Aproksimacija i interpolacija

Kranjec, Anamarija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Kranjec

APROKSIMACIJA I INTERPOLACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Tina Bosner

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem tati, mami i braći.Veliko hvala mami koja ja vjerovala, odricala se i omogućila mi ovaj studij. Hvala Danijel, Antonio, Patricija na podršci i bezuvjetnoj potpori.

Hvala svim divnim kolegama koji su olakšali i uljepšavali ovaj studij i svim prijateljima i dragim ljudima koji su uvijek imali riječi podrške.

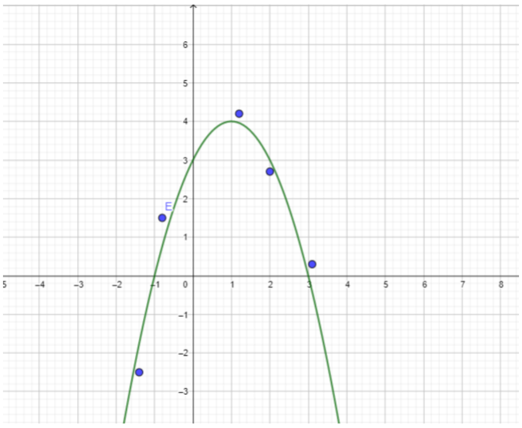
Hvala dragoj menorici doc. dr. sc. Tini Bosner na svima savjetima, strpljenju i lijepoj suradnji tijekom pisanja diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

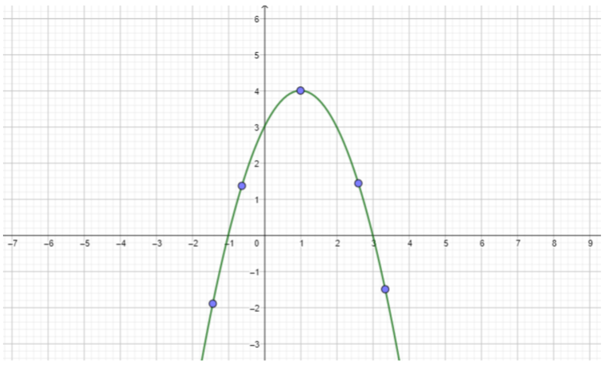
Pojam aproksimacije dolazi od latinske riječi *aproximation* što znači približno, približnost. U matematici aproksimacija označava postupak nalaženja funkcije koja će opisati neki konačni skup točaka ili neku drugu funkciju. Cilj aproksimacije je odrediti funkciju koja će najbolje opisati dani skup podataka, tj. najmanje odstupati od danog skupa podataka. Često funkcija, koju pokušavamo aproksimirati, nije ni poznata, već znamo samo konačan broj njezinih točaka. S druge strane imamo pojam interpolacije. Interpolacija dolazi od riječi *inter* između i *polos* os, osovina, odnosno točka, čvor. Interpolacija je zahtjev da se vrijednosti funkcija f i φ podudaraju na nekom konačnom skupu točaka koje nazivamo čvorovima interpolacije. Interpolacijom dolazimo do funkcija koje točno prolaze kroz sve zadane točke. Možemo je opisati kao svako izračunavanje nove točke između dviju ili više postojećih točaka. Kako bi približili pojam interpolacije, najjednostavniji primjer je izračun aritmetičke sredine iz vrijednosti dviju susjednih točaka kako bi se odredila točka u njihovoj sredini. Razlika interpolacije i aprokismacije je u tome što interpolacija podrazumijeva prolazak funkcije kroz točno sve zadane točke dok aproksimacija podrazumijeva prolazak funkcije kroz određene podatke na najbolji mogući način. U oba slučaja javljaju se odstupanja. [4], [19]

Odakle potreba za aproksimacijom? Aproksimacija se javlja ako je poznata funkcija f čija je forma prekomplicirana za računanje, nema analitičkog izraza za funkciju i sl. Tada odabiremo neke informacije o funkciji f i po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju φ. Uz to možemo napraviti ocjenu greške dobivene aproksimacije s obzirom na pravu vrijednost funkcije f. Također ako funkcija f nije poznata, ali su poznate neke informacije o njoj, npr. vrijednosti na nekom skupu točaka, tada aproksimacijsku funkciju određujemo iz danih informacija koje uključuju i očekivani oblik ponašanja te aproksimacijske funkcije φ. Ocjena greške u ovom slučaju ne može se napraviti bez dodatnih informacija o funkciji f. Češće se u praksi javlja aproksimiranje funkcije kojoj su dani samo neki izmjereni podaci pa se osim tih podataka pokušava aproksimirati i podatke koji se nalaze između izmjerenih podataka. Naravno tada se javljaju greške koje se ublažavaju. Postavlja se prirodno pitanje kako odabrati aproksimacijsku funkciju φ. Funkcija φ bira se prema prirodi modela s ciljem da bude što jednostavnija za računanje, najčešće su to algebarski polinomi, trigonometrijski polinomi, eksponencijalne i racionalne funkcije. [19]



Slika 0.1: Primjer aproksimacije kvadratnom funkcijom

Izvor: Izrada u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*



Slika 0.2: Primjer interpolacije kvadratnom funkcijom

Izvor: Izrada u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*

Poglavlje 1

Opći problem aproksimacije

1.1 Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\varphi = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

gdje su $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ poznate funkcije koje znamo računati. Linearnost se odnosi na ovisnost funkcije φ o parametrima a_k koje treba odrediti. Ovaj oblik aproksimacijske funkcije najčešće vodi na rješavanje sustava lienarnih jednadžbi.

1. Algebarski polinom, $\varphi_k(x) = x^k, k = 0, ..., m$, tj.

   $$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m.$$

   Funkciju $\varphi(x)$, osim u bazi običnih potencija $\{1, x, ..., x^m\}$, možemo zapisati i u nekoj drugoj bazi, npr. $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), ...\}$ gdje su $x_0, x_1, \ldots$ zadane točke.

2. Trigonometrijski polinomi koriste se u modeliranju signala. Za funkciju φ_k uzima se $m + 1$ funkcija iz skupa

   $$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}.$$

3. Splajn funkcije ili po dijelovima polinomi. Ako su zadane točke $x_0, \ldots, x_n$, onda se splajn funkcija na svakom podintervalu svodi na polinom određenog fiksnog stupnja tj.

   $$\varphi\Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

   a p_k su polinomi najčešće stupnjeva 1, 2, 3 ili 5. Splajnovi su dobri jer dobro kontroliraju oblik aproksimacijske funkcije i imaju dobra svojstva s obzirom na grešku aproksimacije. [19]

1.2 Nelinearne aproksimacijske funkcije

1. Eksponencijalne aproksimacije

$$\varphi(x) = c_0 e^{b_0 x} + c_1 e^{b_1 x} + \cdots + c_r e^{b_r x}$$

koje imaju $n = 2r + 2$ nezavisna parametra koje opisuju problem populacije, rast i odumiranje populacija, hlađenje tijela (Newtonov zakon hlađenja), potrošnje resursa, širenje bolesti, itd.

2. Racionalne aproksimacije

$$\varphi(x) = \frac{b_0 + b_1 x \cdots + b_r x^r}{c_0 + c_1 x \cdots + c_s x^s}$$

koje imaju $n = r + s + 1$ nezavisni parametar. Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadna teorija je relativno nova. [19]

1.3 Kriterij aproksimacije

Funkciju φ, kojom ćemo aproksimirati funkciju f ili dani skup podataka, biramo tako da odstupanje funkcije φ od dane funkcije ili skupa podataka bude minimalno ili da graf aproksimacijske funkcije prolazi određenim točkama. Te točke nazivamo čvorovima interpolacije. Možemo spomenuti da se uz ovaj zahtjev može dodati da se u čvorovima poklapaju i vrijednosti nekih derivacija. Kod interpolacije, kada tražimo podudaranje funkcijskih vrijednosti, koristimo samo podatke o funkciji f koji govore o njenoj vrijednosti na skupu od $(n+1)$ točaka, tj. zapisano uređenim parom (x_k, f_k) za $f_k = f(x_x), k = 0, \ldots, n$. Parametri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aproksimacijske funkciju φ određuju se iz uvjeta

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n) = f_k \quad k = 0, ..., n. \quad [19]$$

Minimizacija pogreške

Već je spomenuto da prilikom određivanja aproksimacijske funckije φ neke funkcije f dolazi do odstupanja, tj. pogrešaka te je drugi kriterij za određivanje parametara aproksimacijske funkcije minimizacija tih pogrešaka. Potrebno je minimizirati neku odabranu normu pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x)$$

u nekom odabranom vektorskom prostoru funkcija definiranih na nekoj domeni X. Ovisno o tome minimizira li se norma pogreške na diskretnom ili kontinuiranom skupu podataka X, aproksimacije po normi dijele se na diskretne i kontinuirane. Najčešće se koriste 2-norma (euklidska norma) i ∞-norma. [19]

Euklidska norma ili 2-norma definirana za neki vektor x iz $\mathbb{C}$ s komponentama x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ u oznaci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Za 2-normu pripadna se aproksimacija zove srednjekvadratna, a metoda za njeno nalaženje zove se metoda najmanjih kvadrata. Parametri funkcije φ traže se tako da norma pogreške, $\|e\|_2$ bude minimalna na X. Na diskretnom skupu podataka $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zathjev minimalnosti je

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2} \rightarrow \min.$$

U kontinuiranom slučaju zahtjev minimalnosti je

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx} \rightarrow \min.$$

Kako je drugi korijen rastuća funkcija na svojoj domeni, potrebno je minimizirati samo izraz pod korijenom. [19], [21]

∞-norma za neki vektor x iz $\mathbb{C}$ s komponentama x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ u oznaci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

Parametri funkcije φ traže se tako da norma pogreške $\|e\|_\infty$ bude minimalna na X. Aproksimacija u slučaju ∞-norme zove se minimaks aproksimacija. Na diskretnom skupu podataka zahtjev minimalnosti je

$$\max_{k=0,\ldots,n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min$$

dok u kontinuiranom slučaju imamo

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow \min.$$

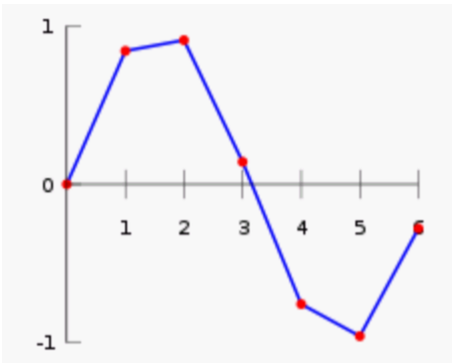
Ovaj tip aproksimacije općenito je teže izračunati, ali zna biti poželjniji od srednjekvadratne aproksimacije. [19], [21]

Dakle, pitanja na koja treba odgovoriti je iz koje klase funkcija odabrati aproksimacijsku funkciju te ispitati koja aproksimacija daje najmanje odstupanje od danih podataka, tj. najbolju minimizaciju pogreške.

Poglavlje 2

Interpolacija polinomima

Ako pratimo ovisnost dvije fizikalne veličine, a ne znamo analitički izraz koji opisuje njihovu zavisnost, ali imamo mjerenja koja upućuju na tu zavisnost, onda tražimo funkciju koja će prolaziti tim točkama, tj. opisati tu ovisnost. Postoje mnoge metode kojima možemo naći odgovarajuću funkciju. Te se metode razlikuju u pouzdanosti, točnosti, količini potrebnih podataka, složenosti, glatkoći interpolanta. Primjerice, linearna interpolacija temelji se na korištenju jednadžbi pravca kroz dvije točke koju koristmo kako bi povezali susjedne točke skupa podataka. Ova metoda je jednostavna, brza, ali ima veliku grešku, nediferencijabilna je i ne daje glatku funkciju. [9]



Slika 2.1: Primjer linearne interpolacije

Izvor:[9]

Interpolacija polinomima temelji se na korištenju polinoma višeg stupnja. Ova metoda je preciznija, daje glatku i diferencijabilnu funkciju. S druge strane može biti složena za računanje. Rješenje interpolacijskog problema je naći polinom p_n koji prolazi danim točkama $(x_i, f(x_i))$. [9]

2.1 Egzistencija i jedinstvenost interpolacijskog polinoma

Teorem 2.1.1. *Neka je $n \in N_0$. Za zadane točke (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše n*

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Dokaz: Neka je $p_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinom stupnja najviše n. Uvjete interpolacije možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f_0 \\ p_n(x_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ p_n(x_n) &= f_n. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\ &\vdots \\ p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n. \end{aligned}$$

Je li ovo jedini polinom utvrdit ćemo tako da provjerimo ima li sustav od $(n + 1)$-e linearne jednadžbe sa $(n + 1)$-om nepoznanicom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jedinstveno rješenje. Da bi rješenje bilo jedinstveno, kvadratna matrica linearnog sustava mora biti regularna (Cramer). Vrijedi da je matrica regularna ako i samo ako je determinanta te matrice različita od nule. Stoga je potrebno izračunati vrijednost determinante matrice ovog sustava linearnih jednadžbi. Ta determinanta je Vandermondeova determinanta:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Rezultat Vandermondeove determinante je

$$D_n = \prod_{0 \leq j \leq i \leq n} (x_i - x_j).$$

Kako su $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ tada je $D_n \neq 0$. Tada je matrica linearnog sustava regularna, tj. sustav ima jedinstveno rješenje $a_0, a_1, \ldots, a_n$ za koeficijente polinoma p_n tj. interpolacijski polinom p_n je jedinstven. [19] □

Primjer 1.

Odredimo interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama:

x_i	0	-1	1
f_i	1	2	3

Rješenje: Prema teoremu 2.1.1 postoji interpolacijski polinom stupnja 2: $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Dane točke $(0, 1), (-1, 2), (1, 3)$ uvrstimo u $p_n(x)$ pa dobivamo:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 &= 1 \\ a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 &= 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 &= 3, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_0 - a_1 + a_2 &= 2 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 3 \end{aligned}$$

Cramerovim pravilom [1] riješimo sustav: [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{a}_0 \\ \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

[1] Cramerovo pravilo je pravilo kojim rješavamo sustav linernih jednadžbi $Ax = b$ tako da pomoću metode suprotnih koeficijenata dobijemo formulu za rješenja $a_i = D_i/D, i = 0, 1, \ldots, n-1$ gdje je D determinanta matrice A, a D_i determinanta matrice koju dobijemo tako da se u matrici A $i-$ti stupac zamijeni vektorom b.

Vandermondeova determinanta ili determinanta matrice sustava A je:

$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) = (1 - (-1))(1 - 0)(-1 - 0) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$

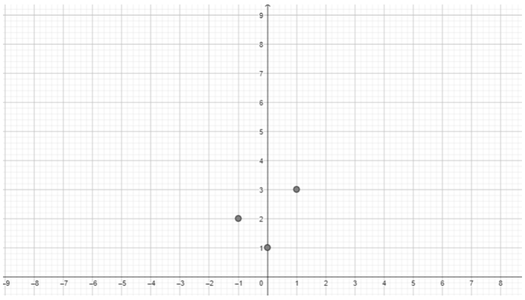
Preostaje odrediti vrijednosti determinanta matrica D_0, D_1 i D_2. Sarrusovim pravilom [2] odredimo te determinante i dobivamo $D_0 = -2$, $D_1 = -1, D_2 = -3$. [15]

Rješenje sustava je

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{-2}{-2} = 1,$$
$$a_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2},$$
$$a_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Sada odredimo interpolacijski polinom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Interpolacijski polinom glasi

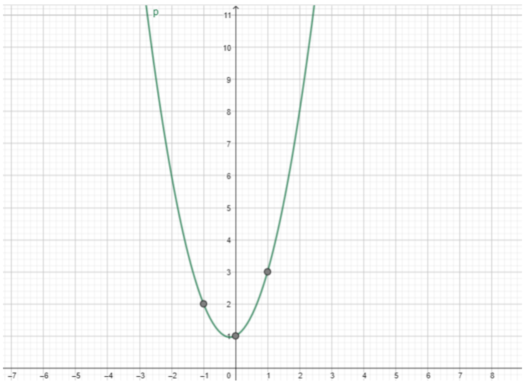
$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2.$$



Slika 2.2: Zadani podaci - točke

Izvor: Izrada u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*

[2] Sarrusovo pravilo je metoda za izračunavanje determinante matrice 3×3. Naziv je dobila po francuskom matematičaru Pierreu Frédéricu Sarrusu. Determinanta matrice 3×3 može se izračunati preko sljedeće sheme: Prepišu se prva dva stupca matrice iza trećeg stupca tako da se na kraju dobije pet stupaca. Tada se zbroje vrijednosti sa dijagonala koje idu od vrha prema dnu, a oduzmu vrijednosti sa dijagonala koje idu od dna prema vrhu.



