Polinomi u nastavi matematike

Čerkez, Kristina

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Kristina Čerkez

Polinomi u nastavi matematike

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Analizirajući kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj uočavamo da se više ne obrađuje nastavna cjelina *Polinomi*. To je zapravo rezultat kurikularne reforme kojom su izvan snage stavljeni nastavni planovi i programi gimnazija stari čak 25 godina. S druge strane, polinomi su elementarne funkcije u matematici koje su značajne i zbog činjenice da svoju ulogu pronalaze kod aproksimacija.

Stoga se na početku diplomskog rada posvetila pažnja analizi udžbenika koja prikazuje da se koncept polinoma indirektno provlači kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje, iako nedostaje pojam polinoma kao funkcije. Različite poglede na tu temu imaju nastavnici čija su iskustva u nastavi i stajališta opisana na kraju prvog dijela.

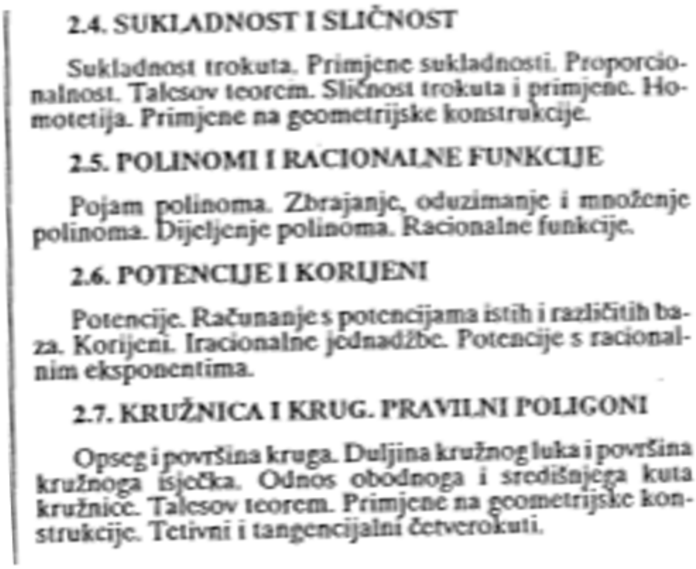
Nakon toga slijedi osvrt na kvadratnu funkciju, odnosno polinom drugog stupnja, zajedno s metodičkim komentarima što bi se moglo obraditi na drukčiji način nego u udžbenicima s ciljem produbljivanja znanja i razvijanja analitičkog načina mišljenja. Dodatno ćemo opisati kvalitativno crtanje grafova polinoma viših stupnjeva, što možemo iskoristiti prilikom rješavanja nejednadžbi.

Na samom kraju rada nalaze se zadaci s natjecanja koji pokazuju da takvi zadaci mogu biti uklopljeni u nastavu i da se prilikom njihovog rješavanja ostvaruju traženi ishodi iz predmetnog kurikuluma. Također, doprinose razvijanju različitih načina mišljenja, kao i smanjenju otpora učenika prema natjecateljskim zadacima.

1 Jesmo li izgubili polinome?

Nastava matematike u srednjim školama se od 1994. godine odvijala prema *Odluci o zajedničkom i izbornom dijelu programa za stjecanje srednje školske spreme u programima opće, jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije (Glasnik Ministarstva kulture i prosvjete,* 1994.*).* Međutim, od školske godine 2019./2020. na snagu stupa *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za osnovnu školu i gimnazije u Republici Hrvatskoj.* Iako je kurikularna reforma trebala doprinijeti usklađenom i učinkovitom sustavu odgoja i obrazovanja, naglašavajući povezanost između ishoda, procesa učenja i poučavanja te vrednovanja, navedena reforma je u konačnici uzburkala javnost, donijela val rasprava i podijeljenih mišljenja.

Uspoređujući prethodni nastavni program za gimnazije i trenutni predmetni kurikulum za nastavni predmet Matematika, možemo uočiti da se od školske godine 2019./2020. u nastavi matematike više ne obrađuje nastavna cjelina *Polinomi.* Iako je nekadašnji nastavni program bio poprilično siromašan, misleći pritom da nije sadržavao ishode niti opise ikakvih očekivanja od učenika razloženih prema složenosti, dubini i širini, ovisno o dobi učenika, ipak se jasno može iščitati od kojih je nastavnih jedinica bila sačinjena cjelina *Polinomi.*



2.4. SUKLADNOST I SLIČNOST

Sukladnost trokuta. Primjene sukladnosti. Proporcionalnost. Talesov teorem. Sličnost trokuta i primjene. Homotetija. Primjene na geometrijske konstrukcije.

2.5. POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE

Pojam polinoma. Zbrajanje, oduzimanje i množenje polinoma. Dijeljenje polinoma. Racionalne funkcije.

2.6. POTENCIJE I KORIJENI

Potencije. Računanje s potencijama istih i različitih baza. Korijeni. Iracionalne jednadžbe. Potencije s racionalnim eksponentima.

2.7. KRUŽNICA I KRUG. PRAVILNI POLIGONI

Opseg i površina kruga. Duljina kružnog luka i površina kružnoga isječka. Odnos obodnoga i središnjega kuta kružnice. Talesov teorem. Primjene na geometrijske konstrukcije. Tetivni i tangencijalni četverokuti.

Slika 1: Glasnik Ministarstva kulture i prosvjete

1.1 Osnovnoškolsko obrazovanje

Ne postoji nastavna cjelina koja se bavi samo polinomima, ali učenici se ipak susreću s polinomima na indirektan način još u osnovnoj školi. Najjednostavniji algebarski izraz, odnosno monom, učenici susreću već u petom razredu osnovne škole. Primjenjujući svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju i oduzimanju, učenici uče zbrajati i oduzimati monome. Primjeri takvog zbrajanja i oduzimanja monoma su:

$$7 \cdot a + 9 \cdot a = (7 + 9) \cdot a = 16 \cdot a$$
$$17 \cdot y - 13 \cdot y = (17 - 13) \cdot y = 4 \cdot y.$$

Nadalje, u šestom razredu obrađuju se algebarski izrazi u skupu cijelih brojeva. Uvodi se pojam algebarskog izraza kao matematičkog zapisa u kojem se pojavljuju slova koja zamjenjuju, tj. predstavljaju brojeve. Učenicima se naglašava da se znak množenja obično izostavlja, a kao primjeri algebarskih izraza navode se razne formule i jednadžbe koje su učenici susreli do tada, na primjer $7 - x = 5$, $O = 2a + 2b$. Učenici zbrajaju i oduzimaju istoimene monome te računaju vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza za zadane vrijednosti. Pojmove *monom* i *binom* učenici bi, prema predmetnom kurikulumu, trebali moći opisati u sedmom razredu osnovnoškolskog obrazovanja. Kroz sedmi i osmi razred proširuje se njihovo znanje o algebarskim izrazima, množi se monom s monomom, binom s monom, kao i binom s binomom. Štoviše, učenici pojednostavljuju algebarske izraze u skupu racionalnih i realnih brojeva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem.

Također se u osnovnoj školi, točnije u sedmom i osmom razredu, obrađuju linearne i kvadratne jednadžbe. Rješavanje tih jednadžbi zapravo je postupak traženja nultočaka polinoma prvog i drugog stupnja, redom. No, učenici nemaju još dovoljno znanja da bi razmišljali na taj način, zapravo, još nisu ni upoznati s pojmom funkcije. Stoga se obrađuje najjednostavniji oblik kvadratne jednadžbe $x^2 = a$, gdje je a racionalan broj, a pojam funkcije se uvodi tek u srednjoj školi.

1.2 Srednjoškolsko obrazovanje

Tijekom prvog razreda srednjoškolskog obrazovanja, učenici nadograđuju svoje znanje o algebarskim izrazima naučeno u osnovnoj školi. Na početku ponavljaju što je to monom, binom i trinom te se čak spominje polinom kao zajednički naziv za algebarske izraze, što ćemo i mi koristiti u nastavku ovog rada. Međutim, detaljniji govor o samoj definiciji polinoma, kao i njegovim svojstvima, ne postoji. Po završetku dijela o algebarskim izrazima, učenici se susreću s algebarskim razlomcima, odnosno razlomcima koji u brojniku i nazivniku imaju algebarske izraze, tj. polinome. Uvježbavaju skraćivanje, množenje, dijeljenje, zbrajanje i oduzimanje te uviđaju kako se račun s algebarskim razlomcima izvodi prema svim pravilima kao i račun s običnim razlomcima.

Iako se ne čini tako, ova nastavna cjelina krije mnogo različitih zadataka u kojima se manipulira s polinomima osim uobičajenih operacija zbrajanja i oduzimanja. Tako se kod skraćivanja algebarskog razlomka u pozadini zapravo krije dijeljenje polinoma istim polinomom. S obzirom da su učenici već upoznati s potencijama proizvoljnog stupnja, kroz zadatke se pojavljuju polinomi višeg stupnja u više varijabli. Primjeri toga su poznate nam formule za razliku i zbroj kubova, ali učenici se susreću i sa kompliciranijim izrazima. U iduća dva primjera preuzeta iz udžbenika vidimo polinome jedne i više varijabli, gdje se skraćivanje provelo tako da su se polinomi brojnika i nazivnika algebarskog razlomka podijelili istim polinom. U prvom primjeru radi se o dijeljenju polinoma polinomom x, dok se u drugom primjeru dijeli polinomom $ab(a-1)(a+1)$, odnosno polinomom $a^3b - ab$.

Primjer 1.1. *Skratite algebarski razlomak* $\frac{7x^4-2x^3+6x}{x}$.

$$\frac{7x^4-2x^3+6x}{x} = \frac{x(7x^3-2x^2+6)}{x} = 7x^3-2x^2+6.$$

Primjer 1.2. *Skratite algebarski razlomak* $\frac{a^3b-2a^2b+ab}{a^3b-ab}$.

$$\frac{a^3b-2a^2b+ab}{a^3b-ab} = \frac{ab(a^2-2a+1)}{ab(a^2-1)} = \frac{ab(a-1)^2}{ab(a-1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Djeljivost polinoma uočavamo i u zadacima u kojima se traži dokazivanje da je određeni algebarski izraz djeljiv nekim brojem.

Primjer 1.3. *Dokažite da je, za svaki prirodni broj n, izraz*

$$(5n+4)(2n-3)-10(n+2)(n-2)$$

djeljiv sa 7.

$$\begin{aligned}(5n+4)(2n-3)-10(n+2)(n-2) &= 10n^2-15n+8n-12-10(n^2-2^2)\\ &= 10n^2-7n-12-10n^2+40\\ &= 7(-n+4)\end{aligned}$$

$\Rightarrow 7|(5n+4)(2n-3)-10(n+2)(n-2)$.

Kroz zadatke susrećemo i određivanje najveće zajedničke mjere polinoma. U udžbenicima za srednju školu postoje zadaci u kojima se izričito traži određivanje najveće zajedničke mjere ili najvećeg zajedničkog djelitelja algebarskih izraza kojeg učenici određuju na način da prvo algebarske izraze zapišu u faktoriziranom obliku, iz čega lako očitaju algebarski izraz najvišeg stupnja koji dijeli zadane algebarske izraze. Iz svega ovoga vidimo da ovi zadaci zapravo kriju mnoga svojstva polinoma. Iz tog razloga promotrimo i sljedeći zanimljiv primjer.

Primjer 1.4. *Odredi nepoznate koeficijente A i B u sljedećoj jednakosti*

$$8x^3-Ax^2+6x-1=(Bx-1)^3.$$

Primjenjujući formulu za kub razlike početna jednakost je ekvivalentna:

$$\begin{aligned}8x^3-Ax^2+6x-1 &= (Bx)^3-3(Bx)^2+3Bx-1\\ 8x^3-Ax^2+6x-1 &= B^3x^3-3B^2x^2+3Bx-1.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da mora vrijediti:

$$\begin{cases} 8=B^3\\ -A=-3B^2\\ 6=3B\end{cases}$$

Rješavanjem sustava lako se dobije da vrijednosti koeficijenata moraju biti $A=12$ i $B=2$.

Primjer je zanimljiv zbog činjenice da je učenicima intuitivno jasno da jednakost vrijedi kada su odgovarajući koeficijenti algebarskih izraza jednaki. No, u suštini primjenjuju Teorem o jednakosti polinoma, a da toga uopće nisu svjesni. Svo ovo gradivo vezano je za polinome jedne ili više varijabli, a da učenici ne znaju te pojmove, njihovu definiciju i svojstva. Također u ovim primjerima možemo uočiti da se, iako je naglasak na formulama, učenike indirektno uči zapis polinoma od potencije s najvećim eksponentom prema potencijama s nižim eksponentom. S druge strane, računanje s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima nije jedini dio srednjoškolske matematike gdje uočavamo svojstva polinoma i njihovo indirektno korištenje. U drugom razredu razmatraju se rješenja potpunog oblika kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, a nakon što se s učenicima obradi kvadratna funkcija, rješavaju se i kvadratne nejednadžbe. Učenici kvadratne jednadžbe rješavaju metodom rastavljanja na faktore, koja se zasniva na smislenom rastavljanju srednjeg člana jednadžbe i grupiranju članova. Zatim uče ostale metode, a to su svođenje na potpuni kvadrat i korištenje formule za rješenja kvadratne jednadžbe. Prilikom rješavanja kvadratne jednadžbe svođenjem na potpuni kvadrat uočavamo da se radi o metodi koja se ne bazira na Osnovnom teoremu algebre. No, rješavanjem kvadratnih jednadžbi u faktoriziranom obliku i primjenom svojstva množenja koristimo ista znanja kao i za polinom u faktoriziranom obliku. Na primjer, rješavajući kvadratnu jednadžbu $(x + 5)(x - 4) = 0$ zaključujemo da je umnožak jednak nuli ukoliko je jedan od izraza jednak nuli, tj. $x + 5 = 0$ ili $x - 4 = 0$. Rješavanjem ovih jednostavnih linearnih jednadžbi zaključujemo da su rješenja $x = -5$ i $x = 4$. S druge strane, promatramo li polinom $p(x) = (x + 5)(x - 4)$, znamo da iz faktoriziranog oblika možemo zaključiti da je polinom djeljiv s $x + 5$ te da je -5 nultočka. Analogno zaključujemo da je i broj 4 nultočka polinoma. Isto tako, prilikom rješavanja kvadratnih nejednadžbi ili sustava kvadratnih nejednadžbi učenici se jako često koriste tablicom predznaka ili analizom slučajeva. U tu svrhu promotrimo idući primjer.

Primjer 1.5. *Riješi nejednadžbu* $\frac{x+2}{2-x} \geq 0$.

Prvi način je raspisivanje dvaju slučajeva: kada su brojnik i nazivnik pozitivni ili kada su brojnik i nazivnik negativni. Rješenje je unija rješenja obaju slučajeva.

- $x + 2 \geq 0$
  $\underline{2 - x > 0}$

$x \geq -2$
$\underline{x < 2}$

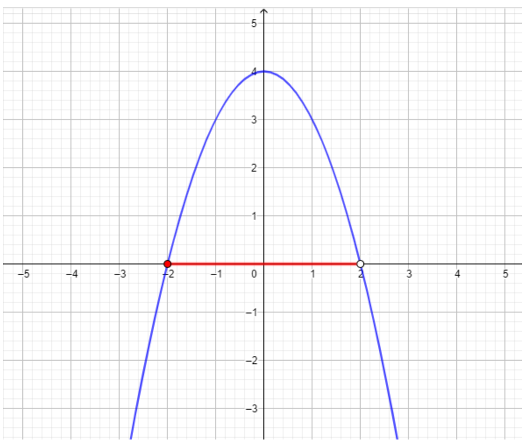
$\Rightarrow x \in [-2, 2\rangle$.

