Bayesovsko zaključivanje za standardnu devijaciju

Bunjevac, Maša

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maša Bunjevac

BAYESOVO ZAKLJUČIVANJE ZA STANDARDNU DEVIJACIJU

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Dedi Franji, jer je uvijek vjerovao u mene,
Mami, za ljubav i podršku kad mi je najviše trebala
I moja tri Hrvoja, jer bez njih ništa od ovoga ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Uvod

Statističko zaključivanje je postupak korištenja analize uzorkovanih podataka kako bi se donijeli zaključci o osnovnoj vjerojatnosnoj distribuciji. Zaključivati možemo ako je uzorak reprezentativan za cijelu populaciju jer je tada distribucija uzorka slična distribuciji izvorne populacije.

Thomas Bayes je pokazao kako se inverzna vjerojatnost može koristiti za izračun vjerojatnosti prethodnih događaja iz nastanka posljedičnog događaja. Sredinom 20-tog stoljeća razvijena je metoda statističkog zaključivanja temeljena na Bayesovom teoremu. Bayesov teorem je jedini konzistentan način izmjene naših uvjerenja o parametrima uz dane stvarne izmjerene podatke. Dakle, zaključivanje se temelji na stvarnim podacima, a ne na svim mogućim skupovima podataka koji su se mogli pojaviti, ali nisu.

Ovakav pristup koristan je u znanosti jer prave objektivnosti često nema. Obično postoji prethodno znanje o postupku kojeg mjerimo. Konvencionalna „objektivna" statistika odbacila bi ove informacije, dok će Bayesova statistika iskoristiti i te dodatne informacije s onima koje imamo iz izmjerenih podataka. Taj postupak objedinjen je u Bayesovom teoremu.

U ovom radu bavit ćemo se Bayesovim zaključivanjem za standardnu devijaciju normalno distribuirane populacije u slučaju kada je standardna devijacija slučajna varijabla. Na nekoliko primjera prikazat ćemo kako temeljem izmjerenih podataka provodimo zaključivanje o traženom parametru.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam slučajne varijable i navesti osnovne rezultate vezane uz Bayesovu statistiku.

1.1 Slučajne varijable

Za početak, prisjetimo se nekih definicija iz teorije vjerojatnosti i statistike potrebnih za razumijevanje Bayesove paradigme. Navest ćemo primjere slučajnih varijabli kasnije korištenih za Bayesovo zaključivanje.

Definicija slučajne varijable

Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Sa $\mathcal{B}$ označimo σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ zovemo σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}$, a elemente σ-algebre $\mathcal{B}$ zovemo Borelovi skupovi.

Definicija 1.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest **slučajna varijabla** ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.*

Sa $\mathcal{B}^n$ označimo σ-algebru na $\mathbb{R}^n$ generiranu familijom svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}^n$ zovemo σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}^n$, a elemente σ-algebre $\mathcal{B}^n$ zovemo Borelovi skupovi.

Definicija 1.1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Kažemo da je X **n-dimenzionalan slučajni vektor** ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}^n$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{F}$.*

Funkcija distribucije slučajne varijable

Definicija 1.1.3. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.* ***Funkcija distribucije od*** *X jest funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$\begin{aligned} F_X(x) =& \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]) = \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}\langle -\infty, x]) = \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leqslant x\}) = \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x), x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definicija 1.1.4. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je F_X njezina funkcija distribucije. Kažemo da je X* ***apsolutno neprekidna*** *ili, kraće,* ***neprekidna slučajna varijabla*** *ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija f na $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$) takva da je*

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda(t), x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Integral u 1.2 je Lebesgueov integral funkcije f u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ.

Definicija 1.1.5. *Za funkciju distribucije F_X neprekidne slučajne varijable X, dakle za funkciju oblika 1.2 kažemo da je* ***apsolutno neprekidna funkcija distribucije****.*

Definicija 1.1.6. *Ako je X neprekidna slučajna varijabla, tada se funkcija f iz 1.2 zove* ***funkcija gustoće vjerojatnosti od*** *X, tj. od njezine funkcije distribucije F_X ili, kraće,* ***gustoća od*** *X, i ponekad je označujemo sa f_X.*

Ako je X neprekidna s gustoćom f i ako je $\mathbb{P}_X$ vjerojatnosna mjera inducirana sa X tj. zakon razdiobe od X, tada vrijedi

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int\limits_{B} f(x)\, d\lambda(x), B \in \mathcal{B}. \tag{1.3}$$

Integral u 1.3 je Lebesgueov integral funkcije f po Borelovu skupu B u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ.

Funkcija distribucije slučajnog vektora

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-dimenzionalan slučajni vektor i $\mathcal{B}^n$ σ-algebra Borelovih skupova u $\mathbb{R}^n$. Vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathbb{P}_X)$ zovemo **vjerojatnosni prostor induciran slučajnim vektorom** X.

Definicija 1.1.7. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajni vektor, $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.* ***Funkcija distribucije slučajnog vektora*** *X je funkcija $F_X = F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definirana sa*

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]) = \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, ..., X_n \leqslant x_n) = \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X_1(\omega) \leqslant x_1, X_2(\omega) \leqslant x_2, ..., X_n(\omega) \leqslant x_n\}), \\ &\quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definicija 1.1.8. *Neka je $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ n-dimenzionalni slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je F njegova funkcija distribucije.*

X je ***diskretan slučajni vektor*** *ako postoji konačan ili prebrojiv podskup E od $\mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbb{P}(X \in E) = 1$.*

X je ***neprekidan slučajni vektor*** *ako postoji nenegativna Borelova funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$F(x) = \int_{\langle -\infty, x]} f(t)\, d\lambda(t), \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Integral u 1.5 je Lebesgueov integral Borelove funkcije f u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ na $\mathbb{R}^n$.

Funkciju f u 1.5 zovemo **gustoća slučajnog vektora** X.

Matematičko očekivanje

Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiramo $X^+ := max\{0, X\}$ i $X^- := max\{0, -X\}$. X^+ i X^- su nenegativne izmjerive funkcije pa možemo definirati $\mathbb{E}X^+ = \int_\Omega X^+ \, d\mathbb{P}$, $\mathbb{E}X^- = \int_\Omega X^- \, d\mathbb{P}$.

Definicija 1.1.9. *Kažemo da slučajna varijabla X* ***ima matematičko očekivanje*** *ako je barem jedan od integrala $\mathbb{E}X^+$ i $\mathbb{E}X^-$ konačan. U tom slučaju je* ***matematičko očekivanje***

$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-. \tag{1.6}$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$. Tada je relacijom

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, B \in \mathcal{F} \tag{1.7}$$

definirana vjerojatnost $\mathbb{P}_A$ na $\mathcal{F}$, koju zovemo **uvjetna vjerojatnost uz uvjet** A.

Definicija 1.1.10. *Ako je X slučajna varijabla na Ω takva da postoji $\mathbb{E}X$, tada je očigledno X integrabilna i u odnosu na $\mathbb{P}_A$ i* ***uvjetno očekivanje od*** *X* ***za dano*** *A definiramo sa*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \int\limits_{\Omega} X d\,\mathbb{P}_A. \tag{1.8}$$

Neka su $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1} A_i = \Omega$ i $\mathbb{P}(A_i) > 0$ za $i = 1, ..., n$. Neka je $\mathcal{G} = \sigma(A_1, A_2, ..., A_n)$ i neka je X slučajna varijabla takva da postoji $\mathbb{E}X$.

Definicija 1.1.11. ***Uvjetno očekivanje od*** *X* ***uz dano*** *$\mathcal{G}$ je jednostavna slučajna varijabla $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ dana sa*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid A_i) \mathbb{1}_{A_i}. \tag{1.9}$$

Uvjetno očekivanje $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ definira se analogno i u slučaju kada je σ-algebra $\mathcal{G}$ generirana prebrojivom particijom događaja.

Neka je sada Y proizvoljna slučajna varijabla i $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.1.12. ***Uvjetna vjerojatnost od*** *A* ***za dano*** *$Y = y$ definira se sa*

$$\mathbb{P}(A \mid Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid Y = y). \tag{1.10}$$

$\mathbb{P}(A \mid Y = y)$ je Borelova funkcija jednoznačno određena do na Borelov skup $\mathbb{P}_Y$-mjere nula relacijom

$$\int\limits_{B} \mathbb{P}(A \mid Y = y) d\,\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}(A \cap Y^{-1}(B)) \tag{1.11}$$

za sve $B \in \mathcal{B}$ (vidi [10]).

Neka je (X, Y) slučajni vektor, pri čemu vrijednost svake komponente predstavlja jedan slučajni pokus. U prvome pokusu mjerimo vrijednosti slučajne varijable X, a u drugome vrijednosti slučajne varijable Y. U nastavku ćemo odrediti funkciju distribucije od X uz pretpostavku da smo u drugom pokusu dobili vrijednost y od Y.

Neka je r proizvoljan racionalni broj. Tada za sve $y \in \mathbb{R}$ stavimo

$$F_{X|Y}(r \mid y) = \mathbb{P}(X \leqslant r \mid Y = y), \tag{1.12}$$

pri čemu je $\mathbb{P}(X \leqslant r \mid Y = y)$ fiksirana verzija ove uvjetne vjerojatnosti koja zadovoljava 1.11.

Neka je M Borelov podskup od $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}_Y$-mjere nula, takav da za $y \notin M$ i $x \in \mathbb{R}$ stavimo $F_{X|Y}(x \mid y) = \lim_{r_n \to x} F_{X|Y}(r_n \mid y)$. Za $y \in M$ i $x \in \mathbb{R}$ stavimo $F_{X|Y}(x \mid y) = G(x)$, gdje je G proizvoljna vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. Za svako fiksno $y \in \mathbb{R}$, $F_{X|Y}(\cdot \mid y)$ je vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ (vidi [10]). Nadalje, za svako fiksno $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $F_{X|Y}(x \mid y) = \mathbb{P}(X \leqslant x \mid Y = y)(g.s. - \mathbb{P}_Y)$.

Tako definiranu funkciju $F_{X|Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ zovemo **uvjetna funkcija distribucije od X uz dano $Y = y$.** Funkcija $F_{X|Y}(\cdot \mid y)$ je vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ pa jednoznačno inducira vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}_{X|Y}(\cdot \mid y)$ na $\mathcal{B}$ (vidi [10]).

Definicija 1.1.13. *$\mathbb{P}_{X|Y}(\cdot \mid y)$ zovemo **uvjetna razdioba od X za dano** $Y = y$.*

Definicija 1.1.14. *Funkciju $f_{X|Y}(x \mid y)$ definiranu sa*

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \tag{1.13}$$

*ako je $f_Y(y) > 0$, zovemo **uvjetna gustoća od X za dano** $Y = y$.*

Definicija 1.1.15. *Funkciju $\mathbb{P}(X \in B \mid Y = y)$ $(B \in \mathcal{B})$ zovemo **uvjetna razdioba od X za dano** $Y = y$.*

Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $r > 0$.

Definicija 1.1.16. *$\mathbb{E}X^r$ zovemo r-**ti moment od X**, a $\mathbb{E}(|X^r|)$ zovemo r-**ti apsolutni moment od** X.*

Definicija 1.1.17. *Neka $\mathbb{E}X$ postoji (tj. konačno je). Tada $\mathbb{E}[\,(X - \mathbb{E}X)^r]$ zovemo r-**ti centralni moment od** X, a $\mathbb{E}[\,|X - \mathbb{E}X|^r]$ zovemo r-**ti apsolutni centralni moment od** X.*

Definicija 1.1.18. ***Varijanca od** X koju označujemo s Var X ili σ_X^2 jest drugi centralni moment od X, dakle je*

$$Var X = \mathbb{E}[\,(X - \mathbb{E}X)^2]\,. \tag{1.14}$$

*Pozitivan drugi korijen iz varijance zovemo **standardna devijacija od** X i označujemo sa σ_X.*

Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli

Sada ćemo navesti primjere neprekidnih slučajnih varijabli koje ćemo kasnije koristiti u Bayesovom zaključivanju.

