Vjerojatnosna metoda u kombinatorici

Marić, Ante

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Marić

VJEROJATNOSNA METODA U KOMBINATORICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Rudi Mrazović

Zagreb, rujan, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji koja me podržavala tijekom studiranja te prijateljima koji su mi uljepšali svih 6 godina u Zagrebu. Zahvale mentoru Rudiju Mrazoviću na velikom razumijevanju i savjetima.

Sadržaj

Uvod

Vjerojatnosna metoda je jedan od najvažnijih alata koji se koriste primarno u kombinatorici, ali i u ostalim područjima matematike. Osnovna ideja vjerojatnosne metode je vrlo jednostavna: da bismo pokazali da postoji objekt koji zadovoljava određena svojstva, konstruiramo odgovarajući vjerojatnosni prostor i dokažemo da slučajno odabrani objekt iz tog prostora zadovoljava tražena svojstva s vjerojatnošću strogo većom od 0. Alternativno, ako dokažemo da je vjerojatnost strogo manja od 1, onda to implicira da postoji objekt koji *ne zadovoljava* tražena svojstva.

Osim u kombinatorici, vjerojatnosna metoda se primjenjuje i u teoriji brojeva, teoriji skupova, linearnoj algebri pa čak i matematičkoj analizi.

Iako je po prirodi nekonstruktivan alat, vjerojatnosna metoda često daje konkretne ograde na matematičke vrijednosti. Zbog toga je u dokazima rasprostranjena uporaba nejednakosti te asimptotskih ocjena (veliko i malo O notacija).

U ovom će se radu obraditi neki uvodni primjeri koji će dati uvid u način razmišljanja prilikom korištenja vjerojatnosne metode. Zatim će se uvesti vrlo važan pojam - matematičko očekivanje, koje je ključno za mnoge dokaze kojima ćemo se baviti u ovom radu. Na koncu ćemo prezentirati neke naprednije alate vjerojatnosne metode, poput Lovászeve lokalne leme. Spomenut će se i koncentracijske nejednakosti koje opisuju odstupanje slučajne varijable od neke konkretne vrijednosti, primjerice očekivanja te varijable.

Poglavlje 1

Uvodni primjeri

1.1 Definicije asimptotskih oznaka

Prije nego započnemo s radom, prisjetimo se nekih potrebnih definicija koje će se koristiti u ovom radu.

Definicija 1.1.1. *Neka su f i g dvije realne funkcije definirane na nekom podskupu realnih brojeva. Tada pišemo:*

- $f(x) = O(g(x))$ *ako postoje konstante N i c takve da* $|f(x)| \leq c|g(x)|$ *za sve* $x \geq N$
- $f(x) = \Omega(g(x))$ *ako* $g(x) = O(f(x))$
- $f(x) = o(g(x))$ *ako* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f \sim g$ *ako* $f(x) = (1 + o(1))g(x)$

Intuitivno, veliko O notacija označava da je funkcija f asimptotski ograničena funkcijom g, do na konstantu.

Malo o notacija znači da funkcija g raste mnogo brže nego funkcija f.

Konačno, $f \sim g$ znači da se f i g slično ponašaju asimptotski.

1.2 Ramseyevi brojevi

Rad ćemo započeti jednim od najpoznatijih primjera uporabe vjerojatnosne metode. Prije toga, uvodimo nekoliko osnovnih definicija.

Definicija 1.2.1. *Graf je uređeni par (V, E) gdje je V skup vrhova, a E je skup dvočlanih podskupova od V, koje zovemo i bridovi.*

Definicija 1.2.2. *Potpuni graf je graf u kojem je svaki par vrhova povezan bridom. Potpuni graf s n vrhova označavamo K_n.*
Prazan graf je graf kojem je skup bridova prazan skup. Prazan graf s n vrhova označavamo N_n.

Definicija 1.2.3. *Inducirani podgraf grafa (V, E) induciran skupom V' je podgraf $G(V', E')$ gdje je V' zadani podskup od V, a E' je skup svih bridova čija su oba kraja u V'.*

Sada možemo definirati **Ramseyeve brojeve**.

Definicija 1.2.4. *Ramseyev broj $R(k, l)$ definira se kao najmanji prirodni broj n takav da bilo koji graf sa n vrhova sadrži ili potpun inducirani podgraf K_k ili prazan inducirani podgraf N_l.*

Zanimljiva interpretacija Ramseyevih brojeva je sljedeća: broj $R(k, l)$ jednak je minimalnom broju gostiju koje moramo pozvati na druženje tako da se barem k gostiju međusobno poznaju ili barem l gostiju međusobno ne poznaju.

Ramsey je prvi dokazao da je $R(k, l)$ konačan za sve prirodne brojeve k i l. Vrijednosti Ramseyevih brojeva je iznimno teško izračunati te ih je poznato tek nekoliko. Prema [6], najbrži poznati algoritam za računanje Ramseyevih brojeva je eksponencijalne brzine s obzirom na broj vrhova.

Nama će od posebnog interesa biti takozvani **dijagonalni Ramseyevi brojevi** $R(k, k)$. Sada predstavljamo rezultat poznatog mađarskog matematičara Paula Erdősa, koji je jedan od najpoznatijih primjera uporabe vjerojatnosne metode, a koji daje donju granicu na dijagonalne Ramseyeve brojeve.

Teorem 1.2.5. *Za svaki $k \geq 3$ vrijedi*

$$R(k, k) > 2^{k/2-1}$$

Dokaz. Neka je G "slučajan graf" na skupu od n vrhova te neka za svaki par vrhova vrijedi da formiraju brid s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, nezavisno od ostalih bridova.

Označimo

$$A = \{G \text{ sadrži potpun ili prazan podgraf s } k \text{ vrhova}\}$$

Uzmimo skup od k vrhova. Vjerojatnost da je taj skup potpun podgraf je jednaka

$$p = 2^{-\binom{k}{2}}$$

jer potpuni graf sadrži $\binom{k}{2}$ bridova, a svaki se s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ pojavljuje u grafu.

Analogno, vjerojatnost da je skup od k vrhova prazan podgraf je

$$p = 2^{-\binom{k}{2}}$$

U grafu s n vrhova postoji $\binom{n}{k}$ podgrafova s k vrhova. Sada zbog σ-subaditivnosti vjerojatnosti vrijedi

$$\mathbb{P}(A) \leq 2\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}$$

Preostaje da izaberemo n takav da je posljednji izraz manji od 1, to jest želimo izabrati n tako da vrijedi

$$2\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}} < 1$$

Iz nejednakosti $\binom{n}{k} \leq n^k$, dobivamo dovoljan uvjet na n:

$$2n^k < 2^{\binom{k}{2}}$$

Ako vrijedi $n \leq 2^{k/2-1}$, onda gornji uvjet zaista vrijedi. Dakle, postoji barem jedan graf s $\lfloor 2^{k/2-1} \rfloor$ vrhova koji ne sadrži niti potpun niti prazan podgraf s k vrhova.

Iz definicije Ramseyevih brojeva proizlazi $R(k, k) > 2^{k/2-1}$, što smo i htjeli pokazati.

□

Korištenjem "oštrijih" nejednakosti u gornjem dokazu može se poboljšati donja granica. U [5] je pokazano da vrijedi

$$R(k, k) > \left(\frac{1}{e\sqrt{2} + o(1)}\right) k2^{k/2}.$$

Napomena 1.2.6. *Primijetimo da smo u dokazu prethodnog teorema koristili vjerojatnosnu metodu na "obratan" način. Definirali smo događaj A i dokazali smo da je njegova vjerojatnost strogo manja od* 1. *To pak dokazuje da je vjerojatnost komplementa događaja A strogo veća od* 0, *što je u suštini ono što želimo dokazati.*

Dokaz se može provesti i za komplement događaja A, to jest za

$$A^C = \{G \text{ ne sadrži niti prazan niti potpun podgraf s } k \text{ vrhova}\}$$

ali račun je u tom slučaju ponešto kompliciraniji.