Slika 2.3: Interpolacijski polinom koji opisuje dani niz podataka

Izvor: Izrada u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*

Traženje koeficijenata interpolacijskog polinoma rješavajući sustav linearnih jednadžbi nekad može biti zamorno. Stoga ćemo koeficijente interpolacijskog polinoma naći koristeći Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma. [9]

2.2 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Za zadani niz točaka (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n) interpolacijski polinom p_n zapisat ćemo korištenjem Lagrangeove baze $\{l_k, k = 0, 1, \ldots, n\}$ prostora polinoma $\mathcal{P}_n$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x).$$

Polinome l_k zovemo Lagrangeovim koeficijentima ili funkcijama Lagrangeovih baza za koje vrijedi

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{za } i = k \\ 0, & \text{za } i \neq k. \quad [19] \end{cases}$$

Prema [9] interpretiramo kao da graf polinoma l_k siječe x-os u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, a u točki x_k poprima vrijednost 1. Tada su $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ nultočke polinoma l_k pa vrijedi

$$l_k(x) = C_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

i $l_k(x_k) = 1$. Tada je

$$1 = C_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n).$$

Koeficijent C_k je

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Tada je pomoćni polinom l_k jednak

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$
$$k = 0, \dots, n.$$

Za polinom p_n čiji graf prolazi točkama (x_k, y_k) vrijedi $p_n(x_k) = y_k$ za $k = 0, \dots, n$. Taj polinom p_n možemo zapisati kao linearnu kombinaciju polinoma l_k,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x),$$

tj.prema [9] Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma glasi:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Prema [20] definiramo

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{2.1}$$

i

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n}(x - x_i), \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

pa vrijedi

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

2.3 Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Teorem 2.3.1. *Pretpostavimo da funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a, b]$ za neki $n \in \mathbb{N}_0$. Neka su $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ i neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f u tim čvorovima. Za bilo koju točku $x \in [a, b]$ postoji točka ξ iz otvorenog intervala*

$$x_{min} := min\{x_o, \dots, x_n, x\} < \xi < max\{x_0, \dots, x_n, x\} =: x_{max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \tag{2.3}$$

pri čemu je $\omega(x)$ *definirano relacijom* (2.1)

Dokaz: Ako je $x = x_k$, za neki $k \in \{0, \ldots, n\}$, iz $f(x_k) = p_n(x_k)$ i definicije polinoma ω dobivamo da su obje strane u (2.3) jednake 0 pa teorem vrijedi. Pretpostavimo da x nije čvor interpolacije. Tada je $\omega(x) \neq 0$ i greška interpolacije je

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x)$$

gdje je $s(x)$ dobro definirano ako x nije čvor. Neka je x fiksan i definirajmo funkciju

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t)\frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b]. \tag{2.4}$$

Funkcija pogreške e ima onoliko derivacija (po t) koliko ima i f i one su neprekidne kad su to i derivacije od f. Kako x nije čvor isto vrijedi i za funkciju g, tj. funkcija $g^{(n+1)}$ je korektno definirana na $[a, b]$. Odredimo koliko nultočaka ima funkcija g. Ako za t uvrstimo x_k, dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k)\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Dakle, funkcija g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{min}, x_{max}]$. Kako je g derivabilna na tom segmentu po Rolleovom teoremu [3] slijedi da g' ima barem $n + 1$ nultočku na otvorenom intervalu (x_{min}, x_{max}). Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da $g^{(j)}$ ima barem $n + 2 - j$ nultočaka na (x_{min}, x_{max}), za $j = 0, 1, \ldots, n + 1$. Za $j = n + 1$, $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in (x_{min}, x_{max})$. Kako je polinom p_n stupnja najviše n, ω polinom stupnja $n + 1$ pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!.$$

Deriviranjem lijeve i desne strane jednadžbe (2.4) $n + 1$ puta, dobivamo:

$$g^{(n+1)}(t) = e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\frac{e(x)}{\omega(x)} = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\frac{e(x)}{\omega(x)} = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

[3] Neka je dana funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Vrijede li sljedeće pretpostavke: i) f je neprekidna na $[a, b]$ ii) f je derivabilna na (a, b) iii) $f(a) = f(b)$, onda postoji barem jedna točka $x_0 \in (a, b)$, takva da je $f'(x_0) = 0$.

pri čemu je $p_n^{(n+1)} = 0$ jer je polinom p_n polinom n-tog stupnja pa je njegova $(n+1)$-a derivacija 0. Kako $g^{(n+1)}$ ima jednu nultočku ξ to je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ pa je:

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Ako je $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a,b]$ ili ako je $f \in C^{n+1}[a,b]$, onda se može dobiti sljedeća ocjena greške interpolacijskog polinoma za funkciju f u točki $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!}M_{n+1}$$

pri čemu je $M_{n+1} := \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$. [19] □

Primjer 2.

Odredimo interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama:

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
$f(x)$	0.1411	−0.6878	−0.9962	−0.5507	0.3115

gdje je $f(x) = \sin(3x)$ i vrijednost polinoma u točki 1.5.
Rješenje: Prvo određujemo Lagrangeove koeficijente l_k, $k = 0, \ldots, 4$. Imamo:

$$l_0 = \frac{(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)(x-2.2)}{(1-1.3)(1-1.6)(1-1.9)(1-2.2)},$$

$$l_0 = 5.14403x^4 - 36.0082x3 + 93.3642x^2 - 106.224x + 44.7243.$$

$$l_1 = \frac{(x-1)(x-1.6)(x-1.9)(x-2.2)}{(1.3-1)(1.3-1.6)(1.3-1.9)(1.3-2.2)},$$

$$l_1 = -20.5761x^4 + 137.86x^3 - 338.272x32 + 358.601x - 137.613.$$

$$l_2 = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.9)(x-2.2)}{(1.6-1)(1.6-1.3)(1.6-1.9)(1.6-2.2)},$$

$$l_2 = 30.8642x^4 - 197.531x^3 + 460.185x^2 - 461.235x + 167.716.$$

$$l_3 = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-2.2)}{(1-9-1)(1.9-1.3)(1.9-1.6)(1.9-2.2)},$$

$$l_3 = -20.5761x^4 + 125.514x^3 - 279.012x^2 + 268.23x - 94.1564.$$

$$l_4 = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)}{(2.2-1)(2.2-1.3)(2-2-1.6)(2.2-1.9)},$$

$$l_4 = 5.14403x^4 - 29.8354x^3 + 63.7346^2 - 59.3724x + 20.3292.$$

Tada je Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma:

$$p_4(x) = 0.1411 \cdot l_0(x) - 0.6878 \cdot l_1(x) - 0.9962 \cdot l_2(x) - 0.5507 \cdot l_3(x) + 0.3115 \cdot l_4(x).$$

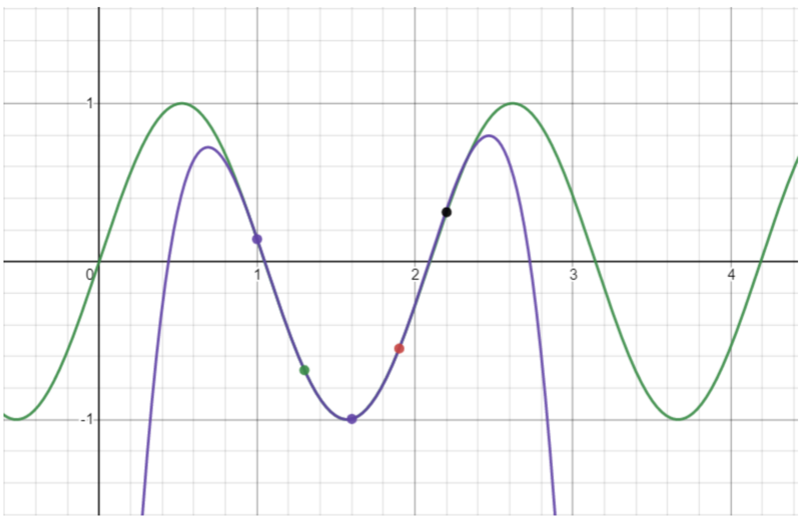
Za $x = 1.5$ imamo:

$$p_4(1.5) = 0.1411 \cdot l_0(1.5) - 0.6878 \cdot l_1(1.5) - 0.9962 \cdot l_2(1.5) - 0.5507 \cdot l_3(1.5) + 0.3115 \cdot l_4(1.5)$$

$$p_4(1.5) \approx -0.9773$$

Vrijednost funkcije f u $x = 1.5$ je:

$$f(1.5) = \sin(3 \cdot 1.5) \approx -0.9775. \quad [12]$$



Slika 2.4: Plavo: Lagrangeov interpolacijski polinom $p_4(x)$; zeleno: $f(x) = \sin(3x)$

Izvor: Izrada u programu *desmos*

Primjer 3.

Odredimo interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama:

x	-2	-1	0	4
$f(x)$	-2	4	1	8

i vrijednost polinoma za $x = 2$.
Rješenje: Prvo određujemo Lagrangeove koeficijente:

$$
\begin{aligned}
l_0 &= \frac{(x+1))(x-0)(x-4)}{(-2+1)(-2-0)(-2-4)} = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x \\
l_1 &= \frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(-1+2)(-1-0)(-1-4)} = \frac{1}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{5}x \\
l_2 &= \frac{(x+2)(x+1)(x-4)}{(0+2)(0+1)(0-4)} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 \\
l_3 &= \frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(4+2)(4+1)(4-0)} = \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{60}x
\end{aligned}
$$

Tada je Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma:

$$p_3(x) = l_0 \cdot (-2) + l_1 \cdot 4 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 8$$

Za $x = 2$ imamo:

$$p_3(2) = 1 \cdot (-2) - 3.2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 0.2 \cdot 8$$

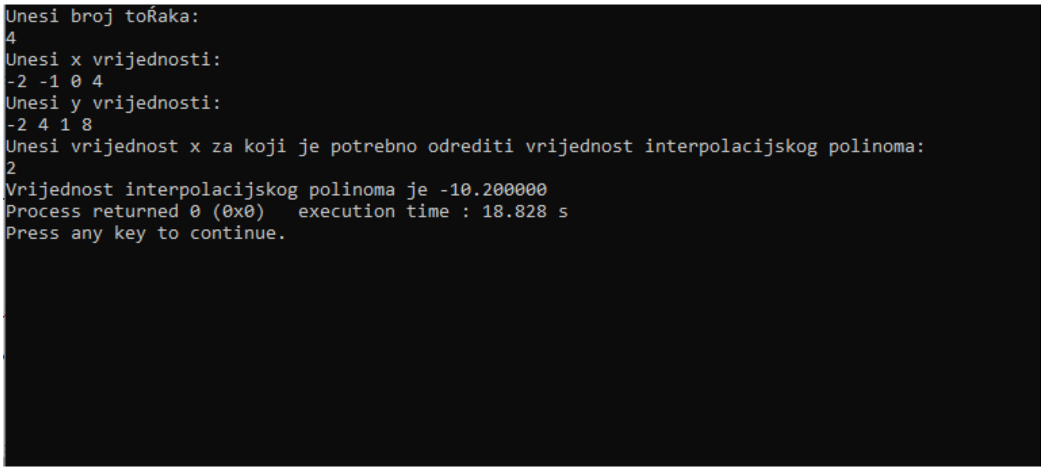
$$p_3(2) = -10.2$$

Kod za Lagrangeov interpolacijski polinom

Kod za Lagrangeov interpolacijski polinom napisan je u programskom jeziku *C* prema [7].

```
#include < stdio.h >
/* Funkcija koja računa Li(x)*/
double Li(int i, int n, double x[n + 1], double X){
    int j;
    double prod = 1;
    for( j = 0; j <= n; j + +){
        if( j! = i)
            prod=prod*(X − x[ j])/(x[i] − x[ j]);
    }
```

```
    return prod;
}
/*Funkcija koja računa Pn(x) gdje je Pn Lagrangeov interpolacijski polinom stupnja n*/
double Pn(int n, double x[n + 1], double y[n + 1], double X){
     double sum= 0;
    int i;
    for(i = 0;i <= n;i + +){
        sum=sum+Li(i,n,x,X)*y[i];
    }
     return sum;
}
main(){
    int i, n; //n je stupanj
    printf(”Unesi broj točaka:\n”);
    scanf(”%d”,&n); //broj podataka je n + 1
    n = n − 1;
    //nizovi za spremanje (n + 1) x i y vrijednosti veličine n + 1
    double x[n + 1];
    double y[n + 1];
     printf(”Unesi x vrijednosti:\n”);
    for(i = 0;i < n + 1;i + +){
        scanf(”%lf,&x[i]);
    }
    printf(”Unesi y vrijednosti:\n”);
    for(i = 0;i < n + 1;i + +){
        scanf(”%lf”,&y[i]);
    }
     double X; //vrijednost x za koji je potrebno odrediti vrijednost interpolacijskog polinoma
    printf(”Unesi vrijednost x za koji je potrebno odrediti vrijednost interpolacijskog polinoma:\n”);
     scanf(”%lf”,&X);
    printf(”Vrijednost interpolacijskog polinoma je %lf”,Pn(n, x, y, X));
}
```



Slika 2.5: Vrijednost interpolacijskog polinoma za $x = 2$

Izvor: Izrada u programskom jeziku *C*

2.4 Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nedostatak Lagrangeovog interpolacijskog polinoma je što nije pogodan kad želimo povećati stupanj interpolacijskog polinoma kako bismo poboljšali aproksimaciju ili smanjili pogrešku, zato što interpolacijski polinom moramo računati ispočetka. Postoji forma kod koje je lakše povećati stupanj interpolacijskog polinoma. Neka je p_{n-1} interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f u točkama x_k, $k = 0, \ldots, n-1$. Neka je p_n interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f još i u točki x_n. Tada polinom p_n možemo napisati u obliku

$$p_n = p_{n-1}(x) + c(x) \tag{2.5}$$

gdje je c korekcija, polinom stupnja n. Vrijedi i da je

$$c(x_k) = p_n(x_k) - p_{n-1}(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Vrijedi da su x_k nultočke od c pa je

$$c(x) = a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Iz zadnjeg uvjeta interpolacije $p_n(x_n) = f(x_n)$ dobivamo

$$f(x_n) = p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) + c(x_n) = p_{n-1}(x_n) + a_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

iz čega lako dobivamo da je vodeći koeficijent polinoma c:

$$a_n = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{\omega(x_n)}.$$

Korištenjem relacije (2.5) imamo sve elemente za računanje $p_n(x)$ u bilo kojoj točki x. Koeficijent a_n zvat ćemo n-ta podijeljena razlika;

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \tag{2.6}$$

Rekurzivna relacija za dobivanje interpolacijskog polinoma za stupanj većeg od prethodnog je:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]. \tag{2.7}$$

Dodatno za koeficijent a_n, tj. za n-tu podijeljenu razliku vrijedi da je neosjetljiva na poredak čvorova te vrijedi formula za rekurzivno računanje podijeljenih razlika:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Preostaje vidjeti što je početak za rekurzije podijeljene razlike. Ako znamo da je konstanta koja prolazi točkama $(x_0, f(x_0))$ interpolacijski polinom stupnja 0, onda je $a_0 = f[x_0] = f(x_0)$. Jednako tako vrijedi i

$$f[x_k] = f(x_k)$$

pa lako sastavljamo tablicu podijeljenih razlika:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\ldots$	$f[x_0, \ldots x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$f[x_0, \ldots x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Tablica 2.1: Tablica podijeljenih razlika

Dakle, oblik Newtonovog interpolacijskog polinoma je:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1 \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Primijetimo da od tablice podijeljenih razlika treba samo ”gornji rub”. [19]

Primjer 4.

Newtonovom metodom interpolacije izračunajmo polinom prvog stupnja koji prolazi točkama $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.
Rješenje: Interpolacijski polinom prvog stupnja (pravac) je oblika $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$.
Koeficijent a_0:

$$a_0 = f(x_0) = y_0,$$

koeficijent a_1:

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Tada je

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0). \quad [9]$$

Primjer 5.