- $x + 2 \leq 0$
  $\underline{2 - x < 0}$
  $x \leq -2$
  $\underline{x > 2}$

  $\Rightarrow$ nema rješenja.

Konačno rješenje je unija rješenja po slučajevima, dakle $x \in [-2, 2\rangle$. Postupak smo mogli prikazati i tablicom predznaka.

S obzirom da su učenici obradili gradivo kvadratne funkcije, zadatak je moguće riješiti i na drugi način. Danu nejednadžbu možemo pomnožiti s $(2-x)^2$, pod uvjetom da je izraz različit od nule. S obzirom da je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan broj, znak jednakosti se ne mijenja te je početna nejednadžba ekvivalentna $(x+2)(2-x) \geq 0$, uz uvjet da je $x \neq 2$. Sada promatramo kvadratnu funkciju $f(x) = (x+2)(2-x)$ kojoj su nultočke $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.



Slika 2: Graf kvadratne funkcije $f(x) = (x+2)(2-x)$

Graf kvadratne funkcije je parabola koja je u ovom slučaju otvorom okrenuta prema dolje. Rješenje su realni brojevi x za koje su funkcijske vrijednosti parabole nenegativne, odnosno iznad x-osi. Sa skice uočavamo da su to brojevi između -2 i 2, no zbog uvjeta zadatka broj 2 isključujemo. Dakle, slijedi da je rješenje $x \in [-2, 2\rangle$.

Na ovom primjeru također vidimo da smo se koristili znanjem polinoma drugog stupnja. Štoviše, učenici su, kroz cjeline o linearnoj i kvadratnoj funkciji, detaljno proučili svojstva polinoma prvog i drugog stupnja. Također, analizirajući diskriminantu kvadratne funkcije učenici uočavaju da kvadratna funkcija ne mora uvijek imati realne nultočke. U grafičkom prikazu to bi značilo da parabola ne mora uvijek sjeći apscisu, dok kod linearne funkcije to nije slučaj. Dakle, već na primjeru polinoma prvog i drugog stupnja vidimo jako bitnu posljedicu Bolzano–Weierstrassovog teorema koja nam od velike važnosti za proučavanje polinoma i višeg stupnja.

Još jedna dodatna poveznica srednjoškolske matematike i polinoma, koju nikako ne smijemo izostaviti, su Vièteove formule. Spominju se na redovnoj nastavi kod obrade kvadratnih jednadžbi, no nastavnici su svjesni da Vièteove formule vrijede za sve polinome te da predstavljaju najbitniju vezu između nultočki i koeficijenata polinoma. Nije uvijek moguće faktorizirati polinom koristeći formule poput formule za kvadrat zbroja ili razlike, formule za razliku kvadrata i slične formule. Također, nije lako ni uočiti kako rastaviti srednji član te kako provesti izlučivanje određenog faktora i grupiranje članova. Iz tog razloga nam Vièteove formule ponekad mogu pomoći da kvadratni trinom zapišemo u faktoriziranom obliku $a(x-x_1)(x-x_2)$, gdje su x_1, x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe. Nadalje, obrnutim postupkom možemo iz rješenja kvadratne jednadžbe odrediti njezinu jednadžbu.

Iako postoje formule za rješenja jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja, one se ne obrađuju u srednjoj školi, jer nisu jednostavne. No, to ne znači da polinome višeg stupnja ne susrećemo u srednjoškolskom obrazovanju. Svojstva polinoma stupnja višeg od dva učenici mogu proučavati nakon što nauče pojam derivacije funkcije. S obzirom da je polinom najjednostavnija elementarna funkcija, slijedi da su najjednostavniji primjeri derivacije upravo derivacije polinoma, što se svodi na jednostavan algebarski račun. Učenici uče derivaciju zbroja i razlike polinoma, derivaciju kompozicije, kao i derivacije višeg reda. Dakle, ne samo da se derivacija polinoma pojavljuje u školama, već se i vrlo detaljno obrađuje. Služeći se derivacijama, učenici su kroz četvrti razred naučili odrediti u kojim točkama funkcija ima ekstreme, na kojim dijelovima domene funkcija raste i pada te sada, pomoću diferencijalnog računa, mogu analizirati grafove polinoma višeg stupnja. U udžbenicima se javljaju najčešće polinomi trećeg i četvrtog stupnja, gdje učenici također mogu uočiti da svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku, dok polinom parnog stupnja ne mora imati realnih nultočaka.

1.3 Iskustva nastavnika u svojoj slobodi

Iz svega navedenog možemo zaključiti da se koncept polinoma razvija tijekom cijelog školovanja, indirektno i kroz razne nastavne cjeline. Stoga ne možemo zanijekati da poveznica s polinomima postoji, no zasigurno nedostaje pojam polinoma. Drugim riječima, učenici imaju određena algebarska znanja o polinomima, znaju manipulirati s njima, zbrajati ih, oduzimati i množiti, ali nedostaje definicija polinoma kao funkcije. Kada polinome promatramo u punom svjetlu, odnosno u kontekstu funkcija, otvara se potpuno novi pogled na sve naučeno. Tada je zanimljivo promatrati što je stupanj polinoma i kako se mijenja pri izvođenju raznih operacija s polinomima, što se događa s grafom polinoma u okolini nultočke te mnogo drugih pitanja koja pojam funkcije sa sobom nosi. Iako su učenici upoznati s operacijama polinoma i nesvjesno koriste određena znanja o polinomima, kao što je Teorem o jednakosti polinoma i najveća zajednička mjera polinoma, ne možemo očekivati da bez ikakvog nastavnikovog navođenja učenici uoče spomenute koncepte. Dodatno, za usvajanje gradiva nastavne cjeline *Polinomi* ne treba izdvojiti puno nastavnih sati, baš iz tog razloga što im je to gradivo u velikoj mjeri poznato i intuitivno jasno. Na primjer, potpuno je prirodno zapisivati polinom u kanonskom obliku, dijeljenje polinoma provodi se na sličan način kao i dijeljenje prirodnih brojeva i zato učenici ne bi trebali imati poteškoća prilikom korištenja Teorema o dijeljenju s ostatkom. Isto tako, već spomenuta činjenica da polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku je intuitivna, ali i geometrijski dosta jasna. Dakle, ostaje pitanje zašto se onda polinomi, kao zasebna nastavna cjelina, više ne obrađuju.

S druge strane, možemo postaviti pitanje je li učenicima u srednjoj školi doista neophodno znanje o polinomima kao funkcijama te koliki utjecaj u matematičkom smislu ima znanje, odnosno neznanje o polinomima za daljnje školovanje. Ako dodatno usvajanje znanja o polinomima ne iziskuje puno vremena, zašto se to ne bi obradilo tijekom fakultativne nastave ili pak fakultetskog obrazovanja s onim učenicima koji se opredijele za matematiku?

Kako god, ono što bi trebalo biti zajedničko svim nastavnicima matematike je želja da kroz poučavanje kod učenika razvijaju razne vještine i načine razmišljanja. Kroz sve prikazane nastavne teme u kojima nastavnici mogu uočiti pojavljivanje polinoma, bez dvojbe možemo reći da učenici zasigurno njeguju algebarsko razmišljanje. No, uz algebarski način razmišljanja postoji i analitički način razmišljanja koji je jednako važan, ne samo za matematiku, već i za primjenu kod objašnjavanja i opisivanja stvari u svakodnevnom životu. Jesmo li ga možda na neki način izbacivanjem sadržaja o polinomima izostavili? Još jedna važna stvar koju je potrebno naglasiti u radu nastavnika je njihova određena sloboda u poučavanju.

Iz tog razloga, razvila se ideja o intervjuiranju nastavnika kako bi se dobio uvid u stavove nastavnika prema ovoj tematici, a na osnovu toga i u njihov rad. Zapravo, kroz pitanja se htjelo analizirati smatraju li ispitani nastavnici da su polinomi opravdano izbačeni iz predmetnog kurikuluma, hoće li to imati posljedice za daljnje školovanje te jesu li oni prilikom poučavanja također izbacili gradivo o polinomima. Stoga su na sva ova pitanja svoje mišljenje dale i nastavnice iz različitih gimnazija u Zagrebu. Točnije, radi se o pet nastavnica koje imaju preko 30 godina radnog staža tijekom kojih su stekle mnogo iskustva. Dobiveni rezultati nisu bili u potpunosti u skladu s očekivanjem da će se nastavnice jednoglasno izjasniti kao protivnici izbacivanja osnovnih funkcija u matematici.

Upitnik

1. Što mislite o činjenici da je nastavna cjelina *Polinomi* izbačena iz predmetnog kurikuluma? Slažete li se s tom odlukom ili uočavate neke nedostatke? Smatrate li da je potreban velik broj nastavnih sati za obradu te cjeline?
2. Mogu li učenici kroz druge nastavne cjeline indirektnim putem „nadoknaditi" znanje o polinomima?
3. Učenjem polinoma njegujemo algebarski i analitički način razmišljanja. Smatrate li da je izbacivanjem nastavne cjeline *Polinomi* zapostavljen analitički način razmišljanja? Ako da, kako i u kojoj mjeri?
4. Koliki utjecaj, po Vašem mišljenju, ima znanje/neznanje o polinomima za daljnje školovanje (u matematičkom smislu)?
5. Kako se ponašate Vi kao nastavnik koji ima određenu slobodu poučavanja? Možete li reći nešto o svom radu što se tiče obrade polinoma? (npr. spominjete im polinome kada god imate priliku za to, definirate polinom kao funkciju (u kojem trenutku?), možda odvojite nekoliko nastavnih sati za obradu te nastavne cjeline ili ih obradite na dodatnoj nastavi)
6. U slučaju da odvojite određen broj nastavnih sati za obradu cjeline *Polinomi*, o kojem broju nastavnih sati se radi te koja svojstva polinoma i teoreme obrađujete?
7. Imate li nešto dodati što nije obuhvaćeno pitanjima, neki svoj dodatni komentar?

Slika 3: Upitnik

Podijeljenja mišljenja se uočavaju već na početnom pitanju što misle o činjenici da je nastavna cjelina *Polinomi* izbačena iz predmetnog kurikuluma. Četiri ispitane nastavnice ne smatraju da je izbacivanje navedene nastavne jedinice dobra odluka, navodeći da su polinomi elementarne funkcije te da s tim pojmom učenici trebaju biti upoznati prilikom obrađivanja funkcija, ali i derivacija i integrala. Neke su nastavnice naglasile važnost polinoma, ne samo u matematici, kodiranju ili numeričkoj analizi, već i u drugim područjima - biologiji, ekonomiji, kemiji. Također ističu da je bitno da učenici nauče pojam varijable i razlikuju je od nepoznanice, da razumiju značenje nulpolinoma, odnosno da uočavaju razliku između izraza $p(x) = 0$ za svaki x ili za neki x. Za razliku od njih, preostala ispitanica, koja je sudjelovala u izradi kurikuluma, mišljenja je da se polinomi mogu indirektno uklopiti u ostale nastavne jedinice te da se na taj način oni postupno uvode. Zapravo, zadovoljna je što su određene nastavne jedinice izborne te što nastavnici mogu samostalno odlučiti hoće li ih obraditi ili ne, ovisno o mogućnostima učenika koje poučavaju. Također smatra da će učenici, kojima bude trebalo gradivo o polinomima za daljnje školovanje, moći samostalno savladati taj dio. Štoviše, kao prednost novog kurikuluma navodi da se vodila briga o tome da se u svakom razredu provlače pojedine teme. Stoga se u prvom razredu srednje škole obrađuju potencije cjelobrojnog eksponenta, u drugom razredu se ponavlja drugi korijen i uči treći korijen te operacije s korijenima, dok se u trećem razredu uče potencije s racionalnim eksponentom. Na taj način se tri godine radi s potencijama te ispitanica smatra da je to puno bolje nego obraditi sve te sadržaje u prvom razredu. Dodatno navodi:

> Nažalost, učenicima su u prvom razredu najteži dio upravo potencije i algebarski izrazi, a posebno algebarski razlomci. Najčešće ne razlikuju algebarski razlomak od jednadžbe u kojoj se pojavljuje nepoznanica u nazivniku. Mislim da bi im gradivo o polinomima koje je nekad bilo u prvom razredu samo dodatno napravilo zbrku.

Mišljenje da se polinomi većim dijelom mogu nadoknaditi indirektnim putem uglavnom dijele i nastavnice koje su se izjasnile kao pobornice obrade polinoma u nastavi. Naime, podijelile su svoja iskustva i ističu kako u svom radu to čine na način da spominju polinome tijekom cijelog školovanja, kroz sva četiri razreda, posebno naglašavajući da su linearna i kvadratna funkcija polinomi prvog i drugog stupnja. Na taj način učenike upoznaju s pojmom polinoma kao višečlanog algebarskog izraza, a kasnije i s pojmom polinoma kao funkcije. Unatoč tome što nastavnici u svom radu spominju polinome kada god imaju priliku za to, jedna nastavnica se iznimno protivi činjenici da se polinomi mogu naučiti indirektnim putem ističući da su svi dotični nastavnici tijekom svog sata ipak morali odvojiti vrijeme kako bi objasnili učenicima što su to polinomi i gdje ih sve susrećemo. Radi se o nastavnici koja ima 34 godine radnog staža te smatra da je nedopustivo da su polinomi, kao osnovne funkcije koje imaju veliku važnost i primjenu unutar matematike, izbačene iz predmetnog kurikuluma. Iz tog razloga, navedena nastavnica izdvaja otprilike $3-4$ nastavna sata kako bi s učenicima obradila polinome. Na redovnoj nastavi obradi definiciju polinoma i učenicima pripremi tablice u kojima je zadan određeni polinom, a učenici moraju odrediti stupanj polinoma i koeficijente ili pak obratno - napisati polinom čiji su koeficijenti i stupanj zadani. Uz to ponovi s učenicima operacije zbrajanja i množenja koje su im otprije poznate te obrađuje dijeljenje polinoma, jednakost polinoma i grafove polinoma nultog, prvog i drugog stupnja. Rastav na parcijalne razlomke obrađuje ovisno o razredu i njihovim mogućnostima. U suprotnom, taj dio ostaje za dodatnu nastavu, kao i Teorem o dijeljenju s ostatkom i Osnovni teorem algebre.

Nastavnice se nadaju da, ukoliko matematiku predaje matematičar, nema velike opasnosti za zapostavljanje analitičkog načina razmišljanja. Tvrde da se matematičari uvijek trude da učenici njeguju i algebarski i analitički način razmišljanja, koji su prožeti kroz sve dijelove matematike. Međutim, ipak navode kako je nastavna cjelina *Polinomi* idealna za razvoj tih načina mišljenja, jer je za pročuvanje polinoma potrebno povezivanje, uspoređivanje i zaključivanje. Jedna nastavnica ističe kako se algebra u osnovnoj i srednjoj školi uglavnom sastoji samo od manipulacije simbolima i raznih postupaka koje nemaju preveliku vezu sa stvarnim svijetom te kako je to potrebno promijeniti i staviti naglasak na razvoj mišljenja i zaključivanja. Također naglašava da algebarsko mišljenje uključuje i generalizaciju iz iskustva s brojevima i računanjem, formalizaciju u smislu simbola i upoznavanje pojmova uzorka i funkcija.