1.3 Bojenje hipergrafa

Hipergrafovi su poopćenje grafova. U ovom poglavlju bavit ćemo se isključivo k-uniformnim hipergrafovima.

Definicija 1.3.1. *Hipergraf je uređeni par $H(V, E)$ gdje je V skup vrhova, a E je skup podskupova od V koje zovemo bridovima. k-uniformni hipergraf je hipergraf u kojem svi skupovi u E sadrže točno k bridova.*

Primijetimo da je obični graf zapravo 2-uniformni hipergraf.

Definicija 1.3.2. *Kažemo da je hipergraf* 2*-obojiv ako njegove vrhove možemo obojati u dvije različite boje tako da nijedan brid nije monokromatski, tj. ako nisu svi vrhovi u jednom bridu iste boje.*

Definicija 1.3.3. *Neka je* $m(k)$ *najmanji broj bridova* k*-uniformnog hipergrafa koji nije* 2*-obojiv.*

Primjerice, $m(2) = 3$ jer trokut nije 2-obojiv. Vrijednosti ove funkcije ubrzo postaju prevelike da bi se mogle izračunati. Znamo da vrijedi $m(3) = 7$ i $m(4) = 23$, ali $m(5)$ nije poznato.

Prvo ćemo dokazati jedan rezultat koji se pripisuje Erdősu.

Propozicija 1.3.4. *Svaki* k*-uniformni hipergraf s manje od* 2^{k-1} *bridova je* 2*-obojiv, to jest* $m(k) \geq 2^{k-1}$.

Dokaz. Neka je $H(V, E)$ k-uniformni hipergraf s manje od 2^{k-1} bridova. Neka je svaki vrh obojan plavom ili crvenom bojom, oboje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$.

Prvo definirajmo događaje A_e kao

$$A_e = \{\text{brid } e \text{ je monokromatski}\}.$$

Fiksiramo li neki konkretan brid, vjerojatnost da je on monokromatski je jednaka 2^{1-k}. Dakle, $\mathbb{P}(A_e) = 2^{1-k}$.

Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(\text{postoji monokromatski brid}) \leq \sum_{e \in E} \mathbb{P}(A_e) < 2^{k-1} \cdot 2^{1-k} = 1$$

Dakle postoji 2-bojenje hipergrafa koji ima manje od 2^{k-1} bridova takvo da ne postoji monokromatski brid.

□

U [5] je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 1.3.5. *Ako postoji* $p \in [0, 1]$ *takav da vrijedi* $n(1-p)^k + n^2 p < 1$*, onda* $m(k) > 2^{k-1}n$.

Kao posljedicu ovog teorema dobijemo bolju donju granicu na broj $m(k)$.

Korolar 1.3.6. *Vrijedi*

$$m(k) = \Omega\left(\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{1/2} 2^k\right)$$

Dokaz. Iz nejednakosti $1 - p \leq e^{-p}$ slijedi

$$n(1-p)^k + n^2 p \leq ne^{-pk} + n^2 p \tag{1.1}$$

Funkcija $f(p) = ne^{-pk} + n^2 p$ poprima minimum za $p = \frac{1}{k}\ln(k/n)$. Uvrstimo li ovaj p u (1.1), dobijemo

$$n(1-p)^k + n^2 p < \frac{n^2}{k}(1 + \ln(k/n))$$

Dakle, ako vrijedi nejednakost

$$\frac{n^2}{k}(1 + \ln(k/n)) < 1,$$

onda je ispunjena pretpostavka teorema 1.3.5. Nejednakost vrijedi za svaki $n = c(k/\ln k)^{1/2}$ gdje je $c < \sqrt{2}$ te k dovoljno velik. □

Erdős je, između ostalog, dokazao i sljedeći teorem.

Teorem 1.3.7. *Vrijedi*

$$m(k) < (1 + o(1))\frac{e \ln 2}{4} k^2 2^k$$

Dokaz. Iznijet ćemo samo ideju dokaza, cijeli dokaz se može pronaći u [5].

U ovom dokazu, počinjemo samo sa skupom vrhova V, te neka je $|V| = v$. Neka su $S_1, S_2, \ldots S_m$ slučajno izabrani k-člani podskupovi od V (bridovi).

Za svako bojanje χ definiramo događaj A_χ da nijedan S_i nije monokromatski. Naš je cilj izabrati m i v takve da vrijedi

$$\sum_{\chi} \mathbb{P}(A_\chi) < 1$$

Ako u bojanju χ obojimo a vrhova jednom bojom, a b vrhova drugom bojom (gdje je $b = v - a$), onda vrijedi

$$\mathbb{P}(S_i \text{ je monokromatski}) = \frac{\binom{a}{k} + \binom{b}{k}}{\binom{v}{k}}$$

jer postoji ukupno $\binom{v}{k}$ k-članih podskupova od V, a od njih su $\binom{a}{k} + \binom{b}{k}$ monokromatski.

Ovaj je izraz minimalan kada je $a = b$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(S_i \text{ je monokromatski}) \geq p$$

gdje je $p = 2\frac{\binom{v/2}{k}}{\binom{v}{k}}$.

Vrijedi $\mathbb{P}(A_\chi) = (1-p)^m$ jer su S_i odabrani nezavisno jedni od drugih.

S obzirom na to da postoji 2^v mogućih bojanja grafa, iz σ-subaditivnosti vjerojatnosti proizlazi

$$\sum_\chi \mathbb{P}(A_\chi) \leq 2^v(1-p)^m$$

Može se pokazati da za $m = \left\lceil \frac{v \ln 2}{p} \right\rceil$, vrijedi $2^v(1-p)^m < 1$, pa imamo $m(k) \leq m$. Preostaje minimizirati v/p. Korištenjem nekih poznatih nejednakosti i metoda matematičke analize, pokaže se da je optimalna vrijednost $v = \frac{k^2}{2}$, što daje konačan rezultat.

□

1.4 Kombinatorna teorija brojeva

U ovom poglavlju pokazat ćemo još jedan Erdősev teorem. Dokaz teorema je utoliko ljepši i elegantniji jer sam teorem naoko nema veze s vjerojatnošću.

Definicija 1.4.1. *Kažemo da je skup X bez sume ako za svaki $a,\ b \in X$ vrijedi $a+b \notin X$.*

Teorem 1.4.2. *Svaki skup n cijelih brojeva različitih od* 0 *sadrži skup bez sume A takav da vrijedi $|A| > \frac{1}{3}n$.*

Dokaz. Neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ skup n cijelih brojeva različitih od 0. Nadalje, neka je $p = 3k+2$ bilo koji prosti broj koji je barem dvostruko veći od najveće apsolutne vrijednosti brojeva b_i. Dakle

$$p > 2 \max_{i=1,\ldots n} |b_i|$$

Neka je sad $C = \{k+1, k+2, \ldots 2k+1\}$. C je skup bez sume te ujedno i podskup cikličke grupe $\mathbb{Z}_p$ te vrijedi

$$\frac{|C|}{p-1} = \frac{k+1}{3k+1} > \frac{1}{3}$$

Neka je x prirodan broj izabran na uniforman način iz skupa $\{1, 2, \ldots p-1\}$ te neka su d_i definirani kao $d_i \equiv xb_i \mod p$. Fiksiramo li i te pustimo da x prolazi po brojevima iz skupa $\{1, 2, \ldots p-1\}$, dobijemo da d_i prolazi po svim elementima skupa $\mathbb{Z}_p$ pa vrijedi

$$\mathbb{P}(d_i \in C) = \frac{|C|}{p-1} > \frac{1}{3}$$

Sad znamo da je *očekivani* broj elemenata b_i takvih da je d_i u C barem $n/3$. To znači da postoji neki x te skup $A = \{a_1, \ldots a_n\} \subseteq B$ takav da vrijedi $|A| > n/3$ te su d_i definirani s $d_i \equiv xa_i \mod p$ svi u C. A je očito skup bez sume, jer u suprotnom bi imali $xa_1 + xa_2 \equiv xa_3$

mod p za neke a_1, a_2, a_3 iz A što je kontradikcija s činjenicom da je C skup bez sume. Ovim je dokaz završen.

