

# Numeričke metode za rješavanje običnih diferencijalnih jednažbi

---

Grbeš, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:597808>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ana Grbeš

**NUMERIČKE METODE ZA**  
**RJEŠAVANJE OBIČNIH**  
**DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Doc. dr. sc. Tina Bosner

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Jednokoračne metode</b>	<b>3</b>
1.1 Eulerova metoda . . . . .	9
1.2 Runge-Kutta metode . . . . .	15
<b>2 Višekoračne metode</b>	<b>26</b>
2.1 Adams-Bashforth i Adams-Moulton metode . . . . .	26
2.2 Opća Adams-Bashforth metoda . . . . .	29
2.3 Opća Adams-Moulton metoda . . . . .	34
2.4 BDF metode . . . . .	35
2.5 Stabilnost i konvergencija višekoračnih metoda . . . . .	37
2.6 Prediktor-korektor metode . . . . .	43
2.7 Krute jednačbe . . . . .	45
<b>Bibliografija</b>	<b>47</b>

# Uvod

Nemaju sve obične diferencijalne jednačbe eksplicitno rješenje. Daleko brojnije su one jednačbe za koje ne možemo napisati egzaktno rješenje. Pogotovo se to odnosi na sustave diferencijalnih jednačbi gdje je teže dobiti eksplicitno zapisano rješenje. Tada takve jednačbe rješavamo numerički. Postoji više metoda za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi i u ovom radu govorit ćemo o njima. Metode za rješavanje dijele se na jednokoračne i višekoračne metode. Kod jednokoračnih metoda za računanje aproksimacija koristi se samo aproksimacija iz prethodnog koraka, dok kod višekoračnih koristimo više prethodnih aproksimacija. Od jednokoračnih metoda obradit ćemo Eulerovu, poboljšanu Eulerovu, midpoint, te Runge-Kutta metode različitih stadija. Od višekoračnih govorit ćemo o Adamsovima metodama, BDF metodama, prediktor-korektor metodi te ćemo dati uvid o tome što su krute jednačbe. Na konkretnim primjerima usporedit ćemo točnost navedenih metoda i vidjet ćemo koja metoda daje najmanju pogrešku. Govorit ćemo o stabilnosti, konvergenciji i redu određenih metoda.

Promatrat ćemo inicijalni problem za sustav diferencijalnih jednačbi, te ćemo početku definirati i navesti teorem koji nam osigurava postojanje jedinstvenog rješenja.

Cauchyjev problem za sustav diferencijalnih jednačbi sastoji se od pronalaženja rješenja za sustav

$$u' = f(t, u(t)), \quad (1)$$

$$u(t_0) = u_0. \quad (2)$$

pri tome je  $f : (s, v) \rightarrow f(s, v)$ ,  $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval,  $t_0 \in I$ ,  $d \geq 1$  i  $u_0 \in \mathbb{R}^d$ .

Ako integriramo jednačbu (1) i uvrstimo početni uvjet (2) dobivamo:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds. \quad (3)$$

Pod određenim uvjetima nad  $f$  možemo riješiti jednačbu (3). Pokazalo se da je Lipschitzovo svojstvo ključni element da problem (1) ima jedinstveno rješenje.

**Definicija 0.0.1.** [4] Za funkciju  $f : I \times D \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^d$  kažemo da je Lipschitzova u varijabli  $x$  ako postoji konstanta  $L_f \in (0, \infty)$  takva da za sve  $(t, v), (t, w) \in I \times D$  vrijedi

$$\|f(t, w) - f(t, v)\| \leq L_f \|w - v\|.$$

Sada ćemo navesti teorem koji daje dovoljne uvjete za jedinstveno rješenje inicijalnog problema. Dokaz teorema može se pronaći u [1].

**Teorem 0.0.2.** *Pretpostavimo da je  $[t_1, t_2]$  zatvoren i omeđen interval i da je  $f$  neprekidna funkcija,  $f : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  koja zadovoljava sljedeće: postoji konstanta  $L$  takva da vrijedi  $\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|, \forall t \in [t_1, t_2], \forall v, w \in \mathbb{R}^d$ . Tada, za  $\forall t_0 \in [t_1, t_2]$  i  $u_0 \in \mathbb{R}^d$  postoji jedinstvena neprekidna diferencijabilna funkcija  $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  koja zadovoljava jednadžbu*

$$\dot{u} = f(t, u(t)), \tag{4}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{5}$$

Uvjeti na funkciju  $f$  navedeni u prethodnom teoremu nazivaju se Cauchy-Lipschitzovi i osiguravaju nam postojanje jedinstvenog rješenja što ćemo koristiti dalje u radu.

# Poglavlje 1

## Jednokoračne metode

U prvom poglavlju govorit ćemo o jednokoračnim metodama. Dat ćemo uvjete konvergencije, stabilnosti i reda metode. Računat ćemo greške, te na primjerima pokazati točnost metoda. Obradit ćemo Eulerove i Runga-Kutta metode, dok ćemo Eulerovu metodu unazad samo spomenuti. Funkcija  $f$  će nam biti neprekidna i Lipschitz-ova tako da osiguramo da problem ima jedinstveno rješenje, i promatrat ćemo interval  $[t_0, T]$  na kojem to rješenje postoji. Aproksimaciju rješenja označavamo s  $U_i$  i računamo je samo u čvorovima. Derivaciju funkcije u točki računamo:

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

Ideja kod nekih metoda, primjerice Eulerove metode je da se derivacija na neki način aproksimira.

Diferencijalnu jednadžbu (1), (2) na intervalu  $[t_0, T]$  možemo rješavati tako da taj interval podijelimo na ekvidistantne vremenske intervale. Promatramo sljedeće:

$$U_{k+1} = U_k + hF(t_k, U_k, h). \quad (1.1)$$

Ovu metodu nazivamo **jednokoračna metoda** jer se za računanje aproksimacije u nekom trenutku koristi samo aproksimacija iz prethodnog koraka. Vremenski korak  $h$  je strogo pozitivan i pripada intervalu  $[0, h^*]$ . Vrijeme  $t_k$  za dani  $t_0$  je definirano s

$$t_{k+1} = t_k + h. \quad (1.2)$$

Za što manji  $h$  imat ćemo više točaka diskretizacije. Definirat ćemo  $J(h)$  kao maksimalni indeks diskretizacije. To je najveći broj  $k$  takav da je  $k \leq (T - t_0)/h$ . Vektor  $U_k$  iz  $\mathbb{R}^d$  je aproksimacija funkcije  $u(t_k)$  ako je  $u$  rješenje jednadžbe (1), s time da početni uvjet  $U_0$  metode aproksimira početni uvjet  $u_0$  sustava diferencijalnih jednadžbi. Funkcija  $F$  je definirana na  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times [0, h^*]$  i naziva se **funkcija prirasta**.

**Definicija 1.0.1.** *Aproksimacija jednadžbe (1) i (2) definirane jednokoračnom metodom (1.1) konvergira ako za bilo koji početni  $u_0$  vrijedi*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ U_0 \rightarrow u_0}} \max_{0 \leq k \leq J(h)} \|u(t_k) - U_k\| = 0. \quad (1.3)$$

**Definicija 1.0.2.** *Metoda 1.1 je stabilna ako postoji konstanta  $M$  takva da za sve  $U_0 \in \mathbb{R}^d$ , za sve  $V_0 \in \mathbb{R}^d$ , za sve  $h \leq h^*$ , i za svaki izbor vektora  $\epsilon_j$ , vektori  $U_j$  i  $V_j$  definirani relacijama*

$$\begin{aligned} U_{j+1} &= U_j + hF(t_j, U_j, h), \\ V_{j+1} &= V_j + hF(t_j, V_j, h) + \epsilon_j \end{aligned}$$

zadovoljavaju ocjenu

$$\|U_j - V_j\| \leq M(\|U_0 - V_0\| + \sum_{k=0}^{j-1} \|\epsilon_k\|), \quad \forall j \leq J(h). \quad (1.4)$$

**Definicija 1.0.3.** *Za jednokoračnu metodu 1.1 kažemo da je konzistentna sa sustavom diferencijalnih jednadžbi iz (1) ako za svako rješenje tog sustava imamo*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq j \leq J(h)-1} \|u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h)\| = 0. \quad (1.5)$$

Vektor  $u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h)$  reprezentira grešku koju napravimo zamjenom  $u(t_{j+1})$  nekom veličinom dobivenom jednokoračnom metodom. To nazivamo **lokalnom greškom diskretizacije**.

**Definicija 1.0.4.** *Lokalna greška diskretizacije jednokoračne metode definira se kao:*

$$\tau_j(h) := u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h).$$

**Teorem 1.0.5.** *Neka je  $f$  funkcija koja zadovoljava Cauchy-Lipschitz-ove uvjete i neka je  $F$  neprekidna funkcija od  $t \in [t_0, T]$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$ , i  $h \in [0, h^*]$ , koja definira metodu (1). Ako je jednokoračna metoda konzistentna sa sustavom (1) i stabilna, tada je i konvergentna.*

*Dokaz.* Neka je  $V_j = u(t_j)$ . Tada,

$$V_{j+1} - V_j - hF(t_j, V_j, h) = \tau_j$$



je lokalna greška diskretizacije. Ako primijenimo nejednakost 1.4 jer je metoda stabilna imamo

$$\|U_j - V_j\| \leq M \left( \|U_0 - u(t_0)\| + \sum_{k=0}^{j-1} \|\tau_k\| \right).$$

Zbog konzistentnosti  $\sum_{k=0}^{j-1} \|\tau_k\|$  teži nuli kada  $h \rightarrow 0$ , pa vidimo da će i  $\|U_j - u(t_j)\|$  težiti nuli obzirom na  $j$  kada  $h \rightarrow 0$  i  $U_0 \rightarrow V_0$ .  $\square$

Zanima nas koliko dobro rješenje diferencijalne jednadžbe (1), (2) zadovoljava rekurzivnu formulu (1.1) koja definira jednokoračnu metodu.

Sada ćemo izreći uvjete koji će osigurati stabilnost i konzistenciju. Ali prije toga izreći ćemo još jednu definiciju i lemu.

**Definicija 1.0.6.** Neka je  $K \subset \mathbb{R}^n$  i  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^k$  neprekidna funkcija. **Modul neprekidnosti** definiramo kao

$$\omega(h, f) := \sup_{\substack{x, y \in K \\ \|x - y\| \leq h}} \|f(x) - f(y)\|.$$

**Lema 1.0.7.** Svaka funkcija  $f$  koja je neprekidna na kompaktnom skupu  $K$  ima modul neprekidnosti koji je neprekidan u nuli.

**Teorem 1.0.8** (Nužan i dovoljan uvjet za konzistenciju). Neka je  $F$  neprekidna funkcija za  $t \in [t_0, T]$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$ , i  $h \in [0, h^*]$  definirana jednokoračnom metodom (1.1). Nužan i dovoljan uvjet da je metoda konzistentna sa jednadžbom (1) je

$$F(t, u, 0) = f(t, u), \forall t \in [t_0, T], \forall u \in \mathbb{R}^d. \quad (1.6)$$

*Dokaz.* Lokalna greška  $\tau_j$  je dana s

$$\tau_j = u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h).$$

Zapišimo je u obliku:

$$\tau_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [f(s, u(s)) - f(t_j, u(t_j))] ds + h[f(t_j, u(t_j)) - F(t_j, u(t_j), 0)] + h[F(t_j, u(t_j), 0) - F(t_j, u(t_j), h)]. \quad (1.7)$$

Označimo

$$\alpha_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [f(s, u(s)) - f(t_j, u(t_j))] ds,$$

$$\beta_j = h[f(t_j, u(t_j)) - F(t_j, u(t_j), 0)],$$

$$\gamma_j = h[F(t_j, u(t_j), 0) - F(t_j, u(t_j), h)].$$

Tada (1.7) glasi:

$$\tau_j = \alpha_j + \beta_j + \gamma_j. \quad (1.8)$$

Neka je  $\omega$  modul neprekidnosti funkcije  $t \rightarrow f(t, u(t))$ , te neka je  $\omega_1$  modul neprekidnosti funkcije  $(t, h) \rightarrow F(t, u(t), h)$ . Možemo ocijeniti  $\alpha_j$  i  $\gamma_j$  pomoću  $\omega$  i  $\omega_1$ .

Dobivamo,

$$\|\alpha_j\| \leq h\omega(h)$$

i

$$\|\gamma_j\| \leq h\omega_1(h).$$

Iz (1.8) imamo:  $\beta_j = \tau_j - \alpha_j - \gamma_j$ , pa slijedi

$$\|\beta_j\| \leq \|\tau_j\| + \|\alpha_j\| + \|\gamma_j\| \leq \|\tau_j\| + h\omega(h) + h\omega_1(h).$$

Pretpostavimo da je metoda konzistentna. Tada, je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{J(h)-1} \|\tau_j\| = 0,$$

pa iz

$$\sum_{0 \leq j \leq J(h)-1} \|\beta_j\| \leq hJ(h)(\omega(h) + \omega_1(h)) + \sum_{j \leq J(h)-1} \|\tau_j\|,$$

i činjenice da module neprekidnosti gledamo na kompaktu  $[0, h^*]$ , pa je  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h, f) = 0$  i

$\lim_{h \rightarrow 0} \omega_1(h, F) = 0$ , slijedi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{J(h)-1} \|\beta_j\| = 0.$$

S druge strane,

$$\sum_{j=0}^{J(h)-1} \|\beta_j\| = \sum_{j \leq J(h)-1} h \|f(t_j, u(t_j)) - F(t_j, u(t_j), 0)\| \quad (1.9)$$

je Darboux-ova suma funkcije  $t \rightarrow \|f(t_j, u(t_j)) - F(t_j, u(t_j), 0)\|$  na intervalu  $[t_0, t_0 + hJ(h)]$ . Zbog neprekidnosti funkcije, suma u (1.9) konvergira prema

$$\int_{t_0}^T \|f(s, u(s)) - F(s, u(s), 0)\| ds.$$

Slijedi da

$$\int_{t_0}^T \|f(s, u(s)) - F(s, u(s), 0)\| ds = 0.$$

Integral nenegativne neprekidne funkcije je nenegativan, a ako je jednak nuli tada i podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, tj.

$$f(t, u(t)) = F(t, u(t), 0),$$

za svako rješenje  $u$  jednadžbe (1).