Iz svega navedenog možemo zaključiti da nastavnice imaju različite poglede na ovu temu te da u skladu s tim prilagođavaju svoj rad. Neki će učenici završiti srednjoškolsko obrazovanje bez da znaju podijeliti dva polinoma ili rastav na parcijalne faktore. No ipak, prilikom ovog intervjua bio je veći dio onih koji su protivnici izbacivanja polinoma iz predmetnog kurikuluma. Iz tog razloga, za kraj ovog poglavlja, citiram konstruktivno mišljenje nastavnice koje još jednom daje cjelokupan pogled na situaciju:

> Mislim da cjelina polinomi nije ni u dosadašnjem kurikulumu bila obuhvaćena na odgovarajući način. Naime, tu se isprepliću dva pristupa: čisto algebarski i funkcijski. Čisto algebarski možemo koristiti kod manipuliranja algebarskim izrazima. Funkcijski, tj. analitički, nužno gledamo na primjer kod primjene jednakosti polinoma. Tu se javlja taj zbunjujući moment da znak jednakosti ne znači uvijek isto (može biti jednadžba - tražimo x koji čini da je lijevo jednako desnom, a može biti jednakost polinoma lijevo je jednako desnom za svaki x). Ovo je učenicima jako teško. Sad, pitanje je u kojem trenutku je prikladno s čisto algebarskih manipulacija koje učenici započinju već u osnovnoj školi (i za koje mislim da ih neće nedostajati izbacivanjem te cjeline) napraviti prijelaz na funkcijski. I mislim da se taj dio zapravo izgubio (ali kao što sam rekla ni do sada baš nije bio jako naglašen). Mislim da bi bilo dobro da postoji poglavlje u kojemu se obrađuju polinomi (kao funkcije), gdje bi se govorilo o jednakosti polinoma, grafu, nultočkama. Naravno da je općenito teško govoriti o grafu, ali može se povezati faktorizirani zapis i crtanje kvalitativnog grafa pomoću nultočaka. Prikladno bi mjesto bilo svakako nakon kva-

dratne funkcije. Za to ne bi bilo potrebno odvojiti velik broj sati. Mislim da je šteta što se to ne radi jer u konačnici polinomi su važni kao aproksimacije (Taylorovi polinomi).

2 O polinomima na školski način

Polinomi su mnogo više od uobičajenih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. U ovom poglavlju bit će riječi o polinomima drugog i trećeg stupnja, odnosno prikazat ćemo što sve možemo s polinomom drugog stupnja, a što novo vidimo na polinomu trećeg stupnja. Drugim riječima, s polinomom drugog stupnja možemo manipulirati algebarskim putem, dok na polinomu trećeg stupnja vidimo svu snagu polinoma kao funkcije. Stoga ćemo u nastavku prikazati određene stvari koje se učenicima mogu predočiti u nastavi, a da su im lako razumljive.

Štoviše, polinomi i njihova svojstva se javljaju na raznim natjecanjima pa ćemo iz tog razloga prvi dio ove cjeline posvetiti definiciji polinoma, kao i nekim osnovnim znanjima i teoremima vezanim za polinome koji se mogu s učenicima obraditi na dodatnoj nastavi i koji će nam biti potrebni za rješavanje zadataka s natjecanja koji se nalaze u zadnjoj cjelini ovog rada. S druge strane, obrada polinoma drugog i trećeg stupnja također će se bazirati na definicijama i teoremima koji slijede te je nužno spomenuti ih.

2.1 Osnovno o polinomima

Definicija 2.1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

gdje su $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ zadani brojevi, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ zove se polinom n-tog stupnja (nad $\mathbb{R}$).

Brojevi $a_i, i = 0, 1, ..., n$ zovu se koeficijenti polinoma f. Koeficijent a_n zove se vodeći koeficijent of f, a koeficijent a_0 slobodni član od f. Broj n se zove stupanj od f. To zapisujemo kao $\mathrm{st} f = n$ ili $\deg f = n$. Ako je $a_n = 1$, polinom f se zove normiran polinom. Ako je $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda se f zove nulpolinom. Nulpolinom zapisujemo kao $f = 0$, a polinom f zadan formulom $f(x) = a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se zove konstantni polinom, ili kraće konstanta. Stupanj konstante je nula.

Drugi zapis za (1) je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{2}$$

Skup svih polinoma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označavamo sa $\mathbb{R}[x]$ i zovemo prsten polinoma u jednoj varijabli x nad $\mathbb{R}$. Sve što vrijedi za polinome s realnim koeficijentima vrijedi i za polinome s kompleksnim koefcijentima, odnosno za polinome iz $\mathbb{C}[x]$.

Definicija 2.2. *Nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ je svaki kompleksni broj α za koji je $f(\alpha) = 0$.*

Ako je α realan broj, onda se α zove realna nultočka, a ako je $\alpha \in \mathbb{C}$, onda se α zove kompleksna nultočka. Katkad se za nultočku kaže da je korijen polinoma.

Lema 2.3. *Ako je $x_0 = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ rješenje algebarske jednadžbe $f(x) = 0$ s realnim koeficijentima, onda je $\overline{x_0} = a - bi$ također rješenje te jednadžbe.*

Dokaz. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdje su a_i realni brojevi. Znamo da je $f(x_0) = 0$. Koristeći pravila za konjugiranje

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{a} = a, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R},$$

izračunajmo $f(\overline{x_0})$.

$$\begin{aligned}
f(\overline{x_0}) &= a_n \overline{x_0^n} + a_{n-1}\overline{x_0^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{x_0} + a_0 \\
&= \overline{a_n x_0^n} + \overline{a_{n-1}x_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 x_0} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} \\
&= \overline{f(x_0)} \\
&= \overline{0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Važno je naglasiti da nije uvijek bitno naći nultočke određenog polinoma. Ponekad su važnije neizravne informacije koje možemo izvući iz danog polinoma, stoga je važno razumjeti što je više moguće o odnosu nultočaka polinoma s drugim svojstvima. U tu svrhu ćemo spomenuti nekoliko korisnih teorema i njihovih posljedica. No, prije toga se prisjetimo da je polinom f djeljiv polinomom $g \neq 0$, ako postoji polinom h, $\deg h > 0$, takav da vrijedi $f = g \cdot h$. U tom slučaju je $\deg f = \deg g + \deg h$.

Teorem 2.4 (O dijeljenju polinoma s ostatkom)**.** *Za svaka dva polinoma* $f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0$ *postoje jedinstveni polinomi* $q, r \in \mathbb{R}[x]$ *takvi da vrijedi*

$$f = g \cdot q + r.$$

U slučaju da je $r \neq 0$*, tada vrijedi* $\deg r < \deg g$.

Teorem 2.5. *Polinom* $f(x)$ *podijeljen polinomom* $g(x) = x - a$ *daje ostatak* $f(a)$*.*

Dokaz. Koristeći Teorem o dijeljenju polinoma s ostatkom znamo da polinom $f(x)$ možemo zapisati kao $f(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$, pri čemu je $\deg r = 0$. Ovo vrijedi za svaki x iz $\mathbb{R}[x]$ pa posebno i za $x = a$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a) \cdot q(x) + r \\ f(a) &= (a - a) \cdot q(a) + r \\ f(a) &= 0 \cdot q(a) + r \\ f(a) &= r. \end{aligned}$$

□

Ovaj teorem nam omogućuje odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma linearnim polinomom bez direktnog dijeljenja. U idućem primjeru ćemo vidjeti primjenu navedenog teorema.

Primjer 2.6. *Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{93} + x^{71} + x^{23} + x^8 + x$ *s polinomom* $q(x) = x - x^3$*.*

Ostatak $r(x)$ je jedinstveni polinom takav da vrijedi $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, gdje je $\deg r < \deg g$. Pretpostavimo da je $r(x) = ax^2 + bx + c$. Sada je potrebno odrediti koeficijente a, b, c. To ćemo postići na način da u izraz $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ uvrstimo nultočke polinoma $q(x) = x - x^3 = x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x)$. Nultočke su $-1, 0, 1$. Tada dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &\Rightarrow \quad -3 = a - b + c, \\ x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = c, \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 5 = a + b + c. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobijemo da su koeficijenti $a = 1, b = 4, c = 0$, odnosno da je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{93} + x^{71} + x^{23} + x^8 + x$ polinomom $q(x) = x - x^3$ jednak $r(x) = x^2 + 4x$.

Teorem 2.7 (Bézout)**.** *Broj* α *je nultočka polinoma* f *ako i samo ako je* f *djeljiv polinomom* $g(x) = x - \alpha$.

Dokaz. Neka je α nultočka polinoma f, tj. $f(\alpha) = 0$. Prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni q i r, gdje je r konstanta, takvi da je $f(x) = (x-\alpha)q(x)+r$. Ovo vrijedi za svaku vrijednost x pa uvrštavanjem $x = \alpha$ dobivamo $f(\alpha) = r$. Prema pretpostavici vrijedi da je $f(\alpha) = 0$ pa je stoga $r = 0$. To znači da je $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, odnosno $f(x)$ je djeljiv polinomom $g(x) = x - \alpha$.

Obrnuto, neka je $f(x)$ djeljiv polinomom $g(x) = x - \alpha$. Prema definiciji djeljivosti postoji polinom $q(x)$ takav da vrijedi $f(x) = (x-\alpha)q(x)$. Ova jednakost mora vrijediti za svaku vrijednost x pa tako i za $x = \alpha$. Uvrštavanjem $x = \alpha$ dobivamo da je $f(\alpha) = 0$, odnosno da je α je nultočka polinoma f.

□

Također je važno spomenuti i kratnost nultočke. Ako je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = (x - \alpha)^k, k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv s $h(x) = (x - \alpha)^{k+1}$ onda kažemo da je $x = \alpha$ k-struka nultočka od f ili da je kratnost (višestrukost) nultočke $x = \alpha$ jednaka k.

Ne mora svaki realni polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ imati realnu nultočku, primjer takvog polinoma je polinom $f(x) = x^2 + 3$. S druge strane, promatramo li polinom $f \in \mathbb{C}[x]$, tada će uvijek imati (kompleksnu) nultočku. O tome upravo govori Osnovni teorem algebre.

Teorem 2.8 (Osnovni teorem algebre)**.** *Svaki polinom*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

stupnja $n \geq 1$ *s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u* $\mathbb{C}$.

Često se navode i posljedice ovog teorema, kao što su iduća dva teorema.

Teorem 2.9. *Svaki polinom* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ n*-tog stupnja može se na jedinstven način prikazati u obliku produkta* n *linearnih faktora. Točnije, ako je* a_n *vodeći koeficijent polinoma* f, *a* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *nultočke od* f, *onda vrijedi*

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n).$$

Teorem 2.10. *Svaki polinom* $f(x)$ *stupnja* $n \geq 1$ *s kompleksnim koeficijentima ima točno* n *nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost.*

Promatrajući polinome prirodno se javlja pitanje o grafu polinoma. Graf polinoma moguće je detaljno nacrtati ispitujući tok funkcije, za što je potrebno određeno znanje diferencijalnog računa. Glavu ulogu prilikom crtanja grafa imaju nultočke polinoma. Ukoliko promatramo polinome s realnim koeficijentima, možemo biti sigurni da graf polinoma neparnog stupnja ima bar jednu realnu nultočku.

Teorem 2.11. *Polinom f s realnim koeficijentima neparnog stupnja ima bar jednu realnu nultočku.*

Za dokaz ovog teorema ključna je činjenica da je polinom neprekidno preslikavanje te Bolzano-Weierstrassov teorem koji kaže da za neprekidnu funkciju na segmentu $[a, b]$ za koju je $f(a)f(b) < 0$ vrijedi da postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $f(c) = 0$. S druge strane, za polinom f stupnja $n > 1$ s realnim koeficijentima vrijedi da se, za sve dovoljno velike $x \in \mathbb{R}$ po apsolutnoj vrijednosti, predznak realnog broja $f(x)$ podudara s predznakom vodećeg koeficijenta polinoma. Sada je intuitivno dosta jasno da funkcija neparnog stupnja za dovoljno velike x po apsolutnoj vrijednosti poprima funkcijske vrijednosti različitih predznaka te da po Bolzano-Weierstrassovom teoremu postoji realan broj c takav da vrijedi $f(c) = 0$.

2.2 Polinom drugog stupnja

Polinom drugog stupnja zovemo još i kvadratnom funkcijom, a opća kvadratna funkcija zadana je formulom $f(x) = ax^2+bx+c$. Graf kvadratne funkcije je parabola koja je otvorena prema dolje ako je $a < 0$ ili prema gore ako je $a > 0$. Kvadratna funkcija se može napisati u obliku $f(x) = a(x-x_0)^2+y_0$ iz čega zaključujemo da je točka (x_0, y_0) tjeme te parabole. Dakle imamo:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.
\end{aligned}
$$

Odavde slijedi da su koordinate tjemena $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, odnosno $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$, gdje je broj $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta kvadratne funkcije.

Također je bitno znati odrediti i nultočke kvadratne funkcije. Ako je kvadratna funkcija oblika $f(x) = ax^2 + c$, tada jednostavnim računom dobijemo nultočke:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}. \end{aligned}$$

Za funkciju oblika $f(x) = ax^2 + bx$ na sličan način dođemo do rješenja:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijedi da su rješenja $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$.

Za opći oblik kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

No, daleko je važnije znati izvod ove formule:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0 && /:a\\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\\
x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && /\sqrt{}\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
\Rightarrow x_{1,2}&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Upravo iz ovog izraza vidimo kako diskriminanta, odnosno izraz pod korijenom utječe na prirodu rješenja kvadratne jednadžbe. Tip rješenja kvadratne jednadžbe zapravo ovisi o predznaku diskriminante. Ukoliko je $b^2-4ac>0$ postoje dva različita realna rješenja

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

a u slučaju $b^2-4ac<0$ postoje dva kompleksna rješenja

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Za $b^2-4ac=0$ rješenje je dvostruko realno

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}.$$

Dakle, ako je $D>0$ kvadratna funkcija ima dvije realne i različite nultočke te će graf sijeći x-os. Ukoliko je $D<0$ graf kvadratne funkcije ne siječe os x, a ako je $D=0$ kvadratna funkcija ima jednu dvostruku realnu nultočku i graf dodiruje x-os.

Lako uočavamo da se problem traženja nultočaka kvadratne funkcije jednostavno rješava nadopunjavanjem izraza do kvadrata te da se ta metoda ne bazira na Osnovnom teoremu algebre. Štoviše, nadopunjavanje do potpunog kvadrata temeljna je ideja u algebri koja je izuzetno važna za nejednakosti, što se u srednjoškolskom gradivu jako malo spominje. Metodom nadopunjavanja do potpunog kvadrata možemo riješiti kvadratne jednadžbe, ali i puno kompliciranije zadatake vezane uz nejednakosti. Stoga bi naglasak u školama trebao biti više na toj ideji, koja je učenicima često neshvatljiva i apstraktna, a u suštini vrlo jednostavna, a manje na memoriranju formule za rješenja kvadratne jednadžbe. Učenici najčešće odmah koriste formulu za rješenja kvadratne jednadžbe, jer su sigurni da će ih ona uvijek dovesti do rješenja. S druge strane, koristeći metodu nadopunjavanja do potpunog kvadrata bit će možda potrebno iskoristiti neku dodatnu formulu, kao kvadrat zbroja ili razlike, ali će zasigurno više pridonijeti razvoju mišljenja i zaključivanja kod učenika.