$\square$

Napomena 1.4.3. *Primijetimo da smo u dokazu prethodnog teorema radili u cikličkoj grupi* $\mathbb{Z}_p$ *gdje je* p *odabran na odgovarajući način. Odabrali smo* p *dovoljno velik, tako da se sve operacije u skupu* B *(koji je podskup od* $\mathbb{Z}$*) sad odvijaju u skupu* $\mathbb{Z}_p$*. Ovo je mnogo zgodnije za računanje jer je* $\mathbb{Z}_p$ *konačna grupa, a time što je* p *prosti broj, osigurali smo da je* $\mathbb{Z}_p$ *i polje. [4]*

Napomena 1.4.4. *Važno je primijetiti da je dokaz teorema 1.4.2 prvi dokaz u kojem se koristi matematičko očekivanje. Očekivanje je jedan od najbitnijih alata vjerojatnosne metode te ćemo se susretati s njim u daljnjem radu.*

Poglavlje 2

Matematičko očekivanje

2.1 Svojstva matematičkog očekivanja

Matematičko očekivanje je vrlo moćan alat čija je primjena ključna u mnogim rezultatima vjerojatnosne metode. Jedno od najvažnijih svojstava matematičkog očekivanja u primjerima vjerojatnosne metode je *linearnost*.

Još jedno bitno svojstvo je navedeno u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1.1. *Neka je X slučajna varijabla te $\mathbb{E}[X]$ njezino matematičko očekivanje. Tada postoji elementarni događaj ω_1 takav da vrijedi $X(\omega_1) \geq \mathbb{E}[X]$ te elementarni događaj ω_2 takav da vrijedi $X(\omega_2) \leq \mathbb{E}[X]$.*

Dokaz. Dokazat ćemo prvi slučaj, a drugi se dokazuje analogno. Pretpostavimo da za svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $X(\omega) < \mathbb{E}[X]$. Tada zbog monotonosti integrala vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \int_\Omega \mathbb{E}[X]\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X]$$

Dobili smo kontradikciju pa mora postojati neki $\omega_1 \in \Omega$ takav da $X(\omega_1) \geq \mathbb{E}[X]$. □

Prethodna propozicija omogućuje nam da ocjenjujemo vrijednost slučajne varijable s obzirom na njezino matematičko očekivanje.

Primjer 2.1.2. *Pronađimo očekivani broj fiksnih točaka slučajne permutacije σ na skupu $\{1, \ldots n\}$.*

Definirajmo slučajnu varijablu X kao broj fiksnih točaka permutacije σ. Neka su slučajne varijable X_i zadane kao indikatorske varijable događaja $\{\sigma(i) = i\}$. Tada vrijedi

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

S obzirom na to da su X_i indikatorske varijable, imamo

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$$

Sada linearnost matematičkog očekivanja povlači

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$$

Dakle, slučajna permutacija u prosjeku ima jednu fiksnu točku.

2.2 Primjeri korištenja matematičkog očekivanja

Počinjemo s jednim primjerom iz teorije grafova. Bit će nam potrebna definicija bipartitnog grafa za nastavak.

Definicija 2.2.1. *Bipartitan graf je graf $G = (V, E)$ takav da se skup vrhova V može particionirati u dva skupa A i B takva da svaki brid $e \in E$ spaja jedan vrh iz A s jednim vrhom iz B.*

Teorem 2.2.2. *Neka je $G = (V, E)$ graf s n vrhova i e bridova. Tada G sadrži bipartitan podgraf s barem $e/2$ bridova.*

Dokaz. Neka je T skup zadan na sljedeći način: za svaki vrh $v \in V$ neka vrijedi $\mathbb{P}(v \in T) = 1/2$, nezavisno od ostalih vrhova. Neka je $B = V \setminus T$.

Brid $\{x, y\}$ zvat ćemo prijelazni ako je točno jedan od vrhova x i y u T. Neka je X slučajna varijabla koja označava broj prijelaznih bridova. Tada možemo zapisati

$$X = \sum_{\{x,y\} \in E} X_{xy}$$

X_{xy} su indikatorske slučajne varijable događaja $\{xy$ je prijelazni brid$\}$. Vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{xy}] = \frac{1}{2}$$

pa iz linearnosti matematičkog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\{x,y\} \in E} \mathbb{E}[X_{xy}] = \frac{e}{2}$$

Sad iz propozicije 2.1.1 dobijemo da postoji skup T takav da vrijedi $X \geq e/2$ za taj skup T. Skup prijelaznih bridova određen tim skupom T čini traženi bipartitni podgraf.

□

Sad ćemo pokazati jedan rezultat iz linearne algebre, a tiče se *balansiranja vektora*.

Teorem 2.2.3. *Neka su $v_1,\ v_2,\dots v_n$ jedinični vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada postoje $\epsilon_1,\dots\epsilon_n$ takvi da $\epsilon_i = \pm 1$ i vrijedi*

$$\|\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n\| \le \sqrt{n}.$$

Također postoje $\epsilon_1,\dots\epsilon_n$ takvi da $\epsilon_i = \pm 1$ te vrijedi

$$\|\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n\| \ge \sqrt{n}.$$

Dokaz. Odaberimo $\epsilon_1,\dots\epsilon_n$ na uniforman način iz skupa $\{-1, 1\}$, nezavisno jedne od drugih. Definiramo slučajnu varijablu

$$X = \|\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n\|^2$$

Raspisivanjem dobijemo

$$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_i\epsilon_j v_i \cdot v_j$$

Zbog linearnosti očekivanja vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\epsilon_i\epsilon_j] v_i \cdot v_j$$

Ako je $i \neq j$, onda $\mathbb{E}[\epsilon_i\epsilon_j] = \mathbb{E}[\epsilon_i]\mathbb{E}[\epsilon_j] = 0$. Ako je $i = j$, onda $\mathbb{E}[\epsilon_i\epsilon_j] = \mathbb{E}[\epsilon_i^2] = 1$. Dakle u gornjoj sumi *prežive* samo članovi s istim indeksom:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot v_i = n$$

Sad iz Propozicije 2.1.1 slijedi da postoje odabiri koeficijenata ϵ_i takvi da vrijedi $X \le n$ i $X \ge n$. Rezultat dobijemo uzimanjem drugog korijena. □

Slijedi vrlo zanimljiv problem u kojem imamo zadanu $n \times n$ rešetku žarulja te su dani prekidači za pojedine retke i stupce. Prekidači mijenjaju stanje svih žarulja u nekom retku ili stupcu - ako je žarulja bila upaljena, onda će se pritiskom prekidača ugasiti i obratno. Želimo maksimizirati broj upaljenih žarulja uz neku zadanu početnu konfiguraciju. Zapišimo problem matematički.

Problem 2.2.4. *Neka je dana $n\times n$ matrica $A = (a_{ij})$ gdje su svi a_{ij} jednaki -1 ili 1. Brojevi a_{ij} predstavljaju stanje žarulje na mjestu (i, j), gdje 1 označava da je žarulja upaljena, a -1 da je ugašena.*

Slično, neka su prekidači označeni s x_i (redovi) te y_j (stupci). Ako je $x_i = -1$, onda je prekidač u i-tom retku upaljen. Analogno za y_j.

Cilj problema je maksimizirati sljedeću vrijednost:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Primijetimo da je prethodna vrijednost zapravo jednaka broju upaljenih žarulja minus broj ugašenih žarulja.

Sljedeći teorem daje donju među na vrijednost iz prethodnog problema.