Budući da postoji rješenje  $u$  jednadžbe (1) za koji će rješenje inicijalnog problema s početnim uvjetom (2) prolaziti kroz bilo koju točku  $(t^*, u^*) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ , dobivamo da je

$$F(t^*, u^*, 0) = f(t^*, u^*), \forall (t^*, u^*) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d.$$

Time smo pokazali da konzistentnost povlači uvjet teorema.

Obrat: ako vrijedi uvjet teorema, tada je nužno da  $\beta_j = 0$ , a iz (1.8) imamo:

$$\|\tau_j\| \leq h(\omega(h) + \omega_1(h)).$$

Iz toga slijedi

$$\sum_{j \leq J(h)-1} \|\tau_j\| \leq (T - t_0)(\omega(h) + \omega_1(h)).$$

Lijeva strana zbog modula neprekidnosti teži k nuli kada  $h \rightarrow 0$ , pa po definiciji dobivamo konzistenciju.  $\square$

Sada ćemo izreći teorem o dovoljnim uvjetima za stabilnost. Prije toga dokazat ćemo Gronwallovu lemu koja će nam biti potrebna za dokaz teorema.

**Lema 1.0.9** (Diskretna Gronwallova lema). *Neka su  $\Lambda$  i  $h$  neka dva dana pozitivna broja, te neka su  $(a_j)_{j \geq 0}$  i  $(b_j)_{j \geq 0}$  dva niza nenegativnih brojeva koji zadovoljavaju nejednakost:*

$$a_{j+1} \leq (1 + \Lambda h)a_j + b_j. \quad (1.10)$$

Tada,

$$a_j \leq e^{\Lambda j h} a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} b_k e^{\Lambda(j-k-1)h}. \quad (1.11)$$

*Dokaz.* Primjetimo da vrijedi:

$$1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (1.12)$$

Tada nejednakost (1.10) povlači

$$a_{j+1} \leq e^{\Lambda h} a_j + b_j. \quad (1.13)$$

Uvedimo supstituciju:

$$a_j = \alpha_j e^{\Lambda j h}.$$

Uvrštavanjem u (1.10) dobivamo:

$$\alpha_{j+1} e^{\Lambda(j+1)h} \leq \alpha_j e^{\Lambda j h} e^{\Lambda h} + b_j.$$

Pomnožimo li gornju nejednakost s  $-e^{\Lambda(j+1)h}$  dobivamo da  $\alpha_j$  zadovoljava nejednakost

$$\alpha_{j+1} \leq \alpha_j + b_j - e^{\Lambda(j+1)h},$$

što nam daje da je

$$\alpha_j \leq \alpha_0 + \sum_{k=0}^{j-1} b_k e^{-\Lambda(k+1)h}.$$

Ako se vratimo nazad u  $a_j$  dobivamo nejednakost (1.11). □

**Teorem 1.0.10** (Dovoljan uvjet za stabilnost). *Da bi metoda bila stabilna, dovoljno je da postoji konstanta  $\Lambda$  takva da vrijedi:*

$$\|F(t, u, h) - F(t, v, h)\| \leq \Lambda \|u - v\|, \forall t \in [t_0, T], \forall u, v \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, h^*]. \quad (1.14)$$

Nadalje, konstanta  $M$  iz (1.4) može se uzeti da bude jednaka  $e^{\Lambda(T-t_0)}$ .

*Dokaz.* Iz definicije stabilnosti (1.4) oduzimanjem jednakosti i primjenom nejednakosti trokuta dobivamo:

$$\|V_{j+1} - U_{j+1}\| \leq \|V_j - U_j\| + h \|F(t_j, V_j, h) - F(t_j, U_j, h)\| + \|\epsilon_j\|.$$

Nadalje, iz uvjeta teorema (1.14) imamo nejednakost

$$\|V_{j+1} - U_{j+1}\| \leq (1 + \Lambda h) \|V_j - U_j\| + \|\epsilon_j\|.$$

Kada na to primjenimo Gronwallovu lemu dobivamo:

$$\|U_j - V_j\| \leq e^{\Lambda j h} \|U_0 - V_0\| + \sum_{k=0}^{j-1} e^{\Lambda(j-k-1)h} \|\epsilon_k\|.$$

Jer je  $j h \leq h J(h) \leq T - t_0$  iz definicije stabilnosti dobivamo nejednakost. □

$M$  iz prethodog teorema smo definirali kao eksponencijalni izraz. Znamo da eksponencijalna funkcija jako brzo raste, stoga  $M$  može biti ogroman. Primjerice za male  $\Lambda = 5$  i  $T - t_0 = 10$  dobivamo  $M \sim 5.2 \cdot 10^{21}$ . Da bi bila upotrebljiva metoda treba i dovoljno brzo konvergirati te ćemo stoga definirati pojam reda jednokoračne metode.

**Definicija 1.0.11.** *Neka je  $p$  cijeli broj veći ili jednak jedan. Jednokoračna metoda je **reda  $p$**  ako za svako rješenje u jednadžbe (1) postoji pozitivna konstanta  $C$  tako da*

$$\sum_{0 \leq j \leq J(h)-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j) - hF(t_j, u(t_j), h)| \leq Ch^p. \quad (1.15)$$

Sljedeći teorem nam daje bolju ocjenu konvergencije.

**Teorem 1.0.12.** *Neka je  $f$  funkcija koja zadovoljava Teorem 0.0.2. i neka je  $F$  neprekidna funkcija za  $t \in [t_0, T]$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$ , i  $h \in [0, h^*]$ , koja definira metodu (1). Ako je jednokoračna metoda reda  $p$  i stabilna i ako je  $|u_0 - U_0| \leq C'h^p$ , tada je*

$$\max_{k \leq J(h)} |u(t_k) - U_k| \leq (C + C')h^p.$$

Ovaj teorem je direktna posljedica Teorema 1.0.5 o konvergenciji jednokoračne metode.

U sljedećem teoremu ćemo izreći nužan i dovoljan uvjet da jednokoračna metoda bude reda  $p$ .

**Teorem 1.0.13.** *Neka je  $f$  klase  $C^p$ , i neka je  $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times [0, h^*]$  neprekidna i  $p$  puta diferencijabilna s obzirom na  $h$ , čije su  $p$  derivacije s obzirom na  $h$  neprekidne funkcije po svim varijablama. Tada je jednokoračna metoda (1.1) reda  $p$  obzirom na (1) ako i samo ako  $\forall k, 0 \leq k \leq p - 1$  vrijedi:*

$$\frac{\partial^k F}{\partial h^k}(t, u, 0) = \frac{f_k(t, u)}{k + 1}, \forall t \in [t_0, T], \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Dokaz teorema može se pronaći u [1].

## 1.1 Eulerova metoda

Eulerova metoda je najjednostavnija metoda za rješavanje inicijalnog problema (1, 2) za običnu diferencijalnu jednadžbu. Dobiva se tako da se derivacija funkcije zamijeni podijeljenom razlikom unaprijed. Njen oblik je:

$$U_{n+1} = U_n + hf(t_n, U_n) \quad (1.16)$$

Govorimo o eksplicitnoj metodi jer računanje  $U_{n+1}$  ne ovisi o rješenju nelinearnog sustava, već samo o aproksimaciji od  $f$ . Funkcija prirasta  $F$  definirana je s  $F(t, u, h) = f(t, u)$ .

Jasno je da je Eulerova metoda stabilna i konzistentna po *Teoremu 1.0.8.* i *Teoremu 1.0.10.*, a time i konvergentna.

Odredimo još red Eulerove metode. Za  $k = 0$  jednakost iz prethodnog teorema trivijalno vrijedi ako je  $f$  klase  $C^1$ . Za  $k = 1$  imamo:

$$\frac{f_1(t, u)}{2} - \frac{\partial F}{\partial h}(t, u, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + D_2 f(t, u) f(t, u) \right).$$

$F$  ne ovisi o  $h$  pa je  $\frac{\partial F}{\partial h}(t, u, 0) = 0$ , a desna strana općenito ne mora biti jednaka nuli. Dakle, jednakost za  $k = 1$  ne vrijedi, pa zaključujemo da je Eulerova metoda reda 1.

Primjenimo Eulerovu metodu na diferencijalnu jednadžbu

$$u' = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uzmimo da je  $t_0 = 0$ ,  $u_0 = 1$  i  $h = \frac{T}{k}$ , dobivamo korak metode:

$$U_{j+1} = U_j + \lambda h U_j = (1 + \lambda h) U_j,$$

što nam daje:

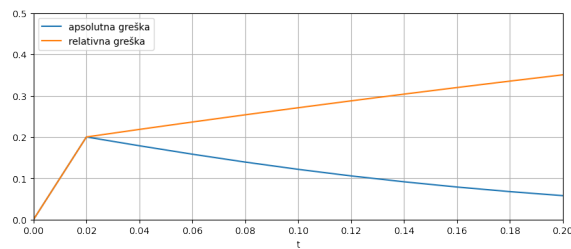
$$U_j = \left( 1 + \frac{\lambda T}{k} \right)^j,$$

a zbog konvergencije Eulerove metode dobivamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\lambda T}{k} \right)^k = e^{\lambda T}.$$

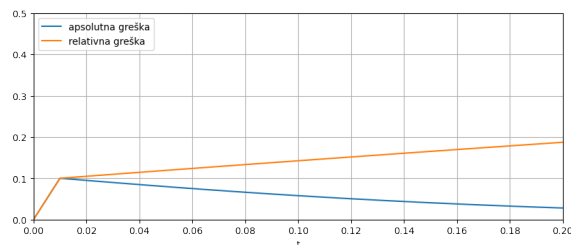
Ako uzmemo  $\lambda = -10$ , egzaktno rješenje inicijalnog problema  $u(t) = e^{-10t}$  jako brzo trne u nulu. Posljedica toga je da je rješenje ograničeno za  $t \geq 0$ , pa isto želimo i za numeričko rješenje, tj. aproksimaciju  $U_j = (1 - 10h)^j$ . Za to je dovoljno da je  $|1 - 10h| \leq 1$ , iz čega slijedi da je  $h \leq 0.2$ . Ovaj uvjet može biti premali za velike intervale jer znamo da rješenje jako brzo trne u nulu. Ovakvu diferencijalnu jednadžbu nazivamo **krutom**.

**Primjer 1.1.1.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = -10u$ ,  $u(0) = 1$  Eulerovom metodom uz različit izbor koraka  $h$  na intervalu  $[0, 1]$ . Egzaktno rješenje inicijalnog problema je  $u(t) = e^{-10t}$ . Primjećujemo da što je  $h$  veći da su odstupanja od egzaktnog rješenja veća. Crtat ćemo grafove apsolutnih i relativnih grešaka.



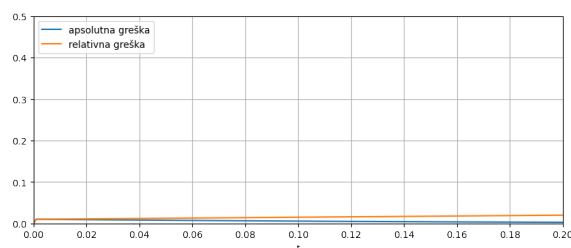
Slika 1.1: Greške pri rješavanju jednadžbe  $u'(t) = -10u$  Eulerovom metodom za korak  $h = 0.02$ .

*Za manji izbor koraka  $h$  dobivamo manje odstupanje.*



Slika 1.2: Greške pri rješavanju jednadžbe  $u'(t) = -10u$  Eulerovom metodom za korak  $h = 0.01$ .

*Dok, za jako mali izbor koraka  $h = 0.001$  egzaktno rješenje i aproksimacije se gotovo podudaraju.*



Slika 1.3: Greške pri rješavanju  $u'(t) = -10u$  Eulerovom metodom za korak  $h = 0.001$ .

Grafovi su dobiveni korištenjem programskog jezika *Python*. Greške su zaokružene na deset decimala i dalje u primjerima ćemo ih zaokruživati na deset decimalnih mjesta.

**Lema 1.1.2.** Za svaki  $z \in \mathbb{R}$  takav da je  $z + 1 \geq 0$  vrijedi:

$$0 \leq (1 + z)^n \leq e^{nz}, \quad n \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

**Teorem 1.1.3.** Neka je  $U_i$  aproksimativno rješenje u  $t_i$  dobiveno Eulerovom metodom i u tačno rješenje inicijalnog problema (1, 2), gdje je  $f$  Lipschitzova, tada vrijedi:

$$|U_j - u(t_j)| \leq e^{L|t_j - t_0|} \left( |e_0| + \frac{\tau}{L} \right),$$

pri čemu je  $\tau := \max_j |\tau_j|$ , gdje su  $\tau_j$  lokalne greške diskretizacije.