(a) Odredimo interpolacijski polinom koji funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ interpolira u točkama s $x-$koordinatama 3, 3.8, 4.
(b) Ocijenimo grešku dobivene interpolacije u točki s x-koordinatom 3.14 i odredimo pravu grešku.
Rješenje:
(a) Prvo odredimo vrijednosti funkcije f za dane vrijednosti x-eva.

x_k	3	3.8	4
$f_k(x)$	1.73205	1.94936	2

Potom napravimo tablicu podijeljenih razlika.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
3	1.73205		
		0.27164	
3.8	1.94936		−0.01844
		0.2532	
4	2		

Tablica 2.2: Tablica podijeljenih razlika za Primjer 5.

Iz tablice podijeljenih razlika uzimamo samo "gornji rub" te dobivamo interpolacijski polinom

$$p_2(x) = 1.73205 + 0.27164 \cdot (x - 3) - 0.01844 \cdot (x - 3)(x - 3.8).$$

(b)

$$p_2(3.14) = 1.7321 + 0.27164 \cdot (3.14 - 3) - 0.01844 \cdot (3.14 - 3)(3.14 - 3.8)$$
$$p_2(3.14) = 1.73205 + 0.03803 + 0.00171$$
$$p_2(3.14) = 1.77179.$$

Prava greška iznosi:

$$|f(3.14) - p_2(3.14)| \approx |1.77201 - 1.77179| \approx 0.00022$$

Ocjenu greške naći ćemo kad odredimo treću derivaciju funkcije f, njen maksimum na intervalu $[3, 4]$ te $\omega(3.14)$:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

$$|f(3.14) - p_2(3.14)| \leq \frac{|\omega(3.14)|}{3!} M_3$$

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{2} (x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\omega(3.14) = (3.14 - 3)(3.14 - 3.8)(3.14 - 4)$$

$$\omega(3.5) = 0.07946$$

Derivacije funkcije f:

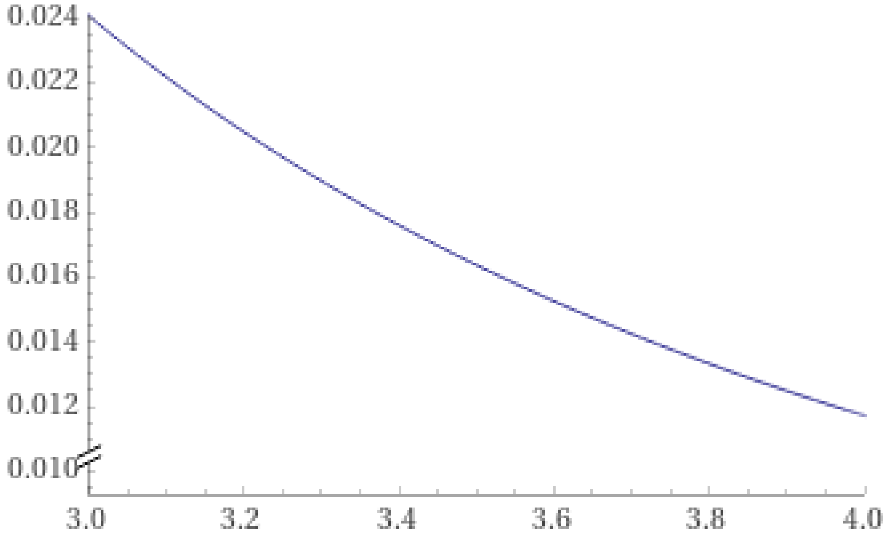
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}.$$

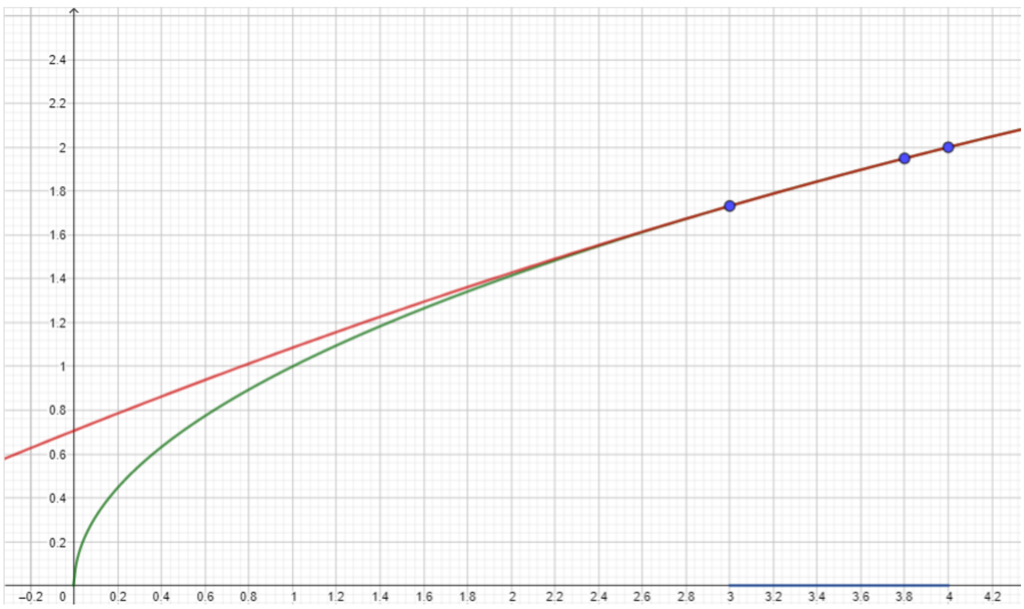
Funkcija f''' je padajuća i pozitivna funkcija na intervalu [3, 4] te se njezin maksimum postiže za $x = 3$ pa je

$$M_3 = |f'''(3)| = 0.02406.$$



Slika 2.6: Graf funkcije f''' na intervalu $[3, 4]$

Izvor: Izrada u WolframAlpha



Slika 2.7: Crveno: Newtonov interpolacijski polinom $p_2(x)$; zeleno: $f(x) = \sqrt{x}$

Izvor: Izrada u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*

Tada je ocjena greške

$$|f(3.14) - p_2(3.14)| \le \frac{0.07946 \cdot 0.02406}{3!} \approx 0.0003186.$$

Kako bismo grešku još više smanjili treba uvesti novi čvor. Prednost Newtonovog interpolacijskog polinoma naspram Lagrangeovog je što kod Newtonovog ne moramo računati sve ispočetka, već samo nadopunimo tablicu podijeljenih razlika s novim čvorom. [19]

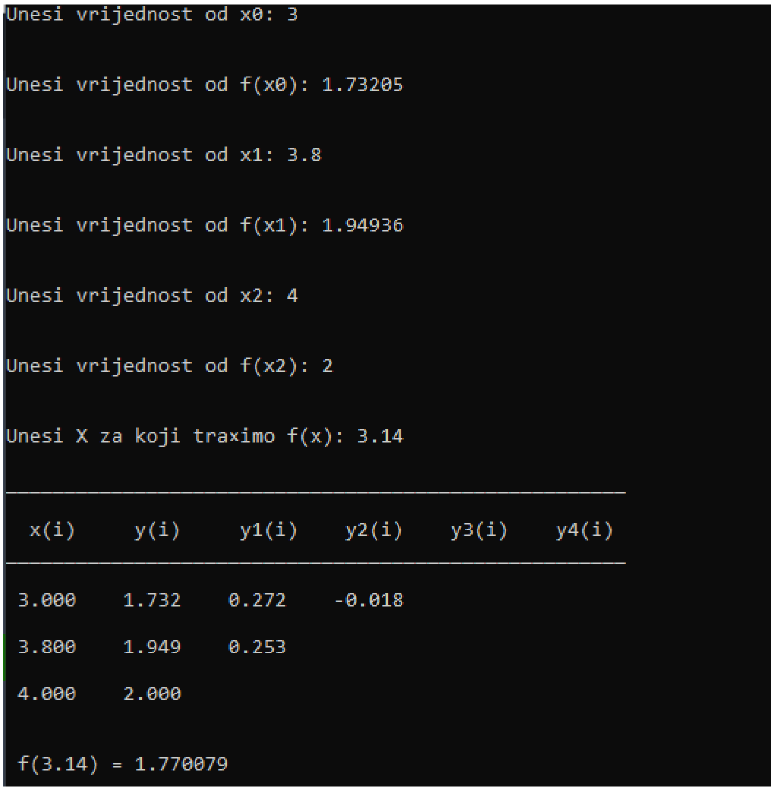
Kod za Newtonov interpolacijski polinom

Kod za Newtonov interpolacijski polinom napisan je u programskom jeziku *C* prema [1].

```
#include < stdio.h >
#include < conio.h >
#include < math.h >
int main ()
{
    float x[10], y[10], [10],sum, p, u, temp;
    int i, n, j, k = 0, f, m;
    float fact(int);

    printf("\nKoliko podataka unosimo: ");
    scanf("%d",&n);
    for(i = 0; i < n; i + +)
    {
    printf("\n\nUnesi vrijednost od x%d:",i);
    scanf("%f",&x[i]);
    printf("\n\nUnesi vrijednost od f(x%d):",i);
    scanf("%f", &y[k][i]);
    }
    printf("\n\nUnesi X za koji tražimo f(x): ");
    scanf("%f",&p);

    for(i = 1; i < n; i + +)
    {
      k = i;
      for(j = 0; j < n − i; j + +)
      {
      y[i][j]=(y[i-1][j+1] - y[i-1][j]) / (x[k]-x[j]);
      k++;
```

```
    }
}
    printf("\n ______________________________________ \n");
    printf("\n  x(i)\t  y(i)\t  y1(i)   y2(i)   y3(i)   y4(i)");
    printf("\n ______________________________________ \n");
    for(i = 0; i < n; i + +)
    {
      printf("\n%. 3f", x[i]);
      for(j = 0; j < n - i; j + +)
      {
      printf("    ");
      printf("%. 3f",y[j][i]);
      }
    printf("\n");
    }

    i = 0;
    do
    {
    if(x[i] < p && p < x[i + 1])
      k = 1;
    else
      i + +;
    }while (k   ! = 1);
    f = i;

    sum=0;
    for(i = 0; i < n - 1; i + +)
    {
      k = f;
      temp = 1;
      for(j = 0; j < i; j + +)
      {
      temp = temp * (p - x[k]);
      k + +;
      }
      sum = sum + temp * (y[i][f]);
    }
    printf("\n\n   f(%.2f) =%f", p, sum);
```

getch();
}



Slika 2.8: Vrijednost interpolacijskog polinoma za $x = 2$

Izvor: Izrada u programskom jeziku *C*

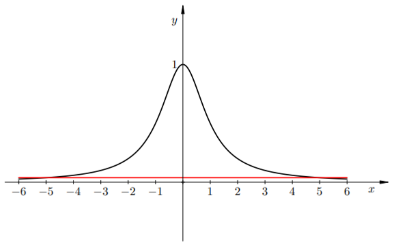
2.5 Koliko je dobar interpolacijski polinom?

Rungeov fenomen opisuje problem osciliranja na rubovima intervala koji se javlja kada se koristi interpolacijski polinom visokog stupnja na ekvidistantnoj mreži čvorova, tj. na mreži gdje je razmak između čvorova konstantan. [5]

Njemački matematičar Runge prvi je uočio probleme koji nastupaju kod interpolacije na ekvidistantnoj mreži čvorova. Konstruirao je funkciju, Runge funkciju, koja ima svojstvo da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira (po točkama) prema toj funkciji kad se broj čvorova povećava. Promotrimo interpolaciju Rungeove funkcije

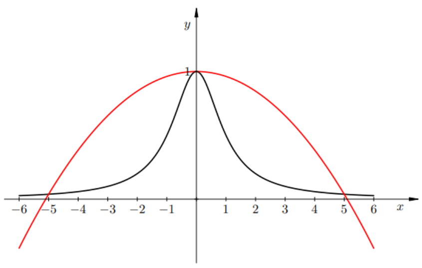
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

na ekvidistantnoj mreži, polinomima stupnjeva 1-6, 8, 10, 12, 14 i 16. Na sljedećim slikama graf funkcije f prikazan je crnom bojom, a grafovi interpolacijskih polinoma crvenom. Na slikama 2.20 - 2.30 prikazane su greške interpolacijskih polinoma stupnjeva 1-6, 8, 10, 12, 14 i 16. [14] , [19]



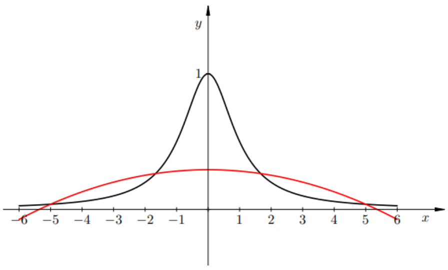
Slika 2.9: Interpolacijski polinom stupnja 1

Izvor: Skripta numerička analiza



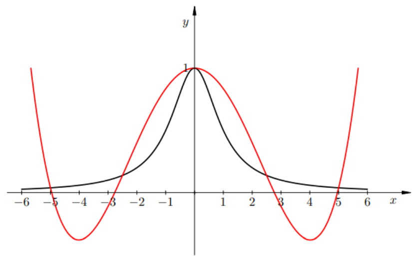
Slika 2.10: Interpolacijski polinom stupnja 2

Izvor: Skripta numerička analiza



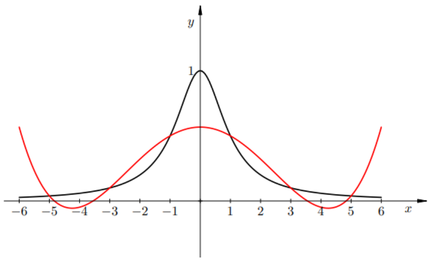
Slika 2.11: Interpolacijski polinom stupnja 3

Izvor: Skripta numerička analiza



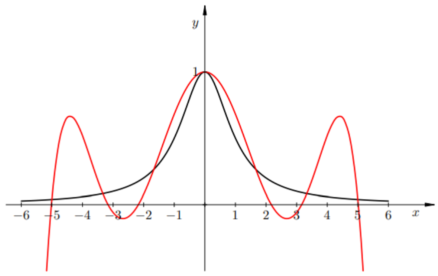
Slika 2.12: Interpolacijski polinom stupnja 4

Izvor: Skripta numerička analiza



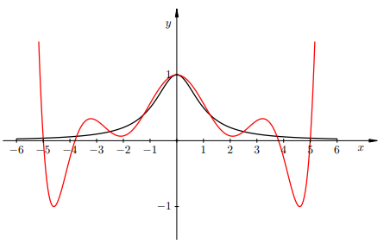
Slika 2.13: Interpolacijski polinom stupnja 5

Izvor: Skripta numerička analiza



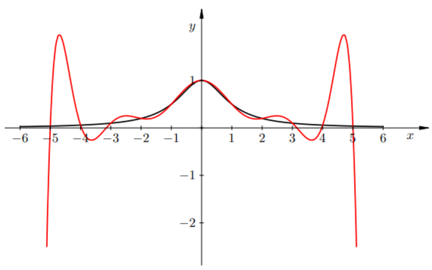
Slika 2.14: Interpolacijski polinom stupnja 6

Izvor: Skrita numerička analiza



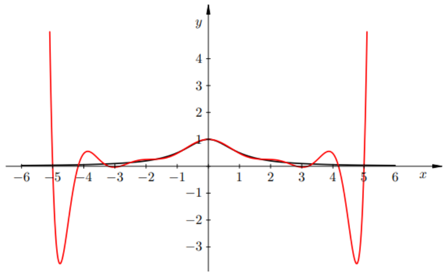
Slika 2.15: Interpolacijski polinom stupnja 8

Izvor: Skripta numerička analiza



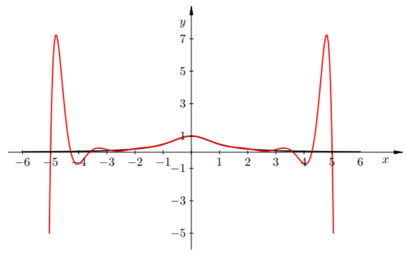
Slika 2.16: Interpolacijski polinom stupnja 10