Teorem 2.2.5. *Neka su dani brojevi $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ za $i, j = 1, \dots n$. Tada možemo izabrati brojeve $x_i, y_j \in \{-1, 1\}$ takve da vrijedi*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \geq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(1) \right) n^{3/2}$$

Dokaz. Neka su $y_1, \dots y_n$ uniformno odabrani iz skupa $\{-1, 1\}$, nezavisno jedni od drugih. To znači da su prekidači za stupce upaljeni ili ugašeni na proizvoljan način. Možemo odabrati x_i-eve koristeći sljedeću taktiku: ako je suma i-tog reda negativna, upalimo prekidač x_i pa će postati pozitivna. Ako je suma i-tog reda pozitivna, ne diramo ništa.

Neka je $R_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$ te $R = \sum_{i=1}^{n} |R_i|$. Primijetimo da R_i označava sumu i-tog reda, a R konačnu sumu (s obzirom na taktiku koju smo iznijeli gore).

R_i je suma n nezavisnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti -1 i 1. Aproksimiramo R_i pomoću $\sqrt{n}Z$, gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}[|R_i|] \sim \mathbb{E}\Big[\big|\sqrt{n}Z\big|\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{n}$$

Ova činjenica vrijedi jer je $|Z|$ apsolutna vrijednost standardne normalne varijable, što je opet slučajna varijabla, ali s očekivanjem $\sqrt{2/\pi}$.

Iz linearnosti očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|R_i|] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{3/2}$$

Posljednju asimptotsku jednakost možemo zapisati i kao

$$\mathbb{E}[R] = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(1) \right) n^{3/2}$$

Dakle postoji odabir $y_1, \dots y_n$ takav da $R \geq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o(1)\right) n^{3/2}$, a x_i su izabrani na gore opisani način.

□

2.3 Prepravci

"Naivna" vjerojatnosna metoda sastojala se od toga da definiramo adekvatni vjerojatnosni prostor i onda pokažemo da objekt sa željenim svojstvima postoji s pozitivnom vjerojatnošću. Međutim, ponekad nam to nije dovoljno - slučajni objekt ne mora imati traženo svojstvo, ali pomoću malih *prepravaka* možemo doći do željenog objekta.

Ideja je sljedeća: pretpostavimo da želimo dokazati da postoji objekt O. Prvo dokažemo da s pozitivnom vjerojatnošću postoji objekt O' koji je "sličan" objektu O. Zatim *prepravimo* objekt O' tako da dobijemo objekt O, ali da vjerojatnost još uvijek ostane pozitivna.

Pokažimo sad na primjeru kako se prepravci koriste. Prvo uvedimo jednu definiciju.

Definicija 2.3.1. *Stupanj nezavisnosti grafa $G(V, E)$, u oznaci $\alpha(G)$, je kardinalitet najvećeg praznog podgrafa induciranog nekim podskupom od V. Konkretno, $\alpha(G) \geq t$ znači da postoji t vrhova bez bridova među njima.*

Sada ćemo iskazati i dokazati teorem koji se još naziva i mali Turánov teorem, po mađarskom matematičaru Pálu Turánu.

Teorem 2.3.2. *Neka je $G(V, E)$ graf s n vrhova te $\frac{nd}{2}$ bridova, $d \geq 1$. Tada vrijedi $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.*

Dokaz. Neka je $S \subseteq V$ slučajan skup definiran pomoću izraza

$$\mathbb{P}(v \in S) = p$$

gdje je $p \in [0, 1]$ (kasnije ćemo ga utvrditi) te su događaji $\{v \in S\}$ nezavisni. Neka je X slučajna varijabla jednaka kardinalitetu skupa S te neka je Y jednako broju bridova među vrhovima iz S.

Neka su sad Y_e indikatorske slučajne varijable događaja $\{e = \{i, j\} \in S\}$. Tada možemo zapisati Y kao $Y = \sum_{e \in E} Y_e$. Vrijedi

$$\mathbb{E}[Y_e] = \mathbb{P}(Y_e) = \mathbb{P}(i, j \in S) = p^2$$

Iz linearnosti očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{e \in E} p^2 = \frac{nd}{2} p^2$$

Također vrijedi $\mathbb{E}[X] = np$ pa imamo

$$\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = np - \frac{nd}{2}p^2$$

Sad izaberimo $p = \dfrac{1}{d}$ da bismo maksimizirali ovaj izraz. Dobijemo

$$\mathbb{E}[X - Y] = \frac{n}{2d}$$

Dakle postoji skup S takav da je broj vrhova minus broj bridova u njemu barem $\frac{n}{2d}$. Sada na red dolazi prepravak: izaberimo jedan vrh iz svakog brida iz S i obrišimo ga. Tada nam ostaje skup S^* s barem $\frac{n}{2d}$ vrhova. S obzirom na to da smo "uništili" sve bridove, S^* je skup od barem $\frac{n}{2d}$ vrhova bez bridova, što dokazuje teorem.

□

Još jedan slikovit primjer dolazi iz područja kombinatorne geometrije. Za skup S od n točaka u jediničnom kvadratu, definiramo broj $T(S)$ kao površinu najmanjeg trokuta čiji su vrhovi točke iz S. Neka je sada $T(n) = \max_S T(S)$. Želimo naći asimptotsko ponašanje funkcije $T(n)$.

Ovaj problem se još naziva i *Heilbronnov problem* po Hansu Heilbronnu koji ga je postavio. Heilbronn je ujedno dao i sljedeću slutnju koja se ispostavila pogrešnom.

Slutnja 2.3.3. *Vrijedi $T(n) = O(1/n^2)$.*

Komlós, Pintz i Szemerédi su 1982. godine dokazali da vrijedi $T(n) = \Omega(\log n/n^2)$, pobivši tako Heilbronnovu slutnju. Mi ćemo dokazati malo slabiju tvrdnju, koristeći vjerojatnosnu metodu i prepravke.

Teorem 2.3.4. *Postoji skup S koji se sastoji od n točaka u jediničnom kvadratu takav da vrijedi $T(S) \geq \frac{1}{100n^2}$.*

Dokaz. Izaberimo $2n$ točaka na uniforman način u jediničnom kvadratu, nezavisno jednu od druge. Neka su P, Q, R neke tri točke te μ neka je površina trokuta $\triangle PQR$. Želimo ocijeniti vjerojatnost $\mathbb{P}(\mu \leq \epsilon)$ za neki $\epsilon > 0$.

Neka je x duljina stranice $\overline{PQ}$. Za svaki $b \geq 0$ i $\Delta b \leq 1$ vrijedi

$$\mathbb{P}(b \leq x \leq b + \Delta b) \leq \pi(b + \Delta b)^2 - \pi b^2 = 2\pi b\Delta b + \pi(\Delta b)^2$$

Ova nejednakost slijedi iz činjenice da je vjerojatnost da je x u intervalu $[b, b + \Delta b]$ manja ili jednaka površini kružnog vijenca s radijusima b i $b + \Delta b$. Pustimo li limes, dobijemo

$$\mathbb{P}(b \leq x \leq b + \mathrm{d}b) \leq (2\pi b)\,\mathrm{d}b$$

Neka je sada $\overline{PQ}$ baza trokuta $\triangle PQR$ i neka joj je duljina b. Kada će se dogoditi da je površina trokuta $\triangle PQR$ manja ili jednaka ϵ? Onda kada je visina h na bazu $\overline{PQ}$ manja ili jednaka od $\frac{2\epsilon}{b}$, odnosno kada je udaljenost točke R od stranice PQ manja ili jednaka $\frac{2\epsilon}{b}$.