Izbor slučajne točke u intervalu opisan je uniformnom distribucijom.

Primjer 1. *Neprekidna slučajna varijabla X ima* ***uniformnu distribuciju*** *na segmentu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ako joj je gustoća f dana sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \tag{1.15}$$

Primjer 2. *Neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Neprekidna slučajna varijabla X ima* ***normalnu distribuciju s parametrima*** *μ i σ^2 ako joj je gustoća f dana sa*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

To označavamo s $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Posebno, ako je $X \sim N(0, 1)$, X je ***jedinična normalna distribucija****, uz gustoću $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$.*

Primjer 3. *Neka je $\alpha > 0$, $\beta > 0$ i $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, $x > 0$, tj. Γ je* ***gama-funkcija****.*

Neprekidna slučajna varijabla X ima ***gama-distribuciju*** *s* ***parametrima*** *α i β ako joj je gustoća f dana sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

*Ako je $\alpha = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$ i $\beta = 2$, tada kažemo da X ima χ^2**-distribuciju** s **parametrom** n, što označavamo $X \sim \chi^2(n)$, pri čemu n zovemo **broj stupnjeva slobode** od X. Funkcija gustoće χ^2-distribucije s n stupnjeva slobode jest*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

*Ako je $X \sim \chi^2(n)$ i $Y = \frac{1}{X}$, tada kažemo da Y ima **inverznu** χ^2**-distribuciju** i pišemo $Y \sim$Inv-$\chi^2(n)$.*

Primjer 4. *Za* $x, y > 0$ *neka je*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} d\,t, \tag{1.19}$$

tj. B *je* ***beta-funkcija.***

Neka su $p > 0$, $q > 0$ *fiksni. Neprekidna slučajna varijabla* X *ima* ***beta-distribuciju s parametrima*** p *i* q *ako joj je gustoća* f *dana sa*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leqslant 0 \text{ ili } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

Neprekidne slučajne varijable u navedenim primjerima su dobro definirane (vidi [10]).

Funkcija vjerodostojnosti

Neka je $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajan uzorak duljine n ($n \geqslant 1$) iz statističkog modela $\mathcal{P} = \{f(\cdot;\theta) : \theta \in \Theta\}$. Uzmimo da je $f(\cdot;\theta)$ iz množine $\mathcal{P}$ gustoća slučajne varijable dimenzije d ($d \geqslant 1$) parametrizirane parametrom θ dimenzije m ($m \geqslant 1$).

Definicija 1.1.19. *Ako je* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ *jedna realizacija od* $\mathbb{X}$, *tada je* ***funkcija vjerodostojnosti*** *funkcija* $L : \Theta \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$L(\theta) \equiv L(\theta \mid \boldsymbol{x}) := f_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \ \theta \in \Theta. \tag{1.21}$$

Za zadanu vrijednost $\theta \in \Theta$, broj $L(\theta) \equiv L(\theta \mid \mathbf{x})$ zovemo *vjerodostojnost vrijednosti* θ *parametra na osnovi opaženog uzorka* $\mathbf{x}$.

Konjugirane familije

U Bayesovoj statistici svoje početne pretpostavke o distribuciji slučajne varijable θ prije dobivanja izmjerenih podataka uključujemo kroz **apriorni model** $f(\theta)$. Apriorni model određuje koje vrijednosti θ može poprimiti, pridružuje im apriorne težine ili vjerojatnosti te je suma tih vjerojatnosti jednaka 1. Nakon promotrenog uzorka y dobivamo **aposteriorni model** $f(\theta \mid y)$.

U daljnjem tekstu koristit ćemo oznaku " $\propto$ " kako bismo označili da su funkcije proporcionalne, tj. ekvivalentne do na množenje skalarom.

Definicija 1.1.20. *Neka apriorni model za parametar θ ima vjerojatnosnu funkciju gustoće $f(\theta)$ i neka model uzorka Y dan uvjetno na θ ima funkciju vjerodostojnosti $L(y \mid \theta)$. Ako je pripadni aposteriorni model s vjerojatnosnom funkcijom gustoće $f(\theta \mid y) \propto f(\theta)L(y \mid \theta)$ iz iste model familije kao apriorna gustoća, tada kažemo da je on* ***konjugirani apriorni model****.*

Klasa kombinacija mogućih apriornih distribucija s distribucijama uzorka zove se **konjugirana familija**.

1.2 Bayesova paradigma

Ponovivši osnovne pojmove teorije vjerojatnosti i statistike potrebne za razumijevanje daljnjih koncepata, uvest ćemo pojam Bayesove statistike.

Matematička statistika koristi dvije glavne paradigme: konvencionalnu (frekvencionističku) i Bayesovu. Bayesove metode nude rješenja za mnoge poteškoće koje se javljaju kod frekvencionističkih statističkih metoda i proširuju primjenu statističkih metoda. Posebno, u Bayesovim metodama hipoteze je moguće uključiti u analizu korištenjem apriorne distribucije. Metode se stoga mogu primijeniti na probleme koji su strukturalno previše složeni za konvencionalne metode. Bayesov pristup je čvrsto aksiomatski utemeljen, što ga čini konzistentnim za različite metode (vidi [5]).

Usporedba s frekvencionističkom paradigmom

U frekvencionističkoj paradigmi promatramo događaje s određenim svojstvima: rezultate slučajnog pokusa kojeg se po pretpostavci može ponoviti pod identičnim uvjetima. Slučajni uzorak uzima se iz distribucije čiji su parametri nepoznati te za njih pretpostavljamo da su konstante. Interpretacija vjerojatnosti u ovom slučaju je relativna frekvencija nakon dovoljno velikog broja ponavljanja. Distribucija slučajnog uzorka dana je sa

$$f(s \mid \theta) \tag{1.22}$$

S druge strane, Bayesova vjerojatnost zasnovana je na subjektivnom vjerovanju racionalnog pojedinca koji je promatra. Vjerojatnost se interpretira kao racionalnu uvjetnu mjeru neizvjesnosti, odnosno „stupanj vjerovanja", što je blisko intuitivnom značenju riječi vjerojatnost u hrvatskom jeziku. Promatrač prije izvođenja pokusa na temelju dostupnih informacija daje subjektivnu pretpostavku o mogućem ishodu pokusa. Nakon izvođenja pokusa, promatrač prilagođava svoje pretpostavke sukladno novim saznanjima. Iz navedenog vidimo da zaključivanje koristi aposteriornu distribuciju parametra uz dane izmjerene podatke:

$$g(\theta \mid podaci) \tag{1.23}$$

Sva buduća Bayesova zaključivanja dobivaju se iz aposteriorne distribucije.

Uočimo da je u frekvencionističkoj statistici zaključivanje zasnovano na vjerojatnosnoj distribuciji na prostoru uzorka, dok je u Bayesovoj statistici vjerojatnosna distribucija na prostoru parametara. Drugim riječima, parametri se promatraju kao slučajne varijable.

Važno je naglasiti da je vjerojatnost *uvijek* funkcija s dva argumenta – događaja čiju neizvjesnost mjerimo i uvjeta u kojima se mjerenje odvija, „apsolutne" vjerojatnosti ne postoje.

Bayesov teorem

Definicija 1.2.1. *Konačna ili prebrojiva familija* $(H_i, i = 1, 2, ...)$ *događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je* ***potpun sistem događaja*** *ako je* $H_i \neq \emptyset$ *za svako* i, $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za* $i \neq j$ *i* $\bigcup\limits_i H_i = \Omega$.

Ideja Bayesovog rasuđivanja dana je u sljedećem teoremu.

Teorem 1.2.2 (Bayesova formula)**.** *Neka je* $(H_i, i = 1, 2, ...)$ *potpun sistem događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i* $A \in \mathcal{F}$ *takav da je* $\mathbb{P}(A) > 0$. *Tada za svako* i *vrijedi*

$$\mathbb{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}{\sum\limits_j \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}. \tag{1.24}$$

Dokaz. Vidi [10]. □

Bayesovu formulu možemo interpretirati na sljedeći način. Pretpostavimo da na početku eksperimenta imamo n hipoteza $H_1, H_2, ..., H_n$ o karakteru pojave koju proučavamo. Svakoj hipotezi H_i pridružena je vjerojatnost $\mathbb{P}(H_i), i = 1, 2, ..., n$. Nakon eksperimenta – ako je njegov rezultat događaj A – mijenjamo svoje uvjerenje o ispravnosti hipoteza pridružujući im vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_i \mid A), i = 1, 2, ..., n$. Na isti način ponavljamo eksperiment dok za jedan rezultat B i neki i_0 $\mathbb{P}(H_{i_0} \mid B)$ ne bude približno ili jednako 1. Tada hipotezu H_{i_0} možemo smatrati ispravnom.

Aposteriorna distribucija

Bayesov teorem dopušta nam da izmijenimo prethodna uvjerenja o parametru uz dane podatke. Apriorna distribucija promatrača daje relativne težine vjerovanja koje je ta osoba pridružila pojedinim mogućim vrijednostima parametra. Koristeći Bayesov teorem, temeljem apriorne distribucije i promatranih vrijednosti dobiva se aposteriorna distribucija.

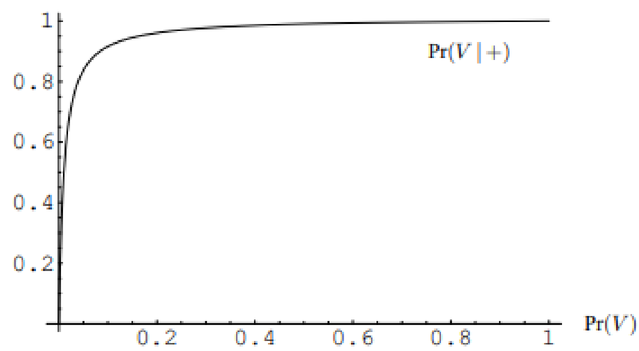
Aposteriorna distribucija za neprekidne distribucije dana je sljedećom formulom

$$g(\theta \mid podaci) = \frac{g(\theta)f(podaci \mid \theta)}{\int g(\theta)f(podaci \mid \theta)\, d\theta}. \tag{1.25}$$

Zanimljivo svojstvo ovako zadane aposteriorne vjerojatnosti prikazat ćemo sljedećim primjerom iz [3].

Primjer 5. *Promatramo test za otkrivanje virusa za kojeg iz laboratorijskih istraživanja znamo da daje pozitivan rezultat kod 98% zaraženih osoba i 1% onih koji nisu* *zaraženi. Tada je aposteriorna vjerojatnost da je osoba koja je na testu pozitivna doista zaražena dana sa* $\mathbb{P}(V \mid +) = \frac{0.98p}{0.98p+0.01(1-p)}$ *kao funkcija* $p = \mathbb{P}(V)$, *apriorne vjerojatnosti da je osoba zaražena.*

Na sljedećoj slici prikazana je $\mathbb{P}(V \mid +)$ *kao funkcija* $\mathbb{P}(V)$.



Slika 1.1: Aposteriorna vjerojatnost zaraze $\mathbb{P}(V \mid +)$ uz dani pozitivan test, kao funkcija apriorne vjerojatnosti zaraze $\mathbb{P}(V)$.[1]

Uočimo da je aposteriorna vjerojatnost jednaka 0 samo ako je apriorna vjerojatnost 0 (dakle, poznato je da je populacija u potpunosti bez infekcije) i 1 samo ako je apriorna vjerojatnost 1 (dakle, poznato je da je cijela populacija zaražena). Primijetimo, ako je zaraženost rijetka, aposteriorna vjerojatnost da će slučajno odabrana osoba biti zaražena bit će relativno niska čak i ako je test pozitivan. Zaista, recimo da je $\mathbb{P}(V) = 0.002$, *tada je* $\mathbb{P}(V \mid +) = 0.164$. *Dakle, u populaciji u kojoj je samo 0.2% osoba zaraženo, svega 16.4% svih s pozitivnim nalazom testa će biti doista zaraženi: većina pozitivnih bit će zapravo lažno pozitivni.*

Unatoč jednostavnoj formuli, praktično računanje integrala u većini slučajeva nije jednostavno te se radi numerički. Povijesno je takva metoda bila vrlo zahtjevna te je upotreba Bayesove statistike bila ograničena na uzorke iz normalne distribucije s normalnom apriornom distribucijom. Međutim, u posljednjih nekoliko godina, razvijeni su računalni algoritmi koji uzimaju slučajan uzorak iz aposteriorne distribucije bez da je u potpunosti računaju. Time je, uz dovoljno velik slučajni uzorak, omogućeno aproksimiranje aposteriorne distribucije proizvoljno točno. U praksi je ta procedura izvediva za probleme s mnogo parametara, kao i za općenite distribucije.