2.3 Vièteove formule

Sada ćemo nešto reći o najbitnijoj vezi između nultočaka i koeficijenata polinoma. Pomoću formula za nultočke polinoma drugog stupnja

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

proizlazi da vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}, \end{aligned}$$

u što se možemo uvjeriti direktnim zbrajanjem i množenjem rješenja kvadratne jednadžbe. Zapravo imamo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\
&= \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Dobiveni izrazi poznati su kao Viѐteove formule za polinom drugog stupnja. Štoviše, Viѐteove formule postoje za polinome bilo kojeg stupnja, a posebno za polinom trećeg stupnja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ glase

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a}\\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a}\\
x_1x_2x_3 &= \frac{-d}{a}.
\end{aligned}
$$

Kako bismo proveli dokaz navedenih formula polinom

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

zapisat ćemo kao $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Izjednačavanjem ova dva zapisa imamo:

$$
\begin{aligned}
&ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\\
&ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + ax^2(-x_3 - x_2 - x_1) + ax(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - ax_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata dobivamo:

$$
\begin{aligned}
b &= -a(x_1 + x_2 + x_3)\\
c &= a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\\
d &= -ax_1x_2x_3,
\end{aligned}
$$

iz čega slijede formule.

Na isti način možemo izvesti veze između nultočki i koeficijenata pripadnog polinoma n-tog stupnja.

Teorem 2.12 (F. Viète)**.** *Neka je $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ polinom (nad $\mathbb{C}$), a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njegove nultočke. Tada vrijede Vièteove formule*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Ako polinom f nije normiran, tj. ako mu je vodeći koeficijent $a_0 \neq 1$, onda na desnim stranama u izrazima umjesto a_i treba pisati $\frac{a_i}{a_0}$.

Upotrebu Vièteoveih formula pronalazimo u zadacima u kojima bez direktnog računanja nultočaka trebamo izračunati tražene izraze.

Primjer 2.13. *Izračunajte zbroj kubova rješenja $x_1^3 + x_2^3$ u kvadratnoj jednadžbi $3x^2 - 12x + 6 = 0$.*

Primjenjujući formulu za zbroj kubova dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - x_1x_2) \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2). \end{aligned}$$

Sada koristimo Vièteove formule za zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe $x_1 + x_2 = -\dfrac{-12}{3} = 4$ i $x_1x_2 = \dfrac{6}{3} = 2$ te imamo:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= 4(4^2 - 3 \cdot 2) \\ &= 4 \cdot 10 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Dakle, zbroj kubova rješenja zadane kvadratne jednadžbe iznosi 40.

Sljedeći primjer ilustrira kako se na temelju Vièteoveih formula nekad mogu pogoditi rješenja kvadratne jednadžbe. Drugim riječima, rješenja su ona dva broja koja u zbroju daju broj suprotan koeficijentu linearnog člana, a u umnošku broj jednak slobodnom članu zadane kvadratne jednadžbe.

Primjer 2.14. *Bez korištenja formule za rješenja kvadratne jednadžbe faktorizirajte kvadratni trinom* $x^2 - 5x + 6$.

Uočimo da broj 6 možemo prikazati kao $6 = 2 \cdot 3$ te da broj -5 možemo dobiti kao $-5 = -(2+3)$. U oba slučaja smo koristili iste brojeve te zaključujemo da je $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$ te je tražena faktorizacija:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Primijetimo da nije lako uvijek uočiti o kojim brojevima, odnosno nultočkama se radi. Na prvi pogled bi se moglo reći da je jedina metoda za pronalaženje tih brojeva metoda pokušaja i pogreški, no nije tako.

Još su stari Babilonci bili upoznati s rješavanjem problema u kojima se traže dva broja koja moraju zadovoljavati zadani zbroj i umnožak. Drugim riječima, imali su algoritam za rješavanje sustava

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ x \cdot y &= c, \end{aligned}$$

što je ekvivalentno rješavanju jednadžbe oblika $x^2 + c = bx$, odnosno $x^2 - bx + c = 0$. Koristeći babilonski algoritam za navedeni sustav gdje je zbroj $x + y = -b$, možemo odrediti rješenja jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$. To radimo na način da polazimo od dva broja koja u sumi daju $-b$. Ključna je činjenica da su ta dva broja jednako udaljena od njihove aritmetičke sredine, stoga te brojeve možemo zapisati kao $\frac{-b}{2} + u$ i $\frac{-b}{2} - u$, gdje je u određena udaljenost od aritmetičke sredine koju trebamo izračunati. S druge strane, znamo da umnožak ta dva broja mora biti jednak c pa tako dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-b}{2}+u\right)\cdot\left(\frac{-b}{2}-u\right)&=c\\
\frac{b^2}{4}-u^2&=c\\
u^2&=\frac{b^2}{4}-c\\
u&=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}.
\end{aligned}$$

Dakle, odredili smo vrijednost broja u pa samim tim i tražene nultočke

$$\frac{-b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c} \quad \text{i} \quad \frac{-b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}.$$

Zanimljivo je spomenuti da se prilikom korištenja prikazane metode pretpostavlja da rješenja postoje, nakon čega se kreće na račun. S druge strane, prisjetimo se da smo nadopunjavanjem do potpunog kvadrata prvo pokazali da rješenja postoje te smo, ovisno o predznaku broja koji smo dobili, zaključili da imamo realna ili kompleksna rješenja i računali ih.

Iako je babilonska metoda rješavanja spomenutog sustava poznata već dugi niz godina, 2019. godine američki profesor Po-Shen Loh ponovno ju je popularizirao primjenjujući je prilikom korištenja Vièteovih formula. Na taj način prikazao je metodu traženja nultočki kvadratne jednadžbe koja isključuje pamćenje već poznate nam formule za rješenja kvadratne jednadžbe. Navedena metoda uključuje pronalaženje i imaginarnih nultočki. Promotrimo to kroz nekoliko primjera.

Primjer 2.15. *Odredi rješenja kvadratne jednadžbe* $x^2-2x-24=0$.

Prema Vièteu, ako pronađemo brojeve r i s takve da vrijedi $r+s=2$ i $rs=-24$ tada početnu jednadžbu možemo zapisati kao $(x-r)(x-s)=0$, gdje su r i s rješenja zadane jednadžbe. Sada preostaje izračunati r i s koristeći babilonsku metodu.

Važno je ponoviti da brojevi r i s u sumi daju broj dva te moraju biti jednako udaljeni od njihove aritmetičke sredine, odnosno broja 1, stoga ih možemo zapisati kao $1+u$ i $1-u$. Nadalje, njihov umnožak je -24, što nam daje sljedeći račun:

$$\begin{aligned} rs &= -24 \\ (1+u)(1-u) &= -24 \\ 1-u^2 &= -24 \\ u^2 &= 25 \\ u &= \pm 5. \end{aligned}$$

Ako izaberemo $u=5$ zaključujemo da su rješenja jednadžbe $r=1+5=6$ i $s=1-5=-4$. No, nije bitno koje rješenje izaberemo jer ćemo uvijek dobiti iste nultočke. U slučaju da smo kao rješenje izabrali $u=-5$ imali bismo $r=1+(-5)=-4$ i $s=1-(-5)=6$.

Primjer 2.16. *Odredi rješenja kvadratne jednadžbe* $\frac{x^2}{2}-2x+3=0.$

Primijetimo da je vodeći koeficijent u ovoj jednadžbi različit od 1, stoga ćemo jednadžbu pomnožiti brojem 2 i dobit ćemo ekvivalentnu jednadžbu:

$$x^2-4x+6=0.$$

Sada na isti način kao u prethodnom primjeru želimo faktorizirati jednadžbu u oblik $(x-r)(x-s)=0$. Znamo da mora vrijediti $r+s=4$ i $rs=6$. Analogno kao prije, brojeve r i s možemo zapisati kao $2+u$ i $2-u$. Štoviše, njihov umnožak mora biti jednak broju 6 te imamo:

$$\begin{aligned} rs &= 6 \\ (2+u)(2-u) &= 6 \\ 4-u^2 &= 6 \\ u^2 &= -2 \\ u &= \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da su rješenja kvadratne jednadžbe brojevi $2\pm i\sqrt{2}$.

S obzirom da se ovakav način rješavanja kvadratnih jednadžbi bazira samo na Vièteovim formula i logičkom zaključivanju, učenicima bi vjerojatno bio zanimljiv i lagan iz razloga što pamćenje standardne formule za rješenja kvadratne jednadžbe za neke od njih predstavlja problem. Štoviše, bilo bi izuzetno zanimljivo kada bismo s učenicima tijekom nastavnog sata proveli diskusiju o tome koji im se način rješavanja više sviđa. S obzirom da je ideja nadopunjavanja do potpunog kvadrata ključna ideja u algebri, svakako bismo učenicima trebali dati zadatak da tom metodom riješe općenitu kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$, čime bismo zapravo proveli izvod formule za rješenja kvadratne jednadžbe koji smo već prikazali. Nakon toga učenicima možemo reći da ponovno riješe općenitu kvadratnu jednadžbu koristeći prikazanu metodu kako bismo dokazali da novom metodom možemo riješiti svaku kvadratnu jednadžbu. U tom slučaju bismo također dobili standardnu formulu za rješenja kvadratne jednadžbe, što bi učenicima zasigurno bilo neočekivano i dojmljivo:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && / : a \\ x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} &= 0. \end{aligned}$$

Sada nultočke r i s moraju zadovoljavati jednakosti $r + s = -\frac{b}{a}$ i $rs = \frac{c}{a}$. Nadalje, brojevi r i s su oblika $\frac{-b}{2a} + u$ i $\frac{-b}{2a} - u$ te njihov umnožak mora biti jednak broju $\frac{c}{a}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-b}{2a} + u\right)\left(\frac{-b}{2a} - u\right) &= \frac{c}{a} \\ \frac{b^2}{4a^2} - u^2 &= \frac{c}{a} \\ u^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ u^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ u &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati nultočke:

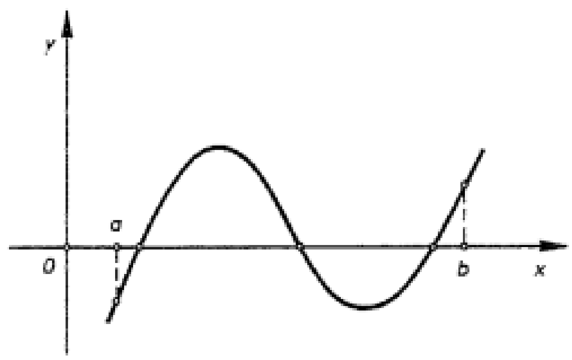
$$\begin{aligned} r &= \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ s &= \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

2.4 Analitičko razmišljanje u rješavanju nejednadžbi

Za razliku od polinoma drugog stupnja, za rješavanje problema vezanih za polinom trećeg stupnja potrebno je mnogo više znanja. Polinom trećeg stupnja ili kubna funkcija je svaka funkcija oblika

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

U nastavku kada budemo spominjali polinom trećeg stupnja, podrazumijevat ćemo da se radi o polinomu s realnim koeficijentima. Znamo da je graf polinoma drugog stupnja uvijek parabola, a nultočke, kao i os simetrije, možemo odrediti jednostavnim algebarskim računom. Algebarskim računom, tj. grupiranjem ili rastavljanjem određenih članova također možemo faktorizirati i polinom trećeg stupnja. No, nije uvijek lagano uočiti na koji način treba rastaviti i grupirati članove u svrhu faktorizacije polinoma. Nadalje, ukoliko uspijemo faktorizirati polinom i odrediti nultočke, preostaje pitanje kako skicirati graf, jer graf polinoma trećeg stupnja nije uvijek isti. Stoga je izuzetno važna činjenica da polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima ima bar jednu realnu nultočku. Štoviše, Bolzano-Weierstrassov teorem koji nam to potvrđuje je i geometrijski jasan, tj. ako imamo neprekidnu funkciju na segmentu $[a, b]$ i ako je $f(a)f(b) < 0$, tada postoji točka c takva da vrijedi $f(c) = 0$.



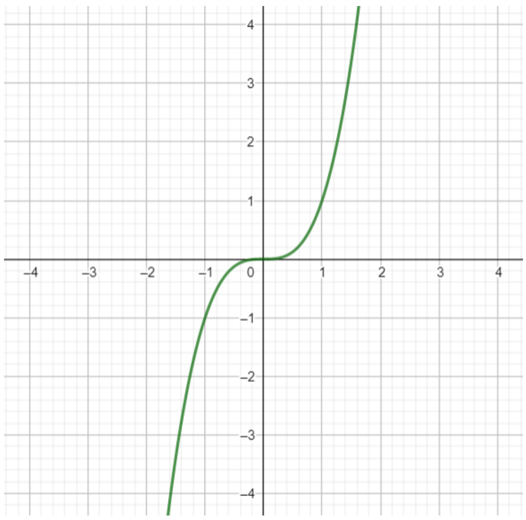
Slika 4: Geometrijska interpretacija teorema. Izvor slike: [8]

Budući da prema Osnovnom teoremu algebre polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima ima točno n nultočaka, zaključujemo da polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima ima točno tri nultočke od kojih je jedna sigurno realna. Preostale dvije nultočke mogu biti realne ili kompleksne. Preciznije, mogu biti tri različite realne nultočke, dvije različite realne nultočke od kojih je jedna dvostruka, jedna realna trostruka nultočka ili jedna realna i dvije kompleksno konjugirane nultočke.

Za crtanje grafova važne su upravo realne nultočke te njihove kratnosti ili višestrukosti. Zapravo vrijedi:

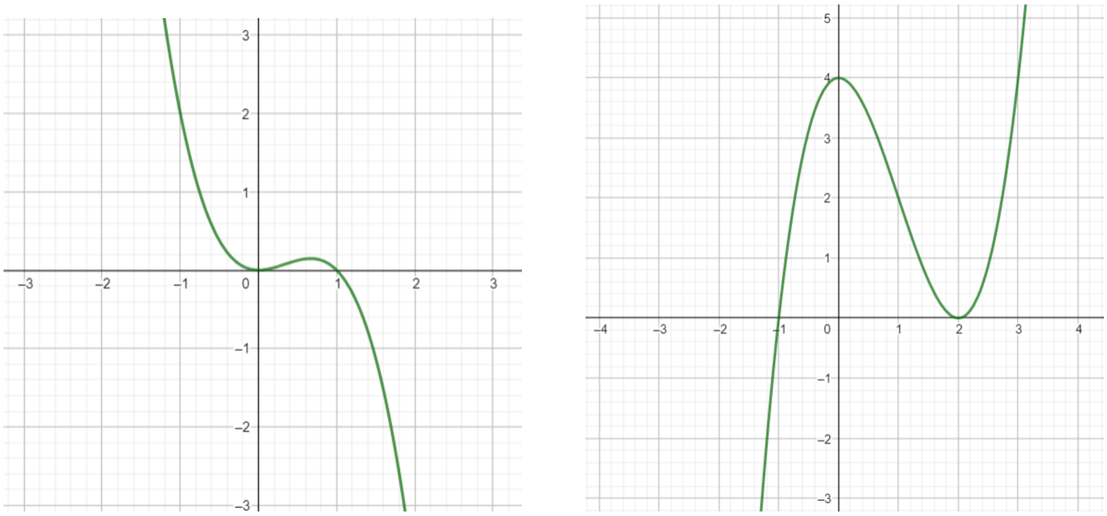
- ako je nultočka parne kratnosti onda su na intervalu oko te nultočke funkcijske vrijednosti istog predznaka pa graf funkcije dodiruje os apscisa.
- ako je nultočka neparne kratnosti onda su na intervalu oko te nultočke funkcijske vrijednosti različitog predznaka pa graf funkcije siječe os apscisa.