Vjerojatnost tog događaja je manja od $\frac{4\epsilon\sqrt{2}}{b}$ jer R leži u pravokutniku širine $\frac{4\epsilon}{b}$ i duljine manje ili jednake od $\sqrt{2}$. Sad možemo ocijeniti površinu na sljedeći način:

$$\mathbb{P}(\mu \leq \epsilon) \leq \int_0^{\sqrt{2}} (2\pi b)(4\sqrt{2}\epsilon/b)\,\mathrm{d}b = 16\pi\epsilon$$

Neka je S' skup $2n$ točaka koje smo izabrali. Za svaku trojku točaka (P_i, Q_i, R_i), neka je X_{P_i,Q_i,R_i} indikatorska varijabla događaja $\left\{\text{trokut } \triangle P_iQ_iR_i \text{ ima površinu } < \frac{1}{100n^2}\right\}$.

Sada iz gornjeg računa slijedi da je vjerojatnost da neki trokut ima površinu manju od $\frac{1}{100n^2}$ jednaka

$$16\pi\epsilon = 16\pi\frac{1}{100n^2} \leq \frac{0.6}{n^2}$$

Ovo je ujedno i granica na očekivanje slučajne varijable X_{P_i,Q_i,R_i}. Neka je X broj trokuta s površinom manjom od $\frac{1}{100n^2}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{P_i,Q_i,R_i} \mathbb{E}[X_{P_i,Q_i,R_i}] \leq \binom{2n}{3} 0.6n^{-2} < n$$

Dakle, postoji skup $2n$ točaka takav da manje od n trokuta ima površinu manju od $\dfrac{1}{100n^2}$. Sada obrišemo jedan vrh od svakog takvog trokuta. Dobijemo novi skup S'' koji sadrži najmanje n vrhova (točaka) i svaki trokut ima površinu barem $\frac{1}{100n^2}$.

□

Poglavlje 3

Lovászeva lokalna lema

Početna ideja vjerojatnosne metode bila je dokazati da je vjerojatnost nekog događaja od interesa strogo pozitivna. Međutim, u većini rezultata dokazano je i puno više od toga - vjerojatnost događaja ne samo da je strogo pozitivna nego je i jako velika. Na taj način dobijemo vjerojatnosni prostor gdje bilo koji objekt zadovoljava traženo svojstvo gotovo sigurno.

Iako su dokazi takvoga tipa korisni jer se možda mogu pretvoriti u neki tip algoritma, ponekad se nađemo u situaciji da većina objekata iz konstruiranog vjerojatnosnog prostora ne zadovoljava tražena svojstva. Na primjer, u [4] je dan jednostavan primjer: pretpostavimo da su zadana dva skupa A i B jednakog kardinaliteta te da želimo naći injekciju među njima. Znamo da injekcija postoji, ali ako pokušamo konstruirati slučajnu funkciju, ona vjerojatno neće biti injektivna.

Lovászeva lokalna lema bavi se slučajevima kad je vjerojatnost relativno mala, ali svejedno strogo pozitivna.

3.1 Dokaz Lovászeve lokalne leme

Prvo ćemo uvesti nekoliko potrebnih definicija.

Definicija 3.1.1. *Događaj A nezavisan je od događaja $B_1, \dots B_n$ ako za svaki $J \subseteq \{1, \dots n\}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(A \cap \bigcap_{j \in J} B_j\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$$

Definicija 3.1.2. *Usmjereni graf je uređeni par (V, E) gdje je V skup vrhova, a E je skup uređenih parova elemenata iz V. Elementi skupa E su usmjereni bridovi.*

Definicija 3.1.3. *Kažemo da je usmjereni graf $D(V, E)$ graf ovisnosti za događaje $A_1, \dots A_n$ ako za svaki A_i vrijedi da je nezavisan od događaja $\left\{A_j \;:\; (i, j) \notin E\right\}$.*

Sada dajemo iskaz i dokaz općenitog slučaja Lovászeve lokalne leme.

Lema 3.1.4. *Neka su $A_1, \dots A_n$ događaji u nekom vjerojatnosnom prostoru te neka je $D(V, E)$ graf ovisnosti za te događaje. Pretpostavimo da postoje realni brojevi $x_1, \dots x_n$ takvi da $x_i \in [0, 1)$ te da za svaki $i \in \{1, \dots n\}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j).$$

Tada imamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

Dakle, vjerojatnost da se nijedan od događaja A_i ne dogodi je strogo pozitivna.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da za bilo koji skup $S \subset \{1, \dots n\}$ i za svaki $i \notin S$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j\in S} \overline{A_j}\right) \leq x_i$$

Koristit ćemo indukciju po $s = |S|$. Baza indukcije je $s = 0$ pa imamo $S = \emptyset$. Iz pretpostavke leme sad slijedi

$$\mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j\in S} \overline{A_j}\right) = \mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j) \leq x_i$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve strogo manje od s te dokažimo tvrdnju za $s = |S|$. Neka je $S_1 = \{j \in S : (i, j) \in E\}$ te $S_2 = S \setminus S_1$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da vrijedi $S_1 \neq \emptyset$. Inače su A_i i $\bigcap_{j\in S} \overline{A_j}$ nezavisni pa tvrdnja opet slijedi iz pretpostavke leme.

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti dobivamo

$$\mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j\in S} \overline{A_j}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_i \cap \bigcap_{j\in S_1} \overline{A_j} \,\middle|\, \bigcap_{l\in S_2} \overline{A_l}\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in S_1} \overline{A_j} \,\middle|\, \bigcap_{l\in S_2} A_l\right)}$$

Sad ćemo ocijeniti brojnik i nazivnik prethodnog izraza. S obzirom na to da je A_i nezavisan od događaja $\{A_l : l \in S_2\}$, vrijedi sljedeća ocjena brojnika:

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap \bigcap_{j\in S_1} \overline{A_j} \,\middle|\, \bigcap_{l\in S_2} \overline{A_l}\right) \leq \mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{l\in S_2} \overline{A_l}\right) = \mathbb{P}(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j)\in E} (1 - x_j)$$

Za ocjenu nazivnika, koristit ćemo pretpostavku indukcije. Neka je $S_1 = \{j_1, \dots j_r\}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in S_1}\overline{A_j}\,\middle|\,\bigcap_{l\in S_2}A_l\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_{j_1}}\cap\cdots\cap\overline{A_{j_r}}\,\middle|\,\bigcap_{l\in S_2}A_l\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_{j_1}}\,\middle|\,\bigcap_{l\in S_2}A_l\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_{j_2}}\,\middle|\,\overline{A_{j_1}}\cap\bigcap_{l\in S_2}A_l\right)\cdots\mathbb{P}\left(\overline{A_{j_r}}\,\middle|\,\overline{A_{j_1}}\cap\cdots\cap\overline{A_{j_{r-1}}}\cap\bigcap_{l\in S_2}A_l\right)\\
&\geq (1-x_{j_1})(1-x_{j_2})\cdots(1-x_{j_r})\\
&\geq \prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)
\end{aligned}$$

Dakle

$$\mathbb{P}\left(A_i\,\middle|\,\bigcap_{j\in S}\overline{A_j}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_i\cap\bigcap_{j\in S_1}\overline{A_j}\,\middle|\,\bigcap_{l\in S_2}\overline{A_l}\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in S_1}\overline{A_j}\,\middle|\,\bigcap_{l\in S_2}A_l\right)} \leq \frac{x_i\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)}{\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)} = x_i$$

Korak indukcije je dokazan pa zaista vrijedi $\mathbb{P}\left(A_i\,\middle|\,\bigcap_{j\in S}\overline{A_j}\right) \leq x_i$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right) &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\cdots\mathbb{P}(\overline{A_n}\mid\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}})\\
&= (1-\mathbb{P}(A_1))\left(1-\mathbb{P}(A_2\mid\overline{A_1})\right)\cdots\left(1-\mathbb{P}(A_n\mid\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}})\right)\\
&\geq \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)
\end{aligned}$$

Ovim je dokaz priveden kraju. □

Iz općenitog slučaja slijedi i simetrična verzija lokalne leme koja je puno raširenija u primjenama.