*Dokaz.* Definirajmo pravu grešku s  $e_j := U_j - u_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Oduzimanjem i uvrštavanjem  $e_j$  dobivamo:

$$\begin{aligned} U_{j+1} - u_{j+1} &= U_j - u_j + h(f(t_j, U_j) - f(t_j, u_j)) - h\tau_{j+1} \\ e_{j+1} &= e_j + h(f(t_j, U_j) - f(t_j, u_j)) - h\tau_{j+1}. \end{aligned}$$

Zbog Lipschitzovosti funkcije  $f$  imamo:

$$|e_{j+1}| \leq |e_j| + h \cdot L|e_j| + h|\tau_{j+1}|$$

Rekurzivno dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} |e_{j+1}| &\leq (1 + hL)|e_j| + h\tau \\ &\leq (1 + hL)(1 + hL)|e_{j-1}| + (1 + hL)h\tau + h\tau \\ &\leq (1 + hL)^2(1 + hL)|e_{j-2}| + (1 + hL)^2h\tau + (1 + (1 + hL))h\tau \\ &\vdots \\ &\leq (1 + hL)^{j+1}|e_0| + [(1 + hL)^{j+1} - 1] \frac{\tau}{L}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Iz Leme 1.1.2 dobivamo:

$$(1 + hL)^{j+1} \leq e^{(j+1)hL} = e^{L[u_0 + (j+1)h - t_0]} = e^{L(t_{j+1} - t_0)},$$

pri čemu smo iskoristili da je  $t_{j+1} = u_0 + (j + 1)h$ . Jer  $h$  može biti i negativan pisat ćemo svugdje  $|h|$ :

$$(1 + |h|L)^{j+1} \leq e^{(j+1)|h|L} = e^{L|u_0 + (j+1)h - t_0|} = e^{L|t_{j+1} - t_0|}.$$

Primjenimo prethodno na zadnju nejednakost u 1.17:

$$\begin{aligned} |e_{j+1}| &\leq e^{L(t_{j+1} - t_0)} |e_0| + \left[ e^{L(t_{j+1} - t_0)} - 1 \right] \frac{\tau}{L} \\ |e_{j+1}| &\leq e^{L(t_{j+1} - t_0)} \left( |e_0| + \frac{\tau}{L} \right). \end{aligned}$$

□



Sve što smo do sada rekli o Eulerovoj metodi odnosi se na običnu (Forward) Eulerovu metodu u kojoj smo aproksimacije derivacije računali koristeći podijeljenu razliku unaprijed. Postoji i Backward Eulerova metoda koja se bazira na podijeljenim razlikama unatrag, a više o njoj može se pronaći u [1].

**Primjer 1.1.4.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = 2ut$ ,  $u(1) = 1$  na intervalu  $[1, 2]$  koristeći Eulerovu metodu unaprijed za različit izbor koraka  $h$ .<sup>1</sup>

U tablici (1.1) prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.1$ , u tablici (1.2) prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.05$  i u tablici (1.3) prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.001$ . Primjećujemo da što je  $h$  manji, odstupanja od egzaktnog rješenja su sve manja. Dakako, vrijedi i obrnuta tvrdnja. Za rješavanje i prikaz rezultata korišten je programski jezik *Python*.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.10	1.20000	1.23368	$3.37 \times 10^{-2}$	$2.73 \times 10^{-2}$
1.20	1.46400	1.55271	$8.87 \times 10^{-2}$	$5.71 \times 10^{-2}$
1.30	1.81536	1.99372	$1.78 \times 10^{-1}$	$8.95 \times 10^{-2}$
1.40	2.28735	2.61170	$3.24 \times 10^{-1}$	$1.24 \times 10^{-1}$
1.50	2.92781	3.49034	$5.63 \times 10^{-1}$	$1.61 \times 10^{-1}$
1.60	3.80616	4.75882	$9.53 \times 10^{-1}$	$2.00 \times 10^{-1}$
1.70	5.02413	6.61937	1.60	$2.41 \times 10^{-1}$
1.80	6.73233	9.39333	2.66	$2.83 \times 10^{-1}$
1.90	9.15597	13.59905	4.44	$3.27 \times 10^{-1}$

Tablica 1.1: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  Eulerovom metodom.

<sup>1</sup>Tekst zadatka je preuzet iz [8].

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.05	1.10000	1.10794	$7.94 \times 10^{-3}$	$7.16 \times 10^{-3}$
1.10	1.21550	1.23368	$1.82 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-2}$
1.15	1.34920	1.38057	$3.14 \times 10^{-2}$	$2.27 \times 10^{-2}$
1.20	1.50436	1.55271	$4.83 \times 10^{-2}$	$3.11 \times 10^{-2}$
1.25	1.68489	1.75505	$7.02 \times 10^{-2}$	$4.00 \times 10^{-2}$
1.30	1.89550	1.99372	$9.82 \times 10^{-2}$	$4.93 \times 10^{-2}$
1.35	2.14191	2.27618	$1.34 \times 10^{-1}$	$5.90 \times 10^{-2}$
1.40	2.43107	2.61170	$1.81 \times 10^{-1}$	$6.92 \times 10^{-2}$
1.45	2.77142	3.01169	$2.40 \times 10^{-1}$	$7.98 \times 10^{-2}$

Tablica 1.2: Rješavanje diferencijalne jednačbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.05$  Eulerovom metodom.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.000	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.001	1.00200	1.00200	$3.00 \times 10^{-6}$	$3.00 \times 10^{-6}$
1.002	1.00401	1.00401	$6.02 \times 10^{-6}$	$6.00 \times 10^{-6}$
1.003	1.00602	1.00603	$9.06 \times 10^{-6}$	$9.00 \times 10^{-6}$
1.004	1.00804	1.00805	$1.21 \times 10^{-5}$	$1.20 \times 10^{-5}$
1.005	1.01006	1.01008	$1.52 \times 10^{-5}$	$1.50 \times 10^{-5}$
1.006	1.01209	1.01211	$1.83 \times 10^{-5}$	$1.80 \times 10^{-5}$
1.007	1.01413	1.01415	$2.14 \times 10^{-5}$	$2.11 \times 10^{-5}$
1.008	1.01617	1.01619	$2.45 \times 10^{-5}$	$2.41 \times 10^{-5}$
1.009	1.01822	1.01825	$2.76 \times 10^{-5}$	$2.71 \times 10^{-5}$

Tablica 1.3: Rješavanje diferencijalne jednačbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.001$  Eulerovom metodom.

## 1.2 Runge-Kutta metode

Željeli bismo poboljšati Eulerovu metodu, pa krenimo od osnovne relacije

$$U_{k+1} = U_k + hf(t_k, U_k).$$

Primjerice, umjesto aproksimacije derivacijom na cijelom podintervalu  $[t_k, t_{k+1}]$  s aproksimacijom derivacije u lijevom rubu intervala, kao kod Eulerove metode, možemo to napraviti s aproksimacijom derivacije u sredini intervala. Takvom aproksimacijom dobivamo novu metodu koja se naziva **modificirana Eulerova metoda**.

### Modificirana Eulerova metoda(Midpoint)

$$\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ m_1 &= f(t_k, U_k) \\ m_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, U_k + \frac{h}{2}m_1\right) \\ U_{k+1} &= U_k + hm_2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Funkcija prirasta jednaka je:

$$F(t_k, U_k, h) = m_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, U_k + \frac{h}{2}f(t_k, U_k)\right).$$

**Primjer 1.2.1.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = 2ut$ ,  $u(1) = 1$  na intervalu  $[1, 2]$  koristeći modificiranu Eulerovu metodu za različit izbor koraka  $h$ .

U tablici 1.4 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.1$ , u tablici 1.5 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.05$ .

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.10	1.23100	1.23368	$2.68 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$
1.20	1.54527	1.55271	$7.43 \times 10^{-3}$	$4.79 \times 10^{-3}$
1.30	1.97795	1.99372	$1.58 \times 10^{-2}$	$7.91 \times 10^{-3}$
1.40	2.58142	2.61170	$3.03 \times 10^{-2}$	$1.16 \times 10^{-2}$
1.50	3.43484	3.49034	$5.55 \times 10^{-2}$	$1.59 \times 10^{-2}$
1.60	4.65936	4.75882	$9.95 \times 10^{-2}$	$2.09 \times 10^{-2}$
1.70	6.44297	6.61937	$1.76 \times 10^{-1}$	$2.66 \times 10^{-2}$
1.80	9.08136	9.39333	$3.12 \times 10^{-1}$	$3.32 \times 10^{-2}$
1.90	13.04629	13.59905	$5.53 \times 10^{-1}$	$4.06 \times 10^{-2}$

Tablica 1.4: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  modificiranom Eulerovom metodom.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.05	1.10763	1.10794	$3.12 \times 10^{-4}$	$2.82 \times 10^{-4}$
1.10	1.23295	1.23368	$7.32 \times 10^{-4}$	$5.94 \times 10^{-4}$
1.15	1.37928	1.38057	$1.29 \times 10^{-3}$	$9.37 \times 10^{-4}$
1.20	1.55067	1.55271	$2.04 \times 10^{-3}$	$1.32 \times 10^{-3}$
1.25	1.75202	1.75505	$3.04 \times 10^{-3}$	$1.73 \times 10^{-3}$
1.30	1.98936	1.99372	$4.35 \times 10^{-3}$	$2.18 \times 10^{-3}$
1.35	2.27009	2.27618	$6.10 \times 10^{-3}$	$2.68 \times 10^{-3}$
1.40	2.60329	2.61170	$8.40 \times 10^{-3}$	$3.22 \times 10^{-3}$
1.45	3.00023	3.01169	$1.15 \times 10^{-2}$	$3.80 \times 10^{-3}$

Tablica 1.5: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.05$  modificiranom Eulerovom metodom.

Iz tablica se jasno vidi da je rješenje bolje, tj. odstupanja od egzaktnog rješenja su manja za manji izbor  $h$ .

Druga mogućnost je da se derivacija na podintervalu aproksimira aproksimacijom derivacije aritmetičkom sredinom aproksimacija derivacija u desnom i lijevom rubu podinter-

vala:

$$U_{k+1} = U_k + h \frac{U'_k + U'_{k+1}}{2}.$$

Takvim načinom dobivamo **poboljšanu Eulerovu metodu**.

### Poboljšana Eulerova metoda

$$\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ m_1 &= f(t_k, U_k) \\ m_2 &= f(t_k + h, U_k + hm_1) \\ U_{k+1} &= U_k + h \frac{m_1 + m_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

U ovoj metodi funkcija prirasta jednaka je:

$$\begin{aligned} F(t_k, U_k, h) &= \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{f(t_k, U_k) + f(t_k + h, U_k + hm_1)}{2} \\ &= \frac{f(t_k, U_k) + f(t_k + h, U_k + hf(t_k, U_k))}{2}. \end{aligned}$$

**Primjer 1.2.2.** Odredimo lokalnu grešku diskretizacije  $\tau_i$  za poboljšanu Eulerovu metodu pri čemu je  $f$  klase  $C^3$ , a

$$\tau_i(h) := u_{i+1} - u_i - hF(t_i, u_i, h) = u_{i+1} - u_i - \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_i + h, u_i + hf(t_i, u_i))).$$

Primjenjujući Taylorov teorem srednje vrijednosti imamo:

$$u_{i+1} - u_i = u(t_{i+1}) - u(t_i) = u(t_i + h) - u(t_i) = u'(t_i)h + \frac{1}{2}u''(t_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(t_i)h^3 + O(h^4).$$

Diferenciranjem diferencijalne jednadžbe dobivamo:

$$u'' = f_t + f_u u' = f_t + f_u f$$

$$u''' = f_{tt} + 2f_{tu}f + f_{yy}f^2 + f^2 f + f_y f_t,$$

gdje je  $f_i = f(t_i, u(t_i))$ ,  $f_{i,t} = \frac{\partial}{\partial t} f(t, u)|_{t=t_i, u=u(t_i)}$ , i tako dalje.

Uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$u_{i+1} - u_i = hf_i + \frac{h^2}{2}(f_{i,t} + f_{i,u}f_i) + \frac{h^3}{6}(f_{i,tt} + 2f_{i,tu}f_i + f_{i,uu}f_i^2 + f_{i,u}^2 + f_{i,u}f_i) + O(h^4) \quad (1.20)$$

Funkcija prirasta jednaka je:

$$F(t_i, u_i, h) = \frac{1}{2} \left( f(t_i, u_i) + f(t_i + h, u_i + hf(t_i, u_i)) \right),$$

i nju rastavljamo u red koristeći Taylorov razvoj funkcije dviju varijabli

$$\begin{aligned} F(t_i, u_i, h) &= \frac{1}{2} \left( f_i + f_i + f_{i,t}h + f_{i,u}hf_i + \frac{1}{2}(f_{i,tt}h^2 + 2f_{i,tu}h^2f_i + f_{i,uu}h^2f_i^2) \right) + O(h^3) \\ &= f_i + \frac{h}{2}f_{i,t} + \frac{h}{2}f_{i,u}f_i + \frac{h^2}{4}f_{i,uu} + \frac{h^2}{2}f_{i,tu}f_i + \frac{h^2}{4}f_{i,uu}f_i^2 + O(h^3). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Konačno,  $\tau_i(h)$  dobivamo iz (1.20) i (1.21):

$$\begin{aligned} \tau_i(h) &= (1.20) - h \cdot (1.21) \\ &= hf_i + \frac{h^2}{2}(f_{i,t} + f_{i,u}f_i) + \frac{h^3}{6}(f_{i,tt} + 2f_{i,tu}f_i + f_{i,uu}f_i^2 + f_{i,u}^2 + f_{i,u}f_{i,t}) \\ &\quad - hf_i + \frac{h^2}{2}f_{i,t} + \frac{h^2}{2}f_{i,u}f_i + \frac{h^3}{4}f_{i,uu} + \frac{h^3}{2}f_{i,tu}f_i + \frac{h^3}{4}f_{i,uu}f_i^2 + O(h^4) \\ &= h^3 \left( \frac{-1}{12}f_{i,tt} - \frac{1}{6}f_{i,tu}f_i - \frac{1}{12}f_{i,uu}f_i^2 + \frac{1}{6}f_{i,u}^2 + \frac{1}{6}f_{i,u}f_{i,t} \right) + O(h^4) \\ &= O(h^3) \end{aligned} \quad (1.22)$$

**Primjer 1.2.3.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = 2ut$ ,  $u(1) = 1$  na intervalu  $[1, 2]$  koristeći poboljšanu Eulerovu metodu za različit izbor koraka  $h$ .

U tablici 1.6 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.1$ , u tablici 1.7 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.05$ . Iz tablica se jasno vidi da su odstupanja od egzaktnog rješenja manja za manji izbor  $h$ .