Navedeno ćemo ilustrirati kroz nekoliko primjera. Prvi primjer, odnosno slika 5, prikazuje graf najjednostavnijeg polinoma trećeg stupnja, polinoma $f(x) = x^3$. Očito je da je taj polinom ima jednu realnu trostruku nultočku $x = 0$. S obzirom da se radi o neparnoj kratnosti, graf polinoma siječe os apscisa.



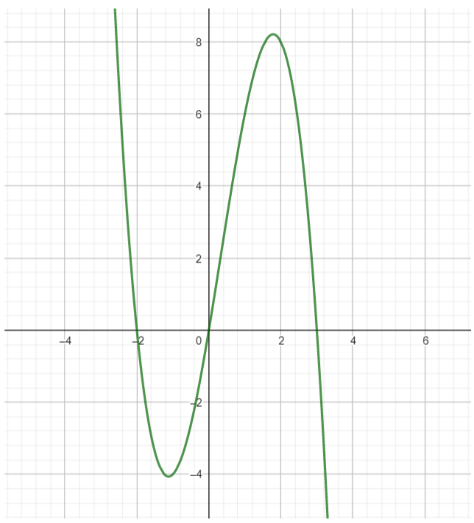
Slika 5: Funkcija $f(x) = x^3$

Rekli smo da za polinom koji ima dvije realne nultočke vrijedi da jedna od njih mora biti dvostruka. To na grafu interpretiramo činjenicom da su funkcijske vrijednosti oko te nultočke istog predznaka, odnosno da graf funkcije dodiruje os apscisa, dok u drugoj nultočki graf siječe os. Također bitno je obratiti pažnju i na predznak vodećeg koeficijenta te tako analizirati ponašanje funkcije za velike agrumente po apsolutnoj vrijednosti.



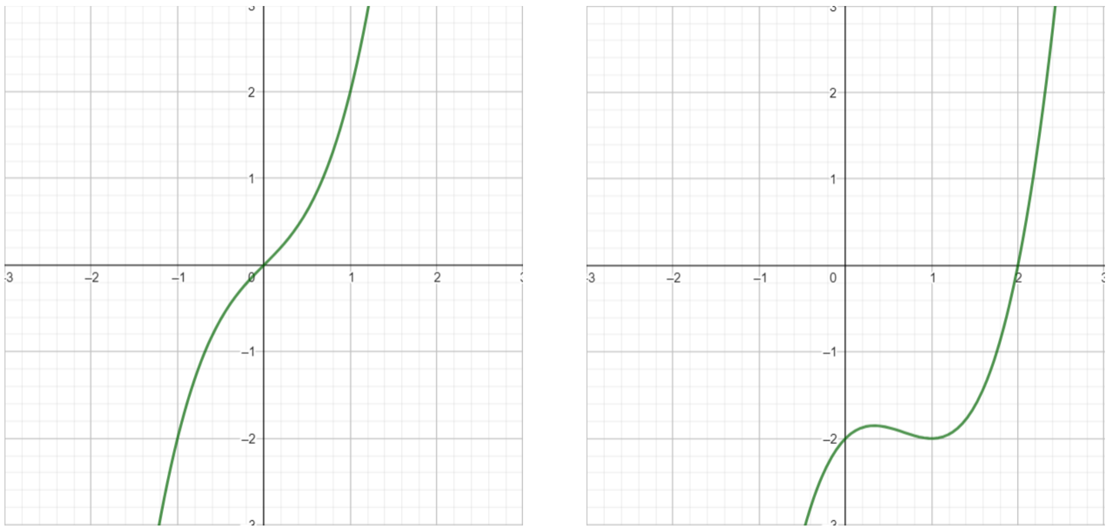
Slika 6: Funkcije $f(x) = -x^2(x-1)$ i $f(x) = (x-2)^2(x+1)$

Ukoliko funkcija ima tri realne nultočke, to znači da svaka nultočka ima kratnost jedan te da graf u svakoj nultočki siječe x-os. Primjer takve funkcije prikazuje sljedeća slika.



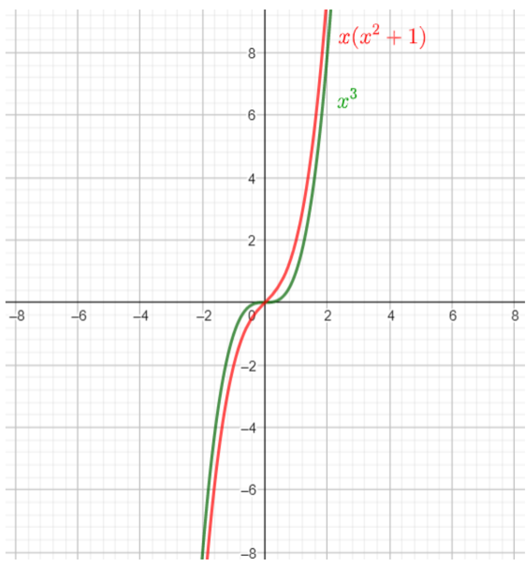
Slika 7: Funkcija $f(x) = -x(x+2)(x-3)$

Kao zadnja mogućnost za nultočke polinoma trećeg stupnja preostaje jedna realna i dvije kompleksno konjugirane nultočke.



Slika 8: Funkcije $f(x) = x(x^2 + 1)$ i $f(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$

Dakle, grafovi takvih funkcija sijeku os apscisa u jednoj točki. No, promatrajući grafove takvih polinoma uočavamo da kvadratni faktor bez realne nultočke utječe na izgled grafa. Na primjer, iako naizgled grafovi funkcija $f(x) = x(x^2 + 1)$ i $f(x) = x^3$ mogu izgledati isto, to nije tako.



Slika 9: Funkcije $f(x) = x^3$ i $f(x) = x(x^2 + 1)$

Prilikom globalnog crtanja grafova to nije previše bitno. U tom slučaju je naglasak na obliku grafa, kratnosti nultočke, svojstvu parnosti ili neparnosti, simetriji te ponašanju funkcije za velike i male argumente. S druge strane, detaljnim diferenacijalnim računom, odnosno ispitivanjem toka funkcije mogli bismo precizno, tj. lokalno nacrtati graf. Kako god, bitno je uočiti da tijekom analiziranja polinoma trećeg stupnja nismo mogli koristiti samo osnovne četiri operacije. Štoviše, umjesto algebarskog pogleda, koji nam je bio dovoljan za analiziranje polinoma drugog stupnja, ovdje smo trebali iskoristiti i analitički pristup. Od velike važnosti nam je bio Osnovni teorem algebre, kao i činjenica da smo koristili neprekidnost. Upravo iz tog razloga možemo reći da tek polinom trećeg stupnja promatramo zaista kao polinom, koristeći i algebarski i analitički pristup.

Crtanje kvalitativnog grafa polinoma možemo iskoristiti kod rješavanja nejednadžbi. Na taj način se produbljuje znanje i konceptualno razumijevanje rješenja nejednadžbi te se time pospješuje razvoj analitičkog načina mišljenja. Primjer rješavanja nejednadžbe pomoću grafa polinoma drugog stupnja već smo prikazali u prvom dijelu ovog rada. Sada slijedi primjer gdje ćemo zadanu nejednadžbu riješiti pomoću polinoma trećeg stupnja.

Primjer 2.17. *Riješi nejednadžbu* $\dfrac{x^2+2x+1}{3-2x} > 0.$

Jedna mogućnost za rješavanje nejednadžbe je podjela na slučajeve. Drugim riječima, potrebno je analizirati dva slučaja: kada su brojnik i nazivnik pozitivni ili kada su brojnik i nazivnik negativni. Konačno rješenje će biti unija tih slučajeva.

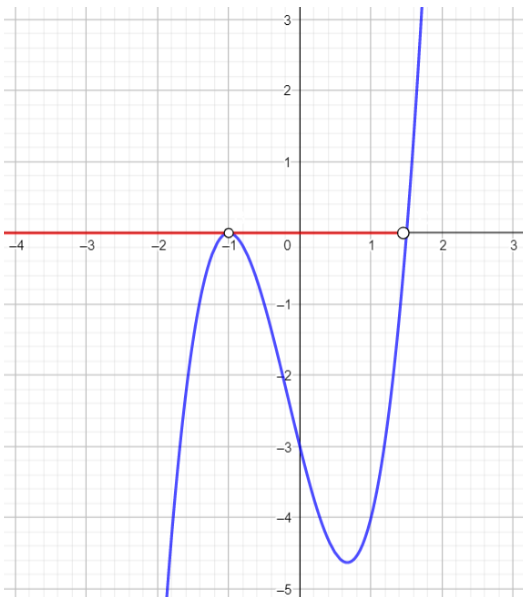
No, drugi način rješavanja nam je zanimljiviji. Zadanu nejednadžbu možemo pomnožiti s $(3-2x)^2$ zbog činjenice da je kvadrat realnog broja nenegativan broj te smo sigurni da se znak nejednakosti tada ne mijenja. Štoviše, izraz $(3-2x)^2$ mora biti različit od nule, to jest, $x \neq \frac{3}{2}$. Nakon tog koraka početna nejednadžba je ekvivalentna:

$$(x^2+2x+1)(3-2x) > 0.$$

Očito je da se radi o polinomu trećeg stupnja čiji graf ćemo lako skicirati ukoliko odredimo sve realne nultočke polinoma. Uočimo da je izraz u prvoj zagradi zapravo kvadrat zbroja zbog čega imamo:

$$\begin{aligned} (x+1)^2(3-2x) &> 0 \\ -(x+1)^2(2x-3) &> 0 \qquad\qquad\qquad / \cdot (-1) \\ (x+1)^2(2x-3) &< 0. \end{aligned}$$

Iz faktoriziranog zapisa možemo lako očitati nultočke, a to su -1 i $\frac{3}{2}$, gdje je nultočka -1 kratnosti dva. To zapravo znači da graf polinoma u toj nultočki neće sijeći x-os, dok će graf u nultočki $\frac{3}{2}$ sijeći os apscisa.



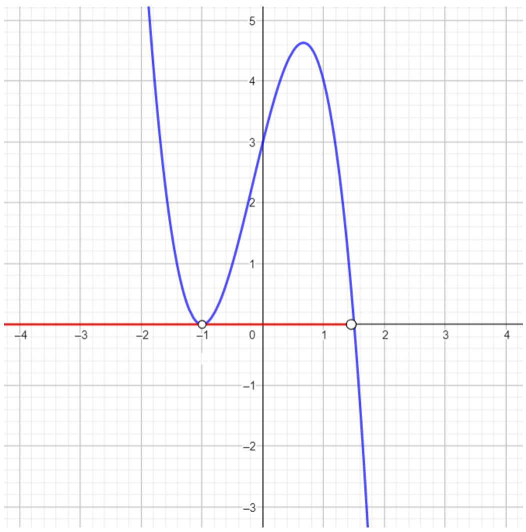
Slika 10: Graf funkcije $f(x) = (x+1)^2(2x-3)$

Nakon što skiciramo graf, jednostavno je očitati za koje su realne brojeve x funkcijske vrijednosti polinoma negativne. Primijetimo da broj $\frac{3}{2}$ moramo isključiti zbog uvjeta kojeg smo dobili prilikom množenja početne nejednadžbe s izrazom $(3-2x)^2$. S obzirom da se traži stroga nejednakost možemo pitati učenike na što još trebamo obratiti pozornost te kroz razgovor doći do činjenice da i nultočka brojnika treba biti isključena. Time dolazimo do konačnog rješenja:

$$x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle .$$

Kako bismo potaknuli dodatnu diskusiju u razredu, možemo pitati učenike jesmo li morali nejednadžbu pomnožiti s -1 kako bi vodeći koeficijent polinoma bio pozitivan. Drugim riječima, bismo li znali nacrtati graf polinoma ukoliko mu je vodeći koeficijent negativan. Dakle, želimo skicirati graf polinoma $-(x+1)^2(2x-3)$ i odrediti za koje je realne brojeve funkcijska vrijednost veća ili jednaka nuli. U tu svrhu s učenicima prvo diskutiramo koje vrijednosti (pozitivne ili negativne) polinom trećeg stupnja s pozitivnim vodećim koeficijentom postiže za dovoljno velike argumente po apsolutnoj vrijednosti. Nakon toga ih to isto pitamo za polinom s negativnim vodećim koeficijentom te zaključujemo da polinom trećeg stupnja s negativnim vodećim koeficijentom za velike argumente po apsolutnoj vrijednosti postiže prvo pozitivne, a zatim negativne vrijednosti. Na taj način dolazimo do sljedećeg grafa polinoma s kojeg lako očitamo da su rješenja nejednadžbe $-(x+1)^2(2x-3) > 0$ oni realni brojevi x za koje vrijedi:

$$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle .$$



Slika 11: Graf funkcije $f(x) = -(x+1)^2(2x-3)$

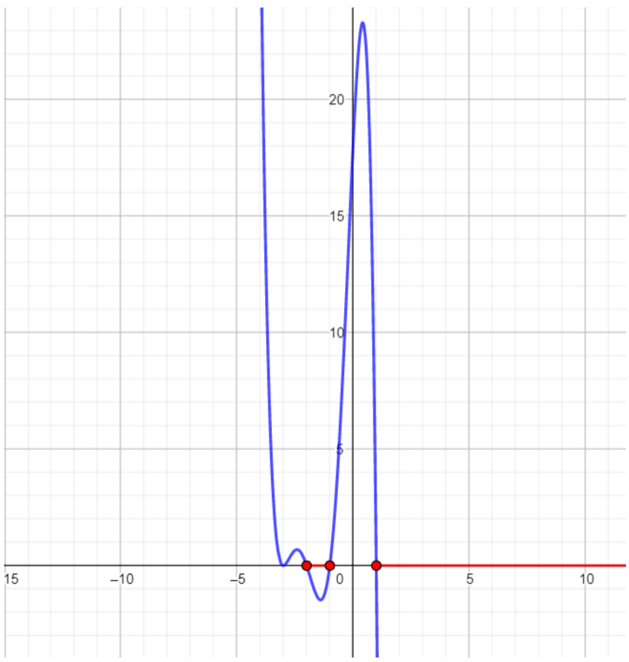
Razne zadatke slične ovom možemo pronaći u redovnoj nastavi. No, s obzirom da nisu riješeni na ovaj način, poveznica s polinomima izostane, iako postoji veliki potencijal za njihovu obradu. Ukoliko učenici zaista razumiju skiciranje polinoma trećeg stupnja, na isti način moći će riješiti i nejednadžbe višeg stupnja. Svrha tih zadataka ne bi trebala biti da učenici bezuspješno pokušavaju faktorizirati zadani polinom kako bi odredili realne nultočke, već da se trude skicirati polinome višeg stupnja koristeći analogiju i generalizaciju. Iz tog razloga im možemo zadati zadatke u kojima su polinomi već u faktoriziranom obliku i pustiti učenike da samostalno pokušaju riješiti zadatke te ih naposljetku zajedno diskutirati.