Korolar 3.1.5. *Neka su $A_1, \dots A_n$ događaji u nekom vjerojatnosnom prostoru takvi da vrijedi $\mathbb{P}[A_i] \leq p$ za sve $i = 1, \dots n$. Pretpostavimo da je svaki događaj A_i nezavisan od ostalih događaja A_j, $j \neq i$, osim najviše njih d. Ako vrijedi $ep(d+1) \leq 1$, onda imamo*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right) > 0$$

Dokaz. Ako je $d = 0$, onda su $\{A_i\}_{i=1}^n$ međusobno nezavisni pa vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{P}(A_i)) \geq (1-p)^n > 0$$

Ako je $d > 0$, onda stavimo $x_i = \dfrac{1}{d+1} < 1$. Slijedi

$$x_i \prod_{(i,j)\in E}(1 - x_j) \geq \frac{1}{d+1}\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \geq \frac{1}{e(d+1)} \geq p \geq \mathbb{P}(A_i)$$

Druga nejednakost slijedi iz dobro poznate činjenice

$$\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d > \frac{1}{e}$$

Korolar sad slijedi iz Leme 3.1.4. □

Priložit ćemo još jednu inačicu simetrične verzije lokalne leme koja će nam trebati za jedan primjer kasnije. Ova je inačica zapravo originalna verzija lokalne leme, a objavljena je 1975. godine.

Lema 3.1.6. *Neka su $A_1, \dots A_n$ događaji u nekom vjerojatnosnom prostoru takvi da vrijedi $\mathbb{P}[A_i] \leq p$ za sve $i = 1, \dots n$. Pretpostavimo da je svaki događaj A_i nezavisan od ostalih događaja A_j, $j \neq i$, osim najviše njih d. Ako vrijedi $4pd \leq 1$, onda imamo*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) > 0$$

Dokaz se može pronaći u [2].

3.2 Primjeri

Prvi primjer tiče se hipergrafova, koji su definirani u poglavlju 1.3.

Propozicija 3.2.1. *Neka je H hipergraf u kojem svaki brid sadrži barem k vrhova te presijeca najviše d drugih bridova. Ako vrijedi $e(d + 1) \leq 2^{k-1}$, onda je H 2-obojiv.*

Dokaz. Obojimo svaki vrh grafa H crvenom ili plavom bojom s jednakom vjerojatnošću, te nezavisno jednog od drugog. Za svaki brid f, neka je A_f događaj {brid f je monokromatski}. S obzirom na to da svaki brid sadrži najviše k vrhova, vrijedi $\mathbb{P}[A_f] \leq 1/2^{k-1}$.

Također primijetimo da je događaj A_f nezavisan od svih događaja A_g osim onih gdje $f \cap g \neq \emptyset$, a kojih je najviše d.

S obzirom na to da vrijedi

$$ep(d + 1) \leq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 1$$

iz simetrične verzije lokalne leme slijedi da postoji pozitivna vjerojatnost da nijedan brid nije monokromatski. □

Prije drugog primjera, trebat će nam nekoliko definicija.

Definicija 3.2.2. *Put u grafu $G(V, E)$ je niz bridova koji spajaju vrhove takav da su svi vrhovi različiti. Dva puta su bridovno disjunktna ako nemaju zajedničkih bridova.*

Sljedeći praktični primjer je dan u [1].

Problem 3.2.3. *Pretpostavimo da imamo n parova korisnika koji žele međusobno komunicirati putem neke mreže. Cilj je svakom paru korisnika osigurati komunikacijski put u mreži koji nema zajedničkih bridova s putevima ostalih parova korisnika.*

Postavimo problem matematički. Mrežu možemo shvatiti kao graf, a korisnike kao vrhove grafa. Komunikacijski put od korisnika i do korisnika j je bilo koji put od vrha i do vrha j. Želimo naći uvjete na graf tako da osiguramo da svaki par korisnika može dobiti svoj put te da su svi ti putevi međusobno bridovno disjunktni.

Vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 3.2.4. *Neka su m i k brojevi takvi da vrijedi $8nk/m \leq 1$, gdje je n broj parova. Označimo s F_i skup puteva koje par korisnika i može koristiti ako nema drugih korisnika. Pretpostavimo da su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

- $|F_i| \geq m$ *za sve i*
- *za svaki $i \neq j$ i bilo koji put $P' \in F_i$, postoji najviše k puteva $P'' \in F_j$ takvi da P' i P'' nisu bridovno disjunktni*

Tada je moguće izabrati po jedan put iz svakog skupa F_i tako da su svi izabrani putevi bridovno disjunktni.

Dokaz. Dovoljno je da razmotrimo slučaj $|F_i| = m$ za svaki i. Na slučajan način izaberimo po jedan put iz svakog skupa F_i, nezavisno jedan od drugoga. Označimo s E_{ij} događaj da putevi izabrani iz F_i i F_j imaju barem jedan zajednički brid (nisu bridovno disjunktni).

Neka je P' put iz F_i. Put P'' iz F_j možemo izabrati na m načina. Od tih m puteva, njih najviše k dijeli brid s P'. Dakle

$$\mathbb{P}(E_{ij}) \leq \frac{k}{m} =: p$$

Primijetimo da E_{ij} je zavisan samo za događaje oblika E_{il} ili E_{lj} kojih je najviše $2n$. Dakle

$$4dp < 4(2n)\frac{k}{m} = \frac{8nk}{m} \leq 1$$

Iz Leme 3.1.6 slijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \neq j} \overline{E_{ij}}\right) > 0$$

Dakle, postoji pozitivna vjerojatnost da možemo izabrati put iz svakog skupa F_i tako da su svaka dva puta bridovno disjunktna.

□

3.3 Linearni arboricitet

Definicija 3.3.1. *Obujam grafa, u oznaci g, je duljina najkraćeg ciklusa kojeg graf sadrži. Ciklus je put s istim početnim i završnim vrhom.*

Definicija 3.3.2. *Stupanj vrha je broj bridova koji sadrže taj vrh. d-regularni graf je graf kojem svaki vrh ima stupanj d. d-regularni usmjereni graf je usmjereni graf kojem svaki vrh ima d bridova koji počinju u njemu te d bridova koji završavaju u njemu.*

Definicija 3.3.3. *Stablo je graf u kojem su bilo koja dva vrha povezana točno jednim putem. Šuma je graf u kojem su bilo koja dva vrha povezana najviše jednim putem.*

Svaka šuma je disjunktna unija stabala. Šuma se može definirati i kao graf bez ciklusa.

Definicija 3.3.4. *Linearna šuma je šuma u kojoj svaki vrh ima stupanj manji ili jednak* 2.

Linearnu šumu možemo shvatiti i kao disjunktnu uniju *puteva*, to jest sva stabla koja tvore linearnu šumu su zapravo putevi. Svaki graf se može particionirati u konačan broj linearnih šuma. To nas dovodi do iduće definicije.

Definicija 3.3.5. *Linearni arboricitet grafa $G(V, E)$, u oznaci $la\,(G)$ je najmanji broj linearnih šuma u G, takav da je njihova unija jednaka skupu E.*

Za usmjerene grafove ove pojmove definiramo analogno. Usmjerena linearna šuma je šuma koja je disjunktna unija usmjerenih puteva. Usmjereni linearni arboricitet, u oznaci $\mathrm{dla}\,(G)$ je najmanji broj usmjerenih linearnih šuma takav da u uniji daju skup bridova grafa G.

Teorem 3.3.6. *Neka je $G = (U, F)$ d-regularni usmjereni graf obujma $g \geq 8ed$. Tada je $dla\,(G) = d + 1$.*

Ovaj teorem nam kaže da je usmjereni linearni arboricitet d-regularnog usmjerenog grafa jednak $d + 1$ za usmjerene grafove dovoljno velikog obujma. Što je s usmjerenim grafovima manjeg obujma? Kako bismo proširili rezultat i na takve grafove, trebat će nam iduća lema koja se dokazuje pomoću simetrične verzije lokalne leme.