Izvor: Skripta numerička analiza



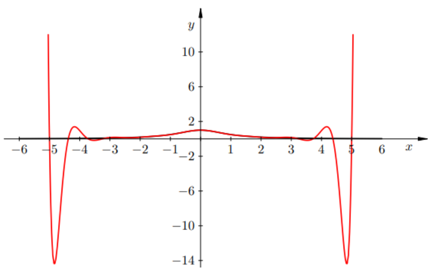
Slika 2.17: Interpolacijski polinom stupnja 12

Izvor: Skripta numerička analiza



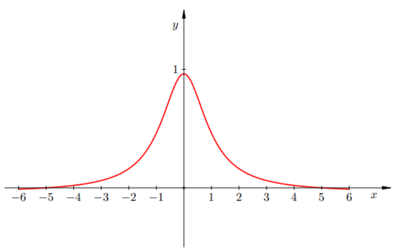
Slika 2.18: Interpolacijski polinom stupnja 14

Izvor: Skripta numerička analiza



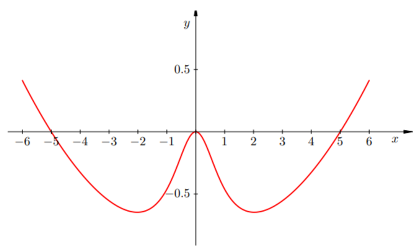
Slika 2.19: Interpolacijski polinom stupnja 16

Izvor: Skripta numerička analiza



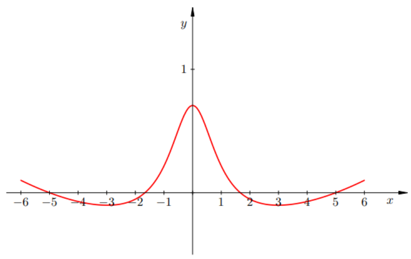
Slika 2.20: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1

Izvor: Skripta numerička analiza



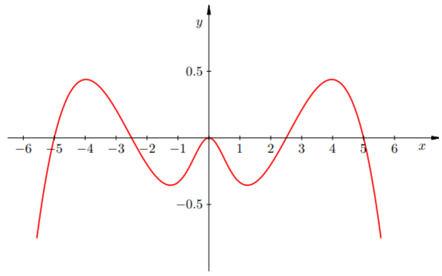
Slika 2.21: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 2

Izvor: Skripta numerička analiza



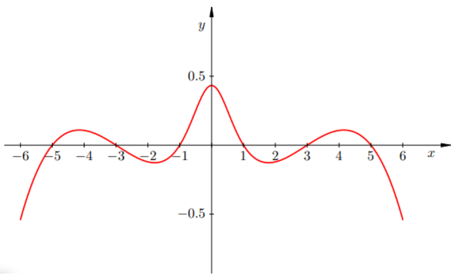
Slika 2.22: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 3

Izvor: numerička analiza



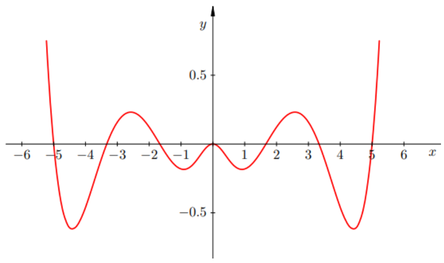
Slika 2.23: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 4

Izvor: Skripta numerička analiza



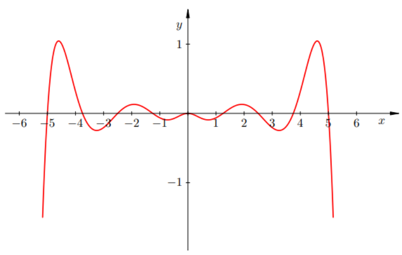
Slika 2.24: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 5

Izvor: Skripta numerička analiza



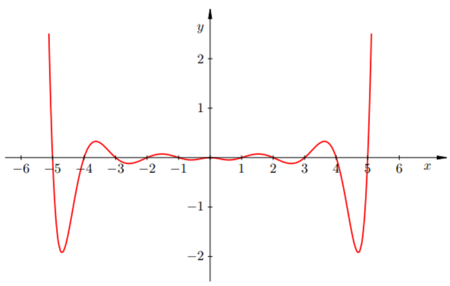
Slika 2.25: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 6

Izvor: Skrita numerička analiza



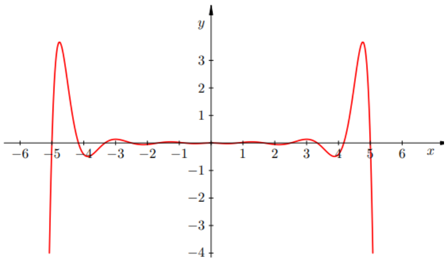
Slika 2.26: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 8

Izvor: Skripta numerička analiza



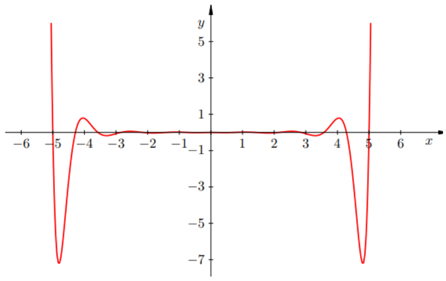
Slika 2.27: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 10

Izvor: Skripta numerička analiza



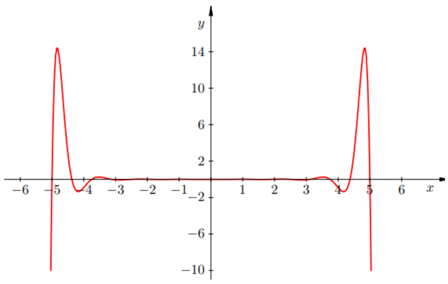
Slika 2.28: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 12

Izvor: Skripta numerička analiza



Slika 2.29: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 14

Izvor: Skripta numerička analiza



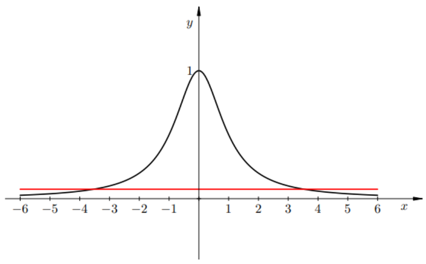
Slika 2.30: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 16

Izvor: Skripta numerička analiza

Ako umjesto ekvidistantnih točaka interpolacije uzmemo neekvidistantne, Čebiševljeve točke, onda će porastom stupnja, niz interpolacijskih polinoma bolje aproksimirati funkciju. Na intervalu $[a, b]$ uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

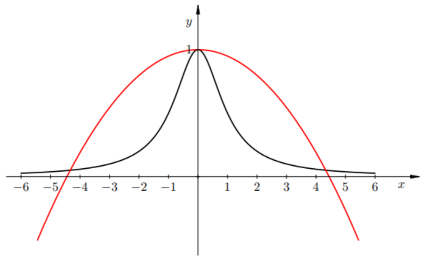
$$\mathrm{x}_k = \tfrac{a+b}{2} + \tfrac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n \quad [23].$$

Promotrimo prikaz interpolacijskih polinoma stupnjeva 1-6, 8, 10, 12, 14 i 16 na Čebiševljevoj mreži. Na sljedećim slikama graf funkcije f prikazan je crnom bojom, a grafovi interpolacijskih polinoma crvenom. Na slikama 2.42 - 2.52 prikazane su greške interpolacijskih polinoma stupnjeva 1-6, 8, 10, 12, 14 i 16 na Čebiševljevoj mreži. Kako se povećava stupanj, Čebiševljeve točke bolje aproksimiraju zadanu funkciju od ekvidistantnih čvorova i greške tih polinoma su manje. Posebno se obraća pažnja na skalu na y-osi kod Čebiševljeve mreže. Skala je manja od skale y-osi kod ekvidistantne mreže. [19]



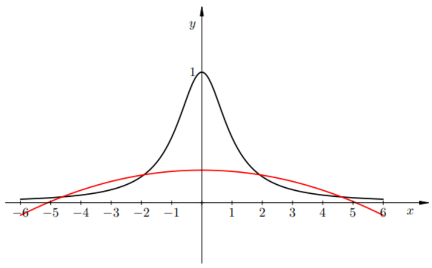
Slika 2.31: Interpolacijski polinom stupnja 1

Izvor: Skripta numerička analiza



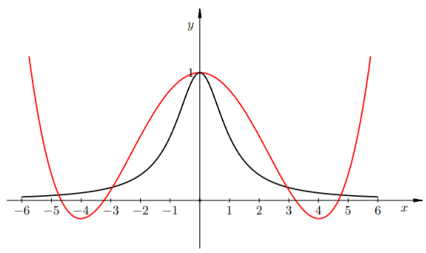
Slika 2.32: Interpolacijski polinom stupnja 2

Izvor: Skripta numerička analiza



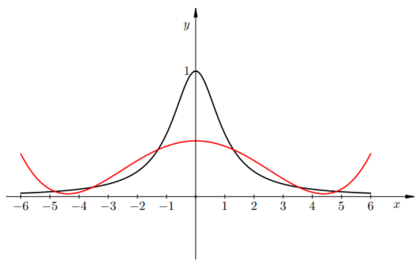
Slika 2.33: Interpolacijski polinom stupnja 3

Izvor: Skripta numerička analiza



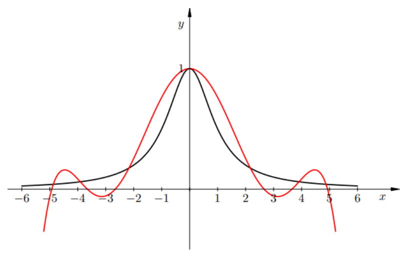
Slika 2.34: Interpolacijski polinom stupnja 4

Izvor: Skripta numerička analiza



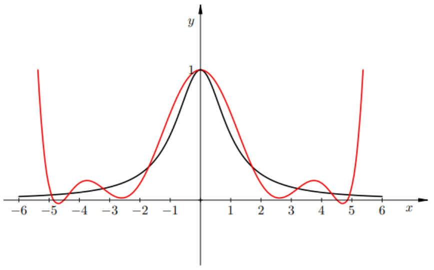
Slika 2.35: Interpolacijski polinom stupnja 5

Izvor: Skripta numerička analiza



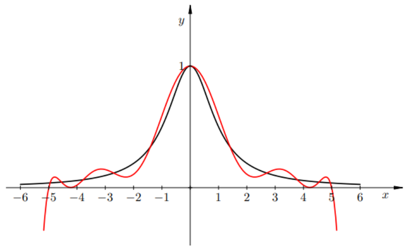
Slika 2.36: Interpolacijski polinom stupnja 6

Izvor: Skripta numerička analiza



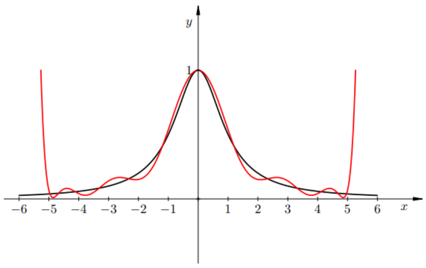
Slika 2.37: Interpolacijski polinom stupnja 8

Izvor: Skripta numerička analiza



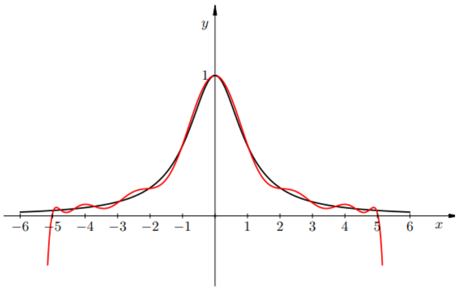
Slika 2.38: Interpolacijski polinom stupnja 10

Izvor: Skripta numerička analiza



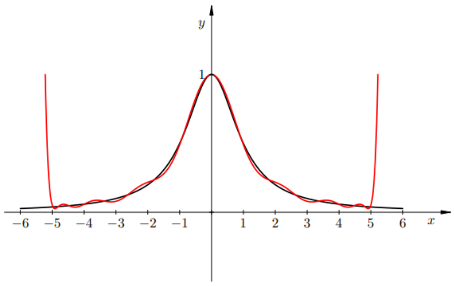
Slika 2.39: Interpolacijski polinom stupnja 12

Izvor: Skripta numerička analiza



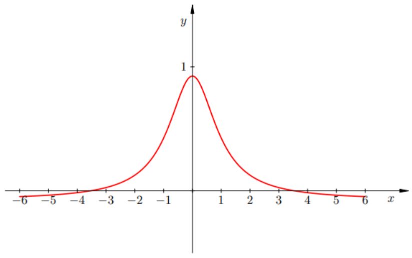
Slika 2.40: Interpolacijski polinom stupnja 14

Izvor: Skripta numerička analiza



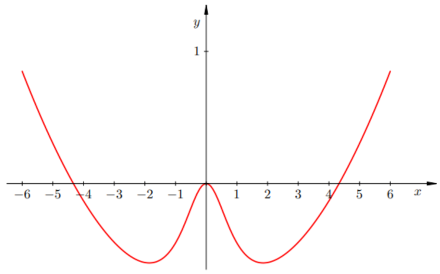
Slika 2.41: Interpolacijski polinom stupnja 16

Izvor: Skripta numerička analiza



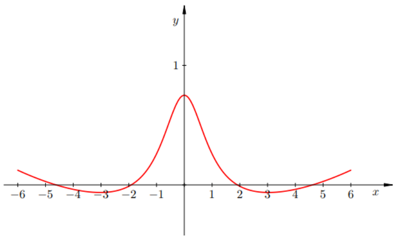
Slika 2.42: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1

Izvor: Skripta numerička analiza



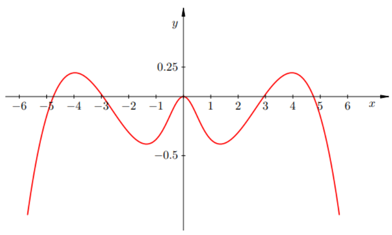
Slika 2.43: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 2

Izvor: Skripta numerička analiza



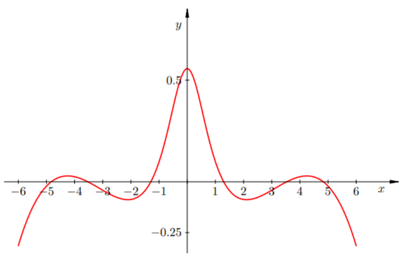
Slika 2.44: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 3

Izvor: Skripta numerička analiza



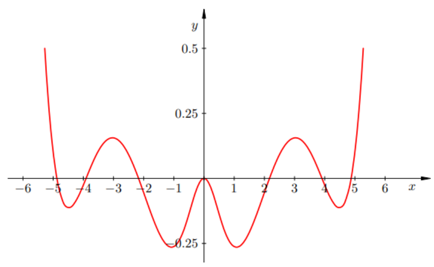
Slika 2.45: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 4

Izvor: Skripta numerička analiza



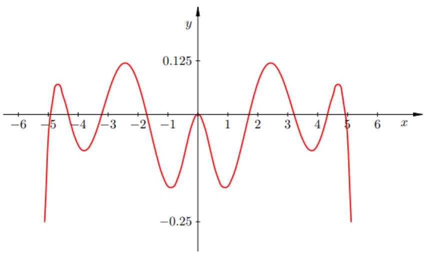
Slika 2.46: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 5

Izvor: Skripta numerička analiza



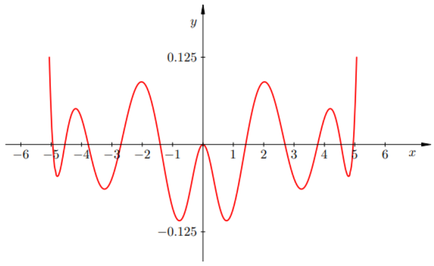
Slika 2.47: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 6

Izvor: Skripta numerička analiza



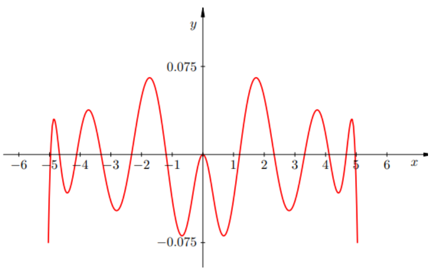
Slika 2.48: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 8