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.10	1.23200	1.23368	$1.68 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-3}$
1.20	1.54788	1.55271	$4.82 \times 10^{-3}$	$3.11 \times 10^{-3}$
1.30	1.98315	1.99372	$1.06 \times 10^{-2}$	$5.30 \times 10^{-3}$
1.40	2.59079	2.61170	$2.09 \times 10^{-2}$	$8.01 \times 10^{-3}$
1.50	3.45093	3.49034	$3.94 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-2}$
1.60	4.68636	4.75882	$7.25 \times 10^{-2}$	$1.52 \times 10^{-2}$
1.70	6.48780	6.61937	$1.32 \times 10^{-1}$	$1.99 \times 10^{-2}$
1.80	9.15558	9.39333	$2.38 \times 10^{-1}$	$2.53 \times 10^{-2}$
1.90	13.16939	13.59905	$4.30 \times 10^{-1}$	$3.16 \times 10^{-2}$

Tablica 1.6: Rješenje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  poboljšanom Eulerovom metodom.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.05	1.10775	1.10794	$1.87 \times 10^{-4}$	$1.69 \times 10^{-4}$
1.10	1.23323	1.23368	$4.48 \times 10^{-4}$	$3.63 \times 10^{-4}$
1.15	1.37977	1.38057	$8.06 \times 10^{-4}$	$5.84 \times 10^{-4}$
1.20	1.55141	1.55271	$1.29 \times 10^{-3}$	$8.34 \times 10^{-4}$
1.25	1.75310	1.75505	$1.96 \times 10^{-3}$	$1.12 \times 10^{-3}$
1.30	1.99086	1.99372	$2.86 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-3}$
1.35	2.27212	2.27618	$4.07 \times 10^{-3}$	$1.79 \times 10^{-3}$
1.40	2.60601	2.61170	$5.69 \times 10^{-3}$	$2.18 \times 10^{-3}$
1.45	3.00381	3.01169	$7.87 \times 10^{-3}$	$2.61 \times 10^{-3}$

Tablica 1.7: Rješenje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.05$  poboljšanom Eulerovom metodom.

**Primjer 1.2.4.** Pokažimo da je globalna greška diskretizacije dobivena poboljšanom Eulerovom metodom reda  $O(h^2)$ . Iz prethodnog primjera vidimo da je lokalna greška diskretizacije reda tri. Ako pokažemo da funkcija prirasta definirana kao

$$F(t, u, h) = \frac{1}{2}(f(t, u) + f(t + h, u + hf(t, u)))$$

je Lipschitz neprekidna, tada iz prethodnog teorema slijedi tvrdnja. Pretpostavka je da je i  $f$  Lipschitz neprekidna s Lipschitzovom konstantom  $L_f$ . Računamo:

$$\begin{aligned}
|F(t, u_1, h) - F(t, u_2, h)| &= \left| \frac{1}{2} [f(t, u_1) + f(t+h, u_1 + hf(t, u_1))] - \frac{1}{2} [f(t, u_2) + f(t+h, u_2 + hf(t, u_2))] \right| \\
&\leq \frac{1}{2} |f(t, u_1) - f(t, u_2)| + \frac{1}{2} |f(t+h, u_1 + hf(t, u_1)) - f(t+h, u_2 + hf(t, u_2))| \\
&\leq \frac{1}{2} L_f |u_1 - u_2| + \frac{1}{2} L_f |[u_1 + hf(t, u_1)] - [u_2 + hf(t, u_2)]| \\
&\leq \frac{1}{2} L_f |u_1 - u_2| + \frac{1}{2} (L_f |u_1 - u_2| + h |f(t, u_1) - f(t, u_2)|) \\
&\leq \left( L_f + \frac{1}{2} h L_f^2 \right) |u_1 - u_2|.
\end{aligned}$$

Dakle,  $F$  je Lipschitz neprekidna s konstantom  $L_F = L_f + \frac{1}{2}(T - t_0)L_f^2$ .

## Runge-Kutta metoda sa dva stadija

Modificirana i poboljšana Eulerova metoda dio su Runge-Kutta familije metoda. U obje metode da bismo izračunali aproksimaciju u sljedećoj točki bili su nam potrebni  $m_1$  i  $m_2$ . Ako generaliziramo takav tip metode možemo definirati općenitu Runge-Kutta metodu sa dva stadija:

$$\begin{aligned}
U_0 &= u_0 \\
m_1 &= f(t_i, U_i) \\
m_2 &= f(t_i + \alpha h, U_i + h\beta m_1) \\
U_{i+1} &= U_i + h(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2),
\end{aligned} \tag{1.23}$$

gdje je  $\alpha \in (0, 1]$ . Za modificiranu Eulerovu metodu vidimo da je  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_1 = 0$  i  $\omega_2 = 1$ , dok je kod poboljšane Eulerove metode  $\alpha = \beta = 1$  i  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ .

Runge-Kutta metodu kraće zapisujemo kao **RK**, a ovisno o stadiju dodajemo i broj, primjerice Runge-Kutta metodu sa dva stadija kraće zapisujemo kao: **RK2**.

Izračunajmo lokalnu grešku diskretizacije za Runge-Kutta metodu (RK2) sa dva stadija definiranu s (1.23), uz pretpostavku da je  $u \in C^3$ .

$$\begin{aligned}
\tau_i(h) &= u_{i+1} - u_i - h(\omega_1 f_i + \omega_2 f(t_i + \alpha h, u_i + h\beta f_i)) \\
&= u_i' h + \frac{1}{2} u_i'' h^2 - (\omega_1 h f_i + \omega_2 h (f_i + f_{i,t} \alpha h + f_{i,u} \beta h f_i)) + O(h^3) \\
&= (1 - \omega_1 - \omega_2) h f_i + \left( \frac{1}{2} - \omega_2 \alpha \right) f_{i,t} h^2 + \left( \frac{1}{2} - \omega_2 \beta \right) f_{i,u} h^2 + O(h^3).
\end{aligned}$$



Jer je  $f$  proizvoljna a želimo da je greška  $\tau_i$  reda  $O(h^3)$  mora vrijediti da:

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= 1 \\ \alpha\omega_2 &= \frac{1}{2} \\ \beta\omega_2 &= \frac{1}{2},\end{aligned}\tag{1.24}$$

što povlači da je

$$\alpha = \beta, \quad \omega_2 = \frac{1}{2\alpha}, \quad \omega_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}.$$

Rješenje ovisi o parametru  $\alpha$ . Pokazalo se da bilo koji izbor parametra  $\alpha$  daje lokalnu grešku  $\tau_i = O(h^3)$ .

Analogno, Runge-Kutta metoda s **n stadija** definira se kao:

$$\begin{aligned}U_0 &= u_0 \\ m_1 &= f(t_i, U_i) \\ m_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, U_i + h\beta_{2,1}m_1) \\ &\vdots \\ m_n &= f(t_i + \alpha_n h, U_i + h \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{n,j}m_j) \\ U_{i+1} &= U_i + h \sum_{j=1}^n \omega_j m_j.\end{aligned}\tag{1.25}$$

**Primjer 1.2.5.** RK3 metoda ima oblik:

$$\begin{aligned}U_0 &= u_0 \\ m_1 &= f(t_i, U_i) \\ m_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, U_i + h\beta_{2,1}m_1) \\ m_3 &= f(t_i + \alpha_3 h, U_i + \beta_{3,1}m_1 h + \beta_{3,2}m_2 h) \\ U_{i+1} &= U_i + h(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3).\end{aligned}\tag{1.26}$$

Ako računamo lokalnu grešku diskretizacije kao i kod RK2 dobivamo sljedeće relacije između koeficijenata:

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 1 \\
\beta_{2,1}\omega_2 + (\beta_{3,1} + \beta_{3,2})\omega_3 &= \frac{1}{2} \\
\alpha_2\beta_{2,1}\omega_2 + \alpha_3(\beta_{3,1} + \beta_{3,2})\omega_3 &= \frac{1}{3} \\
\alpha_2\beta_{3,2}\omega_3 &= \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2}\alpha_2^2\omega_2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2\omega_3 &= \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2}\beta_{2,1}^2\omega_2 + \frac{1}{2}(\beta_{3,1} + \beta_{3,2})^2\omega_3 &= \frac{1}{6} \\
\beta_{2,1}\beta_{3,2}\omega_3 &= \frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Odmah primjećujemo da vrijedi:

$$\beta_{2,1} = \alpha_2,$$

$$\beta_{3,1} + \beta_{3,2} = \alpha_3.$$

Ako uvrstimo te jednakosti u gornji sustav (1.27), dobivamo jednostavnije relacije:

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 1 \\
\beta_{2,1}\omega_2 + (\beta_{3,1} + \beta_{3,2})\omega_3 &= \frac{1}{2} \\
\beta_{2,1}^2\omega_2 + (\beta_{3,1} + \beta_{3,2})^2\omega_3 &= \frac{1}{3} \\
\beta_{2,1}\beta_{3,2}\omega_3 &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Sustav ima beskonačno rješenja, a metode koje zadovoljavaju gornji sustav imaju lokalnu grešku diskretizacije reda  $O(h^4)$  što znači da je metoda reda 3.

**Primjer 1.2.6.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = 2ut$ ,  $u(1) = 1$  na intervalu  $[1, 2]$  koristeći Runge-Kutta metodu stadija dva (RK2).

U tablici 1.8 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.1$ , a u 1.9 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.05$ .

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.10	1.23100	1.23368	$2.68 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$
1.20	1.54527	1.55271	$7.43 \times 10^{-3}$	$4.79 \times 10^{-3}$
1.30	1.97795	1.99372	$1.58 \times 10^{-2}$	$7.91 \times 10^{-3}$
1.40	2.58142	2.61170	$3.03 \times 10^{-2}$	$1.16 \times 10^{-2}$
1.50	3.43484	3.49034	$5.55 \times 10^{-2}$	$1.59 \times 10^{-2}$
1.60	4.65936	4.75882	$9.95 \times 10^{-2}$	$2.09 \times 10^{-2}$
1.70	6.44297	6.61937	$1.76 \times 10^{-1}$	$2.66 \times 10^{-2}$
1.80	9.08136	9.39333	$3.12 \times 10^{-1}$	$3.32 \times 10^{-2}$
1.90	13.04629	13.59905	$5.53 \times 10^{-1}$	$4.06 \times 10^{-2}$

Tablica 1.8: Rješavanje diferencijalne jednačbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  RK2 metodom.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.05	1.10763	1.10794	$3.12 \times 10^{-4}$	$2.82 \times 10^{-4}$
1.10	1.23295	1.23368	$7.32 \times 10^{-4}$	$5.94 \times 10^{-4}$
1.15	1.37928	1.38057	$1.29 \times 10^{-3}$	$9.37 \times 10^{-4}$
1.20	1.55067	1.55271	$2.04 \times 10^{-3}$	$1.32 \times 10^{-3}$
1.25	1.75202	1.75505	$3.04 \times 10^{-3}$	$1.73 \times 10^{-3}$
1.30	1.98936	1.99372	$4.35 \times 10^{-3}$	$2.18 \times 10^{-3}$
1.35	2.27009	2.27618	$6.10 \times 10^{-3}$	$2.68 \times 10^{-3}$
1.40	2.60329	2.61170	$8.40 \times 10^{-3}$	$3.22 \times 10^{-3}$
1.45	3.00023	3.01169	$1.15 \times 10^{-2}$	$3.80 \times 10^{-3}$

Tablica 1.9: Rješavanje diferencijalne jednačbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.05$  RK2 metodom.

### Klasična Runge-Kutte metoda

Najčešća i najviše korištena je metoda sa 4 stadija reda 4, a naziva se klasična Runge-Kutta metoda:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= u_0 \\
 m_1 &= f(t_i, U_i) \\
 m_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}m_1\right) \\
 m_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}m_2\right) \\
 m_4 &= f(t_i + h, U_i + hm_3) \\
 U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Može se pokazati da je lokalna pogreška diskretizacije RK4 metode  $\tau_i = O(h^5)$ .

Pomoću lokalne pogreške diskretizacije u traženju metode najvećeg reda može se pokazati da metode s brojem stadija manjim ili jednakim od 4 postižu maksimalan red metode jednak broju stadija, metode s brojem stadija od 5-7 postižu maksimalan red metode za jedan manji od broja stadija, dok za metode s brojem stadija većim ili jednakim od 8 postižu maksimalan red metode za dva manji od stadija. Ovi rezultati nam zapravo govore da je RK4 metoda optimalan izbor za rješavanje inicijalnog problema i zbog toga se ta metoda najčešće i koristi u primjenama.

**Primjer 1.2.7.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u'(t) = 2ut$ ,  $u(1) = 1$  na intervalu  $[1, 2]$  koristeći klasičnu Runge-Kutta metodu (RK4).

U tablici 1.10 prikazani su dobiveni rezultati za  $h = 0.1$ .

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
1.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
1.10	1.23367	1.23368	$3.71 \times 10^{-6}$	$3.01 \times 10^{-6}$
1.20	1.55270	1.55271	$1.18 \times 10^{-5}$	$7.61 \times 10^{-6}$
1.30	1.99369	1.99372	$2.88 \times 10^{-5}$	$1.44 \times 10^{-5}$
1.40	2.61163	2.61170	$6.32 \times 10^{-5}$	$2.42 \times 10^{-5}$
1.50	3.49021	3.49034	$1.32 \times 10^{-4}$	$3.79 \times 10^{-5}$
1.60	4.75855	4.75882	$2.70 \times 10^{-4}$	$5.66 \times 10^{-5}$
1.70	6.61883	6.61937	$5.41 \times 10^{-4}$	$8.18 \times 10^{-5}$
1.80	9.39225	9.39333	$1.08 \times 10^{-3}$	$1.15 \times 10^{-4}$
1.90	13.59691	13.59905	$2.15 \times 10^{-3}$	$1.58 \times 10^{-4}$

Tablica 1.10: Rješenje diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  RK4 metodom.