Lema 3.3.7. *Neka je $G(V, E)$ d-regularni usmjereni graf te neka je d "dovoljno velik". Neka je p prirodni broj takav da vrijedi $10\sqrt{d} \leq p \leq 20\sqrt{d}$. Tada postoji p-bojanje vrhova od G bojama $0, 1, \ldots, p-1$ koje zadovoljava sljedeće svojstvo: za bilo koji vrh v i boju i, brojevi*

$$N^+(v, i) = |\{u \in V : (v, u) \in E \text{ i } u \text{ je obojan bojom } i\}|$$

i

$$N^-(v, i) = |\{u \in V : (u, v) \in E \text{ i } u \text{ je obojan bojom } i\}|$$

zadovoljavaju

$$\left|N^+(v, i) - d/p\right|, \quad \left|N^-(v, i) - d/p\right| \leq 3\sqrt{d/p}\sqrt{\log d} \tag{3.1}$$

Primijetimo da su $N^+(v, i)$ i $N^-(v, i)$ brojevi susjednih vrhova od v obojanih istom bojom, a koji izlaze iz v te ulaze u v, respektivno.

Također, p-bojanje grafa $G(V, E)$ je bilo koja funkcija $f : V \to K$ gdje je K konačan skup veličine p.

Dokaz. Neka je $f : V \to \{0, 1, \ldots p-1\}$ slučajno p-bojanje grafa V takvo da je za svaki $v \in V$, $f(v)$ izabran uniformno i nezavisno iz skupa $\{0, 1, \ldots p\}$.

Definirajmo $A^+_{v,i}$ za vrh $v \in V$ i boju i kao događaj da slučajna varijabla $N^+(v, i)$ ne zadovoljava svojstvo (3.1). $N^+(v, i)$ je binomna slučajna varijabla s očekivanjem d/p te standardnom devijacijom $\sqrt{(d/p)(1 - 1/p)}$. Da se pokazati da vrijedi

$$\mathbb{P}(A^+_{v,i}) < \frac{1}{d^4}$$

Analogno definiramo $A^-_{v,i}$ kao događaj da slučajna varijabla $N^-(v, i)$ ne zadovoljava svojstvo (3.1). Tada također vrijedi

$$\mathbb{P}(A^-_{v,i}) < \frac{1}{d^4}$$

Događaji $A^+_{v,i}$ ili $A^-_{v,i}$ su nezavisni od događaja $A^+_{u,j}$ ili $A^-_{u,j}$ za sve vrhove u koji nemaju zajedničkog susjeda s vrhom v (zajednički znači da je također i iste boje kao i vrhovi u i v). Dakle postoji graf ovisnosti za sve događaje s maksimalnim stupnjem ne većim od $(2d)(2d)p = (2d)^2 p$. Naime, u "najgorem scenariju", svaki susjed vrha v je ujedno i susjed vrha u pa ih ima $2d$. S obzirom na to da razmatramo dva tipa događaja, dobijemo $(2d)^2$. Množimo s p jer postoji p različitih boja u koje možemo obojiti zajedničke susjede.

Sada imamo

$$e \cdot \frac{1}{d^4}((2d)^2 p + 1) < 1$$

pa korolar 3.1.5 povlači da se s pozitivnom vjerojatnošću nijedan događaj $A^+_{v,i}$ ili $A^-_{v,i}$ ne ostvaruje. To znači da postoji bojanje f koje zadovoljava svojstvo (3.1) za svaki vrh v i boju i. □

Sada se može dokazati sljedeći teorem. Dokaz je tehnički i ne koristi lokalnu lemu pa ga preskačemo. Može se pronaći u [5].

Teorem 3.3.8. *Postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki d-regularni usmjereni graf vrijedi*

$$dla\,(G) \leq d + cd^{3/4}(\log d)^{1/2}$$

Ovaj rezultat vrijedi za usmjerene grafove. Mi ga želimo proširiti na neusmjerene grafove.

Pretpostavimo da nam je dan d-regularni neusmjereni graf G. Ako je d paran, onda se njegovi bridovi mogu orijentirati tako da dobijemo $d/2$-regularni usmjereni graf. Ako je d neparan, onda iskoristimo činjenicu da je tada G podgraf nekog f-regularnog grafa, gdje je f paran.

Prethodni teorem sada povlači sljedeći rezultat.

Teorem 3.3.9. *Postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki d-regularni graf vrijedi*

$$la\,(G) \leq d/2 + cd^{3/4}(\log d)^{1/2}$$

Poglavlje 4

Koncentracijske nejednakosti i martingali

Četvrto poglavlje posvećujemo koncentracijskim nejednakostima. U primjenama vjerojatnosne metode, često želimo dati ocjenu na vjerojatnosti oblika

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \qquad \text{ili} \qquad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq c)$$

U prijevodu, želimo saznati koliko je neka slučajna varijabla X *koncentrirana* oko svog očekivanja. Koncentracijske nejednakosti pomažu pri odgovoru na to pitanje. Osim toga, one su utoliko korisnije jer često ne zahtijevaju jake pretpostavke, a daju iznimno bitne rezultate.

4.1 Metoda drugog momenta

Kao uvod u koncentracijske nejednakosti, uvodimo jednu od najslabijih nejednakosti - Čebiševljevu nejednakost. Odsad pa nadalje, očekivanje slučajne varijable i njezinu standardnu devijaciju označavat ćemo s μ i σ, respektivno.

Teorem 4.1.1. *Neka je X slučajna varijabla s konačnim očekivanjem i varijancom. Tada za bilo koji $\lambda > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Uporaba Čebiševljeve nejednakosti i njezinih posljedica naziva se *metoda drugog momenta*.

Prilikom korištenja metode drugog momenta, često se slučajna varijabla X zapiše kao suma n slučajnih varijabli te je potrebno izračunati varijancu tako zapisane slučajne varijable. Međutim, slučajne varijable u rastavu ne moraju biti nezavisne pa se može iskoristiti sljedeća formula.

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] \tag{4.1}$$

Često se najveći problem javlja pri računanju ili ocjenjivanju kovarijance, kao što ćemo primijetiti i u nadolazećim primjerima.

Definicija 4.1.2. *Slučajni graf $G(n, p)$ je vjerojatnosni prostor zadan na skupu vrhova $\{1, \dots n\}$ određen pomoću relacije*

$$\mathbb{P}(\{i, j\} \in G) = p$$

U principu, slučajni graf se može dobiti tako da se svaki potencijalni brid pojavljuje u grafu s vjerojatnošću p, nezavisno od drugih bridova.

Definicija 4.1.3. *Neka je P neko (monotono) svojstvo grafa. Tada je $r(n)$ funkcija praga za svojstvo grafa P ako za svaki niz $p(n)$ vrijedi*

- *$p = p(n) \ll r(n)$ implicira da $G(n, p)$ zadovoljava P s malom vjerojatnošću*
- *$p = p(n) \gg r(n)$ implicira da $G(n, p)$ zadovoljava P s velikom vjerojatnošću*

Napomena 4.1.4. *Svojstvo grafa A je monotono ako za bilo koja dva grafa G i H sa skupovima bridova $E(G) \subseteq E(H)$ vrijedi: ako G ima svojstvo A, onda ga ima i H.*

U nastavku ovog potpoglavlja, bavimo se slučajnim grafovima. U dokazima će nam trebati sljedeća lema.

Lema 4.1.5. *Ako je $(X_i)_i$ niz nenegativnih slučajnih varijabli takvih da vrijedi*

$$\lim_n \frac{Var[X_n]}{(\mathbb{E}[X_n])^2} = 0$$

onda

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n > 0) = 1$$

Propozicija 4.1.6. *Funkcija praga za svojstvo "graf sadrži trokut" je $r(n) = \frac{1}{n}$.*

Dokaz. Neka je X broj trokuta u grafu $G(n, p)$. Vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} p^3 \sim \frac{n^3 p^3}{6}$$

jer postoji $\binom{n}{3}$ skupova od 3 vrha, a svaki tvori trokut s vjerojatnošću p^3.