U sljedećem poglavlju bavit ćemo se zaključivanjem za standardnu devijaciju primjenjujući Bayesov teorem na varijancu.

[1] Slika preuzeta iz [3].

Poglavlje 2

Bayesovo zaključivanje za standardnu devijaciju

Pri proučavanju neke distribucije bavimo se parametrom koji daje mjeru lokacije – najčešće su to medijan, mod i očekivanje – i parametrom koji daje raspršenost distribucije. Kod normalne distribucije to su očekivanje i standardna devijacija. Kod zaključivanja za očekivanje, za standardnu devijaciju ili pretpostavljamo da je poznate vrijednosti ili je smatramo parametrom smetnje (eng. "nuisance parameter").

U slučaju kada zaključivanje provodimo za standardnu devijaciju normalne distribucije, pretpostavljamo da je očekivanje poznato ili parametar smetnje. Bayesov teorem primjenjujemo na varijanci. Kako je varijanca u kvadratnim jedinicama, radi lakše vizualizacije ćemo grafički prikazivati standardnu devijaciju, do čijih apriornih i aposteriornih gustoća dolazimo transformacijama gustoća za varijancu.

2.1 Bayesov teorem za normalnu varijancu s neprekidnom apriornom distribucijom

Pogledamo li Bayesov teorem 1.2.2, uočavamo da je aposteriorna gustoća proporcionalna apriornoj pomnoženoj s funkcijom vjerodostojnosti. Zapišimo to na sljedeći način:

$$aposteriorna \propto apriorna \times vjerodostojnost. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da počinjemo sa slučajnim uzorkom $y_1, ..., y_n$ iz $N(\mu, \sigma^2)$ distribucije gdje je očekivanje μ poznato, a varijanca σ^2 nepoznata. Sada Bayesov teorem možemo zapisati kao

$$g(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) \propto g(\sigma^2) \times f(y_1, ..., y_n \mid \sigma^2), \tag{2.2}$$

gdje je $g(\sigma^2)$ apriorna distribucija varijance σ^2, a $f(y_1, ..., y_n \mid \sigma^2)$ funkcija vjerodostojnosti varijance za dani uzorak.

Budući da varijanca može poprimiti bilo koju pozitivnu vrijednost, neprekidna apriorna gustoća koju koristimo je definirana za sve pozitivne vrijednosti. Aposteriorna distribucija je tada

$$g(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) = \frac{g(\sigma^2) \times f(y_1, ..., y_n \mid \sigma^2)}{\int\limits_{\langle 0,+\infty\rangle} g(\sigma^2) \times f(y_1, ..., y_n \mid \sigma^2) d\sigma^2}. \tag{2.3}$$

Navedena tvrdnja vrijedi za sve neprekidne apriorne gustoće, no integracija se mora vršiti numerički osim u nekim posebnim slučajevima. Takve apriorne distribucije navest ćemo kasnije te prikazati kako za njih određujemo aposteriornu gustoću.

Inverzna χ^2 distribucija

Pri određivanju aposteriornih funkcija gustoće, koristit ćemo inverznu χ^2 distribuciju. Kako će nam biti bitan samo oblik gustoće, gledat ćemo samo varijabilni dio funkcija i tako određivati pripadnu distribuciju, pomnoženu skalarom dobivenim iz podataka. Za funkciju gustoće inverzne χ^2 razdiobe s κ stupnjeva slobode vrijedi

$$g(x) \propto \frac{1}{x^{\frac{\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{1}{2x}} \tag{2.4}$$

za $0 < x < \infty$.

Kako bismo dobili vjerojatnosnu funkciju gustoće, množimo izraz konstantom $c = \frac{1}{2^{\frac{\kappa}{2}}\Gamma(\frac{\kappa}{2})}$. Dobivamo egzaktnu funkciju gustoće inverzne χ^2 distribucije s κ stupnjeva slobode

$$g(x) = \frac{1}{2^{\frac{\kappa}{2}}\Gamma(\frac{\kappa}{2}) x^{\frac{\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{1}{2x}} \tag{2.5}$$

za $0 < x < \infty$.

Kad je oblik gustoće dan s

$$g(x) \propto \frac{1}{x^{\frac{\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{S}{2x}} \tag{2.6}$$

za $0 < x < \infty$, kažemo da x ima S puta *inverznu* χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode. U ovom slučaju, konstanta skaliranja na funkciju gustoće je $c = \frac{S}{2^{\frac{\kappa}{2}}\Gamma(\frac{\kappa}{2})}$. Sada imamo egzaktnu funkciju gustoće S puta *inverzne* χ^2 razdiobe s κ stupnjeva slobode

$$g(x) = \frac{S^{\frac{\kappa}{2}}}{2^{\frac{\kappa}{2}}\Gamma(\frac{\kappa}{2})} \times \frac{1}{x^{\frac{\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{S}{2x}} \tag{2.7}$$

za $0 < x < \infty$.

Uočimo, kada U ima S puta *inverznu* χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode, tada $W = \frac{S}{U}$ ima χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode. Na ovaj način možemo lako pronaći vjerojatnosti slučajnih varijabli iz *inverzne* χ^2 razdiobe koristeći tablicu kvantila B.2 te ćemo kasnije u primjerima ovu transformaciju koristiti pri određivanju kvantila aposteriorne distribucije.

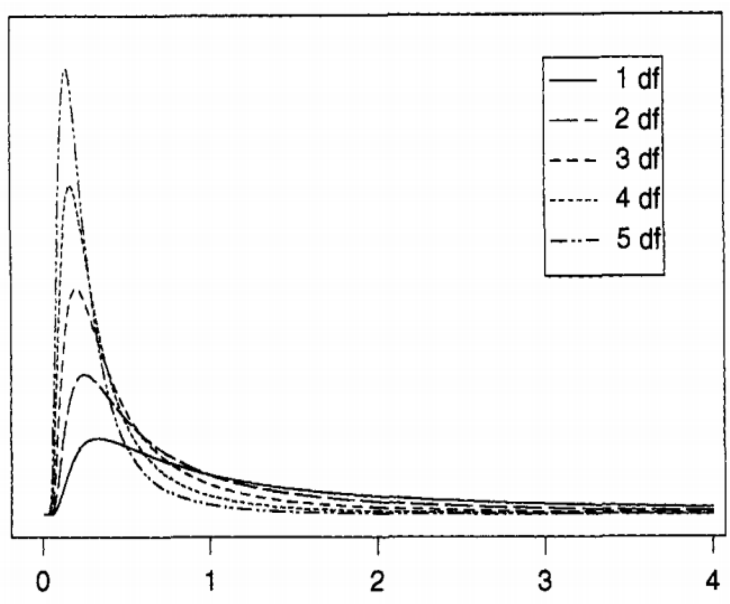
Za slučajnu varijablu X iz S puta *inverzne* χ^2 razdiobe s κ stupnjeva slobode očekivanje je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{S}{\kappa - 2} \tag{2.8}$$

za $\kappa > 2$, dok je varijanca

$$Var(X) = \frac{2S^2}{(\kappa - 2)^2 \times (\kappa - 4)} \tag{2.9}$$

za $\kappa > 4$. Uzmemo li $S = 1$, neke *inverzne* χ^2 razdiobe prikazane su na Slici 2.1.



Slika 2.1: Inverzne χ^2 distribucije s 1,...,5 stupnjeva slobode.[1]

Uočimo, što je broj stupnjeva slobode κ viši to je distribucija više koncentrirana u malim vrijednostima te brže opada za veće vrijednosti.

[1]Slika preuzeta iz [8].

Vjerodostojnost varijance za normalni slučajni uzorak

Odredimo sada vjerodostojnost varijance za uzorak koji se sastoji samo od jedne opservacije iz $N(\mu, \sigma^2)$ razdiobe gdje je μ poznato. Funkcija vjerodostojnosti je gustoća zapažanja u izmjerenoj vrijednosti dana kao funkcija varijance σ^2

$$f(y \mid \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma^2}}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.10}$$

Dio koji ne ovisi o parametru σ^2 gledamo kao konstantu te dobivamo

$$f(y \mid \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}. \tag{2.11}$$

Vjerodostojnost varijance za slučajni uzorak $y_1, ..., y_n$ iz $N(\mu, \sigma^2)$ razdiobe gdje je μ poznato je produkt vjerodostojnosti varijance za svaku pojedinu opservaciju. Kako nas zanima samo varijabilni dio, imamo

$$\begin{aligned} f(y_1, ..., y_n \mid \sigma^2) &\propto \prod_{i=1}^{n} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-\mu)^2} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

pri čemu je $SS_T = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2$ suma kvadrata razlika oko očekivanja. Uočimo da je vjerodostojnost varijance istog oblika kao SS_T puta *inverzna* χ^2 distribucija s $\kappa = n - 2$ stupnja slobode.

2.2 Neke specifične apriorne distribucije i pripadne aposteriorne distribucije

U daljnjem računu, Bayesov teorem 1.2.2 koristit ćemo za varijancu σ^2 normalne razdiobe. Dakle, treba nam apriorna distribucija za σ^2. Kako je varijanca σ^2 u kvadratnim jedinicama, nije lako usporediva s očekivanjem. Stoga ćemo, radi lakšeg razumijevanja, koristiti standardnu devijaciju σ u grafičkim prikazima aposteriorne gustoće. Pri pisanju apriornih i aposteriornih gustoća, u indeksu ćemo označavati radimo li s parametrom σ ili σ^2. Kako je varijanca funkcija standardne devijacije, lako jednu apriornu distribuciju transformiramo u drugu. Formula zamjene varijable koju ćemo koristiti u sljedećim izlaganjima nalazi se u B.1.1.

Pozitivna uniformna apriorna gustoća za varijancu

Pretpostavimo da sve pozitivne vrijednosti varijance σ^2 smatramo jednako vjerojatnima, odnosno sve pozitivne vrijednosti od σ^2 imaju jednaku apriornu težinu. Tada imamo pozitivnu uniformnu apriornu gustoću za varijancu danu s

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) = 1 \tag{2.13}$$

za $\sigma^2 > 0$. Uočimo da bi za integral ove gustoće vrijedilo $\int\limits_{\langle 0,+\infty\rangle} g_{\sigma^2}(\sigma^2)d\,\sigma^2 = \infty$, no kasnije nam treba samo proporcionalnost, stoga to ne predstavlja problem. Koristeći formulu zamjene varijabli B.3 dobivamo apriornu gustoću za σ

$$g_{\sigma}(\sigma) = 2\sigma. \tag{2.14}$$

Ovo je također neprava apriorna gustoća. Sada vidimo da ako svim vrijednostima varijance σ^2 damo jednaku težinu, za standardnu devijaciju težina je veća za veće vrijednosti od σ.

Iz navedenog, koristeći 2.2 i 2.12, dobivamo oblik aposteriorne gustoće

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) &\propto 1 \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n-2}{2}+1}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Primijetimo da se radi o $SS_T \times Inv\text{-}\chi^2(n-2)$ distribuciji.