**Primjer 1.2.8.** U sljedećoj tablici 1.11 prikazani su rezultati rješenja diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$  koristeći Eulerovu metodu unaprijed, modificiranu Eulerovu metodu, poboljšanu Eulerovu metodu, RK2 te RK4 metodu. U tablici 1.12 je dana usporedba relativnih grešaka navedenih metoda. Primjetimo da RK4 metoda daje najbolje rezultate.

$t_k$	<i>Euler</i>	midpoint	poboljšani Euler	RK2	RK4	egzaktno
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.10	1.20000	1.23100	1.23200	1.23100	1.23367	1.23368
1.20	1.46400	1.54527	1.54788	1.54527	1.5527	1.55271
1.30	1.81536	1.97795	1.98315	1.97795	1.99369	1.99372
1.40	2.28735	2.58142	2.59079	2.58142	2.61163	2.61170
1.50	2.92781	3.43484	3.45093	3.43484	3.49021	3.49034
1.60	3.80616	4.65936	4.68636	4.65936	4.75855	4.75882
1.70	5.02413	6.44297	6.48780	6.44297	6.61883	6.61937
1.80	6.73233	9.08136	9.15558	9.08136	9.39225	9.39333
1.90	9.15597	13.04629	13.16939	13.04629	13.59691	13.59905

Tablica 1.11: Usporedba rješenja diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$ .

$t_k$	<i>Euler</i>	midpoint	poboljšani Euler	RK2	RK4
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.10	$2.73 \times 10^{-2}$	$2.17 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$	$3.01 \times 10^{-6}$
1.20	$5.71 \times 10^{-2}$	$4.79 \times 10^{-3}$	$3.11 \times 10^{-3}$	$4.79 \times 10^{-3}$	$7.61 \times 10^{-6}$
1.30	$8.95 \times 10^{-2}$	$7.91 \times 10^{-3}$	$5.30 \times 10^{-3}$	$7.91 \times 10^{-3}$	$1.44 \times 10^{-5}$
1.40	$1.24 \times 10^{-1}$	$1.16 \times 10^{-2}$	$8.01 \times 10^{-3}$	$1.16 \times 10^{-2}$	$2.42 \times 10^{-5}$
1.50	$1.61 \times 10^{-1}$	$1.59 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-2}$	$1.59 \times 10^{-2}$	$3.79 \times 10^{-5}$
1.60	$2.00 \times 10^{-1}$	$2.09 \times 10^{-2}$	$1.52 \times 10^{-2}$	$2.09 \times 10^{-2}$	$5.66 \times 10^{-5}$
1.70	$2.41 \times 10^{-1}$	$2.66 \times 10^{-2}$	$1.99 \times 10^{-2}$	$2.66 \times 10^{-2}$	$8.18 \times 10^{-5}$
1.80	$2.83 \times 10^{-1}$	$3.32 \times 10^{-2}$	$2.53 \times 10^{-2}$	$3.32 \times 10^{-2}$	$1.15 \times 10^{-4}$
1.90	$3.27 \times 10^{-1}$	$4.06 \times 10^{-2}$	$3.16 \times 10^{-2}$	$4.06 \times 10^{-2}$	$1.58 \times 10^{-4}$

Tablica 1.12: Usporedba relativnih grešaka dobivenih rješavanjem diferencijalne jednadžbe  $u'(t) = 2ut$ , uz  $h = 0.1$ .

## Poglavlje 2

### Višekoračne metode

Kada računamo aproksimaciju u  $t_{k+1}$  primjerice u Eulerovoj metodi koristimo samo aproksimacije iz prethodnog trenutka  $t_n$ . Međutim, razumno je da uzimamo u obzir i vrijednosti koje smo prije izračunali, tj. vrijednosti  $u_{k-1}$ ,  $u_{k-2}$ , itd. Postoje metode koje koriste više prethodnih aproksimacija i u ovom poglavlju govorit ćemo o njima.

**Definicija 2.0.1.** *s- koračna linearna višekoračna metoda je metoda koja je zadana formulom*

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j U_{n+j} = h \sum_{j=0}^s \beta_j f(t_{n+j}, U_{n+j}) \quad (2.1)$$

pri čemu su  $\alpha_j, \beta_j$  konstante takve da je  $\alpha_s \neq 0$ ,  $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ .

Ako je  $\beta_s = 0$  tada je metoda **eksplicitna**, a ako je  $\beta_s \neq 0$ , metoda je **implicitna**.

Pri započinjanju korištenja višekoračnih metoda potrebno je prvih par aproksimacija dobiti koristeći jednokoračne metode istog reda točnosti.

#### 2.1 Adams-Bashforth i Adams-Moulton metode

U metodama koje smo do sada proučavali ako je  $u$  bilo rješenje Cauchyjeve jednadžbe (1) tada smo svakom koraku koristili relaciju

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt,$$

i pomoću nje na različite načine smo numerički računali integral. Glavna ideja Adams-ovih metoda je aproksimacija integrala koristeći interpolacijski polinom od  $f$  u točkama  $(t_n, f_n), \dots, (t_{n+s-1}, f_{n+s-1})$  ako je metoda eksplicitna, i još dodatno u  $t_{n+s}$  ako je metoda implicitna. Eksplicitne Adams-ove metode nazivaju se **Adams-Bashforth-ove** metode, dok se implicitne nazivaju **Adams-Moulton-ove** metode.

Neka je  $q(t)$  stupnja najviše  $s - 1$  koji interpolira podatke  $(t_n, f_n), \dots, (t_{n+s-1}, f_{n+s-1})$  za Adams-Bashforth-ovu metodu, te neka je  $q(t)$  stupnja najviše  $s$  koji interpolira podatke  $(t_n, f_n), \dots, (t_{n+s-1}, f_{n+s-1}), (t_{n+s}, f_{n+s})$  za Adams-Moulton-ovu metodu. Definiramo:

$$U_{n+s} = U_{n+s-1} + \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} q(t) dt. \quad (2.2)$$

**Primjer 2.1.1.** Izračunajmo koeficijente za trokoračnu Adams-Bashforth-ovu metodu. Konstruirajmo prvo interpolacijski polinom koji prolazi kroz tri točke  $(t_n, f_n), (t_{n+1}, f_{n+1})$  i  $(t_{n+2}, f_{n+2})$ ,

$$q(t) = f_n L_n(t) + f_{n+1} L_{n+1}(t) + f_{n+2} L_{n+2}(t).$$

Polinom Lagrangeove baze je definiran kao:

$$L_k(t) = \prod_{j=0, j \neq k}^{s-1} \frac{t - t_{n+j}}{t_{n+k} - t_{n+j}}, \quad k = 0, 1, \dots, s - 1.$$

Metoda (2.2) sada izgleda kao:

$$U_{n+3} = U_{n+2} + f_{n+2} \int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+2}(t) dt + f_{n+1} \int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+1}(t) dt + f_n \int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_n(t) dt. \quad (2.3)$$

Raspišimo prvo Lagrangeove polinome pri čemu ćemo iskoristiti  $t_{k+s} = t_{k+s-1} + h$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= \frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})}{(t_{n+2} - t_n)(t_{n+2} - t_{n+1})} = \frac{1}{2h^2}(t - t_n)(t - t_{n+1}), \\ L_{n+1} &= \frac{(t - t_n)(t - t_{n+2})}{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} - t_{n+2})} = -\frac{1}{h^2}(t - t_{n+1})(t - t_{n+2}), \\ L_n &= \frac{(t - t_{n+1})(t - t_{n+2})}{(t_n - t_{n+1})(t_n - t_{n+2})} = \frac{1}{2h^2}(t - t_{n+1})(t - t_{n+2}). \end{aligned}$$

Izračunajmo vrijednosti svih integrala iz (2.3) uz supstituciju:  $s = \frac{t-t_{n+2}}{h}$ ,  $s \in [0, 1]$ . Tada je  $t = sh + t_{n+2}$ ,  $dt = h ds$ , pa računamo:

$$\begin{aligned} \int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+2}(t) dt &= h \int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+2}(sh + t_{n+2}) ds \\ &= \frac{h}{2} \int_0^1 (s+1)(s+2) ds \\ &= \frac{23h}{12}. \end{aligned}$$

Analogno istim računom dobivamo:

$$\int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+1}(t) dt = -\frac{4}{3}h,$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} L_n(t) dt = \frac{5}{12}h.$$

Konačno, možemo reći da je trokoračna Adams-Bashforthova metoda oblika:

$$U_{n+3} = U_{n+2} + \frac{h}{12}(5f_n - 16f_{n+1} + 23f_{n+2}).$$

**Primjer 2.1.2.** Izračunajmo koeficijente za trokoračnu Adams-Moulton-ovu metodu. Za razliku od Adams-Bashforth-ove metode imamo još jedan čvor interpolacije, a to je čvor  $t_{n+3}$ . Konstruirajmo interpolacijski polinom koji prolazi kroz točke  $(t_n, f_n)$ ,  $(t_{n+1}, f_{n+1})$ ,  $(t_{n+2}, f_{n+2})$  i  $(t_{n+3}, f_{n+3})$ :

$$q(t) = f_n L_n(t) + f_{n+1} L_{n+1}(t) + f_{n+2} L_{n+2}(t) + f_{n+3} L_{n+3}(t).$$

Kao u prethodnom primjeru, prvo ćemo raspisati Lagrangeove polinome:

$$L_n = \frac{(t - t_{n+1})(t - t_{n+2})(t - t_{n+3})}{(t_n - t_{n+1})(t_n - t_{n+2})(t_n - t_{n+3})} = -\frac{1}{6h^3}(t - t_{n+1})(t - t_{n+2})(t - t_{n+3}),$$

$$L_{n+1} = \frac{(t - t_n)(t - t_{n+2})(t - t_{n+3})}{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} - t_{n+2})(t_{n+1} - t_{n+3})} = \frac{1}{2h^3}(t - t_n)(t - t_{n+2})(t - t_{n+3}),$$

$$L_{n+2} = \frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})(t - t_{n+3})}{(t_{n+2} - t_n)(t_{n+2} - t_{n+1})(t_{n+2} - t_{n+3})} = -\frac{1}{2h^3}(t - t_n)(t - t_{n+1})(t - t_{n+3}),$$

$$L_{n+3} = \frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})(t - t_{n+2})}{(t_{n+3} - t_n)(t_{n+3} - t_{n+1})(t_{n+3} - t_{n+2})} = \frac{1}{6h^3}(t - t_n)(t - t_{n+1})(t - t_{n+2}).$$

Računamo integrale uz supstituciju kao u prethodnom primjeru i dobivamo:

$$\int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_n(t) dt = \frac{1}{24}h,$$

$$\int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+1}(t) dt = -\frac{5}{24}h,$$

$$\int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+2}(t) dt = \frac{19}{24}h,$$

$$\int_{t_{n+2}}^{t_{n+3}} L_{n+3}(t) dt = \frac{3}{8}h.$$



Konačno, možemo reći da je trokoračna Adams-Moulton-ova metoda oblika:

$$U_{n+3} = U_{n+2} + \frac{h}{24}(f_n - 5f_{n+1} + 19f_{n+2} + 9f_{n+3}).$$

## 2.2 Opća Adams-Bashforth metoda

Newtonov interpolacijski polinom  $P$  koji interpolira funkciju  $f$  u točkama  $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$  dan je s:

$$P(x_0 + hs) = f(x_0) + s(\Delta f)(x_0) + \frac{s(s-1)(\Delta^2 f)(x_0)}{2!} + \dots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)(\Delta^n f)(x_0)}{n!}, \quad (2.4)$$

pri čemu je  $(\Delta f)(x) = f(x+h) - f(x)$  i  $(\nabla f)(x) = f(x) - f(x-h)$ .

Osim operatora razlika unaprijed  $(\Delta)$  i unazad  $(\nabla)$  definirat ćemo još i operator  $Z$ :

$$ZU_k := U_{k+1} \quad (2.5)$$

Ako generaliziramo binomne koeficijente na

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad s \in \mathbb{R}$$

tada se gornja formula (2.4) može kraće zapisati u ekvivalentnoj formi

$$P(x_0 + hs) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} (\Delta^k f)(x_0).$$

Također, postoji analogna formula za slučaj kada su čvorovi dani u padajućem poretku, tj. kada  $x_i = x - ih$ . Tada polinom glasi:

$$P(x_0 + hs) = \sum_{i=0}^n \binom{-s}{i} (\nabla^i f)(x_0). \quad (2.6)$$

Vratimo se na početnu jednakost

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t)) dt.$$

Zamijenimo funkciju  $f(t, u(t))$  interpolacijskim polinomom  $q$ . Ako primjenimo (2.6), dobivamo da je  $q$  definiran kao

$$q(t) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{-\tau}{i} \nabla^i f_{n+s-1},$$

gdje smo uveli supstituciju  $\tau = \frac{n+s-1-t}{h}$ . Odavde dobivamo

$$\int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} q(t) dt = h \int_0^1 \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{-\tau}{i} \nabla^i f_{n+s-1} d\tau.$$

Definirajmo:

$$\gamma_i = \int_0^1 (-1)^i \binom{-\tau}{i} d\tau.$$

Dobivamo da je opća s-koračna Adams-Bashforth metoda dana s:

$$U_{n+s} - U_{n+s-1} = h \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i \nabla^i f_{n+s-1},$$

a koeficijenti  $\gamma_i$  zadovoljavaju rekurziju:

$$\frac{\gamma_0}{n+1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{2} + \gamma_n = 1.$$

**Definicija 2.2.1.** *Višekoračna metoda je reda  $s$  ako joj je lokalna greška diskretizacije  $O(h^{s+1})$ .*

Za računanje lokalne greške diskretizacije za s-koračnu Adams-Bashforth-ovu metodu koristit ćemo Teorem srednje vrijednosti za integrale kojeg ćemo sada navesti bez dokaza.