Primjer 2.18. *Riješi nejednadžbu* $-(x+3)^2(x+2)(x^2-1) \leq 0$.

Uočimo da se u posljednjoj zagradi nalazi razlika kvadrata te da danu nejednadžbu možemo dodatno faktorizirati:

$$-(x+3)^2(x+2)(x+1)(x-1) \leq 0.$$

Iz ovog zapisa je lako očitati realne nultočke, a to su brojevi $-3, -2, -1$ i 1, gdje je samo nultočka -3 kratnosti dva. To jest, samo u toj nultočki graf polinoma neće sijeći os apscisa. S obzirom da se radi o polinomu petog stupnja s negativnim vodećim koeficijentom, zaključujemo da će za velike argumente po apsolutnoj vrijednosti polinom poprimati prvo pozitivne funkcijske vrijednosti. Tom analizom dolazimo do grafa zadanog polinoma s kojeg očitavamo da su funkcijske vrijednosti polinoma manje ili jednake nuli za $x \in [-2, -1] \cup [1, \infty]$.



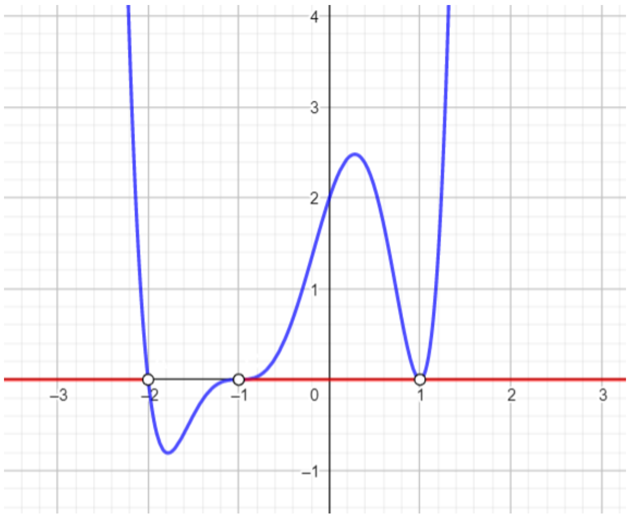
Slika 12: Graf funkcije $f(x) = -(x+3)^2(x+2)(x+1)(x-1)$

Također je bitno s učenicima detaljno proći kroz sve korake skiciranja grafa i rješavanja nejednadžbe ukoliko danu nejednadžbu pomnožimo s -1.

Prikazat ćemo još jedan primjer polinoma šestog stupnja koji je također pogodan za vježbanje analogije i generalizacije u obliku samostalnog rada.

Primjer 2.19. *Riješi nejednadžbu* $(x-1)^2(x+2)(x+1)^3 > 0$.

Nultočke polinoma su $-2, -1, 1$ čije su kratnosti $1, 3, 2$, redom. Vodeći koeficijent zadanog polinoma šestog stupnja je pozitivan, stoga zaključujemo da je za dovoljno velike argumente po apsolutnoj vrijednosti funkcijska vrijednost polinoma pozitivna te dolazimo do grafa polinoma.



Slika 13: Graf funkcije $f(x) = (x-1)^2(x+2)(x+1)^3$

S obzirom da funkcijske vrijednosti moraju biti strogo veće od nule, zaključujemo da su rješenja oni realni brojevi x koji pripadaju intervalu $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.

Dodatno, učenicima možemo reći da neke od ovih zadataka riješe analizom slučajeva kako bi uočili kako s povećanjem stupnja polinoma broj slučajeva postaje veći i račun kompliciraniji te kako je skiciranje polinoma brži i elegantniji način.

2.5 Primjer zadatka s polinomom s više rješenja

Sve dosad prikazano pruža nam dovoljno znanja kako bismo riješili mnoge zadatke vezane za polinome. Već smo naglasili važnost različitih načina mišljenja i prikazali različite metode za rješavanje istog problema. Stoga je važno poticati učenike na samostalno razmišljanje o problemu, kao i na različite pristupe u njegovom rješavanju gdje je to moguće. U tu svrhu slijedi primjer zadatka s natjecanja, s nekoliko njegovih rješenja, koje je 2017. godine provela najveća svjetska udruga matematičara, studenata i entuzijasta Mathematical Association of America. Zadatak bi zasigurno bio zanimljiv u nastavi iz razloga što bi učenici vidjeli da ne postoji samo jedan ispravan pristup. Dodatno, možda bi potaknuo kreativnost ideja prilikom budućeg rješavanja zadataka. S druge strane, sigurno bi i nastavniku bilo zanimljivo vidjeti na koji način učenici razmišljaju te kako, po nama možda najjednostavniji način, učenicima nije toliko blizak.

Primjer 2.20. *Za određene realne brojeve a, b, c polinom $g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$ ima 3 različite nultočke i svaka nultočka je ujedno i nultočka polinoma $f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c$. Koliko je $f(1)$?*

Prvi način:

Nultočke polinoma $g(x)$ označimo redom s x_1, x_2, x_3. Prema uvjetu zadatka znamo da su to ujedno i nultočke polinoma $f(x)$ čiju ćemo četvrtu nultočku označiti s x_4. Stoga možemo polinom $f(x)$ zapisati kao:

$$f(x) = (x - x_4)g(x). \tag{3}$$

Dakle, potrebno je odrediti koeficijent a i nultočku x_4. Koristeći Vièteove formule za polinom trećeg i četvrtog stupnja imamo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Odavde slijedi $-a + x_4 = -1$, odnosno $x_4 = a - 1$.

Nadalje, primijenjujući Vièteove formule na linearni i slobodni član funkcije $g(x)$ te na linearni član funkcije $f(x)$ imamo:

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= -10 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 1 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 &= -100. \end{aligned}$$

Primijetimo da zadnju jednadžbu možemo zapisati kao

$$x_1x_2x_3 + x_4(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = -100,$$

gdje možemo uvrstiti prethodne dvije jednakosti te imamo:

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 + x_4(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) &= -100 \\ -10 + x_4 \cdot 1 &= -100 \\ x_4 &= -100 + 10 \\ x_4 &= -90. \end{aligned}$$

Na početku smo izračunali da je $x_4 = a - 1$, iz čega slijedi $a = -89$. Sada jednakost (3) možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_4)g(x) \\ f(x) &= (x + 90)(x^3 - 89x^2 + x + 10). \end{aligned}$$

Sada je lako izračunati $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 91(1 - 89 + 1 + 10) \\ f(1) &= 91(-77) \\ f(1) &= -7007. \end{aligned}$$

Drugi način:

S obzirom da su sve nultočke polinoma $g(x)$ ujedno i nultočke polinoma $f(x)$, a stupanj polinoma $f(x)$ je veći za 1, slijedi da polinom $f(x)$ možemo zapisati kao

$$f(x) = C(x - k)g(x),$$

gdje je k neki broj. Vodeći koeficijent polinoma $f(x)$ je 1 te zbog toga zaključujemo da je konstanta C također jednaka 1. Tada imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= C(x-k)g(x) \\ f(x) &= (x-k)(x^3+ax^2+x+10) \\ x^4+x^3+bx^2+100x+c &= x^4+(a-k)x^3+(1-ak)x^2+(10-k)x-10k. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem polinoma dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} 1 &= a-k, \\ b &= 1-ak, \\ 100 &= 10-k, \\ c &= -10k. \end{aligned}$$

Iz treće jednadžbe proizlazi da je $k=-90$, tada iz prve jednadžbe imamo da je $a=-89$, a iz zadnje $c=900$. Na kraju izračunamo da je vrijednost koeficijenta b jednaka -8009.

Naposljetku, uvrštavanjem koeficijenata imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4+x^3-8009x^2+100x+900 \\ f(1) &= 1+1-8009+100+900 \\ f(1) &= -7007. \end{aligned}$$

Štoviše, nije bilo potrebno izračunati sve koeficijente. Mogli smo izračunati samo vrijednost koeficijenata a i k te vrijednost $f(1)$ odrediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-k)g(x) \\ f(x) &= (x+90)(x^3-89x^2+x+10) \\ f(1) &= 91\cdot(1-89+1+10) \\ f(1) &= -7007. \end{aligned}$$

Treći način:

Promotrimo polinom $h(x) = f(x) - xg(x)$, čiji je stupanj tri. Na taj način smo poništili član x^4:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - xg(x) \\ &= x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c - x^4 - ax^3 - x^2 - 10x \\ &= (1-a)x^3 + (b-1)x^2 + 90x + c. \end{aligned}$$

S druge strane, polinom $h(x)$ dobiven je razlikom polinoma $f(x)$ i $g(x)$ koji imaju tri jednake nultočke pa slijedi i da polinom $h(x)$ također ima te iste nultočke. Dakle, polinom $h(x)$ je oblika $h(x) = \alpha g(x)$, gdje je α neki realan broj. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$\begin{aligned} &(1-a)x^3 + (b-1)x^2 + 90x + c = \alpha g(x) \\ &(1-a)x^3 + (b-1)x^2 + 90x + c = \alpha \cdot (x^3 + ax^2 + x + 10). \end{aligned}$$

Iz ovoga je očito da mora vrijediti $\alpha = (1-a)$ te imamo jednakost:

$$(1-a)x^3 + (b-1)x^2 + 90x + c = (1-a)(x^3 + ax^2 + x + 10).$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} (b-1) &= (1-a)a, \\ 90 &= 1-a, \\ c &= (1-a)10. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi da je $a = -89$ te rješavanjem sustava dolazimo do ostalih koeficijenata $b = -8009$ i $c = 900$.

Dakle, polinom $f(x)$ je jednak $f(x) = x^4 + x^3 - 8009x^2 + 100x + 900$, a tražena vrijednost polinoma $f(1)$ iznosi -7007.

Četvrti način:

Ukoliko provedemo direktno dijeljenje polinoma, znamo da ostatak pri dijeljenju mora biti jednak nuli jer polinomi $f(x)$ i $g(x)$ imaju zajedničke nultočke te su samim tim djeljivi.

$(x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c) : (x^3 + ax^2 + x + 10) = x + (1 - a)$

$\underline{-x^4 - ax^3 - x^2 - 10x}$

$(1 - a)x^3 + (b - 1)x^2 + 90x + c$

$\underline{-(1 - a)x^3 - a(1 - a)x^2 - (1 - a)x - 10(1 - a)}$

$(b - 1 - a + a^2)x^2 + (90 - 1 + a)x + c - 10 + 10a$

Izjednačavanjem ostatka s nulpolinomom dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} b - 1 - a + a^2 &= 0, \\ 89 + a &= 0, \\ c - 10 + 10a &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe dobivamo $a = -89$ te uvrštavanjem u prvu i zadnju jednadžbu imamo $b = -8009$ i $c = 900$.

Sada znamo da je polinom $f(x) = x^4 + x^3 - 8009x^2 + 100x + 900$ te lako izračunamo $f(1) = -7007$.

3 Zadaci s natjecanja u nastavi matematike

Na samom kraju diplomskog rada slijede zadaci s raznih natjecanja u kojima se pojavljuju polinomi općeg stupnja. Svrha tih zadataka nisu samo njihova rješenja, već je naglasak na činjenici da ti zadaci zaista mogu biti implementirani u nastavu, ako ne kao kompletni zadaci, onda barem neki dijelovi tih zadataka kroz koje se mogu ostvariti traženi ishodi, produbiti analitičko i algebarsko mišljenje te u konačnici detaljnije upoznati učenike s pojmom polinoma.

3.1 Algebra polinoma

Spomenuli smo da učenici kroz prvi razred srednje škole vrlo detaljno obrađuju algebarske izraze i algebarske razlomke. Štoviše, za zadane izraze računaju konkretne vrijednosti, pojednostavljuju izraze te provode četiri osnovne opercije. Također određuju tražene koeficijente kako bi zadani algebarski izrazi bili jednaki. Nadalje, s kompleksnim brojevima su se upoznali u drugom razredu te ih znaju prikazati u algebarskom obliku i računati s njima, dok u četvrtom razredu računaju funkcijsku vrijednost polinomne funkcije. Dakle, nema razloga zašto se idući zadatak, kao i njemu slični, ne bi mogli raditi s učenicama u srednjoj školi s obzirom da se kroz njih mogu ostvariti svi navedeni ishodi.

Primjer 3.1 (Državno natjecanje, 4. razred, 2011. - B varijanta)**.** *Odredite polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima tako da zadovoljava uvjete*

$$P(1+i) = 3i - 4 \quad i \quad P(-i) = 4i - 1.$$

Rješenje:

S obzirom da se radi o polinomu trećeg stupnja, zapišimo njegov standardni oblik: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Znamo vrijednost polinoma za argument $1 + i$, čime dobivamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
P(1+i) &= a(1+i)^3 + b(1+i)^2 + c(1+i) + d \\
3i - 4 &= a(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + b(1 + 2i + i^2) + c + ci + d \\
3i - 4 &= a(2i - 2) + b \cdot 2i + c + ci + d \\
3i - 4 &= 2ai - 2a + 2bi + c + ci + d \\
3i - 4 &= (2a + 2b + c)i - 2a + c + d.
\end{aligned}
$$

Izjednačavanjem imaginarnih i realnih dijelova dobivamo sustav:

$$
\begin{aligned}
3 &= 2a + 2b + c \\
\underline{-4} &\underline{= -2a + c + d}
\end{aligned}
$$

Sada imamo sustav od dvije nejednadžbe s tri nepoznanice. No, iz drugog uvjeta dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&P(-i) = a(-i)^3 + b(-i)^2 + c(-i) + d \\
&4i - 1 = ai - b - ci + d \\
&4i - 1 = (a - c)i - b + d
\end{aligned}
$$

odakle slijedi:

$$
\begin{aligned}
4 &= a - c \\
\underline{-1} &\underline{= -b + d}
\end{aligned}
$$

Iz prve jednadžbe možemo izraziti $c = a - 4$, a iz druge $b = 1 + d$. Uvrštavajući u prvi sustav imamo:

$$
\begin{aligned}
3 &= 2a + 2(1 + d) + a - 4 \\
\underline{-4} &\underline{= -2a + a - 4 + d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3 &= 3a + 2d - 2 \\
\underline{-4} &\underline{= -a + d - 4} \quad \Rightarrow \quad d = a
\end{aligned}
$$

$$5 = 5a$$
$$a = 1.$$

Sada lako dobivamo ostale koeficijente $b = 2$, $c = -3$, $d = 1$. Dakle, $P(x) = x^2 + 2x^2 - 3x + 1$.

Rješavajući ovaj zadatak uočavamo da nije potrebno nikakvo dodatno znanje, osim onog što smo stekli kroz srednju školu. Naravno, ne možemo očekivati da će svi učenici ovo znati riješiti, no sigurno ima onih učenika koji će biti zainteresirani za rješavanje ovakvih zadataka. Stoga je važno pokazati i učenicima i nastavnicima da zadaci s natjecanja nisu nužno neprimjereni za nastavu i da ne se treba unaprijed stvarati otpor prema takvim zadacima. Također je moguće zadatak pojednostaviti zadajući realne argumnete.

3.2 Djeljivost polinoma

Godine 2005. na općinskom natjecanju u drugom razredu pojavio se zadatak u kojem je trebalo odrediti koeficijente a i b, tako da zadani polinomi budu djeljivi. Učenici sada, prema predmetnom kurikulumu, ne obrađuju dijeljenje polinoma. No ipak, to ne znači da im pojam djeljivosti polinoma mora ostati apstraktan i da se ne može obraditi na redovnoj ili dodatnoj nastavi. Za početak, promotrimo zadatak i njegovo rješenje.