Izvor: Skripta numerička analiza



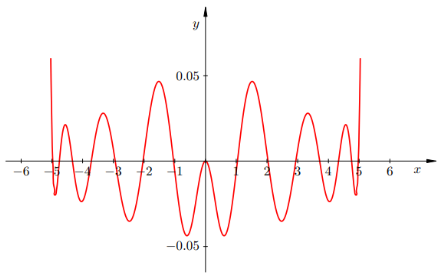
Slika 2.49: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 10

Izvor: Skripta numerička analiza



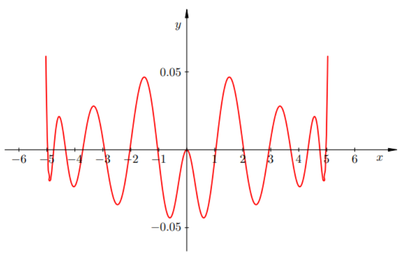
Slika 2.50: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 12

Izvor: Skripta numerička analiza



Slika 2.51: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 14

Izvor: Skripta numerička analiza



Slika 2.52: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 16

Izvor: Skripta numerička analiza

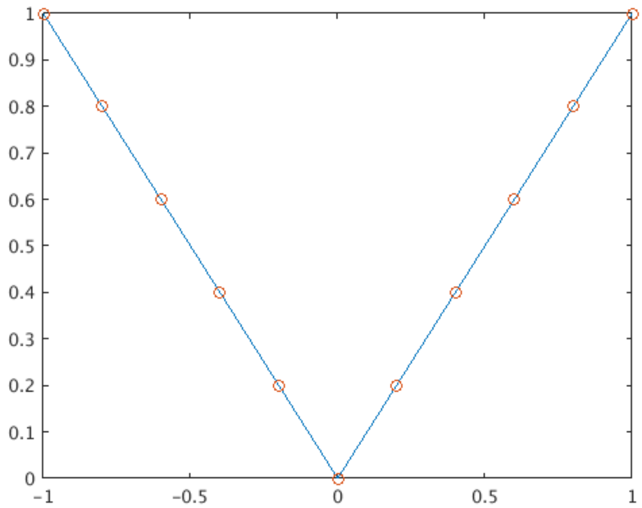
Interpolacija polinomima vrlo je značajna zbog upotrebe u raznim postupcima u numeričkoj analizi za numeričku integraciju, deriviranje, rješavanje diferencijalnih jednadžbi. S druge strane interpolacija se ne pokazuje kao sredstvo kojim možemo doći do dobrih aproksimacija funkcija iako Weierstraßov teorem tvrdi da za svaku neprekidnu funkciju $f(x)$ postoji niz polinoma stupnja n, $B_n(x)$ tako da

$$\|f(x) - B_n(x)\|_\infty \to 0 \text{ za } n \to \infty. \quad [19]$$

Primjer Rungeove funkcije pokazuje da ovakav rezultat općenito ne vrijedi za Lagrangeove interpolacijske polinome. To što interpolacija ne mora biti dobra aproksimacija funkcije ne ovisi samo o izboru čvorova interpolacije. Drugi bitni faktor kvalitete je glatkoća funkcije. Promotrimo manje glatku funkciju od Rungeove funkcije, funkciju

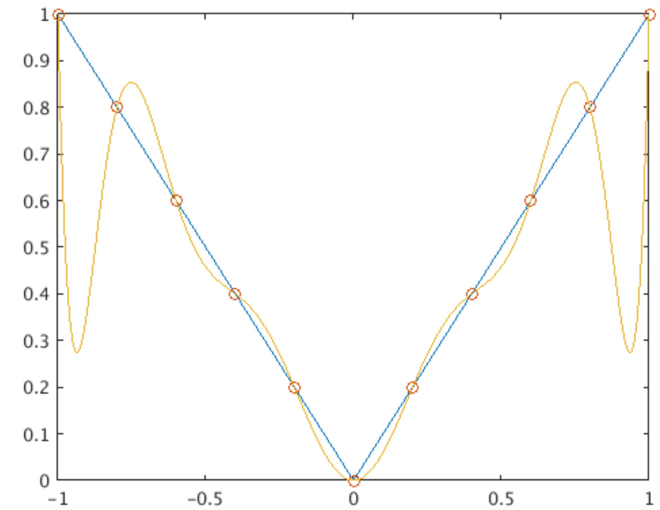
$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$$

i interpolacijski polinom stupnja 10, $p_{10}(x)$, na $[-1, 1]$. Tada je $|f(x) - p_{10}(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u točkama $x = -1, 0, 1$. [6], [19]



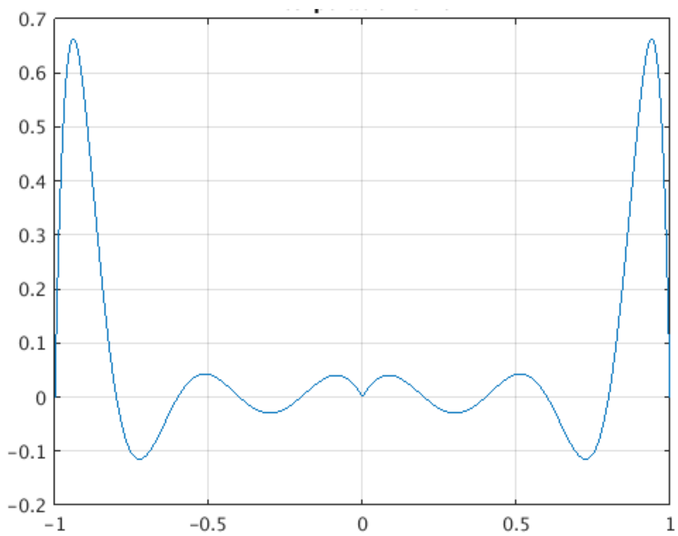
Slika 2.53: Graf funkcije $f(x) = |x|$

Izvor: https://www.math.umd.edu/ petersd/666/html/interpol_ex2.html



Slika 2.54: Plavo: graf funkcije $f(x) = |x|$; narančasto: interpolacijski polinom stupnja 10

Izvor: https://www.math.umd.edu/ petersd/666/html/interpol_ex2.html



Slika 2.55: Greška interpolacijskog polinoma stupnja 10

Izvor: https://www.math.umd.edu/ petersd/666/html/interpol_ex2.html

Iz primjera funkcije Runge vidi se da Lagrangeova interpolacija ima dobra svojstva aproksimacije u sredini intervala, ali ne i na rubovima. Stoga se postavlja pitanje da neki izbor neekvidistantne mreže, s čvorovima bliže rubovima intervala, može popraviti konvergenciju. Iako se mogu konstruirati mreže, kao što je Čebiševljeva, to je nemoguće napraviti za svaku neprekidnu funkciju. Sljedeći teorem pokazuje da je nemoguće naći dobar izbor točaka interpolacije za svaku funkciju. [19]

Teorem 2.5.1. *Za svaki mogući izbor točaka interpolacije postoji neprekidna funkcija f, za čiji interpolacijski polinom $p_n(x)$ stupnja n vrijedi*

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0.$$

[19]

Poglavlje 3

Hermiteova i druge interpolacije polinomima

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k, možemo tražiti da interpolacijski polinom h interpolira i derivaciju f' u čvorovima x_k, tj. da vrijedi

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Postavljaju se pitanja postoji li takav interpolacijski polinom, ako postoji je li jedinstven i kojeg je stupnja. [22]

Teorem 3.0.1. *Postoji jedinstven polinom h_{2n+1} stupnja najviše $2n+1$ koji zadovoljava interpolacijske uvjete*

$$h_{2n+1}(x_i) = f_i, \quad h'_{2n+1}(x_i) = f'_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

gdje su x_i međusobno različite točke i f_i i f'_i zadani realni brojevi.

Dokaz: Egzistenciju polinoma h_{2n+1} možemo dokazati konstrukcijom eksplicitne baze. Tražimo "bazične polinome" $h_{i,0}$ i $h_{i,1}$ za koje vrijedi

$$h_{i,0}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{za j = i} \\ 0, & \text{za j} \neq i, \end{cases}$$

$$h'_{i,0}(x_j) = 0,$$

$$h_{i,1}(x_j) = 0,$$

$$h'_{i,1}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{za j= i} \\ 0, & \text{za j} \neq i, \end{cases}$$

za $i, j = 0, \ldots, n$. Ako nađemo $h_{i,0}$ i $h_{i,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (f_i h_{i,0}(x) + f_i' h_{i,1}(x)).$$

Deriviranjem polinoma h_{2n+1} dobiva se

$$h_{2n+1}'(x) = \sum_{i=0}^{n} (f_i h_{i,0}'(x) + f_i' h_{i,1}'(x))$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} (f_i h_{i,0}(x_j) + f_i' h_{i,1}(x_j)) = f_j,$$

$$h_{2n+1}'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} (f_i h_{i,0}'(x_j) + f_i' h_{i,1}'(x_j)) = f_j'.$$

Preostaje konstruirati polinome $h_{i,0}, h_{i,1}$. Neka su

$$\begin{aligned} h_{i,0}(x) &= [1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)] \cdot l_i^2(x) \\ h_{i,1}(x) &= (x - x_i) \cdot l_i^2(x) \end{aligned}$$

gdje su l_i funkcije Lagrangeove baze. Uvrštavanjem se provjerava da vrijednosti $h_{i,0}(x_j), h_{i,0}'(x_j), h_{i,1}(x_j)$ i $h_{i,1}'(x_j)$ zadovoljavaju traženo. Kako je polinom l_i stupnja n, onda su $h_{i,0}$ i $h_{i,1}$ stupnja $2n+1$ pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Preostaje pokazati jedinstvenost: Pretpostavimo da je polinom q_{2n+1} neki drugi polinom koji ispunjava interpolacijske uvjete teorema. Tada je

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ p(x) &= (h_{2n+1}(x) - f(x)) - (q_{2n+1}(x) - f(x)). \end{aligned}$$

Uočimo da je polinom p stupnja ne većeg od $2n + 1$ te da p ima dvostruke nultočke u x_j, $j = 0, \ldots, n$, tj. ukupno barem $2n + 2$ nultočke. Polinom stupnja najviše $2n + 1$ koji ima barem $2n + 2$ nultočke je nul-polinom, tj. polinom h_{2n+1} je jedinstven. □

Polinomi $h_{i,0}, h_{i,1}$ zovu se funkcije Hermiteove baze, a polinom h_{2n+1} Hermiteov interpolacijski polinom.[22]

Funkcija pogreške polinoma h

$$e(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$ jer i funkcija e i njena derivacija e' imaju nultočke u x_i, $i = 0, \ldots, n$ tj. $e(x_i) = 0$ i $e'(x_i) = 0$. Stoga je polinom čvorova ω_h jednak

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x)$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije (2.1). Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije samo što ovdje treba uzeti u obzir da je h_{2n+1} stupnja $2n+1$ i oblik polinoma čvorova je $\omega_h(x) = \omega^2$. Dakle, greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom $h_{2n+1}(x)$ funkcije $f \in C^{(2n+2)}[x_{min}, x_{max}]$ u $n + 1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ je oblika

$$e(x) := f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)$$

gdje su ξ i ω kao u teoremu 2.3.1. [22]

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi. Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka točka je dvostruki čvor. Postavlja se pitanje što će biti podijeljena razlika u dvostrukom čvoru. Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo $h \rightarrow 0$, tada je

$$f[x_0, x_0] \; = \lim_{h \longrightarrow 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{3.1}$$

Podijeljene razlike dane su tablicom:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\ldots$	$f[x_0, \ldots x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f'(x_0)$			
x_0	$f[x_0]$		$f[x_0, x_0, x_1,]$	$\ldots$	
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_1]$		
		$f'(x_1)$			$\ldots$
x_1	$f[x_1]$		$f[x_1, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	
x_n	$f[x_n]$		$f[x_{n-1}, x_n, x_n]$		
		$f'(x_n)$			
x_n	$f[x_n]$				

Tablica 3.1: Tablica podijeljenih razlika

Iz tablice podijeljenih razlika uzimamo samo "gornji" rub. Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi je:

$$h_{2n+1}(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n](x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n). \quad [22]$$

Primjer 6.

Odredite Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju za koju je poznato $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 10$, $f'(1) = 20$.
Rješenje: Potrebno je odrediti tablicu podijeljenih razlika.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	1			
		2		
0	1		$\frac{9-2}{1-0} = 7$	
		$\frac{10-1}{1-0} = 9$		$\frac{11-7}{1-0} = 4$
1	10		$\frac{20-9}{1-0} = 11$	
		20		
1	10			

Tablica 3.2: Tablica podijeljenih razlika za Primjer 6.

Hermiteov interpolacijski polinom glasi:

$$h_3(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$
$$h_3(x) = 1 + 2(x - 0) + 7(x - 0)^2 + 4(x - 0)^2(x - 1)$$
$$h_3(x) = 1 + 2x + 7x^2 + (4x^2 \cdot (x - 1))$$
$$h_3(x) = 1 + 2x + 7x^2 + 4x^3 - 4x^2$$
$$h_3(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \quad [18]$$

Poglavlje 4

Interpolacija po dijelovima polinomima

Kod nekih funkcija za neki izbor točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma može dovesti do povećanja grešaka te se u praksi obično koriste interpolacijski polinomi niskih stupnjeva, najčešće do 5. Umjesto visokog stupnja interpolacijskog polinoma koristi se po dijelovima polinomna interpolacija. Tada na svakom podintervalu vrijedi

$$\varphi\big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje su polinomi p_k polinomi niskog fiksnog stupnja. Ovdje se pretpostavlja da su rubovi podintervala interpolacije uzlazno numerirani, tj. da je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Pretpostavimo da na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom stupnja m, tj. da je

$$\varphi\big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Polinom p_k stupnja m određen je s $(m+1)$-im koeficijentom. Kako moramo odrediti koeficijente polinoma p_k u n podintervala, to moramo odrediti ukupno $(m + 1) \cdot n$ koeficijenata. Uvjeti interpolacije su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

što za svaki polinom daje po dva uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{4.1}$$

što su ukupno $2n$ uvjeta interpolacije. Budući da je

$$p_{k-1}(x_{k-1}) = p_k(x_{k-1}) \quad k = 2, \ldots, n,$$

funkcija φ je neprekidna. Uvjeta interpolacije ima $2n$, a potrebno je pronaći $(m + 1) \cdot n$ koeficijenata. Bez postavljanja dodatnih uvjeta to možemo napraviti samo za $m = 1$, tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju. Za $m > 1$ trebaju se dodati uvjeti glatkoće funkcije φ u čvorovima interpolacije. [19]

4.1 Po dijelovima linearna interpolacija

Po dijelovima linearna interpolacija je interpolacija kod koje koristimo više polinoma stupnja 1. Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k jedinstveno je određen te ga zapisujemo u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Interpolacijski polinom p_k u Newtonovoj formi glasi:

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}).$$

Tada su koeficijenti:

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1}, \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ako želimo aproksimirati vrijednost funkcije f u nekoj točki $x \in [a, b]$, onda prvo treba odrediti za koji k vrijedi $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Nakon toga možemo računati koeficijente pripadnog linearnog polinoma. [19]

Algoritam za binarno pretraživanje

Za traženje k takvog da je $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ koristi se algoritam za binarno pretraživanje prema [19].

low := 0*;*
high := *n;*
while (high - low) > 1 *do*
    begin
mid :=*(low + high) div 2;*
if $x < x_{mid}$ *then*
    high := mid
else
    low := mid
end;

Ako je funkcija f klase $C^2[a, b]$, pri čemu je $[a, b]$ interval na kojem aproksimiramo, onda je greška takve interpolacije maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija. Na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ocjena greške linearne interpolacije je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2}|\omega(x)|$$

pri čemu su

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f''(x)|.$$

Ocijenimo $\omega(x)$ na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, tj. nađimo njen maksimum po apsolutnoj vrijednosti. Kako je $\omega(x)$ kvadratna funkcija to je graf funkcije $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$ parabola koja siječe apscisu u x_{k-1} i x_k, maksimum od $|\omega(x)|$ je u polovištu intervala

$$x_e = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Tada je

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ vrijedi $\omega(x) < 0$. Prijelazom na apsolutnu vrijednost, slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$ i

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Ako razmak između susjednih čvorova označimo s $h_k = x_k - x_{k-1}$, onda je maksimalni razmak susjednih čvorova

$$h = \max_{1\leq k\leq n}\{h_k\}$$

pa na intervalu $[a, b]$ možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_2}{2!}\frac{h^2}{4} = \frac{1}{8}M_2 \cdot h^2, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

tj. ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0. Za ekvidistantne mreže gdje vrijedi

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n}$$

greška je reda veličine h^2, tj. n^{-2} i potrebno je dosta podintervala da se dobije umjerena točnost. Primjerice za $h = 0.01$, tj. $n = 100$ greška aproksimacije je reda 10^{-4}. Također aproksimacijska funkcija φ nije dovoljno glatka, tj. samo je neprekidna, stoga se na podintervalima koriste polinomi viših stupnjeva. Ako na svaki podinterval stavimo kvadratni polinom tada moramo naći $3n$ koeficijenata, a imamo $2n$ uvjeta interpolacije. Ako zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ ima u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$ neprekidnu derivaciju tako smo dodali još $n - 1$ uvjet. Tada nam treba još jedan uvjet. Ako i njega postavimo moguće je naći takvu aproksimaciju, ali se ona obično ne koristi. [19]

Primjer 7.