**Teorem 2.2.2** (Teorem srednje vrijednosti za integrale). *Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i ako je  $g$  nenegativna integrabilna funkcija na segmentu  $[a, b]$ , tada postoji  $c \in [a, b]$  takav da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

*Ako je  $f$  omeđena i integrabilna, ali ne i neprekidna, tada postoji  $d$ ,  $\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq d \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$  takav da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = d \int_a^b g(x)dx.$$

**Primjer 2.2.3.** Izračunajmo lokalnu grešku diskretizacije za  $s$ -koračnu Adams-Bashforth-ovu metodu.

$$\tau_{n+s} = u_{n+s} - u_{n+s-1} - \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} q(t)dt.$$

Podijeljene razlike ćemo označavati  $s$

$$f[t_n, \dots, t_{n+s}] = \frac{f[t_n, \dots, t_{n+s}] - f[t_n, \dots, t_{n+s-1}]}{t_{n+s} - t_n}.$$

Iz greške interpolacijskog polinoma imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \tau_{n+s} &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} (u'(t) - q(t))dt = \left( \text{jer } f(t, u(t)) = u'(t) \right) \\ &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} (f(t) - q(t))dt = \left\{ \text{jer } q(t) = \sum_{j=0}^{s-1} f[t_{n+s-1}, \dots, t_{n+s-1-j}](t - t_{n+s-1}) \cdots (t - t_{n+s-j}) \right\} \\ &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} f[t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, t](t - t_{n+s-1}) \cdots (t - t_n)dt \\ &= \left( \text{Primjenimo Teorem srednje vrijednosti za integrale} \right) \\ &= f[t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, \theta] \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} (t - t_{n+s-1}) \cdots (t - t_n)dt. \end{aligned}$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale možemo primjeniti jer nam funkcija treba biti nenegativna na tom intervalu, a ubudući se interval na kojeg smo primjeniti teorem ( $[t_{n+s-1}, t_{n+s}]$ ) nalazi desno od njegove najdesnije nultočke imamo pozitivnost. Jedino je u lijevom rubu vrijednost funkcije jednaka 0.

Izračunajmo integral:

$$\begin{aligned} \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} (t - t_{n+s-1}) \cdots (t - t_n)dt &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} (t - t_{n+s-1})(t - t_{n+s-1} + h) \cdots (t - t_{n+s-1} + (s-1)h)dt \\ &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} h^s (-1)^s \left( -\frac{t - t_{n+s-1}}{h} \right) \left( -\frac{t - t_{n+s-1}}{h} - 1 \right) \cdots \\ &\quad \left( -\frac{t - t_{n+s-1}}{h} - (s-1) \right) dt \\ &= \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} h^s (-1)^s s! \left( \frac{t_{n+s-1} - t}{h} \right) dt \\ &= h^{s+1} (-1)^s s! \int_0^1 \binom{-\tau}{s} d\tau \\ &= \gamma_s s! h^{s+1}. \end{aligned}$$

(2.7)

Uvrstimo izračunati integral u  $\tau_{n+s}$ :

$$\tau_{n+s} = f[t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, \theta] \gamma_s s! h^{s+1}. \quad (2.8)$$

Ako usporedimo dva oblika za grešku interpolacije, pri čemu je  $f$  klase  $C^s$ , za neki  $\xi$ ,  $\min\{t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, \theta\}, \theta \leq \xi \leq \max\{t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, \theta\}$ ,

$$f[t_{n+s-1}, t_{n+s-2}, \dots, t_n, \theta] = \frac{f^s(\xi)}{s!} = \frac{u^{s+1}(\xi)}{s!}.$$

Vratimo to u (2.8) i dobivamo da je lokalna greška diskretizacije

$$\tau_{n+s} = \gamma_s h^{s+1} u^{s+1}(\xi).$$

Dakle, lokalna greška diskretizacije je oblika  $O(h^{s+1})$  iz čega zaključujemo da je metoda reda  $s$ .

**Primjer 2.2.4.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u' = t + u - 1$ ,  $u(0) = 1$  na intervalu  $[0, 2]$  uz korake  $h = 0.1$  i  $h = 0.2$  koristeći AB3 metodu.

Prve dvije aproksimacije izračunat ćemo koristeći RK2 metodu iako smo ih mogli dobiti i korištenjem RK3 metode. U tablici 2.1 su prikazani rezultati rješavanja diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 3 pri čemu smo prve dvije aproksimacije dobili koristeći RK2 metodu, dok su u tablici 2.2 prikazani rezultati za  $h = 0.2$ . Primjećujemo da za manji korak  $h$  dobivamo bolje rezultate.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
0.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
0.10	1.00500	1.00517	$1.71 \times 10^{-4}$	$1.70 \times 10^{-4}$
0.20	1.02102	1.02140	$3.78 \times 10^{-4}$	$3.70 \times 10^{-4}$
0.30	1.04939	1.04986	$4.71 \times 10^{-4}$	$4.48 \times 10^{-4}$
0.40	1.09126	1.09182	$5.66 \times 10^{-4}$	$5.18 \times 10^{-4}$
0.50	1.14804	1.14872	$6.80 \times 10^{-4}$	$5.92 \times 10^{-4}$
0.60	1.22131	1.22212	$8.13 \times 10^{-4}$	$6.65 \times 10^{-4}$
0.70	1.31279	1.31375	$9.66 \times 10^{-4}$	$7.35 \times 10^{-4}$
0.80	1.42440	1.42554	$1.14 \times 10^{-3}$	$8.02 \times 10^{-4}$
0.90	1.55826	1.55960	$1.35 \times 10^{-3}$	$8.63 \times 10^{-4}$

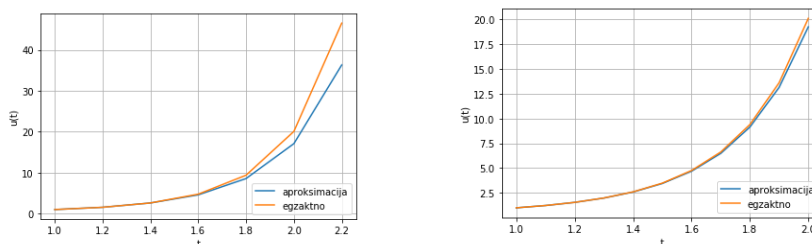
Tablica 2.1: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 3 uz  $h = 0.1$

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
0.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
0.20	1.02000	1.02140	$1.40 \times 10^{-3}$	$1.37 \times 10^{-3}$
0.40	1.08840	1.09182	$3.42 \times 10^{-3}$	$3.14 \times 10^{-3}$
0.60	1.21695	1.22212	$5.17 \times 10^{-3}$	$4.23 \times 10^{-3}$
0.80	1.41821	1.42554	$7.33 \times 10^{-3}$	$5.14 \times 10^{-3}$
1.00	1.70804	1.71828	$1.02 \times 10^{-2}$	$5.96 \times 10^{-3}$
1.20	2.10601	2.12012	$1.41 \times 10^{-2}$	$6.65 \times 10^{-3}$
1.40	2.63602	2.65520	$1.92 \times 10^{-2}$	$7.22 \times 10^{-3}$
1.60	3.32723	3.35303	$2.58 \times 10^{-2}$	$7.70 \times 10^{-3}$
1.80	4.21523	4.24965	$3.44 \times 10^{-2}$	$8.10 \times 10^{-3}$

Tablica 2.2: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 3 uz  $h = 0.2$

Na sljedećim grafovima (Slika 2.1) prikazane su usporedbe rješavanja diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 3 uz  $h = 0.2$  i  $h = 0.1$ . Iz grafova se jasno vidi da je metoda točnija ukoliko imamo manji korak  $h$ .

**Primjer 2.2.5.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u' = t + u - 1$ ,  $u(0) = 1$  na intervalu  $[0, 2]$  uz korak  $h = 0.2$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 4.


 Slika 2.1: Usporedba rješenja za  $h = 0.2$  i  $h = 0.1$ 

U tablici 2.3 su prikazani rezultati rješavanja diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 4 pri čemu smo prve tri aproksimacije dobili koristeći RK4 metodu.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
0.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
0.20	1.02140	1.02140	$2.76 \times 10^{-6}$	$2.70 \times 10^{-6}$
0.40	1.09182	1.09182	$6.74 \times 10^{-6}$	$6.17 \times 10^{-6}$
0.60	1.22211	1.22212	$1.23 \times 10^{-5}$	$1.01 \times 10^{-5}$
0.80	1.42536	1.42554	$1.81 \times 10^{-4}$	$1.27 \times 10^{-4}$
1.00	1.71782	1.71828	$4.62 \times 10^{-4}$	$2.69 \times 10^{-4}$
1.20	2.11928	2.12012	$8.36 \times 10^{-4}$	$3.94 \times 10^{-4}$
1.40	2.65385	2.65520	$1.35 \times 10^{-3}$	$5.08 \times 10^{-4}$
1.60	3.35098	3.35303	$2.05 \times 10^{-3}$	$6.12 \times 10^{-4}$
1.80	4.24664	4.24965	$3.00 \times 10^{-3}$	$7.07 \times 10^{-4}$

Tablica 2.3: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći Adams-Bashforth-ovu metodu reda 4 uz  $h = 0.2$

## 2.3 Opća Adams-Moulton metoda

Analogno kao i za Adams-Bashforth-ovu metodu možemo izvesti formulu  $s$ -koračne Adams-Moulton-ove metode, kao i lokalnu grešku diskretizacije.

**Definicija 2.3.1.** Za svaki  $s \geq 0$ ,  $s$ -koračna Adams-Moulton-ova metoda dana je formu-

lom:

$$U_{n+s} - U_{n+s-1} = h \sum_{i=0}^s \gamma_i^* \nabla^i f_{n+s}, \quad \gamma_i^* = (-1)^i \int_{-1}^0 \binom{-\tau}{i} d\tau$$

$i$  reda je  $s + 1$ . Za  $i \geq 1$ , koeficijenti  $\gamma_i^*$  zadovoljavaju rekurziju

$$\frac{\gamma_0^*}{n+1} + \dots + \frac{\gamma_{n-1}^*}{2} + \gamma_n^* = 0.$$

Lokalna greška diskretizacije  $s$ -koračne Adams-Moulton-ove metode iznosi:

$$\tau_{n+s} = \gamma_{s+1}^* h^{s+2} u^{s+2}(\xi).$$

## 2.4 BDF metode

BDF metode također dobivamo interpolacijom polinomom, ali za razliku od Adamsovih metoda ovdje interpoliramo  $u$  u točkama  $(t_n, U_n), \dots, (t_{n+s}, U_{n+s})$ . Interpolacijski polinom je dan s

$$q(t) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{-\tau}{i} \nabla^i u_{n+s}.$$

Budući da mijenjamo  $u$  s interpolacijskim polinomom želimo da vrijedi da je

$$q(t_{n+s})' = f_{n+s},$$

pa imamo:

$$\sum_{i=0}^s \delta_i \nabla^i u_{n+s} = h f_{n+s},$$

pri čemu je

$$\delta_i = (-1)^i \left. \frac{d}{d\tau} \binom{-\tau}{i} \right|_{\tau=0}.$$

Direktnim računom dobivamo da je

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_i = \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Zaključujemo da je za  $\forall s \leq 1$ ,  $s$ -koračna BDF metoda reda  $s$  i dana je formulom

$$\sum_{i=0}^s \frac{1}{i} \nabla^i u_{n+s} = h f_{n+s}. \quad (2.9)$$

BDF metoda se zbog svojih dobrih svojstava stabilnosti uvelike koristi za rješavanje krutih jednažbi(sustava). O krutim jednažbama reći ćemo nešto kasnije u radu. Raspisivanjem razlika unazad u izrazu (2.9) dobivamo ekvivalentnu formulu za BDF metodu:

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j u_{n+s} = h f_{n+s}.$$

U sljedećoj tablici preuzetoj iz [7] izračunati su koeficijenti za  $s \leq 6$ .

s	$\alpha_6$	$\alpha_5$	$\alpha_4$	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_0$	$\beta_s$	red	greška
1						1	-1	1	1	$-\frac{1}{2}$
2					1	$\frac{-4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{-2}{9}$
3				1	$\frac{-18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{6}{11}$	3	$\frac{-3}{22}$
4			1	$\frac{-48}{25}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{-16}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	4	$\frac{-12}{125}$
5		1	$\frac{-300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$\frac{-200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$\frac{-12}{137}$	$\frac{60}{137}$	5	$\frac{-10}{137}$
6	1	$\frac{-360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$\frac{-400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$\frac{-72}{147}$	$\frac{10}{147}$	$\frac{60}{147}$	6	$\frac{-20}{147}$

Tablica 2.4: Koeficijenti BDF metode



## 2.5 Stabilnost i konvergencija višekoračnih metoda

Najprije izračunajmo lokalnu grešku diskretizacije višekoračne metode. Koristeći razvoj u Taylorov red oko točke  $(t_n)$  imamo:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \sum_{j=0}^s \alpha_j u(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^s \beta_j u'(t_{j+n}) = \alpha_0 u(t_n) + \alpha_1 [u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 u''(t_n) + \dots] + \\
 &\quad + \alpha_2 [u(t_n) + 2hu'(t_n) + \frac{1}{2}4h^2 u''(t_n) + \dots] + \dots + \\
 &\quad + \alpha_s [u(t_n) + shu'(t_n) + \frac{1}{2}s^2 h^2 u''(t_n) + \dots] - \\
 &\quad - h [\beta_0 u'(t_n) + \beta_1 [u'(t_n) + hu''(t_n) + \frac{1}{2}h^2 u'''(t_n) + \dots] + \dots] \\
 &= C_0 u(t_n) + C_1 hu'(t_n) + C_2 h^2 u''(t_n) + C_3 h^3 u'''(t_n) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

gdje su :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s \\
 C_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s) - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s) \\
 C_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 4\alpha_2 + \dots + s^2\alpha_s) - (\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + s\beta_s) \\
 &\quad \vdots \\
 C_k &= \sum_{j=0}^s \frac{j^k}{k!} \alpha_j - \sum_{j=0}^s \frac{j^{k-1}}{(k-1)!} \beta_j.
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

**Definicija 2.5.1.** Višekoračna metoda je **reda  $p$**  ako joj je lokalna greška diskretizacije  $O(h^{p+1})$  kada  $h$  teži u 0. Metoda je **konzistentna** ako ima red  $p \geq 1$ .

