstvo sam proveo zagrebačkom naselju Sesvete, gdje sam pohađao Osnovnu školu Luka i prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Sesvete. Tijekom svog školovanja aktivno sam sudjelovao sam na brojnim natjecanjima iz područja matematike i fizike. Godine 2015. upisujem preddiplomski studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, gdje sam ostvario izravan upis postignutim rezultatima na srednjoškolskim natjecanjima. Na trećoj godini preddimplomskog studija držao sam demonstrature iz kolegija Kompleksna analiza i Uvod u diferencijalnu geometriju. Po završetku preddimplomskog studija 2018. godine upisujem diplomski studij Teorijske matematike na istom fakultetu. Na području matematike od interesa su mi broje grane, neke od kojih su diferencijalna geometrija, diferencijalna topologija i algebarska topologija. Od ostalih akademskih interesa tu je i fizika zbog koje sam tokom preddiplomskog studija putem horizontalne mobilnosti odslušao i položio kolegije Opća fizika 1, 2, 3 i 4 na Fizičkom odsjeku istog fakulteta. Osim toga, slobodno vrijeme rado provodim baveći se glazbom.