Pozitivna uniformna apriorna gustoća za standardnu devijaciju

Promotrimo sada distribuciju gdje sve pozitivne vrijednosti standardne devijacije σ smatramo jednako vjerojatnima te im pridružujemo jednake apriorne težine. Tako dobivamo pozitivnu uniformnu apriornu gustoću za standardnu devijaciju

$$g_{\sigma}(\sigma) = 1 \tag{2.16}$$

za $\sigma > 0$. Apriorna gustoća je neprava jer je integral po dopustivom skupu ∞, no to u ovom slučaju nije problem. Koristeći jednakost B.2 dobivamo apriornu gustoću za varijancu

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) = 1 \times \frac{1}{2\sigma}. \tag{2.17}$$

Uočimo, kad damo jednaku apriornu težinu svim vrijednostima standardne devijacije dajemo veću težinu manjim vrijednostima varijance. Aposteriornu gustoću računamo koristeći 2.2 i 2.12. Zanima nas samo varijabilni dio, dok konstantu izostavljamo, te dobivamo

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) &\propto \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}+1}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Primijetimo da je to $SS_T \times Inv\text{-}\chi^2(n-1)$ distribucija.

Jeffreyjeva apriorna gustoća

Pretpostavimo da je parametar indeks svih mogućih gustoća koje razmatramo. Tada bilo koja neprekidna funkcija daje jednako valjan indeks. Jeffrey daje apriornu gustoću koja je invarijantna na neprekidne transformacije parametra (vidi B.4). U slučaju $N(\mu, \sigma^2)$ distribucije s poznatim μ, Jeffreyjevo pravilo daje

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \tag{2.19}$$

za $\sigma^2 > 0$. Ova apriorna gustoća ponovno je neprava, no za slučaj jednog slučajnog uzorka to ne predstavlja problem. Pripadna apriorna gustoća za standardnu devijaciju je

$$g_{\sigma}(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma}. \tag{2.20}$$

Aposteriorna gustoća dana je sa

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) &\propto \frac{1}{\sigma^2} \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Uočimo, to je $SS_T \times Inv\text{-}\chi^2(n)$ distribucija.

Inverzna χ^2 apriorna gustoća

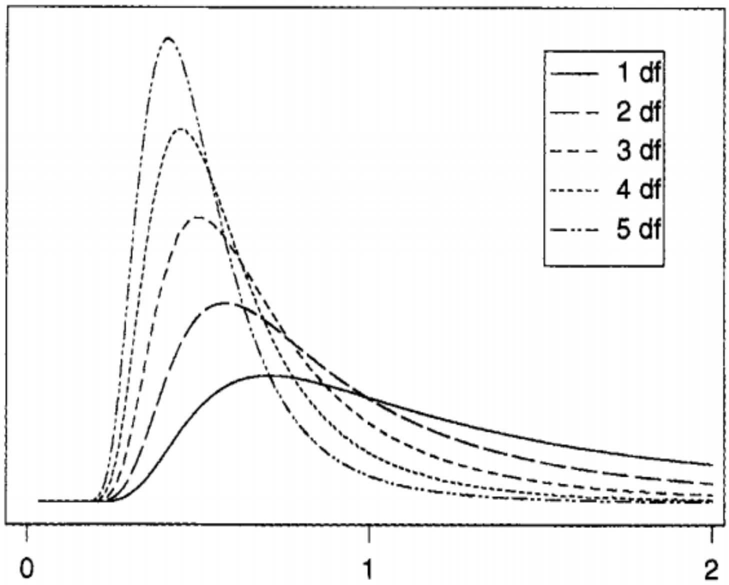
Pretpostavimo da za apriornu distribuciju od σ^2 uzmemo $S\times$ inverznu χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode. Tada je apriorna gustoća oblika

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{\kappa}{2}+2}} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \tag{2.22}$$

za $0 < \sigma^2 < \infty$. Koristeći formulu za zamjenu varijable B.3 dobivamo pripadnu apriornu gustoću za σ

$$g_\sigma(\sigma) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{\kappa-1}{2}+2}} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \tag{2.23}$$

za $0 < \sigma^2 < \infty$. Apriorne gustoće za σ uz $S = 1$ koje odgovaraju inverznoj χ^2 distribuciji od σ^2 s $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5$ stupnjeva slobode prikazane su na Slici 2.2.



Slika 2.2: Apriorne gustoće za standardnu devijaciju σ koje odgovaraju inverznoj χ^2 distribuciji s $\kappa = 1, ..., 5$ stupnjeva slobode, uz $S = 1$.[2]

Vidimo da je povećanjem stupnjeva slobode vjerojatnost sve više koncentrirana u malim vrijednostima od σ. Stoga, kako bismo dopustili veće standardne devijacije, trebamo koristiti niske stupnjeve slobode kad radimo s *inverznom* χ^2 apriornom razdiobom za varijancu. Iz navedenog, koristeći 2.2 i 2.12, dobivamo oblik aposteriorne gustoće

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n+\kappa}{2}+1}} e^{-\frac{S+SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

[2] Slika preuzeta iz [8].

Uočimo, to je $S' \times Inv\text{-}\chi^2(\kappa')$ distribucija, gdje su $S' = S + SS_T$ i $\kappa' = \kappa + n$. Kada su opservacije iz $N(\mu, \sigma^2)$ razdiobe s poznatim μ, konjugirana familija je $S\times$ *inverzna*-χ^2 distribucija. Postupak kojeg ćemo koristiti za dobivanje aposteriorne gustoće je tada dan

1. Dodaj ukupnu sumu kvadrata razlika od očekivanja konstanti S
2. Dodaj duljinu uzorka broju stupnjeva slobode. (2.25)

Izbor inverzne χ^2 apriorne gustoće

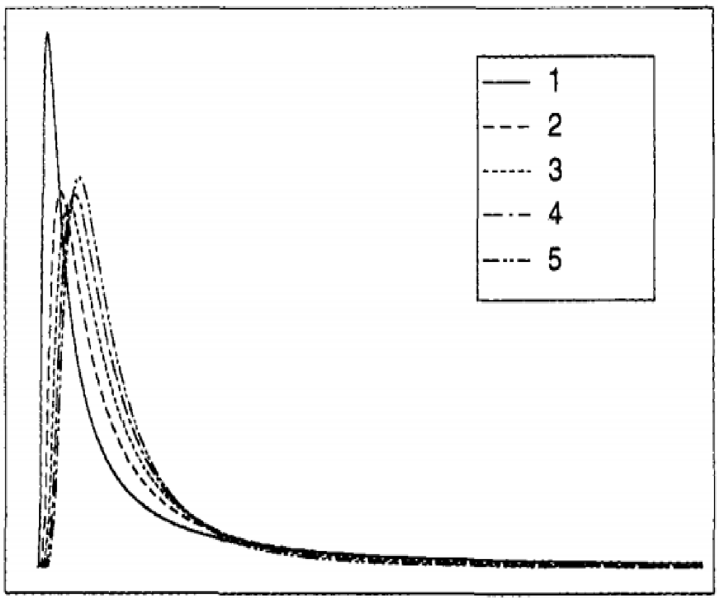
U ovom dijelu proučit ćemo situaciju kad apriorno vjerovanje o σ nije strogo određeno. Prije nego pogledamo izmjerene podatke izaberemo takvu vrijednost c za koju vjerujemo da su $\sigma < c$ i $\sigma > c$ jednako vjerojatni. Drugim riječima, za apriorni medijan uzimamo c.

Cilj nam je odrediti $S\times$ *inverzna*-χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode takvu da odgovara apriornom medijanu. Budući da nemamo puno apriornog znanja o σ, kako bismo umanjili moguće pogreške, tražimo apriornu distribuciju sa što raširenijim rasponom, uz uvjet da joj je medijan upravo zadani c. Želimo li odrediti kvantile zadane razdiobe, poslužimo se ranije spomenutom transformacijom $W = \frac{S}{\sigma^2}$ koja ima χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode. Za nju pak jednostavno možemo odrediti kvantile iz Tablice B.2.

$$\begin{aligned} 0.5 &= \mathbb{P}(\sigma > c) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sigma^2}{S} > \frac{c^2}{S}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W < \frac{S}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

za W koja ima χ^2 distribuciju s κ stupnjeva slobode. Sada jednostavno iz tablice kvantila B.2 očitamo 50%-tnu vrijednost i izračunamo traženi S.

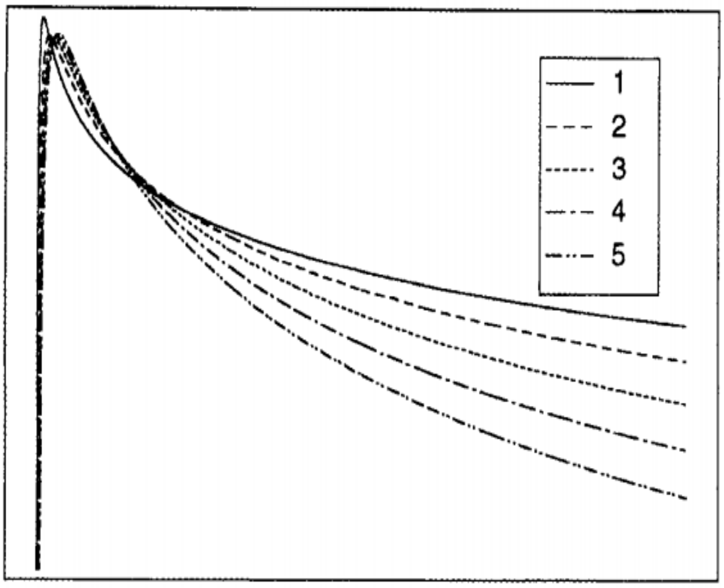
Na Slici 2.3 prikazane su apriorne gustoće koje imaju jednaki medijan za $\kappa = 1, ..., 5$ stupnjeva slobode.



Slika 2.3: Inverzne χ^2 apriorne distribucije s jednakim medijanom s $\kappa = 1, ..., 5$ stupnjeva slobode.[3]

Kako tražimo distribuciju maksimalno raširenog raspona, izabrat ćemo onu čiji su gornji i donji rep najteži. Uočimo da apriorna distribucija za $\kappa = 1$ ima najteži donji rep, dok su u gornjem repu sve vrijednosti vrlo blizu 0. Kako bismo preglednije vidjeli gornji rep distribucije, logaritmiramo gustoće.

[3]Slika preuzeta iz [8].



Slika 2.4: Logaritmi inverznih χ^2 apriornih distribucija s jednakim medijanom s $\kappa = 1, ..., 5$ stupnjeva slobode.[4]

Pogledajmo sada gornji rep na Slici 2.4. Sada jasno vidimo da je i gornji rep za $\kappa = 1$ najteži. Stoga maksimalno raširen raspon od svih *inverznih* χ^2 razdioba koje odgovaraju zadanom apriornom medijanu ima upravo *inverzna* χ^2 razdioba s 1 stupnjem slobode.

2.3 Bayesovo zaključivanje za normalnu standardnu devijaciju

U ovom dijelu prikazat ćemo neke osnovne procjene koje radimo za standardnu devijaciju normalne razdiobe. Koristit ćemo prethodno spomenute parametre skalirane *inverzne* χ^2 aposteriorne distribucije.

Bayesov procjenitelj za σ

Aposteriorna distribucija varijance σ^2 uz dani uzorak je $S' \times$ *inverzna* χ^2 distribucija s κ' stupnjeva slobode. Najjednostavniji procjenitelj parametra aposteriorne distribucije bit će mjera lokacije za varijancu σ^2. Najčešće korištene mjere lokacije su

[4]Slika preuzeta iz [8].

očekivanje, mod i medijan, te ćemo se njima baviti u daljnjem izlaganju. Računamo ih iz aposteriorne distribucije za varijancu te korjenujemo dobivenu vrijednost kako bismo dobili procjenitelj standardne devijacije σ.