Maksimalan red višekoračne metode je  $2s$ , međutim ne možemo koristiti metode tolikog reda. Dalje u tekstu ćemo navesti teorem koji će nam dati odgovor na pitanje zašto ne koristimo višekoračne metode maksimalnog reda.

**Teorem 2.5.2.** Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- (i) Višekoračna metoda (2.1) je reda  $p$ ;
- (ii) Vrijede sljedeći algebarski odnosi:

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j = 0,
 \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=0}^s j^k \alpha_j - k \sum_{j=0}^s j^{k-1} \beta_j = 0, \quad \forall k = 1, \dots, p. \quad (2.13)$$

(iii)  $\forall t \leq 0$  i  $\forall h^* \leq 0$ , postoji konstanta  $C$  takva da za sve funkcije  $u \in C^{p+1}$ , za lokalnu grešku diskretizacije vrijedi:

$$|\tau(t, u, h)| \leq Ch^{p+1} \max\{|u^{(p+1)}(k)|, t \leq k \leq t + sh\}, \quad \forall h \leq h^*.$$

(iv) Neka su  $\rho$  i  $\sigma$  polinomi definirani kao:

$$\rho(z) := \sum_{j=0}^s \alpha_j z^j, \quad \sigma(z) := \sum_{j=0}^s \beta_j z^j.$$

Tada, u okolini točke  $z = 0$ ,

$$\rho(e^z) - z\sigma(e^z) = O(z^{p+1}). \quad (2.14)$$

Dokaz se može pronaći u [1].

Polinome  $\rho$  i  $\sigma$  nazivamo karakterističnim polinomima višekoračnih metoda. Polinom  $\rho$  je stupnja  $s$ , a polinom  $\sigma$  je također stupnja  $s$  ako je metoda implicitna, dok je u slučaju eksplicitne metode stupnja manjeg od  $s$  jer nam je u tom slučaju  $\beta_s = 0$ .

**Definicija 2.5.3.** Višekoračna metoda (2.1) je **0-stabilna** ako su sva rješenja  $\{U_n\}$  rekurzije

$$\rho(Z)U_n = \sum_{j=0}^s \alpha_j U_{n+j} = 0 \quad (2.15)$$

ograničena kada  $n \rightarrow 0$ .

Možemo reći da za svako rješenje  $U_n$  rekurzije postoji konstanta  $M \leq 0$  takva da je  $|U_n| \leq M$  za svaki  $n \leq 0$ .

Postoji jednostavan kriterij kojim možemo provjeriti 0-stabilnost višekoračne metode. On je baziran na karakterističnom polinomu  $\rho$  i navodimo ga u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.5.4.** Višekoračna metoda (2.1) je stabilna ako nultočke  $z_j$  polinoma  $\rho(z)$  zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

- 1.) Sve nultočke zadovoljavaju  $|z_j| \leq 1$ .
- 2.) Ako je  $|z_j| = 1$ , tada je  $z_j$  jednostruka nultočka.

*Dokaz.* Za dokaz teorema moramo prvo promotriti sva moguća rješenja  $\{U_n\}$ ,  $n \geq 0$ , rekurzije (2.15). Budući je svako takvo rješenje određeno početnim vrijednostima  $U_0, \dots, U_{s-1}$ , njihov skup je vektorski prostor dimenzije  $s$ . Zbog toga, ako možemo pronaći  $s$  linearno nezavisnih rješenja  $U_n$ , oni će tvoriti bazu tog vektorskog prostora, i rekurzija će biti stabilna ako i samo ako je svako rješenje koje čini bazu ograničeno kada  $n \rightarrow \infty$ .

Ako je  $z$  nultočka od  $\rho(z)$ , tada je  $U_n = z^n$  jedno rješenje rekurzije, što se može lako provjeriti (ako je  $z = 0$  definiramo  $z^0 = 1$ ). Ako  $\rho$  ima  $s$  različitih nultočki, onda one tvore bazu prostora. Jer je svako rješenje oblika  $U_n = z^n$  ograničeno ako i samo ako  $|z_j| \leq 1$ , teorem je dokazan u slučaju kada imamo sve različite nultočke.

Pretpostavimo sada da  $\rho(z)$  ima višestruku nultočku  $z$  kratnosti  $m \geq 2$ . Tada se lako može provjeriti da je svaka od funkcija

$$U_n = z^n, \quad U_n = nz^n, \dots, U_n = n^{m-1}z^n$$

dotatno rješenje rekurzije (2.15), i da su rješenja međusobno linearno nezavisna (za  $z = 0$  zamjenimo  $n^j z^n$  s funkcijom koja za  $n = j$  poprima vrijednost 1, a inače 0). Rješenja su ograničena ako i samo ako je  $|z_j| \leq 1$ . Time smo dokazali teorem i u općem slučaju.  $\square$

Primjetimo da je  $z_j = 1$  uvijek nultočka, jer da bi metoda bila konzistentna, višekoračna metoda mora imati svojstvo da  $\sum_{i=0}^s \alpha_i = 0$ . Ako je to jedina nultočka čija je apsolutna vrijednost jednaka 1, onda kažemo da je metoda **jako stabilna**, dok, ako imamo više nultočki koje imaju apsolutnu vrijednost jednaku 1, kažemo da je metoda **slabo stabilna**.

**Teorem 2.5.5.** *s-koračne Adams-Bashforth-ove i Adams-Moulton-ove metode su stabilne za sve  $s \geq 1$ . s-koračna BDF metoda je stabilna za  $1 \leq s \leq 6$ , ali nestabilna za sve  $s \geq 7$ .*

Dokaz teorema može se pronaći u [10].

Sljedeći teorem dat će nam odgovor na pitanje zašto ne možemo koristiti s-koračnu metodu maksimalnog reda  $2s$ .

**Teorem 2.5.6.** *Red metode  $p$  stabilne s-koračne metode zadovoljava*

$$p \leq \begin{cases} s + 2 & \text{ako je } s \text{ paran,} \\ s + 1 & \text{ako je } s \text{ neparan,} \\ s & \text{ako je metoda eksplicitna.} \end{cases}$$

**Definicija 2.5.7.** *Kažemo da je s-koračna metoda konvergentna ako za sve inicijalne probleme za koje vrijedi Teorem 1.0.8 vrijedi*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=a+nh}} u_n = u(x)$$

za sve  $x \in [t_0, T]$  i niz  $\{u_n\}$  generiran metodom s inicijalnim uvjetima  $u_i = u_i(h)$  za koje je  $\lim_{h \rightarrow 0} u_i(h) = u_0$ ,  $i = 0, \dots, s-1$ .

**Teorem 2.5.8** (Dahlquistov teorem ekvivalencije). *Linearna višekoračna metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna i nul-stabilna.*

Ovaj teorem osigurava da svaka konzistentna metoda s nestabilnim rješenjima mora biti nekonvergentna. Stabilnost nam osigurava da uvedena greška ne raste dalje, dok konzistentnost kaže da je lokalna greška diskretizacije mala u trenutku kad se uvodi.

Sljedeći korolar nam govori koju jednokoračnu metodu moramo izabrati za određivanje početnih aproksimacija za korištenje višekoračnih metoda. Da postignemo da se globalna greška ponaša kao  $O(h^p)$ , tako se mora ponašati i lokalna pogreška diskretizacije. Iz analize greške može se pokazati da red jednokoračne metode može biti za jedan manji od reda višekoračne iako se često koristi i isti red metode.

**Korolar 2.5.9.** [11] *Neka je  $s$ -koračna metoda konzistentna i 0-stabilna reda  $p$ , te  $f \in F_p(a, b)$ . Tada globalna pogreška zadovoljava*

$$e(x; h_n) = O(h_n^p)$$

za sve  $h_n = \frac{x-a}{n}$  čim prave pogreške zadovoljavaju

$$|U_i - u(t_i)| \leq \varepsilon(h_n), \quad i = 0, \dots, s-1,$$

uz  $\varepsilon(h_n) = O(h_n^p)$  za  $n \rightarrow \infty$ .

Za proučavanje ponašanja rješenja proizvoljnih običnih diferencijalnih jednadžbi promatrat ćemo aproksimacije rješenja **modelne jednadžbe**

$$u'(t) = au(t), \quad a \in \mathbb{C}. \quad (2.16)$$

Ako primjenimo višekoračnu metodu (2.1) na jednadžbu (2.16) dobivamo sljedeću rekurzivnu relaciju

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j U_{n+j} - \bar{h} \sum_{j=0}^s \beta_j U_{n+j} = 0,$$

što možemo zapisati u ekvivalentnom obliku koristeći (2.5) kao

$$[\rho(Z) - \bar{h}\sigma(Z)] U_n = 0, \quad (2.17)$$

gdje smo definirali

$$\bar{h} := ah.$$

Definirajmo **polinom stabilnosti**  $\pi_{\bar{h}}(z)$  kao

$$\pi_{\bar{h}}(z) := \rho(z) - \bar{h}\sigma(z) = \sum_{j=0}^s (\alpha_j - \bar{h}\beta_j) z^j, \quad (2.18)$$

čiji koeficijenti ovise o  $\bar{h}$ . Tada se rješenje rekurzije (2.17) računa iz nultočaka polinoma  $\pi_{\bar{h}}(z)$ , kao što smo računali kod 0-stabilnosti. Analogno možemo definirati apsolutnu stabilnost.

**Definicija 2.5.10.** *Linearna višekoračna metoda je **apsolutno stabilna** za određenu vrijednost  $\bar{h} = ah$  ako su sva rješenja  $\{U_n\}$  rekurzije*

$$\pi_{\bar{h}}U_n = [\rho(Z) - \bar{h}\sigma(Z)] U_n = 0$$

*ograničena kada  $n \rightarrow \infty$ .*

Kao što smo i kod 0-stabilnosti izrekli jednostavan kriterij kojim možemo provjeriti je li metoda 0-stabilna, to ćemo napraviti i za apsolutnu stabilnost. Sljedeći teorem daje jednostavan kriterij za provjeru je li višekoračna metoda apsolutno stabilna.

**Teorem 2.5.11.** *Višekoračna metoda je apsolutno stabilna za određenu vrijednost  $\bar{h} := ah$  ako i samo ako sve nultočke polinoma  $\pi_{\bar{h}}(z)$  zadovoljavaju  $|z| \leq 1$ , i svaka nultočka za koju je  $|z| = 1$  je jednostruka.*

Za neke  $\bar{h}$  linearna višekoračna metoda će biti apsolutno stabilna, dok za neke  $\bar{h}$  će biti apsolutno nestabilna. Nas zanima za koje sve  $\bar{h}$  će višekoračna metoda biti apsolutno stabilna.

**Definicija 2.5.12.** ***Područje stabilnosti**  $S$  višekoračne metode je skup svih  $\bar{h} \in \mathbb{C}$  za koje je metoda apsolutno stabilna.*

Prema navedenoj definiciji, linearna višekoračna metoda je stabilna ako i samo ako 0 pripada njenom području stabilnosti.

**Primjer 2.5.13.** *Odredimo područje stabilnosti za Eulerovu metodu (1.16). Polinomi  $\rho$  i  $\sigma$  za Eulerovu metodu su:  $\rho(z) = z - 1$  i  $\sigma(z) = 1$ , pa je polinom stabilnosti*

$$\pi_{\bar{h}}(z) = (z - 1) - \bar{h} \cdot 1 = z - (1 + \bar{h}).$$

Nultočka polinoma je jednaka  $1 + \bar{h}$ . Iz Teorema 2.3.11. i Definicije 2.3.12. znamo da je područje stabilnosti  $|1 + \bar{h}| \leq 1$ , tj.

$$S = \{\bar{h} \in \mathbb{C} : |1 + \bar{h}| \leq 1\}.$$

Primjetimo da  $|1 + \bar{h}| \leq 1$  možemo zapisati kao  $|\bar{h} - (-1)| \leq 1$ , pa je područje stabilnosti krug sa središtem u  $-1$  i radijusom  $1$ .

**Primjer 2.5.14.** Područje stabilnosti za midpoint metodu (1.20) pri čemu su  $\rho(z) = z^2 - 1$  i  $\sigma(z) = 2z$  dobivamo tražeći nultočke polinoma

$$\pi_{\bar{h}}(z) = (z^2 - 1) - 2\bar{h}z - 1,$$

a nultočke zadovoljavaju jednadžbu

$$z - \frac{1}{z} = 2\bar{h}.$$

Daljnim računom, tj. rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo da je područje stabilnosti modificirane Eulerove metode jednako

$$S = \langle -i, i \rangle$$

Cijeli račun može se pronaći u ([11]).

Područja stabilnosti za Adams-Bashforth-ove metode reda 1-3, Adams-Moulton-ove reda 3-6 i BDF metode reda 1-6 mogu se pronaći u ([10]).

**Primjer 2.5.15.** Koristeći apsolutnu stabilnost odredimo koji je dobar  $h$  između  $h = 0.5$  i  $h = 0.1$  za rješavanje jednadžbe

$$u' = -10u, \quad u(0) = 1,$$

Eulerovom metodom. Korak Eulerove metode ima oblik:

$$\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ U_{j+1} &= U_j + h(-10)U_j = (1 - 10h)U_j \\ U_{j+1} &= (1 - 10h)^{j+1}U_0 = (1 - 10h)^{j+1} \end{aligned}$$

Da rješenje bude stabilno, mora vrijediti

$$|1 - 10h| \leq 1 \iff |1 + \bar{h}| \leq 1$$

za  $\bar{h} = -10h$ . Dakle,  $\bar{h}$  mora zadovoljavati

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 + \bar{h} \leq 1 \\ -2 &\leq \bar{h} \leq 0 \\ -2 &\leq -10h \leq 0 \\ \frac{1}{5} &\leq h \leq 0 \iff 0.2 \leq h \leq 0, \end{aligned}$$

dakle, za korak  $h = 0.1$  zadovoljava gornju nejednakost, dok  $h = 0.5$  ne zadovoljava.