Primjer 3.2 (Općinsko natjecanje, 2. razred, 2005.). *Nađite koeficijente a i b takve da polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bude djeljiv s $x^2 - x - 1$.*

Rješenje:

Podijelimo li polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ s $x^2 - x - 1$ imamo:

$$(ax^5 + bx^4 + 1) : (x^2 - x - 1) = ax^3 + (a + b)x^2 + (2a + b)x + (3a + 2b)$$

$$\underline{-ax^5 + ax^4 + ax^3}$$

$$(a + b)x^4 + ax^3 + 1$$

$$\underline{-(a + b)x^4 + (a + b)x^3 + (a + b)x^2}$$

$$(2a+b)x^3+(a+b)x^2+1$$

$$\underline{-(2a+b)x^3+(2a+b)x^2+(2a+b)x}$$

$$(3a+2b)x^2+(2a+b)x+1$$

$$\underline{-(3a+2b)x^2+(3a+2b)x+(3a+2b)}$$

$$(5a+3b)x+(3a+2b+1)$$

Dakle, kao kvocijent smo dobili polinom trećeg stupnja, a kao ostatak polinom prvog stupnja $(5a+3b)x+(3a+2b+1)$.
S obzirom da polinom ax^5+bx^4+1 mora biti djeljiv polinom x^2-x-1 ostatak pri dijeljenju mora biti jednak nuli, iz čega slijedi sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$5a+3b=0$$

$$\underline{3a+2b+1=0}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo koeficijente $a=3$ i $b=-5$.

Vidimo da se dijeljenje polinoma odvija na sličan način kao i dijeljenje cijelih brojeva. Upravo je to primjer na kojem učenicima možemo jednostavno objasniti dijeljenje polinoma, na njima blizak način. Dodatno, zadatak možemo modificirati te ga razložiti u nekoliko koraka, s dodatnim smjernicama, kako bi učenici sami pokušali doći do rješenja, odnosno algoritma kako podijeliti dva polinoma. Štoviše, kroz gradivo o potencijama i algebarskim razlomcima naučili su dijeliti monom s monom, što je osnovni korak pri dijeljenju polinoma. Stoga je moguće učenicima pripremiti nastavni listić te ih pustiti da rade samostalno ili u paru. U tu svrhu slijedi primjer jednog nastavnog listića kojeg je moguće iskoristiti.

Dijeljenje polinoma

1. Pisanim dijeljenjem podijelite sljedeće brojeve te svoj rezultat provjerite množenjem:

   a) $3732 : 4$

   b) $6482 : 31$

2. Nadopunite sljedeću rečenicu:
   Ukoliko prilikom dijeljenja dva broja dobijemo ostatak, tada je on uvijek _________ od količnika.

3. Pokušajte primijeniti sličan postupak za dijeljenje binoma s monomom i trinoma s monomom. Rezultat provjerite množenjem:

   a) $(3x^5 + 6x^2) : (3x^2)$

   b) $(24x^4 + 6x^3 + 9x^2) : (3x^2)$

   c) $(5x^5 + 2x^3 + 7x) : (x^2)$

4. Podijelite polinome s polinomom i rezultat provjerite množenjem:

   a) $(x^2 - 4x + 3) : (x - 3)$

   b) $(2x^2 - x + 5) : (x - 2)$

5. Ukoliko prilikom dijeljena polinoma imamo ostatak, u kakvom su odnosu ostatak i količnik s obzirom na njihove stupnjeve?

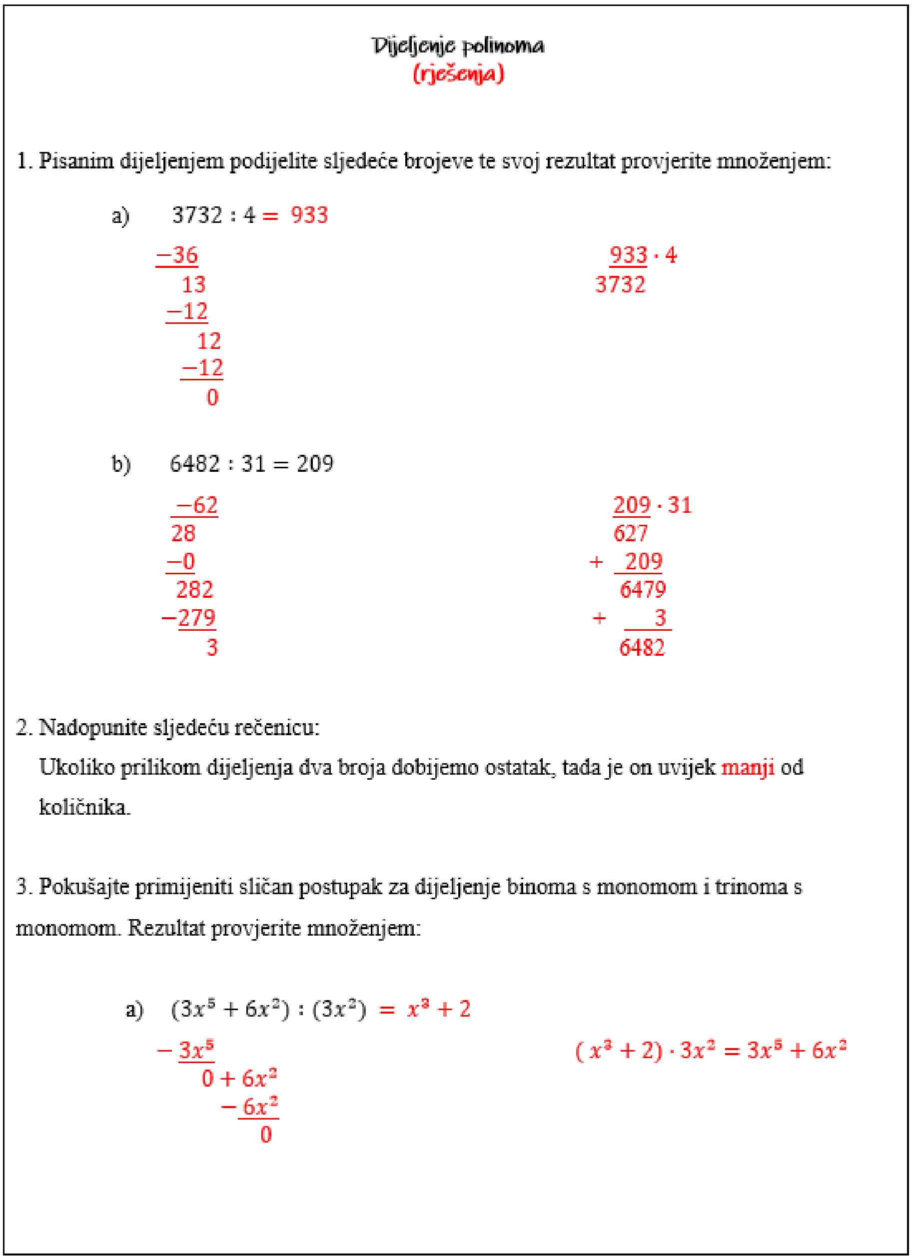
   ____

6. Izrecite pravilo za dijeljenje polinoma p s polinomom q.

   ____

   ____

Slika 14: Primjer nastavnog listića



Dijeljenje polinoma

(rješenja)

1. Pisanim dijeljenjem podijelite sljedeće brojeve te svoj rezultat provjerite množenjem:

a) $3732 : 4 = 933$

$$\begin{array}{r} \underline{-36} \\ 13 \\ \underline{-12} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{933} \cdot 4 \\ 3732 \end{array}$$

b) $6482 : 31 = 209$

$$\begin{array}{r} \underline{-62} \\ 28 \\ \underline{-0} \\ 282 \\ \underline{-279} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{209} \cdot 31 \\ 627 \\ + \underline{209} \\ 6479 \\ + \underline{3} \\ 6482 \end{array}$$

2. Nadopunite sljedeću rečenicu:

Ukoliko prilikom dijeljenja dva broja dobijemo ostatak, tada je on uvijek manji od količnika.

3. Pokušajte primijeniti sličan postupak za dijeljenje binoma s monomom i trinoma s monomom. Rezultat provjerite množenjem:

a) $(3x^5 + 6x^2) : (3x^2) = x^3 + 2$

$$\begin{array}{r} -\underline{3x^5} \\ 0 + 6x^2 \\ -\underline{6x^2} \\ 0 \end{array} \qquad (x^3 + 2) \cdot 3x^2 = 3x^5 + 6x^2$$

Slika 15: Primjer nastavnog listića - rješenje

b) $(24x^4 + 6x^3 + 9x^2) : (3x^2) = 8x^2 + 2x + 3$

$$\begin{array}{l} -\underline{24x^4} \\ \quad 0 + 6x^3 \\ \quad\quad -\underline{6x^3} \\ \quad\quad\quad 0 + 9x^2 \\ \quad\quad\quad\quad -\underline{9x^2} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$(8x^2 + 2x + 3) \cdot 3x^2 = 24x^4 + 6x^3 + 9x^2$

c) $(5x^5 + 2x^3 + 7x) : (x^2) = 5x^3 + 2x$

$$\begin{array}{l} -\underline{5x^4} \\ \quad 0 + 2x^3 \\ \quad\quad -\underline{2x^3} \\ \quad\quad\quad 0 + 7x \end{array}$$

$(5x^3 + 2x) \cdot x^2 + 7x = 5x^5 + 2x^3 + 7x$

4. Podijelite polinome s polinomom i rezultat provjerite množenjem:

a) $(x^2 - 4x + 3) : (x - 3) = x - 1$

$$\begin{array}{l} -\underline{x^2 + 3x} \\ \quad 0 \; - x + 3 \\ \quad\quad \underline{x - 3} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$(x - 3) \cdot (x - 1) = x^2 - 4x + 3$

b) $(2x^2 - x + 5) : (x - 2) = 2x + 3$

$$\begin{array}{l} -\underline{2x^2 + 4x} \\ \quad 0 \; + 3x + 5 \\ \quad\quad -\underline{3x + 6} \\ \quad\quad\quad 11 \end{array}$$

$(x - 2) \cdot (2x + 3) + 11 = 2x^2 - x + 5$

5. Ukoliko prilikom dijeljena polinoma imamo ostatak, u kakvom su odnosu ostatak i količnik s obzirom na njihove stupnjeve?

Stupanj ostatka uvijek je manji od stupnja količnika.

6. Izrecite pravilo za dijeljenje polinoma p s polinomom q.

Polinome p i q dijelimo na način da vodeći član polinoma p dijelimo s vodećim članom polinoma q. Dobiveni rezultat pomnožimo s polinom q i oduzmemo od polinoma p. S algoritmom prestajemo kada dobijemo polinom koji je manjeg stupnja od polinoma q.

Slika 16: Primjer nastavnog listića - rješenje

Dakle, prvo smo od učenika tražili da se prisjete pisanog dijeljenja brojeva i da rezultat provjere množenjem. Nakon toga bi učenici na sličan način trebali pokušati podijeliti polinome s monom, a zatim s binomom te pokušati izreći pravilo za dijeljenje polinoma. Također, s obzirom da prilikom dijeljenja brojeva ostatak uvijek mora biti manji od količnika, učenici analogno zaključuju da kod polinoma stupanj ostatka mora biti manji od stupnja polinoma s kojim dijelimo.

Nakon što učenici usvoje algoritam dijeljenja polinoma, nema prepreke za dijeljenje polinoma zadanih na natjecanju. Također je s učenicima moguće provesti dodatnu aktivnost ili usmenu diskusiju kroz koju će učenici ponoviti da su dva broja djeljiva ukoliko im je ostatak pri dijeljenju nula te će analogno zaključiti i za polinome. Na taj način, učenici ne samo da će uspjeti podijeliti polinome $ax^5 + bx^4 + 1$ i $x^2 - x - 1$ s natjecanja, nego će znati da polinom koji smo dobili kao ostatak pri dijeljenju treba biti jednak nuli. Učenici bi trebali moći bez problema izjednačiti dobiveni ostatak s nulpolinomom, jer su se s tim susreli kod izjednačavanja algebarskih izraza, te tako odrediti tražene koeficijente.

Štoviše, ukoliko je ostatak pri dijeljenju nula, tada početni polinom p možemo zapisati kao $p = g \cdot q$, gdje je q polinom s kojim smo dijelili. To su zapravo učenici sami napisali kada smo tražili od njih da rezultat provjere množenjem. Ovo je pogodno mjesto gdje možemo komentirati da je iz tog faktoriziranog zapisa lako iščitati barem jednu nultočku, ali i vježbati određivanje nultočke na ostalim primjerima s nastavnog listića, gdje je to moguće. Nakon toga možemo i obratno, reći učenicima da faktoriziraju polinom ukoliko znamo jednu njegovu nultočku x_1. Tu je važno da učenici uoče da je u tom slučaju početni polinom djeljiv s polinomom $(x - x_1)$. Ovaj dio diskusije nije nužno provesti odmah nakon prikazane aktivnosti, niti je važno naglasiti da se u pozadini kriju bitni teoremi vezani za polinome. No, zasigurno je korisno obraditi je, jer će im sigurno biti od velike koristi kada se susretnu s određivanjem nultočaka polinoma višeg stupnja.

Provedenu aktivnost i diskusiju možemo iskoristiti i za neke druge zadatke vezane za djeljivost polinoma koje možemo pronaći na natjecanjima. Primjer takvog zadatka prikazan je u nastavku.

Primjer 3.3 (Republičko natjecanje, 1. razred, 2005.)**.** *Odredite realne brojeve a i b tako da polinom $x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ bude djeljiv s polinomom $x^2 - 2x - 3$.*

Rješenje:

Direktnim dijeljenjem zadanih polinoma imamo:

$$(x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b) : (x^2 - 2x - 3) = x^2 + 3 + a$$

$$\underline{-x^4 + 2x^3 + 3x^2}$$

$$(3 + a)x^2 + 2x + b$$

$$\underline{-(3 + a)x^2 + 2(3 + a)x + 3(3 + a)}$$

$$(8 + 2a)x + 9 + 3a + b$$

Ukoliko želimo odrediti koeficijente a i b da polinomi budu djeljivi, to znači da ostatak pri dijeljenju mora biti jednak nula, odnosno moramo izjednačiti polinom $(8 + 2a)x + 9 + 3a + b$ s nulpolinomom. Iz toga proizlazi sljedeći sustav:

$$8 + 2a = 0$$
$$\underline{9 + 3a + b = 0}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo da je $a = -4$ te uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $b = 3$.

3.3 Faktorizacija polinoma

Ne rješavaju se svi zadaci vezani za djeljivost polinoma direktnim dijeljenjem. Postoje i drugi pristupi, tako je na primjer za idući zadatak potrebno faktorizirati polinom.