Aposteriorno očekivanje varijance σ^2. Aposteriorno očekivanje računamo kao $\mathbb{E}[\sigma^2 g(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n)]$. Može se pokazati (vidi [9]) da je za $\kappa' > 2$ aposteriorno očekivanje dano s

$$m' = \frac{S'}{\kappa' - 2}. \tag{2.27}$$

Sada je Bayesov procjenitelj za standardnu devijaciju

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S'}{\kappa' - 2}}. \tag{2.28}$$

Aposteriorni mod varijance σ^2. Iz prethodnog dijela znamo da je aposteriorna distribucija varijance σ^2 dana *inverznom* $S \times \chi^2$ distribucijom s κ' stupnjeva slobode. Izjednačimo li derivaciju aposteriorne gustoće $g(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n)$ s nulom, rješavanjem jednadžbe dobivamo aposteriorni mod

$$m' = \frac{S'}{\kappa' + 2}. \tag{2.29}$$

Drugi mogući Bayesov procjenitelj za standardnu devijaciju je

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S'}{\kappa' + 2}}. \tag{2.30}$$

Aposteriorni medijan varijance σ^2. Medijan je po definiciji vrijednost ispod i iznad koje je 50% aposteriorne distribucije. Stoga ga računamo numerički iz

$$\int_0^{medijan} g(\sigma^2 \mid y_1, ..., y_n) d\,\sigma^2 = 0.50. \tag{2.31}$$

Iz tako numerički dobivenog medijana dobivamo treći mogući Bayesov procjenitelj za standardnu devijaciju

$$\hat{\sigma} = \sqrt{medijan}. \tag{2.32}$$

Bayesov pouzdani interval za σ

Pouzdane intervale lako možemo odrediti za parametar iz χ^2 distribucije pa, kako bismo dobili pouzdani interval za σ^2, trebamo provesti transformaciju nad σ^2. $W = \frac{S'}{\sigma^2}$ ima χ^2 distribuciju s κ' stupnjeva slobode. Prvo ćemo za W odrediti pouzdani interval, a zatim i za varijancu σ^2.

Neka je α razina značajnosti za koju određujemo pouzdani interval. Neka je tada u vrijednost χ^2 distribucije s κ' stupnjeva slobode s gornjim repom $1-\frac{\alpha}{2}$ i l vrijednost s gornjim repom $\frac{\alpha}{2}$ (vidi B.2). Po definiciji vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(u < \frac{S'}{\sigma^2} < l\right) &= 1-\alpha, \\ \mathbb{P}\left(\frac{S'}{l} < \sigma^2 < \frac{S'}{u}\right) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Kako nas zanima pouzdani interval za standardnu devijaciju σ, korjenujemo dobiveni izraz i dobivamo

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{S'}{l}} < \sigma < \sqrt{\frac{S'}{u}}\right) = 1-\alpha. \tag{2.34}$$

Testiranje jednostrane hipoteze o σ

Za standardnu devijaciju σ najčešće želimo odrediti je li veća ili manja od neke vrijednosti. Zapišimo to u obliku jednostrane hipoteze o σ

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma \leqslant \sigma_0 \\ H_1 &: \sigma > \sigma_0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ovaj test provodimo računajući aposteriornu vjerojatnost početne hipoteze. Zatim dobivenu vrijednost uspoređujemo s razinom značajnosti α. Kao i u prethodnom dijelu, neka je $W = \frac{S'}{\sigma^2}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(H_0 \ vrijedi \mid y_1, ..., y_n\right) &= \mathbb{P}\left(\sigma \leqslant \sigma_0 \mid y_1, ..., y_n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \mid y_1, ..., y_n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W \geqslant W_0\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

gdje je $W_0 = \frac{S'}{\sigma_0^2}$. Uočimo, kad vrijedi početna hipoteza H_0, W ima χ^2 distribuciju s κ' stupnjeva slobode. Vjerojatnost potom računamo iz Tablice kvantila B.2.

Poglavlje 3

Bayesovo zaključivanje – primjeri

U ovom poglavlju primijenit ćemo prethodna izlaganja na nekoliko praktičnih primjera.

Primjer 6. *Promatramo slučajni uzorak* $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ *gdje je očekivanje* μ *poznato. Odredit ćemo aposteriornu distribuciju standardne devijacije* σ*. Za varijancu* σ^2 *imamo apriornu distribuciju* $S \times Inv\text{-}\chi^2(\kappa)$*.*

Počinjemo s jednim članom familije kao apriornom distribucijom, dok ćemo sljedeći član familije dobiti kao aposteriornu distribuciju. Ovaj postupak provodimo na sljedeći način:

$$S' = S + SS_T \quad i \quad \kappa' = \kappa + n, \tag{3.1}$$

gdje je $SS_T = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2$*.*

Pretpostavimo da imamo 5 *opservacija* $y_1, y_2, ..., y_5$ *iz* $N(\mu, \sigma^2)$ *distribucije gdje je* $\mu = 200$ *poznato:*

206.4	*197.4*	*212.7*	*208.5*	*203.4*

Pretpostavimo da počinjemo s pozitivnom uniformnom apriornom distribucijom za standardnu devijaciju σ*. Apriorna gustoća za* σ *daje* $g_\sigma(\sigma) = 1$*, za* $\sigma > 0$*. Pripadna apriorna gustoća za varijancu* $g_{\sigma^2}(\sigma^2) = 1 \times \frac{1}{2\sigma}$*.*

Prisjetimo se da je aposteriorna gustoća za σ^2 *dana sa*

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2 | y_1, ..., y_n) &\propto \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Uvrstimo li zadane vrijednosti dobivamo

$$SS_T = \sum_{i=1}^{5}(y_i - 200)^2 = 292.82 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{6}{2}}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{4}{2}+1}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dobili smo da aposteriorna gustoća od varijance σ^2 *ima* $292.82 \times$*Inv*-$\chi^2(4)$ *distribuciju.*

Koristeći formulu zamjene varijable B.3 dobivamo da je aposteriorna gustoća od standardne devijacije σ

$$\begin{aligned} g_{\sigma}(\sigma|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{6}{2}}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}} \times 2\sigma \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Želimo odrediti aposteriorni medijan i aritmetičku sredinu standardne devijacije σ*, no radit ćemo s varijancom* σ^2*. Za nju znamo da ima inverznu* χ^2 *distribuciju i s njom znamo računati. Stoga prvo simuliramo 10000 vrijednosti iz aposteriorne distribucije od* σ^2, $292.82 \times$*Inv*-$\chi^2(4)$*. Histogram simuliranih vrijednosti možemo vidjeti na Slici 3.1.*

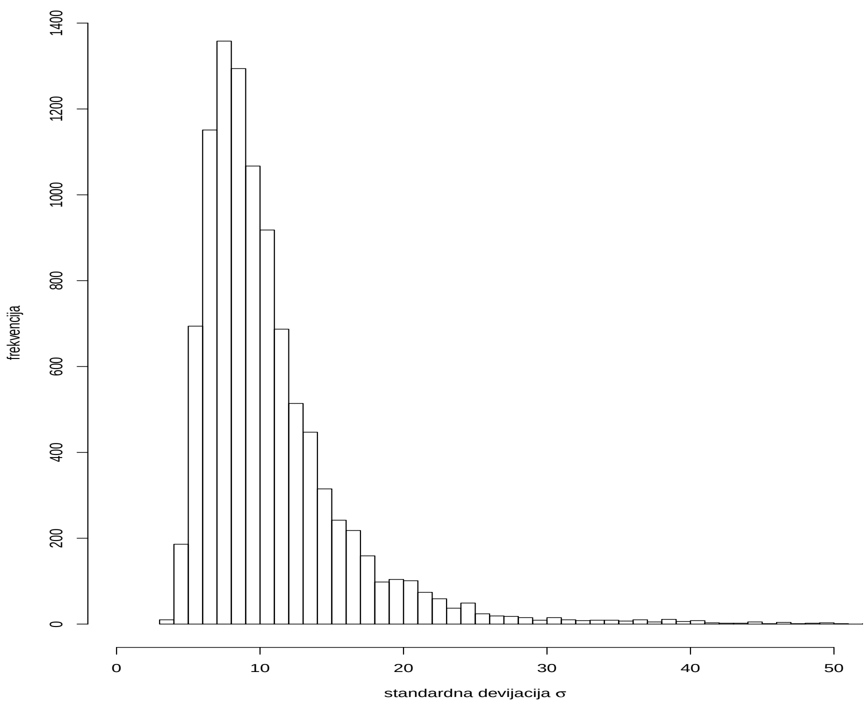
Aposteriornu aritmetičku sredinu simuliranog uzorka računamo koristeći

$$m = \frac{SS_T}{\kappa - 2}, \tag{3.6}$$

pri čemu je u ovom slučaju $\kappa = 4$*. Aposteriorni medijan računamo kao* 50%*-tni percentil simuliranog uzorka, dok Bayesov* 95%*-tni pouzdani interval za* σ^2 *određujemo koristeći* 2.5% *i* 97.5% *percentile. Prema 2.34 dobivamo vrijednosti za* σ*. Izračunate vrijednosti su dane u sljedećoj tablici:*

	aritm. sred.	*medijan*	*Bayesov pouzdani interval*
varijanca σ^2	146.41	86.28963	[26.42378, 593.36705]
stand. dev. σ	12.1	9.289221	[5.140406, 24.359127]

Za izračun i Sliku 3.1 koristili smo R kod (vidi Dodatak A).



Slika 3.1: Histogram simuliranog uzorka standardne devijacije σ.

Primjer 7. *Pretpostavimo da počinjemo s Jeffreyjevom apriornom distribucijom za standardnu devijaciju σ, dok su ostale pretpostavke jednake kao u prethodnom Primjeru 6. Za gustoću varijance σ^2 Jeffreyjevo pravilo daje $g_{\sigma^2}(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$, za $\sigma^2 > 0$.*

Prisjetimo se da je aposteriorna gustoća dana sa

$$\begin{aligned} g_{\sigma^2}(\sigma^2|y_1, ..., y_n) &\propto \frac{1}{\sigma^2} \times \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{SS_T}{2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Uvrstimo li zadane vrijednosti dobivamo

$$SS_T = \sum_{i=1}^{5} (y_i - 200)^2 = 292.82 \tag{3.8}$$

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{5}{2}+1}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}} \tag{3.9}$$

Dobili smo da aposteriorna gustoća od varijance σ^2 ima, do na konstantu proporcionalnosti, $292.82\times$Inv-$\chi^2(5)$ distribuciju. Koristeći formulu zamjene varijable B.3 dobivamo da je aposteriorna gustoća od standardne devijacije σ

$$\begin{aligned} g_\sigma(\sigma|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{5}{2}+1}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}} \times 2\sigma \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{6}{2}}} e^{-\frac{292.82}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jeffreyjeva apriorna distribucija za σ^2 invarijantna je na neprekidne transformacije parametra. Definiramo parametar $P = \frac{1}{\sigma^2}$. Za P se može pokazati da je distribuiran kao $\frac{U}{SS_T}$, gdje je $U \sim \chi^2(5)$.

Kako bismo odredili medijan i aritmetičku sredinu standardne devijacije σ, simuliramo 10000 vrijednosti iz aposteriorne distribucije od σ u dva koraka. Prvo simuliramo vrijednosti parametra $P = \frac{1}{\sigma^2}$ iz skalirane $\chi^2(5)$ distribucije. Zatim provodimo transformaciju $\sigma = \sqrt{\frac{1}{P}}$ kako bismo dobili vrijednosti iz aposteriorne distribucije standardne devijacije σ. Histogram simuliranih vrijednosti možemo vidjeti na Slici 3.2.