Funkciju

$$f(x) = \sqrt{3x+2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0,2]$ koristeći ekvidistantnu mrežu n podintervala. Nađimo najmanji n takav da ocjena pogreške na intervalu $[0,2]$ ne prelazi $\epsilon = 10^{-4}$. Za taj n izračunajmo aproksimaciju za $f(0.45)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.
Rješenje: Ocjena pogreške po dijelovima linearne interpolacije na intervalu $[a,b]$, uz ekvidistantnu mrežu s n podintervala, ima oblik

$$|f(x) - \varphi(x)| \le \frac{1}{8}M_2h^2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

gdje je $h = \dfrac{b-a}{n}$. Iz zahtjeva da ocjena greške ne prelazi $\epsilon = 10^{-4}$ dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \ge (b-a)\cdot\sqrt{\frac{M_2}{8\epsilon}}.$$

Derivacije funkcije f

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

$$f''(x) = -\frac{9}{4(3x+2)^{3/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{81}{8(3x+2)^{5/2}}.$$

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala, a, b, i nultočke derivacije f''' unutar intervala $[a,b]$. Uočimo da f''' nema nultočaka na $\mathbb{R}$ pa ostaju samo rubovi intervala. Nadalje, $|f''(x)|$ je monotono padajuća funkcija za sve $x > -\frac{2}{3}$. Odavde slijedi da se M_2 na intervalu $[0,2]$ dostiže u lijevom rubu, u 0, čim je f dobro definirana. Dakle,

$$M_2 = |f''(0)| = \frac{9\sqrt{2}}{16} = 0.7954951288.$$

Uz traženu točnost $\epsilon = 10^{-4}$ za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \ge 2\cdot\sqrt{\frac{M_2}{8\cdot 10^{-4}}} = 63.0672311440.$$

Dakle, trebamo $n = 64$ podintervala, tj. 65 čvorova. Ekvidistantna mreža na $[0, 2]$ ima korak $h = \frac{1}{32}$. Ako je x u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ mora biti

$$a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Tada iz

$$2 + (k-1) \cdot \frac{1}{32} \leq 0.45 \leq 2 + k \cdot \frac{1}{32}$$

dobivamo $k = 15$, tj. točka 0.45 nalazi se u podintervalu $[x_{14}, x_{15}]$. Pripadna tablica podijeljenih razlika za polinom prvog stupnja na tom podintervalu je:

x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_{14} = 0.4375000000$	1.8200274723	
		0.8184131267
$x_{15} = 0.4687500000$	1.8456028825	

Tablica 4.1: Tablica podijeljenih razlika za Primjer 7.

Za $x = 0.45$ dobivamo

$$\begin{aligned} \varphi(0.45) &= 1.8302576364 \\ f(0.45) &= 1.8303005218. \end{aligned}$$

Pripadna stvarna greška je

$$|f(0.45) - \varphi(0.45)| = 0.0000428854 = 4.28854 \cdot 10^{-5}. \quad [24]$$

4.2 Po dijelovima kubična interpolacija

Kad je restrikcija aproksimacijske funkcije φ na svaki podinterval kubični polinom, govorimo o po dijelovima kubičnoj interpolaciji. Kubični polinom obzirom na početnu točku na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ je u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \qquad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Kako ukupno imamo n kubičnih polinoma i svaki od tih polinoma ima četiri koeficijenta, ukupno treba odrediti $4n$ koeficijenata. Uvjeta interpolacije je $2n$, tj. mora vrijediti (4.1). Ovi uvjeti osiguravaju neprekidnost funkcije φ. Želimo da interpolacijska funkcija bude barem klase $C^1[a,b]$ (derivacija funkcije φ neprekidna je i u čvorovima). Dodavanjem tih uvjeta za svaki kubični polinom imamo još $2n$ uvjeta:

$$p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}$$
$$p_k'(x_k) = s_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

pri čemu su s_k neki brojevi. Takvim izborom dodatnih uvjeta osigurana je neprekidnost prve derivacije jer je

$$p_{k-1}'(x_{k-1}) = p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n. \quad [19]$$

Nađimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_k. Koristimo oblik Newtonovog interpolacijskog polinoma s dvostrukim čvorovima jer su u x_{k-1} i x_k dani funkcijska vrijednost i derivacija. Iz relacije (3.1) i uz uvjet da f ima derivaciju u x_k možemo reći da vrijedi

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k).$$

Ako u x_k derivaciju $f'(x_k)$ aproksimiramo s s_k, onda je

$$f[x_k, x_k] = s_k.$$

Tablica podijeljenih razlika za kubični interpolacijski polinom koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1}, x_k : izgleda ovako:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
x_{k-1}	f_{k-1}			
		s_{k-1}		
x_{k-1}	f_{k-1}		$\dfrac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}$	
		$f[x_{k-1}, x_k]$		$\dfrac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}$
x_k	f_k		$\dfrac{s_k - f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$	
		s_k		
x_k	f_k		$f[x_0, x_1, x_1]$	

Tablica 4.2: Tablica podijeljenih razlika

Tada je

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 + \tag{4.3}$$
$$+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k](x - x_{k-1})^2(x - x_k)$$

uz uvažavanje da je

$$\begin{aligned}
f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1} \\
f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-1}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}, \\
f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k, x_k] - f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k]}{x_k - x_{k-1}} = \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem x_{k-1} i x_k u polinom p_k iz (4.3) i u derivaciju p_k' možemo provjeriti da je

$$p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1},$$

$$p_k(x_k) = f_k, \quad p_k'(x_k) = s_k.$$

Preostaje izraziti koeficijente $c_{0,k}, c_{1,k}, c_{2,k}, c_{3,k}$. Ako iz (4.3) posljednji član zapišemo kao

$$\begin{aligned}
(x - x_{k-1})^2(x - x_k) &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k) \\
&= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} - h_k) \\
&= (x - x_{k-1})^3 - h_k(x - x_{k-1})^2,
\end{aligned}$$

tada relacija (4.3) poprima novi oblik

$$\begin{aligned}
p_k(x) = {} & f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\
& + (f[x_{k-1}, x_{k-1} x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]) \cdot (x - x_{k-1})^2 \\
& + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^3.
\end{aligned}$$

Ako usporedimo koeficijente uz odgovarajuće potencije iz prethodne relacije i relacije (4.2) za sve $k = 1, \ldots, n$ dobivamo koeficijente:

$$\begin{aligned}
c_{0,k} &= f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= s_{k-1}, \\
c_{2,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k], \\
c_{3,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1} x_k, x_k]. \quad [19]
\end{aligned}$$

4.3 Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Skalare s_k možemo odabrati tako da su im vrijednosti jednake derivaciji zadane funkcije u čvorovima x_k, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Tada kubični polinom ne ovisi o drugim kubičnim polinomima jer su kubičnom polinomu, kojem su na rubovima intervala zadane i funkcijske vrijednosti i vrijednosti derivacija, određena njegova četiri koeficijenta. Takva interpolacija koja interpolira funkcijske vrijednosti i vrijednosti derivacija u svim zadanim čvorovima zove se po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.[19]

Neka je funkcija $f \in C^4[a, b]$. Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ ocjena greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!}|\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2, \quad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Preostaje odrediti u kojoj točki intervala $[x_{k-1}, x_k]$ je maksimum funkcije $|\omega|$. Dovoljno je naći sve lokalne ekstreme funkcije ω jer je na rubovima greška 0. Deriviranjem izlazi da se lokalni maksimum dostiže u nultočki x_e od ω', pri čemu je

$$x_e = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Tada je vrijednost u x_e jednaka

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2(x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

Prijelazom na apsolutnu vrijednost slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$ i

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}, \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Ako razmak između susjednih čvorova označimo s $h_k = x_k - x_{k-1}$, onda definiramo maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \leq k \leq n}\{h_k\},$$

pa na čitavom $[a, b]$ možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_4}{4!}\frac{h^4}{16} = \frac{1}{384}M_4 \cdot h^4,$$

tj. ako ravnomjerno povećamo broj čvorova , tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0. [25]

Primjer 8.

Nađimo po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju za podatke

x_k	0	1	2
f_k	1	2	0
f'_k	0	1	1

Rješenje: Treba odrediti dva kubična polinoma, polinom p_1 na intervalu $[0, 1]$ i polinom p_2 na intervalu $[1, 2]$. Za polinom p_1 tablica podijeljenih razlika je:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	1			
		0		
0	1		1	
		1		-1
1	2		0	
		1		
1	2			

Tablica 4.3: Tablica podijeljenih razlika za polinom p_1, Primjer 8.

Imamo:

$$c_{0,k} = 1, c_{1,k} = 0, c_{2,k} = 1 - (-1) = 2, c_{3,k} = -1$$

pa je

$$p_1(x) = 1 + 2(x - 0)^2 - 1(x - 0)^3 = -x^3 + 2x^2 + 1.$$

Za polinom p_2 tablica podijeljenih razlika je:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{x+1}]$	$f[x_k, x_{x+1}, x_{x+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	2			
		1		
1	2		-3	
		-2		6
2	0		3	
		1		
2	0			

Tablica 4.4: Tablica podijeljenih razlika za polinom p_2, Primjer 8.

Imamo:

$$c_{0,k} = 2, c_{1,k} = 1, c_{2,k} = -3 - 6 = -9, c_{3,k} = 6$$

pa je

$$p_2(x) = 2 + 1(x-1) - 9(x-1)^2 + 6(x-1)^3 = 6x^3 - 27x^2 + 37x - 14. \quad [25]$$

4.4 Kubična splajn interpolacija

Skalare $s_0, \ldots, s_n$ možemo odrediti i iz zahtjeva da φ ima neprekidnu drugu derivaciju u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$, tj. da je klase $C^2[a,b]$. Takva se interpolacija zove kubična splajn interpolacija. Kako treba odrediti $4n$ koeficijenata kubičnih polinoma, a imamo $2n$ uvjeta interpolacije (svaki polinom mora interpolirati rubne točke svog podintervala), $n-1$ uvjeta ljepljenja prve derivacije u unutarnjim čvorovima (toliko je unutarnjih čvorova), a jednako toliko je i uvjeta ljepljenja druge derivacije, ne možemo jednoznačno izračunati splajn. Ukupno imamo $2n - 2$ uvjeta pa vidimo da nedostaju 2 uvjeta da bismo mogli odrediti te koeficijente. Prva derivacija lijepi se u unutarnim točkama čim se postavi zahtjev da je

$$\varphi'(x_k) = s_k$$

u tim točkama, bez obzira na to što je s_k. Preostaje postaviti uvjete ljepljenja druge derivacije u unutarnjim čvorovima. Zahtjev je

$$p_k''(x_k) = p_{k+1}''(x_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Ako polinome p_k pišemo u formi (4.2), onda je

$$\begin{aligned} p_k''(x) &= 2c_{2,k} + 6c_{3,k}(x - x_{k-1}) \\ p_{k+1}''(x) &= 2c_{2,k+1} + 6c_{3,k+1}(x - x_k). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem x_k i dijeljenjem s 2 izlazi uvjet ljepljenja

$$c_{2,k} + 3c_{3,k}(x_k - x_{k-1}) = c_{2,k+1}.$$

Uvrštavanjem koeficijenata

$$\begin{aligned} c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}, \\ c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k} \end{aligned}$$

u prethodnu relaciju i sređivanjem izlazi

$$\frac{-3f[x_{k-1},x_k]+s_{k-1}+2s_k}{h_k}=\frac{3f[x_k,x_{k+1}]-2s_k-s_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Množenjem prethodne relacije s $h_k h_{k+1}$, prebacivanjem sve s_k na lijevu stranu, a članova koji nemaju s_k na desnu stranu, za $k = 1, \dots, n-1$, dobivamo

$$h_{k+1}s_{k-1}+2(h_k+h_{k+1})s_k+h_k s_{k+1}=3(h_{k+1}f[x_{k-1},x_k]+h_k f[x_k,x_{k+1}]).$$

Ovo je linearni sustav s $(n+1)$-om nepoznanicom i $(n-1)$-om jednadžbom. Ako zadamo rubne nagibe s_0 i s_n, onda ostaje točno $n-1$ nepoznanica. Matrica tako dobivenog linearnog sustava je trodijagonalna:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\ h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\ & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}$$

i strogo dijagonalno dominantna po retcima jer za svako k vrijedi

$$2(h_k+h_{k+1}) > h_k + h_{k+1}$$

pa je i regularna. Prema tome ovaj linearni sustav ima jedinstveno rješenje $s_1, \dots, s_{n-1}$. Skalari s_k nisu nezavisni, nego ovise jedan o drugome. [19], [25]

Preostaje vidjeti kako možemo odabrati s_0 i s_1 (2 uvjeta). Oni se ne moraju zadati direktno, uobičajeno se zadaju rubni uvjeti za funkciju φ iz kojih se određuju s_0 i s_1. Postoji nekoliko tradicionalnih načina zadavanja rubnih uvjeta.[19]

(a) Potpuni splajn - zadana prva derivacija u rubovima

Ako je poznata derivacija funkcije f u rubovima, onda je prirodno zadati

$$s_0 = f'(x_0), \quad s_n = f'(x_n).$$

(b) Zadana druga derivacija u rubovima

Ako je poznata druga derivacija funkcije f u rubovima, onda treba staviti

$$f''(x_0)=\varphi''(x_0)=p_1''(x_0), \quad f''(x_n)=\varphi''(x_n)=p_n''(x_n).$$

Preostaje izraziti $p_1''(x_0)$ preko s_0, s_1 i $p_n''(x_n)$ preko s_{n-1}, s_n. Znamo da je

$$c_{2,1} = \frac{p_1''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

pa iz izraza za $c_{2,1}$ izlazi

$$\frac{3f[x_0,x_1] - 2s_0 - s_1}{h_1} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0,x_1] - \frac{h_1}{2}h''(x_0).$$

Ova se jednadžba dodaje kao prva u linearni sustav.

Korištenjem da je

$$p_n''(x_n) = 2c_{2,n} + 6c_{3,n}h_n$$

te uvrštavanjem izraza za $c_{2,n}$ i $c_{3,n}$ izlazi

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1},x_n] + \frac{h_n}{2}f''(x_n).$$

Ova se jednadžba dodaje kao zadnja u sustav. Tako dobiveni linearni sustav ima $(n+1)$-u jednadžbu i $(n+1)$-u nepoznanicu.

(c) Prirodni splajn - slobodni krajevi

Ako su zadani tzv. slobodni krajevi, tj. ako je

$$\varphi''(x_0) = \varphi''(x_n) = 0$$

dobivamo prirodnu splajn interpolaciju. Na isti način, kao i u slučaju (b), dobivamo jednadžbe

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0,x_1], \quad s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1},x_n].$$

(d) Numerička aproksimacija derivacija na rubu

Ako ništa ne znamo o ponašanju derivacija funkcije f na rubovima preostala dva parametra mogu se odrediti numeričkim aproksimiranjem φ', ili φ'' ili φ''' u rubovima. Kao aproksimaciju koristimo odgovarajuću derivaciju kubičnog interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $x_0, \ldots, x_3$, odnosno $x_{n-3}, \ldots, x_n$.