## 2.6 Prediktor-korektor metode

Pretpostavimo da trebamo riješiti inicijalni problem (1),(2) koristeći implicitnu linearnu višekoračnu metodu. Tada u svakom koraku za  $U_{n+s}$  moramo riješiti implicitni sustav

$$U_{n+s} + \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j U_{n+j} = h\beta_s f(t_{n+s}, U_{n+s}) + h \sum_{j=0}^{s-1} \beta_j f_{n+j}.$$

Tražimo fiksnu točku iteracije

$$U_{n+s}^{[v+1]} + \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j U_{n+j} = h\beta_s f(t_{n+s}, U_{n+s}^{[v]}) + h \sum_{j=0}^{s-1} \beta_j f_{n+j},$$

koja će uz dovoljno mali  $h$  i uz uvjet da je  $f$  Lipschitz-ova po drugoj varijabli konvergirati prema jedinstvenom rješenju pod uvjetom da  $h \leq \frac{1}{|\beta_s|L}$ .

Iako ćemo imati konvergenciju za proizvoljni  $U_{n+s}^{[0]}$ , svaki korak iteracije zahtijeva procjenu funkcije  $f$  te se broj iteracija može skratiti za dovoljno dobru početnu iteraciju  $U_{n+s}^{[0]}$ . Može se pokazati da uz dovoljno dobru početnu iteraciju dobivenu eksplicitnom višekoračnom metodom potreban je jako malo broj iteracija za dobro rješenje. Eksplicitna metoda koju koristimo za početnu aproksimaciju nazivamo **prediktor**, dok implicitnu metodu kojom rješavamo problem nazivamo **korektor**. Ovakvu metodu za rješavanje inicijalnog problema nazivamo **prediktor-korektor metoda**.

Ideja iza prediktor-korektor metode je da se koristi odgovarajuća kombinacija eksplicitnih i implicitnih metoda s boljim karakteristikama konvergencije.

Promatrat ćemo metode oblika <sup>1</sup>:

$$U_{i+1}^* = U_{i-q} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t_{i-j}, U_{i-j}) \quad (\text{prediktor})$$

$$U_{i+1} = U_{i-p} + h \sum_{k=0}^n \alpha_k f(t_{i+1-k}, U_{i+1-k}) \quad (\text{korektor})$$

$$U_{i+1} = U_{i-p} + h \sum_{k=1}^n \alpha_k f(t_{i+1-k}, U_{i+1-k}) + \alpha_0 h f(t_{i+1}, U_{i+1}^*) \quad (\text{prediktor - korektor}),$$

za  $i \geq \max\{m, q\} := a$ , te  $i \geq \max\{n-1, p\} := b$ ,  $s = \max\{a, b\}$ .

**Primjer 2.6.1.** Izračunajmo lokalnu pogrešku diskretizacije za prediktor-korektor metodu.

Lokalna pogreška diskretizacije za prediktor:

$$u_{i+1} = u_{i-q} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t_{i-j}, u_{i-j}) + h\sigma_{i+1}^*$$

Lokalna pogreška diskretizacije za korektor:

$$u_{i+1} = u_{i-p} + h \sum_{k=0}^n \alpha_k f(t_{i+1-k}, u_{i+1-k}) + h\sigma_{i+1}$$

Lokalna pogreška diskretizacije za prediktor-korektor:

$$u_{i+1} = u_{i-p} + h \sum_{k=1}^n \alpha_k f(t_{i+1-k}, u_{i+1-k}) + h\alpha_0 f(t_{i+1}, u_{i+1}^*) + h\tau_{i+1},$$

pri čemu je  $u_{i+1}^* = u_{i-q} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t_{i-j}, u_{i-j})$ , a  $\tau_{i+1}$  lokalna greška diskretizacije prediktor-korektor metode. Iz greške diskretizacije za prediktor slijedi da je

$$u_{i+1} - u_{i+1}^* = h\sigma_{i+1}^*. \quad (2.19)$$

Oduzimanjem greške diskretizacije prediktor-korektor metode od greške diskretizacije korektor metode dobivamo

$$\tau_{i+1} = \sigma_{i+1} + \alpha_0 (f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_{i+1}, u_{i+1}^*)),$$

i pretpostavimo da je  $f$  Lipschitzova dobivamo:

$$\tau_{i+1} = \sigma_{i+1} + \alpha_0 \frac{\partial f(\xi)}{\partial u} (u_{i+1} - u_{i+1}^*) = \sigma_{i+1} + \alpha_0 h \sigma_{i+1}^* \frac{\partial f(\xi)}{\partial u},$$

<sup>1</sup>Teorija o prediktor-korektor metodama je preuzeta iz ([11])



time smo lokalnu grešku diskretizacije prediktor-korektor metode izrazili preko grešaka eksplicitne i implicitne metode. Ako pretpostavimo da  $\sigma_{i+1} = O(h^k)$  i da je barem  $\sigma_{i+1}^* = O(h^{k-1})$ , iz gornjeg računa vidimo da će lokalna greška diskretizacije biti reda  $O(h^k)$ , čime smo pokazali da red prediktora može biti za red manji od reda korektora.

**Primjer 2.6.2.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u' = t + u - 1$ ,  $u(0) = 1$  na intervalu  $[0, 2]$  uz  $h = 0.2$  koristeći prediktor -korektor metodu (AB3 i AM3).

U tablici 2.5 su prikazani rezultati rješavanja diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći prediktor -korektor metodu pri čemu je korištena AB3 metoda kao prediktor i AM3 metoda kao korektor.

$t_k$	$U_k$	egzaktno	apsolutna greška	relativna greška
0.00	1.00000	1.00000	0.00	0.00
0.20	1.02140	1.02140	$2.76 \times 10^{-6}$	$2.70 \times 10^{-6}$
0.40	1.09182	1.09182	$6.74 \times 10^{-6}$	$6.17 \times 10^{-6}$
0.60	1.22206	1.22212	$5.65 \times 10^{-5}$	$4.63 \times 10^{-5}$
0.80	1.42541	1.42554	$1.30 \times 10^{-4}$	$9.11 \times 10^{-5}$
1.00	1.71805	1.71828	$2.32 \times 10^{-4}$	$1.35 \times 10^{-4}$
1.20	2.11974	2.12012	$3.74 \times 10^{-4}$	$1.76 \times 10^{-4}$
1.40	2.65463	2.65520	$5.67 \times 10^{-4}$	$2.14 \times 10^{-4}$
1.60	3.35221	3.35303	$8.27 \times 10^{-4}$	$2.47 \times 10^{-4}$
1.80	4.24847	4.24965	$1.17 \times 10^{-3}$	$2.76 \times 10^{-4}$

Tablica 2.5: Rješavanje diferencijalne jednadžbe  $u' = t + u - 1$  koristeći prediktor -korektor metodu uz  $h = 0.2$

Ocjena greške prediktor-korektor metode, kao i računanje područja stabilnosti može se pronaći u ([11]).

## 2.7 Krute jednadžbe

Kada smo pričali o BDF metodi spomenuli smo da se zbog svojih dobrih svojstava stabilnosti uvelike koristi za rješavanje krutih jednadžbi. Za krute jednadžbe ne postoji točna definicija već govorimo o svojstvima takvih jednadžbi koja se najčešće spominju, a to su [10]:

1. Stabilnost ima veći utjecaj na veličinu koraka  $h$  nego točnost.

2. Eksplicitne metode ne funkcioniraju na takvim jednadžbama.
3. Problem se sastoji od različitih vremenskih skala.

Rješavanje takvih jednadžbi je puno efikasnije korištenjem implicitnih metoda jer eksplicitne metode uglavnom imaju mala područja stabilnosti. Kod krutih jednadžbi traženo rješenje tj. aproksimacija se sporo mijenja i neće biti stabilna, tj., ako postoje rješenja u blizini, aproksimacija će se dramatično promijeniti. Zbog toga trebamo uzeti jako male korake  $h$  kako bismo postigli razumne rezultate. Primjenu krutih jednadžbi (ili sustava) najčešće srećemo u znanosti gdje trebamo modelirati fizičke pojave s vrlo različitim skalarnim ljestvama. Za efikasno rješavanje potrebne su nam metode koje imaju veliko područje stabilnosti. Kao što smo rekli u Primjeru 1.1.1. za metode su problematična rješenja koja jako brzo eksponencijalno trnu i ako ih želimo dobro računati potrebno je s negativne strane  $x$ -osi ograničavati veličine koraka.

**Definicija 2.7.1.** *Linearna višekoračna metoda je **A-stabilna** ako područje stabilnosti sadrži cijelu lijevu poluravninu  $Re\bar{h} \leq 0$ . Ona je  $A(\alpha)$ -stabilna za  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  ako područje stabilnosti sadrži beskonačni sektor  $|\arg\bar{h} - \pi| \leq \alpha$ . Ona je  $A(0)$ -stabilna ako je  $A(\alpha)$ -stabilna za za neki  $\alpha \geq 0$ .*

$A$ -stabilne metode će dobro raditi na gotovo svim krutim problemima. Sljedeći teorem nam daje odgovor na pitanje zašto su BDF metode toliko koriste pri rješavanju krutih sustava.

**Teorem 2.7.2** (Druga Dahlquistova barijera). *Red točnosti implicitne  $A$ -stabilne višekoračne metode zadovoljava  $p \leq 2$ . Eksplicitna metoda ne može biti  $A$ -stabilna.*

Spomenimo još samo da su BDF metode  $A(0)$ -stabilne za  $p \leq 6$ .

**Primjer 2.7.3.** *Primjer  $A$ -stabilne metode je trapezna metoda definirana kao*

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}(f(t_n, U_n) + f(t_{n+1}, U_{n+1})).$$

*Njeno područje stabilnosti je  $S = \langle -i, i \rangle$ .*

# Bibliografija

- [1] M. Schatzman, Numerical Analysis. A Mathematicial Introduction. Oxford, 2002.
- [2] E. Isaacson, H. Bishop Keller, Analysis of Numerical Methods, Dover Publications, INC., New York, 1994.
- [3] J. I. Buchanan, P. R. Turner, Numerical Methods and Analysis, McGraw-Hill, New York, 1992.
- [4] Z. Drmač, M. Marušić, S. Singer, V. Hari, M. Rogina, S. Singer, Numerička analiza (predavanja i vježbe), Zagreb, 2003.
- [5] J. Todić, Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi za inicijalni problem, Diplomski rad, Osijek, 2011.
- [6] E. Alberdi Celaya, J. J. Anza, BDF- $\alpha$ : A Multistep Method with Numerical Damping Control, Universal Journal of Computational Mathematics 1(3): 96-108, 2013.
- [7] J. D. Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Systems, The Initial Value Problem, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [8] D. G. Zill, A first course in Differential equations with Modeling Applications, Richard Stratton, 2012.
- [9] E. Süli, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, 2014., dostupno na: <https://people.maths.ox.ac.uk/suli/nsodes.pdf> [10.kolovoza 2021.]
- [10] L. N. Trefethen, Finite Difference and Spectral methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Cornell University, 1996., dostupno na: <https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdefront.pdf> [3.rujna 2021.]
- [11] T. Bosner, Numeričke metode u fizici 1, predavanja u akademskoj godini 2020./2021., dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nmf/materijali.php?nmf1> [10.kolovoza 2021.]

# Sažetak

U ovom radu proučavali smo jednokoračne i višekoračne metode za rješavanje inicijalnog problema za obične diferencijalne jednačbe. Ovakve metode su u 20. stoljeću jako napredovale u numeričkoj analizi posebno zbog kompjuterizacije i potrebe za matematičkim modeliranjem efektivnih numeričkih algoritama. Definirali smo jednokoračne metode i analizirali konvergenciju tih metoda uz pomoć konzistencije i stabilnosti. Od jednokoračnih metoda spomenuli smo Eulerovu metodu, poboljšanu Eulerovu, midpoint te Runge-Kutta metode. Za svaku metodu na konkretnom primjeru računali smo aproksimacije te greške metoda, te smo na kraju dali usporedbu grešaka tih metoda. Za višekoračne metode dana je definicija te je analizirana stabilnost i konvergencija. Od višekoračnih metoda spomenuli smo Adamsove, BDF metode, prediktor-korektor metode i krute sustave. Za Adams-Bashforth-ove i prediktor-korektor metode na konkretnom primjeru računali smo aproksimacije te greške metoda.

# Summary

In this paper we are examining one-step and multistep numerical methods for solving initial value problem for ordinary differential equations. These methods made enormous progress during the 20th century in numerical analysis especially because of electronic computers and the needs in mathematical modelling of efficient numerical algorithms. We defined one-step methods and analyzed the convergence of these methods with the help of consistency and stability. As part of one-step methods, we mentioned the Euler method, the improved Euler method, the midpoint, and Runge-Kutta methods. For each method on a specific example, we calculated the approximations and errors of the methods, and finally gave a comparison of the errors of these methods. As part of multi-step methods, a definition is given and stability and convergence are analyzed. Of the multi-step methods, we mentioned Adams, BDF methods, predictor-corrector methods, and stiff systems. For the Adams-Bashforth and predictor-corrector methods, we calculated approximations of this method error on a concrete example.

# Životopis

Rođena sam 12. srpnja 1989. godine u Požegi. Osnovnu školu završila sam 2004. godine u Pleternici, i iste godine sam upisala Gimnaziju u Požegi, opći smjer. Maturirala sam 2008. godine i iste godine upisala Preddiplomski sveučilišni studij matematike. Par godina nakon završetka preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij Matematika i informatika, smjer nastavnički. Tijekom svog obrazovanja učila sam strane jezike, te obavljala razne poslove. Zadnje tri godine sam radila u Ericsson Nikola Tesla kao QA tester i software developer. Također, dugi niz godina dajem instrukcije iz matematike pokušavajući približiti matematiku onima koji je ne vole, ali i pokazati ljepotu matematike i zainteresirati mlađe generacije za prirodne znanosti.