Aposteriornu aritmetičku sredinu simuliranog uzorka računamo izravno iz simuliranog uzorka. Aposteriorni medijan i Bayesov 95%-tni pouzdani interval za σ^2 i σ određujemo analogno kao u Primjeru 6. Dobivene vrijednosti su dane u sljedećoj tablici:

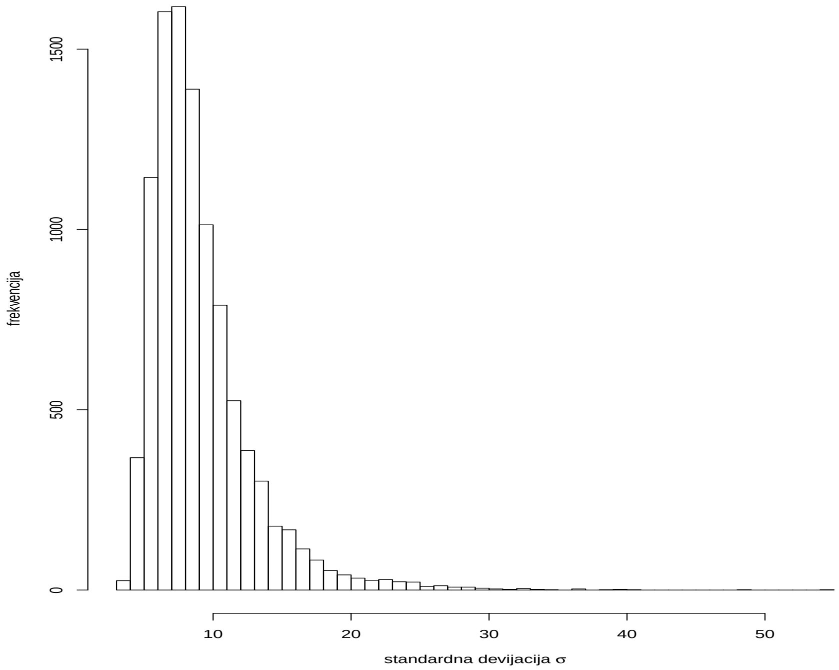
	aritm. sred.	*medijan*	*Bayesov pouzdani interval*
stand. dev. σ	9.048825	8.156679	$[4.796972, 18.692902]$

Za izračun i Sliku 3.2 koristili smo R kod (vidi Dodatak A).

Primjer 8. *Pretpostavimo da smo apriornog uvjerenja da je σ jednako vjerojatno manje od 8 kao i da je veće od 8. Dakle, apriorni medijan je 8.*

Odredimo $S\times$Inv-$\chi^2(\kappa)$ distribuciju koja odgovara našem apriornom medijanu, gdje je $\kappa = 1$ broj stupnjeva slobode. Iz tablice kvantila χ^2-razdiobe (vidi B.2) čitamo da je očekivanje za 1 stupanj slobode 0.4549 te računamo $S = 0.4549 \cdot 8^2 = 29.1136$. Tako dobivamo da je apriorna distribucija od σ^2 $29.1136\times$Inv-$\chi^2(1)$.

Kako je apriorna distribucija skalirana inverzna χ^2, za određivanje aposteriorne distribucije možemo koristiti R funkciju `nvaricp()`*. Tako izravno dobivamo da je aposteriorna distribucija od varijance σ^2 $321.9\times$Inv-$\chi^2(6)$. Koristeći formulu zamjene*



Slika 3.2: Histogram simuliranog uzorka standardne devijacije σ.

varijable B.3 dobivamo da je aposteriorna gustoća standardne devijacije σ

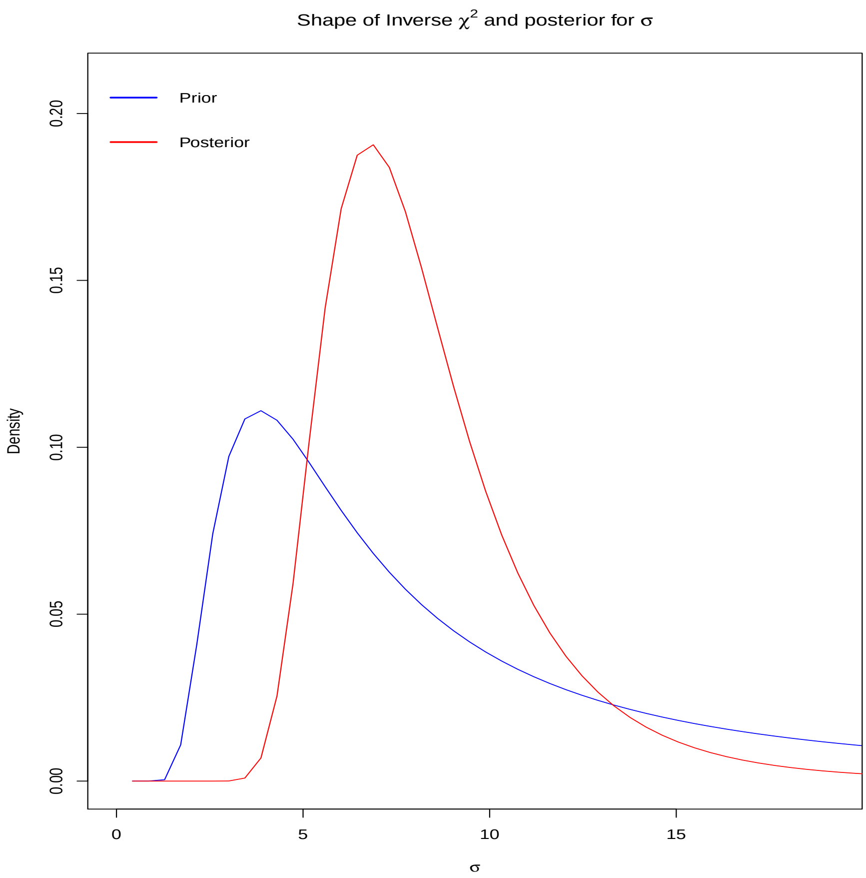
$$\begin{aligned} g_\sigma(\sigma|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{6}{2}+1}} e^{-\frac{321.9}{2\sigma^2}} \times 2\sigma \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{321.9}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Iako smo račun proveli za varijancu σ^2*, radi lakše vizualizacije utjecaja uzorka na zaključivanje, pogledajmo apriornu i aposteriornu gustoću standardne devijacije* σ *na Slici 3.3. Vidimo da je aposteriorna distribucija više koncentrirana u vrijednostima oko medijana 8 od apriorne. U sljedećem primjeru vidjet ćemo kako dodatni uzorak utječe na dobivenu distribuciju.*

Aposteriorno očekivanje je dobiveno kao

$$\sqrt{\frac{S'}{\kappa'-2}}. \tag{3.12}$$

pri čemu je u ovom slučaju $\kappa' = 6$, $S' = 321.9$.



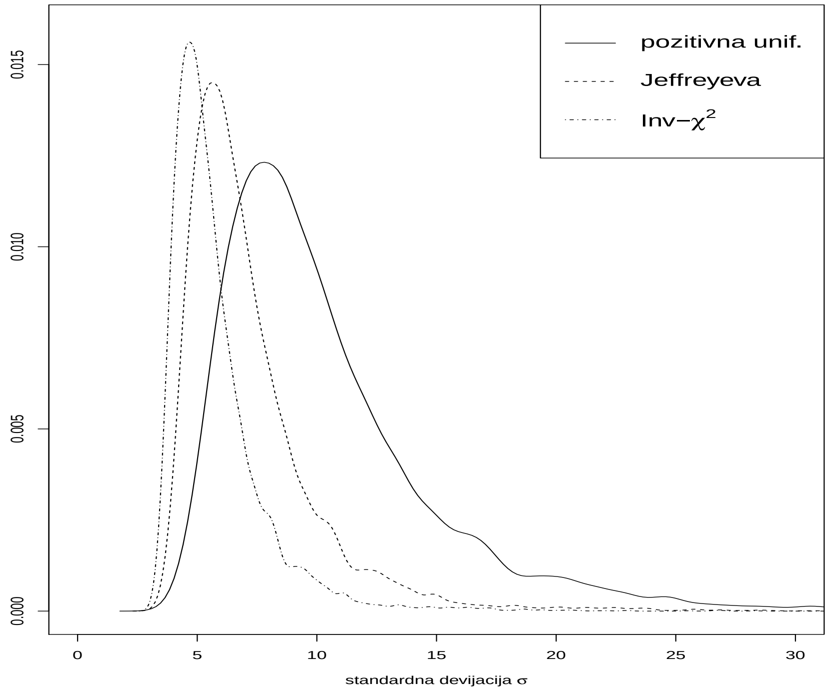
Slika 3.3: Apriorna i aposteriorna funkcija gustoće od σ.

Medijan računamo kao 50%-tni percentil, Bayesov pouzdani interval računamo izravno iz tablice kvantila B.2, dok procijenjeni Bayesov 95%-tni pouzdani interval za σ određujemo koristeći 2.5% i 97.5% percentile simuliranog uzorka. Izračunate vrijednosti su dane u sljedećoj tablici:

	aritm. sred.	*medijan*	*Bayesov p. i.*	*proc. Bayesov p. i.*
st. dev. σ	8.971287	7.548542	$[4.720198, 16.13019]$	$[4.468333, 15.929516]$

Za izračun i Sliku 3.3 koristili smo R kod (vidi Dodatak A).

Usporedimo sada aposteriorne distribucije za standardnu devijaciju σ iz navedena tri primjera. Na Slici 3.4 prikazane su aposteriorne gustoće u ovisnosti o apriornim distribucijama koje su redom pozitivna uniformna, Jeffreyjeva i inverzna χ^2.



Slika 3.4: Grafovi distribucija standardne devijacije σ.

Primijetimo da aposteriorna distribucija iz pozitivne uniformne apriorne distribucije ima nešto teži gornji rep od ostalih jer njezina apriorna distribucija pridaje veću težinu velikim vrijednostima od σ. Iz prethodnih računa uočavamo da je kod prve distribucije medijan najviši od tri navedena, a Bayesov pouzdani interval je najširi. Slika 3.4 potvrđuje sve dobivene rezultate.

Primjer 9. *Pretpostavimo da počinjemo s* $321.9336 \times Inv\text{-}\chi^2(6)$ *distribucijom iz prethodnog Primjera 8 kao apriornom distribucijom za varijancu* σ^2*, a zatim uzmemo dodatnih* 5 *opservacija* $z_1, z_2, ..., z_5$ *iz* $N(\mu, \sigma^2)$ *distribucije gdje je* $\mu = 200$ *poznato. Opservacije su:*

211.7	*205.4*	*206.0*	*206.5*	*201.7*

U ovom slučaju, apriorna gustoća za σ^2 *je dana sa*

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{6}{2}+1}} e^{-\frac{321.9336}{2\sigma^2}} \tag{3.13}$$

za $0 < \sigma^2 < \infty$. *Uočimo da je pripadna apriorna gustoća za* σ, *dobivena koristeći formulu zamjene varijabli B.3,*

$$g_\sigma(\sigma) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{5}{2}+1}} e^{-\frac{321.9336}{2\sigma^2}} \tag{3.14}$$

za $0 < \sigma^2 < \infty$.