Primjer 3.4 (Školsko natjecanje, 1. razred, 2013. - B varijanta)**.** *Dokažite da je izraz $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa 120 za sve prirodne brojeve n.*

Rješenje:

Faktorizacijom zadanog polinoma možemo uočiti neke nove informacije o samom polinomu. S obzirom da se radi o faktorizaciji algebarskog izraza s čime su učenici već upoznati, sljedeći koraci ne bi trebali predstavljati problem:

$$
\begin{aligned}
n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\
&= n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) \\
&= n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) \\
&= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \\
&= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2).
\end{aligned}
$$

Naslućujemo da bi problem mogao nastati upravo nakon ovog koraka. Stoga učenicima možemo zadati da faktoriziraju i broj 120, odnosno da ga rastave na proste faktore. Nakon rastava na proste faktore $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ zaključujemo da polinom treba biti djeljiv upravo s brojevima $2, 3, 4$ i 5. Iz tog razloga je potrebno dodatno promotriti polinom u faktoriziranom obliku kako bismo nešto više zaključili. Učenicima za početak možemo sugerirati da faktore poredaju od najmanjeg do najvećeg, kako bi polinom bio zapisan u sljedećem obliku:

$$
n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).
$$

Ovo je izuzetno zanimljiv korak u kojem učenici razvijaju svoje logičko razmišljanje i definitivno bi bilo bolje da nastavnik raznim potpitanjima potiče učenike na razmišljanje, bez da im olako otkrije rješenje. Ako učenici ne prepoznaju da se radi o uzastopnim brojevima, možemo ih pitati za koliko se, u danom izrazu, razlikuju svaka dva susjedna faktora. S obzirom da se faktori razlikuju za 1, očito je da se radi o 5 uzastopnih brojeva. Tada ih možemo pitati možemo li s obzirom na tu činjenicu zaključiti s kojim je brojevima djeljiv dani izraz. Za početak možemo krenuti s analiziranjem je li ijedan od faktora djeljiv s brojem 2. Kod pet uzastopnih brojeva imamo i parne i neparne brojeve te sigurno postoji broj djeljiv s dva, jer je svaki paran broj djeljiv s dva. Dodatno se možemo pitati je li polinom djeljiv brojem 3. Drugim riječima, možemo pitati učenike postoje li 3 uzastopna broja od kojih nijedan nije djeljiv s 3. Analogno postavljamo pitanja za djeljivost s brojevima 4 i 5 te zaključujemo da je među pet uzastopnih brojeva sigurno jedan djeljiv s 2, jedan s 3, jedan s 4 i jedan koji je djeljiv s 5. Konačno zaključujemo da je njihov umnožak djeljiv s $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, odnosno s brojem 120.

Ovakav način pristupa bi sigurno potaknuo učenike na razmišljanje što vrijedi ili ne vrijedi za bilo kojih pet uzastopnih brojeva. Tražeći od njih argumente koji potvrđuju njihovo razmišljanje ili im dajući primjere koji ga opovrgavaju zasigurno bi započeli zanimljivu diskusiju u razredu u koju bi se uključili svi učenici.

3.4 Nultočke polinoma

S određivanjem nultočaka drugog stupnja učenici su jako dobro upoznati te bi trebali moći riješiti kvadratnu jednadžbu i provjeriti njezina rješenja. Što se tiče Vièteovih formula koje su vezane uz nultočke polinoma, dobrom razinom usvojenosti odgojno-obrazovanih ishoda smatra se kada učenici znaju bez rješavanja kvadratne jednaždbe odrediti zbroj kvadrata nultočaka, zbroj recipročnih vrijednosti i slične izraze. Stoga, ukoliko idući zadatak pojednostavimo na način da se traži vrijednost izraza $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1)$ za unaprijed zadani realni parametar m, gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe, dobit ćemo zadatke koji su identični klasičnim zadacima u udžbenicima. Zato nije nemoguće niti preteško u razredu zadati zadatak na način na koji je zadan na natjecanju.

Primjer 3.5 (Školsko natjecanje, 2. razred, 2018. - B varijanta)**.** *Odredite realni parametar m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe*

$$5x^2 - 10m^2x - mx - 3x + 6m^2 + m - 4 = 0$$

vrijedi $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$.

Rješenje:

Većina učenika će možda unaprijed odustati kada vide nepoznati parametar m i jednaždbu koja im na prvi pogled izgleda nerješiva. No, bitno je prolaziti svaki korak detaljno i polako kako bi učenici mogli pratiti. Stoga je prvo važno zaključiti o kojem se polinomu ovdje radi. Očigledno je da ovo polinom drugog stupnja, odnosno da se radi o kvadratnoj jednadžbi te bi prvi korak trebao biti svesti kvadratnu jednadžbu na njezin osnovni oblik.

$$\begin{gathered} 5x^2 - 10m^2x - mx - 3x + 6m^2 + m - 4 = 0 \\ 5x^2 + (-10m^2 - m - 3)x + 6m^2 + m - 4 = 0. \end{gathered}$$

Iz ovog oblika možemo lako očitati koeficijente polinoma te ih možemo označiti s $a = 5$, $b = -10m^2 - m - 3$ i $c = 6m^2 + m - 4$.

Iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$, što raspisujemo kao:

$$25x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 = 2018. \tag{4}$$

Umnožak i zbroj nultočki bi učenike trebao podsjećati na Vièteove formule te prema njima, za zadanu jednadžbu, vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{10m^2 + m + 3}{5}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6m^2 + m - 4}{5}.$$

Uvrštavanjem Vièteovih formula u jednadžbu (4), dobivamo da mora vrijediti sljedeće:

$$\begin{aligned}
25x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 &= 2018\\
25 \cdot \frac{6m^2 + m - 4}{5} - 5 \cdot \frac{10m^2 + m + 3}{5} + 1 &= 2018\\
5(6m^2 + m - 4) - 10m^2 - m - 3 &= 2017\\
30m^2 + 5m - 20 - 10m^2 - m - 2020 &= 0\\
20m^2 + 4m - 2040 &= 0 \qquad\qquad / : 4\\
5m^2 + m - 510 &= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, trebamo naći realan parametar m za koji će vrijediti dobivena jednadžba. Drugim riječima, trebamo naći nultočke kvadratne jednadžbe kojoj je nepoznanica m. Rješavanjem dobivene kvadratne jednadžbe dolazimo do rješenja:

$$m_1 = 10, \quad m_2 = -\frac{51}{5}.$$

Idući zadatak je možda nešto složeniji, no lijepo povezuje sve što smo dosad prikazali da se s učenicima obrađuje u nastavi i da se može dodatno uklopiti u redovnu nastavu ili eventualno obraditi na dodatnoj nastavi.

Primjer 3.6 (Županijsko natjecanje, 1. razred, 1994.)**.** *Odredite sve korijene polinoma*

$$P(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i, \qquad z \in \mathbb{C}$$

znajući da je bar jedan od njih realan.

Rješenje:

Realnu nultočku označimo s z_1. Tada mora vrijediti $P(z_1) = 0$. Odnosno

$$2z_1^3 - (5+6i)z_1^2 + 9iz_1 + 1 - 3i = 0.$$

S obzirom da je vrijednost polinoma kompleksan broj, trebamo razdvojiti realni i imaginarni dio te ih izjednačiti s nulom.

$$\begin{aligned} 2z_1^3 - (5+6i)z_1^2 + 9iz_1 + 1 - 3i &= 0 \\ 2z_1^3 - 5z_1^2 + 6iz_1^2 + 9iz_1 + 1 - 3i &= 0 \\ (2z_1^3 - 5z_1^2 + 1) + (-6z_1^2 + 9z_1 - 3)i &= 0. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijede dvije jednadžbe:

$$2z_1^3 - 5z_1^2 + 1 = 0 \qquad i \qquad -6z_1^2 + 9z_1 - 3 = 0.$$

Dakle, rješenje jedne jednadžbe mora biti ujedno i rješenje druge jednadžbe. Jednostavnije je riješiti kvadratnu jednadžbu iz koje dobivamo da su rješenja 1 i $\frac{1}{2}$. Kubnu jednadžbu zadovolja samo rješenje $\frac{1}{2}$ pa zaključujemo da je $z_1 = \frac{1}{2}$.

S obzirom da je $z_1 = \frac{1}{2}$ nultočka početnog polinoma, slijedi da je on djeljiv polinomom $\left(z - \frac{1}{2}\right)$:

$$(2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i) : \left(z - \tfrac{1}{2}\right) = 2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i.$$

Sada je potrebno naći nultočke polinoma $2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i$, što lako dobijemo koristeći formulu za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$\begin{aligned} z_{2,3} &= \frac{4 + 6i \pm \sqrt{16 + 48i - 36 - 48i + 16}}{4} \\ &= \frac{4 + 6i \pm \sqrt{-4}}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad z_2 = 1 + 2i \qquad \text{i} \qquad z_3 = 1 + i.$$

Zbog činjenice da svaki polinom $f(x)$ stupnja $n \geq 1$ ima točno n kompleksnih nultočaka, sigurni smo da smo pronašli sve nultočke. No, učenici nisu upoznati s Osnovnim teoremom algebre, kao ni s njegovom posljedicom koju smo naveli. Zapravo, nije ni potrebno učenike opterećivati s raznim teoremima koji ih mogu zbuniti. Nekada je mnogo lakše određene teoreme provući kroz primjere i učenicima reći da vrijede i općenito, bez detaljnije diskusije. Iz tog razloga je dovoljno učenike samo usmjeriti kako bi zaključili da polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost. Navedeno možemo postići kroz sljedeći nastavni listić.

Nultočke polinoma

1. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = -5x + 9$$
$$f_2(x) = 3x - 2$$

2. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$f_2(x) = 5x^2 - 2x + 6$$
$$f_3(x) = 5x^2 - 2x - 5$$

Posebno, za broj ___ kažemo da je dvostruka nultočka funkcije ___.

3. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = x^3$$
$$f_2(x) = x^3 - x^2$$
$$f_3(x) = x^3 - x$$

Posebno, za broj ___ kažemo da je trostruka nultočka funkcije ___ , a za broj ___ kažemo da je dvostruka nultočka funkcije ___.

4. Pokušajte izreći poopćenu tvrdnju.

Slika 17: Nastavni listić *Nultočke polinoma*

Nultočke polinoma

(rješenja)

1. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = -5x + 9$$

$$-5x + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{9}{5}$$

$$f_2(x) = 3x - 2$$

$$3x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Prikazane linearne funkcije imaju jednu nultočku.

2. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

$$f_2(x) = 5x^2 - 2x + 6$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{10} = \frac{1 \pm i\sqrt{29}}{5}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 2x - 5$$

$$5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5 \cdot 5}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{26}}{5}$$

Prikazane kvadratne funkcije imaju dvije nultočke.

Posebno, za broj 1 kažemo da je dvostruka nultočka funkcije $f_1(x)$.

Slika 18: Rješenje nastavnog listića *Nultočke polinoma*

Nultočke polinoma
(rješenja)

1. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = -5x + 9$$

$$-5x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{5}$$

$$f_2(x) = 3x - 2$$

$$3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Prikazane linearne funkcije imaju jednu nultočku.

2. Koliko nultočaka imaju funkcije:

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f_2(x) = 5x^2 - 2x + 6$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{10} = \frac{1 \pm i\sqrt{29}}{5}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 2x - 5$$

$$5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5 \cdot 5}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{26}}{5}$$

Prikazane kvadratne funkcije imaju dvije nultočke.

Posebno, za broj 1 kažemo da je dvostruka nultočka funkcije $f_1(x)$.

Slika 19: Rješenje nastavnog listića *Nultočke polinoma*

Literatura

[1] Dakić, B., Elezović N. (2013) *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola.* Zagreb: Element

[2] Dakić, B., Elezović N. (2013) *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola.* Zagreb: Element

[3] Dakić, B., Elezović N. (2013) *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazija i tehničkih škola.* Zagreb: Element

[4] Matić, I. et al. (2021) *Matematika 2, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[5] Matić, I. et al. (2021) *Matematika 2, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[6] Matić, I. et al. (2021) *Matematika 4, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[7] Matić, I. et al. (2021) *Matematika 4, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[8] Pavković, B., Veljan D. (1992) *Elementarna matematika 1*

[9] Pletikosić, A. et al. (2020) *Matematika 1, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[10] Pletikosić, A. et al. (2020) *Matematika 1, udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio.* Zagreb: Školska knjiga

[11] Šikić, Z. et al. (2020) *Matematika 7, udžbenik za sedmi razred osnovne škole, 2. svezak.* Zagreb: Progil Klett

[12] Šikić, Z. et al. (2020) *Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole, 1. svezak.* Zagreb: Progil Klett

[13] Zeitz, P. (2007) *The Art and Craft of Problem Solving*

[14] Purgar, I. (2018) *Polinomi.* Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu

[15] Bašić, M. (2005) Problemi s polinomima. *Hrčak,* vol. 3, no. 9. URL: https://hrcak.srce.hr/441

[16] Starčević, M. (2019) Parametrizacije skupa kvadratnih funkcija. *Hrčak,* vol. 20, no. 79. URL: https://hrcak.srce.hr/file/347633

[17] Guljaš, B. (2018) *Matematička analiza 1 i 2.* URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf

[18] Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", *Kvadratna jednadžba.* URL https://mnm.hr/online-predavanja (lipanj 2021.)

[19] Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", *Vièteove formule i simetrični polinomi.* URL: https://mnm.hr/online-predavanja (lipanj 2021.)

[20] Horvatek, A., *Natjecanja iz matematike u RH.* URL: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm (srpanj 2021.)

[21] *A Different Way to Solve Quadratic Equations.* URL: https://www.poshenloh.com/quadraticdetail/ (kolovoz 2021.)

[22] *Art of problem solvnig.* URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2017_AMC_12A_Problems/Problem_23 (kolovoz 2021.)

[23] *Narodne novine.* URL: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (svibanj 2021.)

Sažetak

Budući da se polinomi više ne obrađuju kao zasebna cjelina u nastavi matematike, cilj rada je analizirati gdje se kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje polinomi pojavljuju i poučavaju indirektnim putem. U tu svrhu se započelo s analizom udžbenika i razgovorom s nastavnicima iz različitih gimnazija.

Nakon toga smo se posvetili definiciji polinoma i njegovim osnovnim svojstvima. Zatim detaljno obradili polinom drugog i trećeg stupnja, kao i kvalitativno crtanje grafova polinoma, što pridonosi analitičkom razmišljanju u rješavanju problema koji su prikazani kroz rad. Za kraj diplomskog rada odabrani su zadaci s natjecanja te prezentirani zajedno s metodičkim napomenama, kako bi se mogli implementirati u nastavu kroz diskusije i aktivnosti.

Summary

Since polynomials are no longer treated as a separate unit in mathematics teaching, the aim of this thesis is to analyze where polynomials appear and are indirectly taught through primary and secondary education. Therefore, the analysis of textbooks and conversations with teachers from different high schools began.

After that, we devoted ourselves to the definition of a polynomial and its basic properties. Then we processed in detail the polynomials of the second and third degree, as well as the qualitative drawing of polynomial graphs, which contributes to analytical thinking in solving the problems presented through the thesis. At the end of the thesis, the tasks from the competition were selected and presented together with methodological notes, so that they could be implemented in teaching through discussions and activities.

Životopis

Rođena sam 30. travnja 1995. godine u Splitu. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Posušju 2009./2010. godine, gdje upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Godine 2014./2015. upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, točnije Preddiplomski sveučilišni studij Matematika. Akademske godine 2017./2018. mijenjam smjer u nastavnički te iduće godine stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Nakon toga, odnosno 2019./2020., upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički. Tijekom studiranja bila sam dvije godine članica Studentskog zbora Sveučilišta u Zagrebu, a nakon toga i članica Senata Sveučilišta u Zagrebu.