(e) Knot-a-knot splajn

Ako je nepoznato ponašanje derivacije funkcije f u rubovima, koristimo knot-a-knot ("nije čvor") uvjet. Parametre s_0 i s_n biramo tako da vrijedi

$$p_1 = p_2, \quad p_{n-1} = p_n.$$

To znači da se u čvoru x_1 zalijepi i treća derivacija polinoma p_1 i p_2, a u čvoru x_{n-1} treća derivacija polinoma p_{n-1} i p_n. Te zahtjeve možemo pisati kao

$$p_1'''(x_1) = p_2'''(x_1), \quad p_{n-1}'''(x_{n-1}) = p_n'''(x_{n-1}).$$

Zahtjev $p_1'''(x_1) = p_2'''(x_1)$ znači da su vodeći koeficijenti polinoma p_1 i p_2 jednaki, tj.

$$c_{3,1} = c_{3,2}.$$

Pridruživanjem tog zahtjeva zahtjevu ljepljenja druge derivacije

$$c_{2,1} + 3c_{3,1}h_k = c_{2,2}$$

dobivamo

$$\frac{f[x_0, x_1] - s_0}{h_1} + 2\frac{s_1 + s_0 - 2f[x_0, x_1]}{h_1} = \frac{f[x_1, x_2] - s_1}{h_2} - h_2\frac{s_1 + s_0 - 2f[x_0, x_1]}{h_1^2}.$$

Sređivanjem izlazi

$$h_2 s_0 + (h_1 + h_2)s_1 = \frac{(h_1 + 2(h_1 + h_2))h_2 f[x_0, x_1] + h_1^2 f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2}.$$

Na sličan način dobiva se i zadnja jednadžba

$$(h_{n-1} + h_n)s_{n-1} + h_{n-1}s_n = \frac{(h_n + 2(h_{n-1} + h_n))h_{n-1} f[x_{n-1}, x_n] + h_n^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{h_{n-1} + h_{n-2}}.$$

(f) Ostali rubni uvjeti

Svi dosad opisani načini zadavanja rubnih uvjeta "čuvaju" trodijagonalnu strukturu linearnog sustava za nepoznate parametre s_k. Kod aproksimacije periodičnih funkcija na intervalu, koji odgovara periodu funkcije, zahtijeva se periodičnost prve i druge derivacije u rubovima

$$\varphi'(x_0) = \varphi'(x_n), \quad \varphi''(x_0) = \varphi''(x_n)$$

što vodi na jednadžbe

$$p_1'(x_0) = p_n'(x_n), \quad p_1''(x_0) = p_n''(x_n). \quad [19]$$

Primjer 9.

Neka je

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

Nađimo prirodni splajn koji aproksimira funkciju f na $[0, 1]$ s čvorovima interpolacije $x_k = 0.2k$, za $k = 0, \dots, 5$. Izračunajmo vrijednost tog splajna u točki 0.55.
Rješenje: Kako su točke ekvidistantne s razmakom $h = 0.2$, jednadžbe linarnog sustava za splajn su:

$$hs_{k-1} + 4hs_k + hs_{k+1} = 3(hf[x_{k-1}, x_k] + hf[x_k, x_{k+1}]), \quad k = 1, \dots, 4.$$

Dodatne jednadžbe za prirodni splajn su

$$\begin{aligned} 2s_0 + s_1 &= 3f[x_0, x_1] \\ s_4 + 2s_5 &= 3f[x_4, x_5]. \end{aligned}$$

Izračunamo prve podijeljene razlike:

x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$
0.0	0.0000000000	
		2.9389262615
0.2	0.5877852523	
		1.8163563200
0.4	0.9510565163	
		0.000000000
0.6	0.9510565163	
		−1.8163563200
0.8	0.5877852523	
		−2.9389262615
1.0	0.0000000000	

Tablica 4.5: Tablica podijeljenih razlika za Primjer 9.

Dobivamo linearni sustav:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & & & & \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 & & & \\ & 0.2 & 0.8 & 0.2 & & \\ & & 0.2 & 0.8 & 0.2 & \\ & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ & & & & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7633557569 \\ 2.8531695489 \\ 1.0898137920 \\ -1.0898137920 \\ -2.8531695489 \\ -1.7633557569 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom eliminacija [1] dobivamo rješenje sustava

$$\begin{aligned} s_0 &= -s_5 = 3.1387417029, \\ s_1 &= -s_4 = 2.5392953786, \\ s_2 &= -s_3 = 0.9699245271. \end{aligned}$$

Kako je potrebno odrediti vrijednost splajna u točki $x = 0.55$, a ona se nalazi u intervalu $[0.4, 0.6]$, restrikcija splajna na taj interval je polinom p_3, kojeg nalazimo iz tablice podijeljenih razlika.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0.4	0.9510565163			
		0.9699245271		
0.4	0.9510565163		−4.8496226357	
		0.0000000000		0.0000000000
0.6	0.9510565163		−4.8496226357	
		−0.9699245271		
0.6	0.9510565163			

Tablica 4.6: Tablica podijeljenih razlika za primjer 9.

[1] Gaussov postupak eliminacije je metoda rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Operacijama: 1. zamjena redosljeda jednadžbi u sustavu; 2. množenje proizvoljne jednadžbe sustava brojem različitim od nule; 3. množenje proizvoljne jednadžbe sustava brojem i dodavanje rezultata bilo kojoj drugoj jednadžbi sustava, zadani sustav svodimo na njemu ekvivalentan, tako da iz dobivenog sustava lako nađemo skup svih rješenja.

Tada je $p_3(x) = 0.9510565163 + 0.9699245271(x - 0.4) - 4.8496226357(x - 0.4)^2$. Primijetimo da je p_3 zapravo kvadratni polinom. [3], [19]

Poglavlje 5

Diskretna metoda najmanjih kvadrata

Lagrangeov polinom vrlo dobro aproksimira funkciju lokalno, u izabranim točkama, dok izvan tih točaka aproksimacija može biti vrlo loša. Sada ćemo upoznati metodu najmanjih kvadrata, metodu pomoću koje možemo zadanu funkciju aproksimirati drugom funkcijom određenog tipa globalno, tako da njihova međusobna udaljenost bude što manja, bez obzira na to što se funkcije možda neće poklapati niti u jednoj točki. [19]

Neka je funkcija f zadana na diskretnom skupu točaka $x_0, \ldots, x_n$. Točaka $x_0, \ldots, x_n$ ima mnogo više nego nepoznatih parametara $a_0, \ldots, a_m$ aproksimacijske funkcije φ, tj. $n \geq m$. Funkcija φ određuje se iz uvjeta da euklidska norma vektora pogrešaka u čvorovima aproksimacije bude najmanja moguća, tj. ako vrijedi

$$S = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 \to \min.$$

Funkciju S interpretiramo kao funkciju nepoznatih parametara

$$S = S(a_0, \ldots, a_m).$$

Uočimo da uvijek vrijedi $S \geq 0$, bez obzira kakvi su parametri, jer se radi o zbroju kvadrata. Funkcija S minimizira se kao funkcija više varijabli $a_0, \ldots, a_m$. Ako je S dovoljno glatka funkcija, jer je funkcija u parametrima a_k, nužni uvjet ekstrema je

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Takav pristup vodi na sustav normalnih jednadžbi. [19]

5.1 Linearni problemi i linearizacija

Primjer 10.

Zadane su točke $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$, koje po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata aproksimiramo pravcem

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Greška aproksimacije u čvorovima koju minimiziramo je

$$S = S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

Parcijalne derivacije po parametrima a_0 i a_1 i nužni uvjet ekstrema daju

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} &= -2 \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 - a_1 x_k), \\ 0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} &= -2 \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 - a_1 x_k) x_k. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s -2 i sređivanjem po nepoznanicama a_0 i a_1 dobivamo linearni sustav:

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k &= \sum_{k=0}^{n} f_k, \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=0}^{n} f_k x_k. \end{aligned}$$

Uvođenjem standardnih skraćenih oznaka

$$s_l = \sum_{k=0}^{n} x_k^l, \quad t_l = \sum_{k=0}^{n} f_k x_k^l, \quad l \geq 0$$

linearni sustav možemo zapisati kao

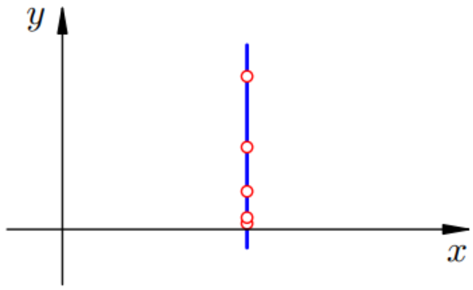
$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 &= t_0, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 &= t_1. \end{aligned}$$

Determinanta matrice sustava jednaka je $s_0 s_2 - s_1^2$. Cauchy - Schwarzova nejednakost primijenjena na vektore

$$e = [1, 1, \ldots, 1]^T, \quad x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]^T,$$

daje $s_0 s_2 \geq s_1^2$ pri čemu jednakost vrijedi samo ako su vektori e i x linearno zavisni. Uz pretpostavku da imamo barem dvije različite apcise polaznih točaka x_k (uvjet za pravac koji nije paralelan s y-osi) nejednakost je stroga, tj. $s_0 s_2 > s_1^2$. Dakle, determinanta matrice sustava različita je od nule pa postoji jedinstveno rješenje sustava. [19]

Slika situacije u kojoj problem najmanjih kvadrata za pravac nema rješenja, s time da je $n \geq m = 1$, tj. imamo barem dvije točke, dana je sljedećom slikom.[27]



Slika 5.1: Pravac paralelan s y-osi

Izvor: https://web.math.pmf.unizg.hr/ singer/zr2/zr2$_2$008$_0$9/09.pdf

Ako imamo više različitih podataka u jednoj jedinoj točki x_0, aproksimacijski pravac postoji i jedinstven je, ali je okomit na $x-$os pa njegova jednadžba nema oblik $y = a_0 + a_1 x$.

Preostaje još vidjeti jesmo li stvarno dobili minimum. Jedan od načina je korištenje drugih parcijalnih derivacija gdje je dovoljan uvjet minimuma pozitivna definintnost Hesseove matrice. Drugo objašnjenje je da je S zbroj kvadrata pa S predstavlja paraboloid s otvorom prema gore, u varijablama a_0 i a_1, pa je jasno da takav paraboloid ima minimum. Stoga nije potrebno ni provjeravati je li dobiveno rješenje minimum. [19]

Linearni model diskretnih najmanjih kvadrata je potpuno primjenjiv na opću linearnu funkciju

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + \cdots + a_m \varphi_m(x),$$

gdje su $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ zadane funkcije.

Ako φ nelinearno ovisi o parametrima, dobivamo nelinearni sustav jednadžbi koji se relativno teško rješava. Katkad se jednostavnim transformacijama problem može transformirati u linearni problem najmanjih kvadrata. Međutim, rješenja lineariziranog problema najmanjih kvadrata i rješenja originalnog nelinearnog problema nisu jednaka jer je i greška nelinearno transformirana. [19]

Primjer 11.

Zadane su točke $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ koje po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x}.$$

Uočimo da φ nelinearno ovisi o parametru a_1. Greška aproksimacije u čvorovima je

$$S = S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 e^{a_1 x_k})^2 \to \min.$$

Parcijalnim deriviranjem po varijablama a_0 i a_1 dobivamo

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 e^{a_1 x_k}) e^{a_1 x_k},$$
$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=0}^{n} (f_k - a_0 e^{a_1 x_k}) a_0 x_k e^{a_1 x_k}$$

što je nelinearan sustav jednadžbi. [19]

Ako logaritmiramo relaciju

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x},$$

dobivamo

$$\ln \varphi(x) = \ln(a_0) + a_1 x.$$

Moramo logaritmirati još i vrijednosti funkcije f u točkama x_k pa uz supstitucije

$$h(x) = \ln(x), \quad h_k = h(x_k) = \ln f_k, \quad k = 0, \ldots, n$$

i

$$\psi(x) = \ln \varphi(x) = b_0 + b_1 x,$$

gdje je

$$b_0 = \ln a_0, \quad b_1 = a_1$$

dobivamo linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(b_0, b_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (h_k - b_0 - b_1 x_k)^2 \to \min.$$

Iz rješenja b_0 i b_1 lako očitamo a_0 i a_1 jer je

$$a_0 = e^{b_0}, \quad a_1 = b_1.$$

Primijetimo da ovako dobiveno rješenje uvijek daje pozitivan a_0, tj. linearizarana $\varphi(x)$ uvijek će biti veća od 0. Napomenimo da smo pri linearizaciji pretpostavili da je $f_k > 0$ da bismo mogli logaritmirati. Ako su neki $f_k \leq 0$, onda korištenjem translacije svih podataka treba dobiti $f_k + translacija > 0$ pa onda linearizirati. [19]

Navodimo kratki popis funkcija koje su često u upotrebi i njihovih linearizacija u problemu najmanjih kvadrata.

(a) Funkcija

$$\varphi(x) = a_0 x^{a_1}$$

linearizira se logaritmiranjem

$$\psi(x) = \log\varphi(x) = \log(a_0) + a_1\log(x), \quad h_k = \log f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Uvođenjem oznaka

$$b_0 = \log(a_0), \quad b_1 = a_1,$$

linearizirani problem najmanjih kvadrata je

$$\tilde{S} = \tilde{S}(b_0, b_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - b_0 - b_1\log(x_k))^2 \to \min.$$

Kako bi se linearizacija mogla provesti, mora biti i $x_k > 0$ i $f_k > 0$.

(b) Funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

linearizira se ovako:

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x, \quad h_k = \frac{1}{f_k}, \quad k = 0, \dots, n,$$
$$f_k \neq 0, \forall k = 0, \dots, n.$$

Tada je linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

(c) Funkciju

$$\varphi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$$

možemo linearizirati na više načina. Prvi način je da stavimo

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 \frac{1}{x} + a_1, \quad h_k = \frac{1}{f_k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$
$$f_k \neq 0, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Tada je linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - a_0 \frac{1}{x_k} - a_1)^2 \to \min.$$

Drugi način je da stavimo

$$\psi(x) = \frac{x}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x, \quad h_k = \frac{x_k}{f_k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$
$$f_k \neq 0, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Tada je linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

(d) Funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$$

linearizira se stavljanjem

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 e^{-x}, \quad h_k = \frac{1}{f_k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$
$$f_k \neq 0, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Tada je linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (h_k - a_0 - a_1 e^{-x_k})^2 \to \min. \quad [19]$$

Matrična formulacija linearnog problema najmanjih kvadrata

Pretpostavimo da imamo skup mjerenih podataka (t_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$ i želimo taj model aproksimirati funkcijom oblika $\varphi(t)$. Ako je funkcija $\varphi(t)$ oblika

$$\varphi(t) = x_1\varphi_1(t) + \cdots x_m\varphi_m(t),$$

onda želimo pronaći parametre x_j tako da mjereni podaci (t_k, y_k) zadovoljavaju

$$y_k = \sum_{j=1}^{m} x_j\varphi_j(t_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ako označimo

$$a_{kj} = \varphi_j(t_k), \quad b_k = y_k,$$

onda prethodne jednadžbe u matričnom obliku možemo pisati kao

$$Ax = b.$$

Ako je mjerenih podataka više nego parametara, onda je ovaj sustav jednadžbi preodređen. Najčešće određujemo x tako da se minimizira greška (rezidual) $r = Ax - b$, tj. tražimo rješenje problema

$$\min_x \|r\|_2 = \min_x \|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{5.1}$$

Ako je $\operatorname{rang}(A) < m$, onda rješenje x nije jedinstveno jer mu možemo dodati bilo koji vektor iz nul-potprostora od A, a da se rezidual ne promijeni. Među svim rješenjima x problema najmanjih kvadrata uvijek postoji jedinstveno rješenje x najmanje norme, tj. koje još minimizira i $\|x\|_2$. [19]

5.2 Karakterizacija rješenja

Teorem 5.2.1. *Skup svih rješenja problema najmanjih kvadrata (5.1) označimo s*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m : \|Ax - b\|_2 = \min\}.$$

Tada je $x \in S$ ako i samo ako vrijedi sljedeća relacija ortogonalnosti

$$A^T(b - Ax) = 0. \tag{5.2}$$

Dokaz: Pretpostavimo da $\hat{x}$ zadovoljava normalne jednadžbe

$$A^T\hat{r} = 0, \quad \hat{r} = b - A\hat{x}.$$

Tada za bilo koji $x \in \mathbb{R}^m$ imamo

$$r = b - Ax = \hat{r} + A\hat{x} - Ax = \hat{r} - A(x - \hat{x}).$$

Ako označimo $e = (x - \hat{x})$, onda je $r = \hat{r} - Ae$ pa imamo

$$\|r\|_2^2 = r^T r = (\hat{r} - Ae)^T(\hat{r} - Ae) = \hat{r}^T\hat{r} + \|Ae\|_2^2 = \|\hat{r}\|_2^2 + \|Ae\|_2^2$$

što je minimizirano kad je $e = 0$, tj. minimalna vrijednost za $\|r\|_2$ jednaka je $\|r\|_2$ pa $x = \hat{x}$ minimizira $\|r\|_2$. Time je pokazano da je $\hat{x} \in S$.