Apriorna distribucija je skalirana inverzna χ^2, *pa za određivanje aposteriorne distribucije koristimo R funkciju* `nvaricp()`. *Tako izravno dobivamo da je aposteriorna distribucija od* σ^2 $569.1 \times Inv\text{-}\chi^2(11)$. *Koristeći formulu zamjene varijable B.3 dobivamo da je aposteriorna gustoća od standardne devijacije* σ

$$\begin{aligned} g_\sigma(\sigma|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{11}{2}+1}} e^{-\frac{569.1}{2\sigma^2}} \times 2\sigma \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{12}{2}}} e^{-\frac{569.1}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pogledajmo apriornu i aposteriornu gustoću od σ *na Slici 3.5. Uočimo, apriorna distribucija u ovom Primjeru je aposteriorna distribucija iz prethodnog Primjera 8. Uzimanjem novog uzorka vidimo da je novodobivena aposteriorna distribucija još manje raširena.*

Aposteriorno očekivanje je dobiveno kao

$$\sqrt{\frac{S'}{\kappa' - 2}} \tag{3.16}$$

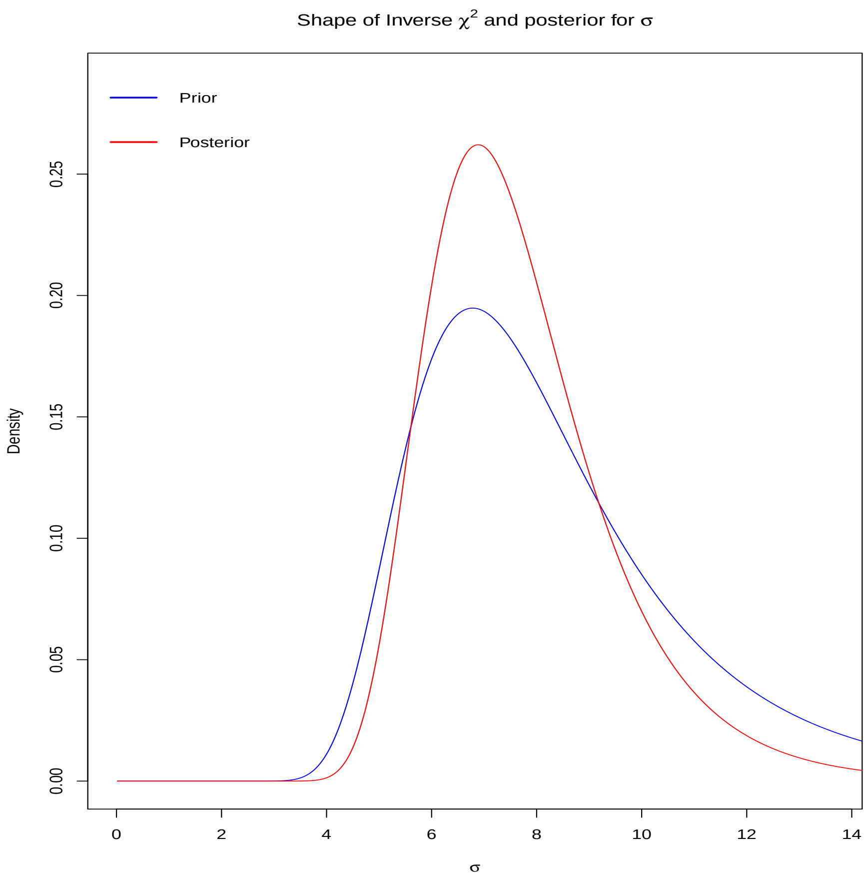
pri čemu je u ovom slučaju $\kappa' = 11$, $S' = 569.1$. *Kao i u prethodnom Primjeru 8, medijan računamo kao* 50%*-tni percentil, Bayesov pouzdani interval računamo izravno iz tablice kvantila B.2, dok procijenjeni Bayesov* 95%*-tni pouzdani interval za* σ *određujemo koristeći* 2.5% *i* 97.5% *percentile. Izračunate vrijednosti su dane u sljedećoj tablici:*

	aritm. sred.	*medijan*	*Bayesov p. i.*	*proc. Bayesov p. i.*
st. dev. σ	7.951869	7.407921	$[5.095299, 12.21239]$	$[5.085414, 12.176921]$

Za izračun i Sliku 3.5 koristili smo R kod (vidi Dodatak A).

Primjer 10. *Pretpostavimo da počinjemo sa svih* 10 *opservacija* $y_1, y_2, ..., y_{10}$ *iz* $N(\mu, \sigma^2)$ *distribucije i apriornom distribucijom koju smo odredili u Primjeru 8. Opservacije su:*

206.4	*197.4*	*212.7*	*208.5*	*203.4*	*211.7*	*205.4*	*206.0*	*206.5*	*201.7*



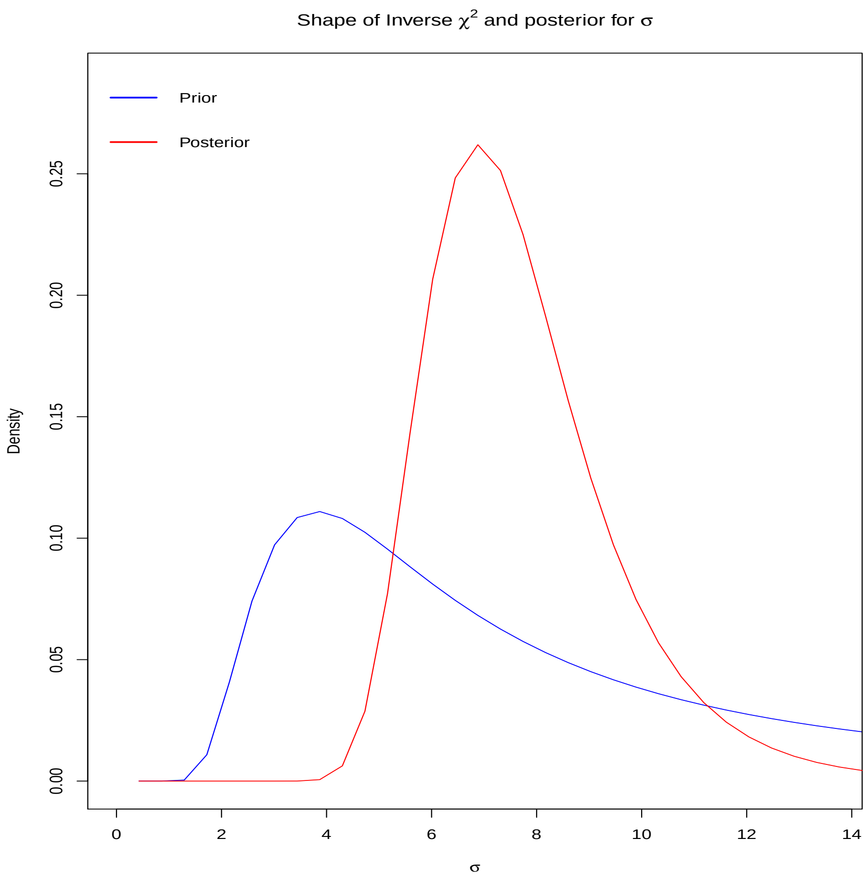
Slika 3.5: Apriorna i aposteriorna funkcija gustoće od σ.

Apriorna gustoća za σ^2 *je dana sa* $29.1136 \times Inv\text{-}\chi^2(1)$.

Kao i u prethodnim primjerima, koristimo R funkciju `nvaricp()` *te dobivamo da je aposteriorna distribucija za* σ^2 $569.1 \times Inv\text{-}\chi^2(11)$. *Koristeći formulu zamjene varijable B.3 dobivamo da je aposteriorna gustoća od standardne devijacije* σ

$$\begin{aligned} g_\sigma(\sigma|206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{11}{2}+1}} e^{-\frac{569.1}{2\sigma^2}} \times 2\sigma \\ &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{12}{2}}} e^{-\frac{569.1}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Apriorna i aposteriorna gustoća od σ *prikazane su na Slici 3.6. Uočimo, dobivena aposteriorna distribucija jednaka je onoj iz Primjera 9.*



Slika 3.6: Apriorna i aposteriorna funkcija gustoće od σ.

Konačno, zanima nas je li standardna devijacija σ veća ili manja od 5. Testiramo sljedeće hipoteze

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma \leqslant 5 \\ H_1 &: \sigma > 5 \end{aligned} \tag{3.18}$$

na razini značajnosti 5%.

Neka je $W = \frac{S'}{\sigma^2}$. Kad je hipoteza H_0 istinita, W ima $\chi^2(\kappa')$-distribuciju. Uzmemo li $\sigma_0 = 5$, dobivamo da je

$$W_0 = \frac{S'}{\sigma_0^2} = \frac{569.1236}{5^2} = 22.76494. \tag{3.19}$$

Iz kvantila χ^2-razdiobe čitamo da je kritično područje testa $[19.67514, +\infty\rangle$. Vrijednost od W nalazi se unutar kritičnog područja pa odbacujemo hipotezu H_0 u korist *alternativne* H_1*, dakle na razini značajnosti* 5% *možemo zaključiti da je standardna devijacija* σ *veća od* 5*. Za izračun i sliku 3.6 smo koristili R kod (vidi Dodatak A).*

Dodatak A

Rješenja primjera u R-u

Primjer 6

Ovdje navodimo R kod za rješenje Primjera 6

```
library(geoR)

y = c(206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4)
mu = 200

SS_T = sum((y - mu)^2)
n = length(y)

k = n-1 # stupanj slobode chisq razdiobe

set.seed(500)
s = rinvchisq(1000, df = k, scale) * SS_T

hist(sqrt(s), main = "")

m = SS_T / (k - 2)
sqrt(m) # procjena iz aritm. sredine

quantile(s, probs = c(0.025, 0.5, 0.975))
sqrt(quantile(s, probs = c(0.025, 0.5, 0.975)))
```

Primjer 7

Rješenje primjera 7 načinjeno je u R-u

```
library(geoR)

y = c(206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4)
mu = 200

SS_T = sum((y - mu)^2)
n = length(y)

k = n # stupanj slobode chisq razdiobe

set.seed(500)

P = rchisq(1000, k) / SS_T
s = sqrt(1/P)

hist(s, main = "")

mean(s) # aritm. sredina za sigmu
quantile(s, probs = c(0.025, 0.5, 0.975))
```

Primjer 8

Rješenje primjera 8 u R-u

```
library(Bolstad)

z = c(206.4,197.4,212.7,208.5,203.4)
mu = 200 # ocekivanje
med = 8 # medijan

S = qchisq(0.5, df = 1) * med^2

res = nvaricp(z, mu, S, 1, ret = TRUE)

cdf <- sintegral(res$sigma, res$posterior)

Finv_sigma <- approxfun(cdf$cdf$y, cdf$cdf$x)
```

```
Finv_sigma (c(0.025, 0.5, 0.975))

sqrt(res$S1 / qchisq(0.025, df = res$kappa1))
sqrt(res$S1 / qchisq(0.975, df = res$kappa1))

sqrt(res$S1 / (res$kappa1 - 2)) #ocekivanje
```

Primjer 9

Rješenje primjera 9 u R-u

```
library(Bolstad)

z = c(211.7, 205.4, 206.0, 206.5, 201.7)
mu = 200 # ocekivanje

S = 321.9 # koeficijent skaliranja
k = 6 # broj stupnjeva slobode
res = nvaricp(z, mu, S, k, ret = TRUE)
cdf <- sintegral(res$sigma, res$posterior)

Finv_sigma <- approxfun(cdf$cdf$y, cdf$cdf$x)
Finv_sigma (c(0.025, 0.5, 0.975))

sqrt(res$S1 / qchisq(0.025, df = res$kappa1))
sqrt(res$S1 / qchisq(0.975, df = res$kappa1))

sqrt(res$S1 / (res$kappa1 - 2))
```

Primjer 10

Rješenje primjera 10 u R-u

```
library(Bolstad)

z = c(206.4, 197.4, 212.7, 208.5, 203.4,
\+ 211.7, 205.4, 206.0, 206.5, 201.7)
mu = 200 # ocekivanje

S = 29.1136 # koeficijent skaliranja
```

```
k = 1 # broj stupnjeva slobode
res = nvaricp(z, mu, S, k, ret = TRUE)

cdf <- sintegral(res$sigma, res$posterior)

Finv_sigma <- approxfun(cdf$cdf$y, cdf$cdf$x)
Finv_sigma (c(0.025, 0.5, 0.975))

sqrt(res$S1 / (res$kappa1 - 2))

# testiramo hipotezu
# H0: sigma <= 5
# H1: sigma > 5

sigma_0 = 5
alfa = 0.05

qchisq(1 - alfa, df = 11)

W = S_ / sigma_0^2
```

Dodatak B

Pomoćni rezultati

B.1 Apriorna gustoća

Teorem B.1.1 (Zamjena varijable). *Neka je $g_\theta(\theta)$ apriorna gustoća za parametar θ i funkcija $\psi(\theta)$ parametra θ je bijekcija. Tada je ψ također dopustiv parametar. Apriorna gustoća od ψ je dana sa*

$$g_\psi(\psi) = g_\theta(\theta(\psi)) \times \frac{d\theta}{d\psi}. \tag{B.1}$$

Neka je $g_\sigma(\sigma)$ apriorna gustoća za parametar σ i $\psi(\sigma) = \sigma^2$. Tada je apriorna gustoća od σ^2 dana sa

$$g_{\sigma^2}(\sigma^2) = g_\sigma(\sigma) \times \frac{1}{2\sigma}. \tag{B.2}$$

Ako pak imamo apriornu gustoću za parametar σ^2, tada je, uz $\psi(\sigma) = \sigma^{-\frac{1}{2}}$, apriorna gustoća za σ dana sa

$$g_\sigma(\sigma) = g_{\sigma^2}(\sigma^2) \times 2\sigma. \tag{B.3}$$

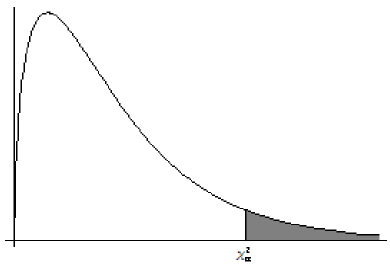
Jeffreyjeva invarijantna apriorna gustoća za parametar θ dana je sa

$$g(\theta) \propto \sqrt{I(\theta \mid y)}, \tag{B.4}$$

gdje je $I(\theta \mid y)$ Fisherova informacija dana sa $I(\theta \mid y) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 log f(y|\theta)}{\partial\theta^2})$.