Pokažimo obratnu implikaciju. Pretpostavimo da $\hat{x}$ minimizira normu reziduala, ali ne zadovoljava sustav

$$A^T\hat{r} = z \neq 0.$$

Tada možemo definirati

$$x = \hat{x} + \epsilon z,$$

za proizvoljno mali broj $\epsilon > 0$ pa je

$$r = \hat{r} - \epsilon Az$$

i

$$\|r\|_2^2 = r^T r = \hat{r}^T\hat{r} - 2\epsilon z^T z + \epsilon^2 (Az)^T(Az) < \hat{r}^T\hat{r} = \|\hat{r}\|_2^2$$

pa protivno pretpostavci $\hat{x}$ nije rješenje problema minimizacije $\|r\|_2$ za svaki dovoljno mali $\epsilon > 0$, što znači da nije u S. □

Relacija (5.2) zove se sustav normalnih jednadžbi i piše se u obliku

$$A^T A x = A^T b.$$

Matrica $A^T A$ je simetrična i pozitivno semidefinitna jer za svaki vektor x vrijedi

$$x^T A^T A x = (x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0,$$

a sustav normalni jednadžbi uvijek ima rješenje jer je

$$A^T b \in \mathcal{R}^1(A^T) = \mathcal{R}(A^T A).$$

Vrijedi čak i jače. [19], [27]

[1] Za linearni operator $\mathcal{A} : X \to Y, \mathcal{R}(\mathcal{A})$ je slika (ili područje vrijednosti) operatora $\mathcal{A}$ i vrijedi $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}x \mid x \in X\}$.

Teorem 5.2.2. *Matrica $A^T A$ je pozitivno definitna ako i samo ako su stupci od A linearno nezavisni, tj. ako je rang$(A) = m$.*

Dokaz: Ako su stupci od $A = [a_1, \ldots, a_m]$ linearno nezavisni, tada za svaki $x \neq 0$ vrijedi

$$Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m \neq 0$$

pri čemu su x_j komponente od x pa je za takav x

$$x^T A^T A x = \|Ax\|_2^2 > 0,$$

tj. $A^T A$ je pozitivno definitna.

Pokažimo obratnu implikaciju. Ako su stupci linearno zavisni, tada postoji $x_0 \neq 0$ takav da je $Ax_0 = 0$ pa je za takav x_0

$$x_0^T A^T A x_0 = 0.$$

Ako je x takav da je $Ax \neq 0$, onda je $x^T A^T A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$ pa je $A^T A$ pozitivno semidefinitna. $A^T A$ je općenito pozitivno semidefinitna, a pozitivnu definitnost osigurava ako je rang$(A) = m$. □

Ako je rang$(A) = m$, onda postoji jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b,$$

a rezidual je

$$r = b - A(A^T A)^{-1} A^T b.$$

Ako je $S \subset \mathbb{R}^n$ potprostor, onda je $P_S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni projektor na S, ako je $\mathcal{R}(P_S) = S$ i

$$P_S^2 = P_S, \quad P_S^T = P_S.$$

Vrijedi i

$$(I - P_S)^2 = (I - P_S), \quad (I - P_S)P_S = 0$$

pa je $I - P_S$ projektor na ortogonalni komplement od S.

Pretpostavimo da postoje dva ortogonalna projektora P_1 i P_2. Za sve $z \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|(P_1 - P_2)z\|_2^2 &= z^T (P_1 - P_2)^T (P_1 - P_2) z = z^T (P_1^T P_1 - P_2^T P_1 - P_1^T P_2 + P_2^T P_2) z \\
&= z^T (P_1 - P_2 P_1 - P_1 P_2 + P_2) z \\
&= z^T P_1 (I - P_2) z + z^T P_2 (I - P_1) z = 0.
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $P_1 = P_2$ pa je ortogonalni projektor jedinstven.[13], [19] Desna strana b može se zapisati kao

$$b = Ax + r$$

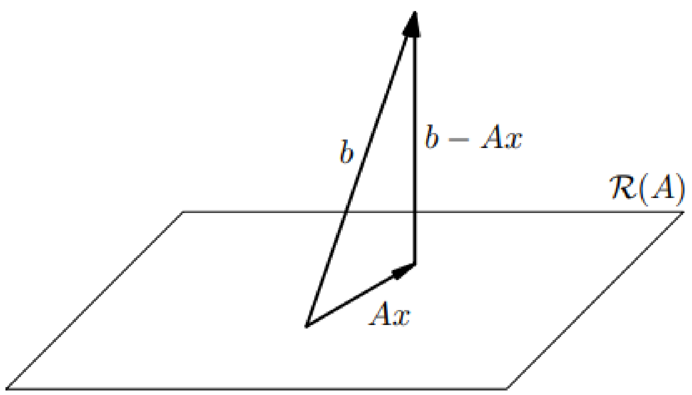
pri čemu je $Ax \in \mathcal{R}(A)$. Iz sustava normalni jednadžbi

$$A^T(b - Ax) = A^T r = 0$$

izlazi da je $r \in \mathcal{N}(A^T)$ [2] Prisjetimo se da je

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) = \mathbb{R}^n$$

i dobivamo geometrijsku interpretaciju metode najmanjih kvadrata, Ax je ortogonalna projekcija vektora b na $\mathcal{R}(A)$. [19], [27]



Slika 5.2: Ortogonalna projekcija vektora b na $\mathcal{R}(A)$

Izvor: https://web.math.pmf.unizg.hr/ rogina/2001096/num$_a$$nal.pdf$

Vrijedi i

$$r = (I - P_{\mathcal{R}(A)})b$$

i u slučaju punog ranga matrice A vrijedi

$$P_{\mathcal{R}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

S druge strane, ako je rang$(A) < m$, onda A ima netrivijalni nul-potprostor i rješenje problema najmanjih kvadrata nije jedinstveno. Ako istaknemo jedno od rješenja $\hat{x}$, onda skup svih rješenja S možemo opisati kao

$$S = \{x = \hat{x} + z \mid z \in \mathcal{N}(A)\}.$$

[2] Za linearni operator $\mathcal{A} : X \to Y$ potprostor $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je nul-potprostor (ili jezgra) i vrijedi $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mathcal{A}(x) = 0\}$.

Ako je $\hat{x} \perp \mathcal{N}(A)$, onda je

$$\|x\|_2^2 = \|\hat{x}\|_2^2 + \|z\|_2^2$$

pa je $\hat{x}$ jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata koje ima minimalnu 2-normu. [19]

Primjer 12.

U tablici su navedeni podaci o broju utrošenih minuta na pozive u nepokretnoj telefonskoj mreži (u milijunima) kroz godine:

Godina	2006	2007	2008	2009	2010
Minute	8515	5392	5557	5276	5099

Uz pretpostavku da se radi o linearnoj ovisnosti, predvidite broj utrošenih minuta u nepokretnoj telefonskoj mreži na pozive u 2012. godini.
Rješenje: Prvo treba pronaći linearnu ovisnost $y = kx + l$. Pravac $y = kx + l$ će najbolje prolaziti kroz zadane točke u smislu najmanjih kvadrata ako su k i l rješenja preodređenog sustava.

$$2006k + l = 8515$$

$$2007k + l = 5392$$

$$2008k + l = 5557$$

$$2009k + l = 5276$$

$$2010k + l = 5099$$

ili u matričnom obliku

$$Ax = b$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2006 & 1 \\ 2007 & 1 \\ 2008 & 1 \\ 2009 & 1 \\ 2010 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8515 \\ 5392 \\ 5557 \\ 5276 \\ 5099 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava u smislu najmanjih kvadrata je rješenje normalne jednadžbe

$$A^T A x = A^T b.$$

Uvrštavanjem dobivamo normalnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} 20160330 & 10040 \\ 10040 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59909764 \\ 29839 \end{bmatrix}$$

Prema [10] rang matrice $A = 2$ pa sustav ima jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 5 & -10040 \\ -10040 & 20160330 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 59909764 \\ 29839 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -694.8 \\ 1401126.2 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$y = -694.8x + 1401126.2$$

Za $x = 2012$ je

$$y = -694.8 \cdot 2012 + 1401126.2 = 3188.6$$

Broj utrošeni minuta (u milijunima) na pozive u nepokretnoj mreži u 2012. godini je približno 3188.6. [8]

Bibliografija

[1] *Code for Newton Divided Difference in C*, dostupno na https://wbutassignmentshelp.wordpress.com/2012/08/08/code-for-newton-divided-difference-in-c/?fbclid=IwAR0aLN_vjhzrAarbG9AGuKZb1QiiXnExqs888ahwlfjjJG6Cvg0xCAlcevo, (srpanj 2021.).

[2] *Cramerovo pravilo*, dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~lprimora/wp/Za%20Web/cramer.html, (lipanj 2021.).

[3] *Ekvivalentni sustavi*, dostupno na http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat3/node28.html, (srpanj 2021.).

[4] *Interpolacija*, dostupno na https://hr.wikipedia.org/wiki/Interpolacija, (lipanj 2021.).

[5] *Interpolacija*, dostupno na http://www.math.rs/p/files/16-02V_INTERPOLACIJA.pdf, (srpanj 2021.).

[6] *Interpolation with polynomial*, dostupno na https://www.math.umd.edu/~petersd/666/html/interpol_ex2.html#2 (srpanj 2021.).

[7] *Lagrange Interpolation Polynomial - C PROGRAM*, dostupno na https://www.bragitoff.com/2018/01/lagrange-interpolation-polynomial-c-program/?fbclid=IwAR1hh5H8XPZ5yiOO86hAjmbTvEZZuxhH75a7MwRwLW0xgieo5H5JLJFZRpQ, (srpanj 2021.).

[8] *Linearna regresija*, dostupno na http://lavica.fesb.hr/mat2/vjezbe/node101.html, (kolovoz 2021.).

[9] *Matematičke metode u kemiji 2,* predavanje 3, PMF-Kemijski odsjek, Zagreb, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/PREDAVANJE3.pdf?fbclid=IwAR2yrlj0teKd3sQf__vs8AC8xnzgkgxRrjGXv9nUXo_VjogCW62jQYCNbcY (lipanj 2021.).

[10] *Matrix calculator*, dostupno na https://www.calculator.net/matrix-calculator.html, (kolovoz 2021.).

[11] *Metoda najmanjih kvadrata*, dostupno na http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3/node153.html, (kolovoz 2021.).

[12] *More examples of Lagrange interpolation*, dostupno na http://www1.maths.leeds.ac.uk/~kersale/2600/Notes/appendix_E.pdf?fbclid=IwAR3RPtbCmA1YmLGMolXwu65Wwgc7LnBbIfGmslxWsZ8DueutAEg21JCr31E, (lipanj 2021.).

[13] *Ortogonalne projekcije*, dostupno na https://ff.unze.ba/nabokov/linearnaAlgebra/zima2014/14%20Ortogonalne%20projekcije.pdf, (kolovoz 2021.).

[14] *Runge's phenomenon*, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon, (srpanj 2021.).

[15] *Sarusovo pravilo*, dostupno na https://bs.wikipedia.org/wiki/Sarrusovo_pravilo, (lipanj 2021.).

[16] N. Bosner, *Interpolacija i aproksimacija splajnovima,* predavanje 5. dio, PMF-Matematički odsjek, Zagreb,, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nmfmpredavanja/nmfm_splajnovi.pdf (srpanj 2021.).

[17] ______, *Problem najmanjih kvadrata,* predavanje 4. dio, PMF-Matematički odsjek, Zagreb,, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nmfmpredavanja/nmfm_najmanji_kvadrati.pdf (kolovoz 2021.).

[18] A. Bošković, *Hermiteova interpolacija,* seminarski rad, Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti, Mostar, 2014., dostupno na https://pdfslide.net/reader/f/hermiteova-interpolacija (srpanj 2021.).

[19] M. Marušić M. Rogina S. Singer S. Singer Z. Drmač, V. Hari, *Numerička analiza,* skripta, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2003., dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf (lipanj 2021.).

[20] M. Klaričić Bakula, *Uvod u numeričku matematiku,* skripta, FESB, Zagreb, 2009., dostupno na https://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Numericka_matematika/Folije_za_predavanja/UNM_Interp.pdf (lipanj 2021.).

[21] S. Singer, *Matematika 9,* skripta, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2007./8., dostupno na https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/OldWeb/mat_9_1.pdf (lipanj 2021.).

[22] ———, *Numerička analiza,* predavanje 14, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2012., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/14nb_dodatak.pdf` (srpanj 2021.).

[23] ———, *Numerička analiza,* predavanje 6, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2010., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/nm_06.pdf` (srpanj 2021.).

[24] ———, *Numerička matematika,* Dodatni zadaci za vježbu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2020., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/unm/vjezbe/nm_dodzad.pdf` (kolovoz 2021.).

[25] ———, *Numerička matematika,* predavanje 7, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2010., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/nm_07.pdf` (kolovoz 2021.).

[26] ———, *Numerička matematika,* predavanje 8, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2010., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/nm_08.pdf` (kolovoz 2021.).

[27] ———, *Znanstveno računanje 2,* predavanje 9 i 10, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2009., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/zr2/zr2_2008_09/09.pdf` (srpanj 2021.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrađuje se aproksimacija i interpolacija funkcije. Aproksimacija označava postupak nalaženja funkcije koja će opisati neki konačan skup točaka ili neku drugu funkciju s najmanjim odstupanjem, a interpolacija je zahtjev da se vrijednosti nekih dviju funkcija podudaraju na nekom konačnom skupu točaka. Razmatra se opći problem aproksimacije, kriterij aproksimacije i interpolacija polinomima. Interpolacija polinomima obrađuje se kroz Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma uz koje se navode primjeri i algoritmi napisani u programskom jeziku C. Sadržaj se proširuje uz obradu Hermiteove interpolacije gdje u svakom čvoru, osim funkcijske vrijednosti, interpoliramo i vrijednost derivacije. Kod nekih funkcija, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma može dovesti do povećanja grešaka, te se umjesto visokog stupnja interpolacijskog polinoma koristi po dijelovima polinomna interpolacija. Za kraj se obrađuje metoda najmanjih kvadrata pomoću koje možemo zadanu funkciju aproksimirati drugom funkcijom globalno za razliku od Lagrangeovog polinom koji dobro aproksimira funkciju lokalno u izabranim točkama.

Summary

In this paper we deal with the approximation and interpolation of a function. Approximation involves determining the function that will best describe a given data set or other function with the smallest deviation, and interpolation is the requirement that the values of some two functions match at some finite set of points. The general problem of approximation, the criterion of approximation and the interpolation of polynomials are considered further in this paper. Interpolation by polynomials is made through Lagrange's and Newton's form of interpolation polynomial with examples and algorithms written in the programming language C. The content is expanded with Hermite interpolation, where in each node, we also interpolate the derivation value. For some functions, increasing the degree of the polynomial interpolant, can lead to an increase of errors and instead of interpolation by polynomials with high degree, we can use interpolation by piecewise polynomials. In the end of the paper we deal with the method of least squares. With this method we can approximate a given function by another function globally in contrast to the Lagrange polynomial, which well approximates the function locally at selected points.

Životopis

Rođena sam 26. studenog 1996. godine u Varaždinu. Pohađala sam Osnovnu školu Podrute te sam po završetku osnovne škole, 2011. godine, upisala opći smjer gimnazije na Prvoj gimnaziji Varaždin. Državnu maturu položila sam 2015. godine te sam iste godine upisala preddiplomski studij nastavničkog smjera Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2018. postala sam prvostupnica edukacije matematike te upisala diplomski studij nastavičkog smjera na istom fakultetu. Od rujna 2021. godine radim u Osnovnoj školi Vladimira Nazora na zamjeni kao nastavnica matematike.