B.2 Tablica kvantila

Tablica kvantila χ^2-razdiobe



m \ α	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
1	0.0002	0.0006	0.0010	0.0039	0.0158	0.0642	0.1485	0.4549	1.0742
2	0.0201	0.0404	0.0506	0.1026	0.2107	0.4463	0.7133	1.3863	2.4079
3	0.1148	0.1848	0.2158	0.3518	0.5844	1.0052	1.4237	2.3660	3.6649
4	0.2971	0.4294	0.4844	0.7107	1.0636	1.6488	2.1947	3.3567	4.8784
5	0.5543	0.7519	0.8312	1.1455	1.6103	2.3425	2.9999	4.3515	6.0644
6	0.8721	1.1344	1.2373	1.6354	2.2041	3.0701	3.8276	5.3481	7.2311
7	1.2390	1.5643	1.6899	2.1673	2.8331	3.8223	4.6713	6.3458	8.3834
8	1.6465	2.0325	2.1797	2.7326	3.4895	4.5936	5.5274	7.3441	9.5245
9	2.0879	2.5324	2.7004	3.3251	4.1682	5.3801	6.3933	8.3428	10.6564
10	2.5582	3.0591	3.2470	3.9403	4.8652	6.1791	7.2672	9.3418	11.7807
11	3.0535	3.6087	3.8157	4.5748	5.5778	6.9887	8.1479	10.3410	12.8987
12	3.5706	4.1783	4.4038	5.2260	6.3038	7.8073	9.0343	11.3403	14.0111
13	4.1069	4.7654	5.0088	5.8919	7.0415	8.6339	9.9257	12.3398	15.1187
14	4.6604	5.3682	5.6287	6.5706	7.7895	9.4673	10.8215	13.3393	16.2221
15	5.2293	5.9849	6.2621	7.2609	8.5468	10.3070	11.7212	14.3389	17.3217
16	5.8122	6.6142	6.9077	7.9616	9.3122	11.1521	12.6243	15.3385	18.4179
17	6.4078	7.2550	7.5642	8.6718	10.0852	12.0023	13.5307	16.3382	19.5110
18	7.0149	7.9062	8.2307	9.3905	10.8649	12.8570	14.4399	17.3379	20.6014
19	7.6327	8.5670	8.9065	10.1170	11.6509	13.7158	15.3517	18.3377	21.6891
20	8.2604	9.2367	9.5908	10.8508	12.4426	14.5784	16.2659	19.3374	22.7745
21	8.8972	9.9146	10.2829	11.5913	13.2396	15.4446	17.1823	20.3372	23.8578
22	9.5425	10.6000	10.9823	12.3380	14.0415	16.3140	18.1007	21.3370	24.9390
23	10.1957	11.2926	11.6886	13.0905	14.8480	17.1865	19.0211	22.3369	26.0184
24	10.8564	11.9918	12.4012	13.8484	15.6587	18.0618	19.9432	23.3367	27.0960
25	11.5240	12.6973	13.1197	14.6114	16.4734	18.9398	20.8670	24.3366	28.1719
26	12.1981	13.4086	13.8439	15.3792	17.2919	19.8202	21.7924	25.3365	29.2463
27	12.8785	14.1254	14.5734	16.1514	18.1139	20.7030	22.7192	26.3363	30.3193
28	13.5647	14.8475	15.3079	16.9279	18.9392	21.5880	23.6475	27.3362	31.3909
29	14.2565	15.5745	16.0471	17.7084	19.7677	22.4751	24.5770	28.3361	32.4612
30	14.9535	16.3062	16.7908	18.4927	20.5992	23.3641	25.5078	29.3360	33.5302

Tablica kvantila χ^2-razdiobe

m \ α	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	1.6424	2.7055	3.8415	5.0239	5.4119	6.6349	7.8794	9.5495	10.8276
2	3.2189	4.6052	5.9915	7.3778	7.8240	9.2103	10.5966	12.4292	13.8155
3	4.6416	6.2514	7.8147	9.3484	9.8374	11.3449	12.8382	14.7955	16.2662
4	5.9886	7.7794	9.4877	11.1433	11.6678	13.2767	14.8603	16.9238	18.4668
5	7.2893	9.2364	11.0705	12.8325	13.3882	15.0863	16.7496	18.9074	20.5150
6	8.5581	10.6446	12.5916	14.4494	15.0332	16.8119	18.5476	20.7912	22.4577
7	9.8032	12.0170	14.0671	16.0128	16.6224	18.4753	20.2777	22.6007	24.3219
8	11.0301	13.3616	15.5073	17.5345	18.1682	20.0902	21.9550	24.3521	26.1245
9	12.2421	14.6837	16.9190	19.0228	19.6790	21.6660	23.5894	26.0564	27.87716
10	13.4420	15.9872	18.3070	20.4832	21.1608	23.2093	25.1882	27.7216	29.5883
11	14.6314	17.2750	19.6751	21.9200	22.6179	24.7250	26.7568	29.3536	31.2641
12	15.8120	18.5493	21.0261	23.3367	24.0540	26.2170	28.2995	30.9570	32.9095
13	16.9848	19.8119	22.3620	24.7356	25.4715	27.6882	29.8195	32.5352	34.5282
14	18.1508	21.0641	23.6848	26.1189	26.8728	29.1412	31.3193	34.0913	36.1233
15	19.3107	22.3071	24.9958	27.4884	28.2595	30.5779	32.8013	35.6276	37.6973
16	20.4651	23.5418	26.2962	28.8454	29.6332	31.9999	34.2672	37.1461	39.2524
17	21.6146	24.7690	27.5871	30.1910	30.9950	33.4087	35.7185	38.6485	40.7902
18	22.7595	25.9894	28.8693	31.5264	32.3462	34.8053	37.1565	40.1361	42.3124
19	23.9004	27.2036	30.1435	32.8523	33.6874	36.1909	38.5823	41.6103	43.8202
20	25.0375	28.4120	31.4104	34.1696	35.0196	37.5662	39.9968	43.0720	45.3147
21	26.1711	29.6151	32.6706	35.4789	36.3434	38.9322	41.4011	44.5222	46.7970
22	27.3015	30.8133	33.9244	36.7807	37.6595	40.2894	42.7957	45.9618	48.2679
23	28.4288	32.0069	35.17246	38.0756	38.9683	41.6384	44.1813	47.3915	49.7282
24	29.5533	33.1962	36.4150	39.3641	40.2704	42.9798	45.5585	48.8118	51.1786
25	30.6752	34.3816	37.6525	40.6465	41.5661	44.3141	46.9279	50.2234	52.6197
26	31.7946	35.5632	38.8851	41.9232	42.8558	45.6417	48.2899	51.6269	54.0520
27	32.9117	36.7412	40.1133	43.1945	44.1400	46.9629	49.6449	53.0226	55.4760
28	34.0266	37.9159	41.3371	44.4608	45.4188	48.2782	50.9934	54.4110	56.8923
29	35.1394	39.0875	42.5570	45.7223	46.6927	49.5879	52.3356	55.7925	58.3012
30	36.2502	40.2560	43.7730	46.9792	47.9618	50.8922	53.6720	57.1674	59.7031

Bibliografija

[1] M. Dogucu A. A. Johnson, M. Ott, *Bayes Rules! An Introduction to Bayesian Modeling with R*, 2021, `https://www.bayesrulesbook.com/chapter-5.html`, (Pristupljeno: 24. srpnja 2021.).

[2] J. Albert, *Bayesian computation with R*, Springer, 2009.

[3] J. M. Bernardo, *Bayesian statistics*, 2009, `https://www.uv.es/bernardo/BayesStat.pdf`, (Pristupljeno: 19. ožujka 2021.).

[4] D. Buljat, *Bayesianski problem određivanja početne vjerojatnosti hipoteze*, Sveučilište u Rijeci, 2017.

[5] D. Draper, *Bayesian modeling, inference and prediction*, 2011.

[6] M. Huzak, *Matematička statistika, Predavanja*, 2021, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ms/files/ms1v8.pdf`, (Pristupljeno: 23. ožujka 2021.).

[7] J. M. Bernardo i A. F. M. Smith, *Bayesian theory*, John Wiley & Sons, 2000.

[8] W. M. Bolstad i J. M. Curran, *Introduction to Bayesian statistics*, John Wiley & Sons, 2016.

[9] P. Lee, *Bayesian Statistics: An Introduction*, Edward Arnold, London, 1989.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, 1987.

Sažetak

U ovom radu, bavimo se Bayesovim zaključivanjem. U uvodu je opisano statističko zaključivanje i primjena Bayesovog teorema.

U prvom poglavlju, definirani su pojmovi potrebni za razumijevanje Bayesovog zaključivanja i statističku analizu. Nakon toga, uvodimo Bayesovu paradigmu i uspoređujemo je s frekvencionističkom. Konačno, na primjeru prikazujemo ideju aposteriorne distribucije.

U drugom poglavlju, bavimo se Bayesovim zaključivanjem za standardnu devijaciju za razne neprekidne apriorne distribucije. Nakon toga, navodimo aposteriorne distribucije pridružene zadanim apriornim distribucijama. Na kraju poglavlja, prikazujemo neke osnovne statističke procjene koje radimo za standardnu devijaciju normalne razdiobe.

U trećem poglavlju, na nekoliko primjera dobivenih računalnim simulacijama, provodimo statističku analizu koristeći ranije navedena izlaganja. Sve metode implementiramo u R-u.

Summary

In this paper, Bayesian inference is presented. In the introduction, statistical inference and application of Bayes' Theorem are described.

In the first chapter, concepts needed for understanding Bayesian inference and statistical analysis are defined. Then, Bayesian paradigm is presented and compared to frequentist perspective. Finally, the idea of posterior distribution is presented on an example.

In the second chapter, Bayesian inference for standard deviation for various continuous priors is presented. Then, corresponding posterior distributions are listed. Finally, some fundamental statistical estimates on normal standard deviation are presented.

In the third chapter, statistical analysis made by computer simulations is used on a few examples using previous statements. All methods are implemented in R.

Životopis

Dana 28. svibnja 1996., rođena sam u Zagrebu, gdje sam pohađala Osnovnu školu Rapska, Osnovnu školu Vladimira Nazora i Glazbenu školu Zlatka Balokovića. Već u ranoj dobi pokazujem interes za matematiku i prirodoslovne predmete te 2011. godine upisujem XV. gimnaziju.

Godine 2015., upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, kojeg sam završila 2019. godine. Tada sam, na istom odsjeku, upisala Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.

U slobodno vrijeme, dugi niz godina bavim se stranim jezicima i plesom.