Provjerimo da je $r(n)$ funkcija praga. Ako je $p \ll \frac{1}{n}$, onda vrijedi $\mu = o(1)$ pa po Markovljevoj nejednakosti dobijemo

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] = o(1)$$

Dakle, vjerojatnost da je X barem 1 asimptotski iščezava.

Ako je $p \gg \frac{1}{n}$, onda je slučaj nešto kompleksniji. Definirajmo varijable T_i kao indikatorske varijable za svih $\binom{n}{3}$ potencijalnih trokuta. Tada je X suma svih tih varijabli. Koristeći formulu (4.1), dobijemo

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_i T_i + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}[T_i, T_j]$$

Za bilo koji trokut vrijedi $\mathrm{Var}[T_i] \leq \mathbb{E}[T_i^2] = p^3$, a za svaki par trokuta koji dijele neki brid vrijedi $\mathrm{Cov}[T_i, T_j] \leq \mathbb{E}[T_i T_j] = p^5$.

Indikatorske varijable trokuta koji su bridovno disjunktni su nezavisne pa im je kovarijanca jednaka nuli. Dakle, suma kovarijanci ide samo po parovima trokuta koji dijele barem 1 brid, a takvih je trokuta $12\binom{n}{4}$. Sada možemo ocijeniti varijancu:

$$\mathrm{Var}[X] \leq \binom{n}{3} p^3 + 12\binom{n}{4} p^5 \leq n^3 p^3 + n^4 p^5$$

pa vrijedi

$$\frac{\mathrm{Var}[X_n]}{(\mathbb{E}[X_n])^2} \leq \frac{n^3 p^3 + n^4 p^5}{\left(\binom{n}{3} p^3\right)^2} = O\left(\frac{1}{n^3 p^3} + \frac{1}{n^2 p}\right)$$

Posljednji izraz teži u 0 ako je $p \gg 1/n$ pa po lemi 4.1.5 vrijedi da vjerojatnost da $G(n, p)$ sadrži trokut teži u 1 za $n \to \infty$.

□

Problem koji se prirodno nameće nakon prethodne propozicije je sljedeći: ako je zadan neki graf H, koja je funkcija praga svojstva da $G(n, p)$ sadrži graf H. Primjerice, poznato je da za graf $H = K_4$, funkcija praga je $n^{-2/3}$. Općenitiji rezultat možemo dobiti ako uvedemo pojam **gustoće grafa**.

Definicija 4.1.7. *Gustoća grafa H s n vrhova i e bridova je*

$$\rho(H) = \frac{e}{v}$$

Graf H je uravnotežen ako svaki podgraf grafa H ima gustoću manju ili jednaku od H.

Sada možemo dokazati sljedeći teorem, čiji je elegantni dokaz dan u [3].

Teorem 4.1.8. *Neka je H uravnotežen graf s gustoćom ρ. Tada je $r(n) = n^{-1/\rho} = n^{-v/e}$ funkcija praga za svojstvo da $G(n, p)$ sadrži graf H.*

Dokaz. Neka je H graf s v vrhova i e bridova te gustoćom ρ. Označimo vrhove od H s $\{a_1, \ldots a_v\}$. Neka je za svaku v-torku vrhova iz $G(n, p)$, $\beta = (b_1, \ldots b_v)$ definiran događaj

$$A_\beta = \{G(n, p) \text{ sadrži } H \text{ na vrhovima } (b_1, \ldots b_v)\}$$

Za navedeni događaj je bitno i da je struktura grafa sačuvana - svi bridovi u H i $G(n, p)$ se moraju podudarati.

Neka je X_β indikatorska varijabla događaja A_β te neka je $X = \sum_\beta X_\beta$. Primijetimo da vrijedi $\mathbb{P}(A_\beta) = p^e$ jer se e bridova mora podudarati, a vjerojatnost svakog brida da se pojavi u grafu je p. Iz linearnosti očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_\beta \mathbb{P}(A_\beta) = \Theta(n^v p^e)$$

Provjerimo da je $r(n)$ funkcija praga za graf H. Ako vrijedi $p = p(n) \ll n^{-v/e}$, onda vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}[X] = 0$$

pa vrijedi prvi dio definicije funkcije praga.

Sad pretpostavimo da vrijedi $p = p(n) \gg n^{-v/e}$ te iskoristimo formulu (4.1):

$$\text{Var}[X] = \sum_\beta \text{Var}[X_\beta] + \sum_{\beta \neq \gamma} \text{Cov}[X_\beta, X_\gamma]$$

S obzirom na to da je $\text{Var}[X_\beta] = \text{Cov}[X_\beta, X_\beta]$, prethodnu nejednakost možemo zapisati i kao

$$\text{Var}[X] = \sum_{\beta,\, \gamma} \text{Cov}[X_\beta, X_\gamma]$$

Kovarijance su jednake 0 za v-torke koje ne dijele barem dva vrha (tj. barem jedan brid). Dakle, razmotrimo dvije v-torke β i γ koje dijele $t \geq 2$ vrha. Ako svaka od njih generira graf H, onda imaju najviše $t\rho$ zajedničkih bridova, a njihova unija sadrži najmanje $2e - t\rho$ bridova. Dakle

$$\mathrm{Cov}[X_\beta, X_\gamma] \leq \mathbb{E}[X_\beta, X_\gamma] \leq p^{2e-t\rho}$$

Da bismo ocijenili varijancu varijable X, zapitajmo se koliko ima parova v-torki β i γ koji dijele t vrhova. Možemo izabrati $2v - t$ vrhova na $\binom{n}{2v-t}$ načina, a broj načina na koji možemo izabrati β i γ odatle je konstantan pa vrijedi da takvih parova ima $O\left(n^{2v-t}\right)$. Dakle sada imamo

$$\sum_{\beta\cap\gamma=t} \mathrm{Cov}[X_\beta, X_\gamma] = O\left(n^{2v-t} p^{2e-t\rho}\right) = O((n^v p^e)^{2-t/v})$$

Dakle

$$\mathrm{Var}[X] = O\left(\sum_{t=2}^{v} (n^v p^e)^{2-t/v}\right)$$

Konačno, sada znamo da vrijedi

$$\lim_n \frac{\mathrm{Var}[X]}{(\mathbb{E}[X])^2} = \lim_n O\left(\sum_{t=2}^{v} (n^v p^e)^{2-t/v}\right) = 0$$

Iz Leme 4.1.5 dobijemo $\lim_n \mathbb{P}(X > 0) = 1$, što povlači da $G(n, p)$ sadrži H gotovo sigurno. □

4.2 Martingali

Prema [4], martingale i koncentracijske nejednakosti među prvima je upotrebljavao švedski matematičar Svante Janson. Njegovi rezultati su bili produkt istraživanja slučajnih grafova, odnosno traženja ocjene na kromatski broj slučajnog grafa. Njegovom radu na tom području je kasnije pridonio mađarski matematičar Béla Bollobás.

Definicija 4.2.1. *Martingal je niz slučajnih varijabli $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_i, Z_{i-1}, \ldots Z_0] = Z_n$$

Poznati primjeri martingala su slučajna šetnja i Brownovo gibanje. Jedan primjer martingala iz teorije vjerojatnosne metode je **otkrivanje vrhova**.

Primjer 4.2.2. *Pretpostavimo da je dan slučajni graf $G(n, p)$. Označimo potencijalne bridove grafa s $e_1, \ldots e_m$ gdje je $m = \binom{n}{2}$. Neka je f neka funkcija iz teorije grafova (primjerice, gustoća grafa, kromatski broj, itd.). Tada definiramo martingal $(X_i)_{i=1}^m$ sa*

$$X_i = \mathbb{E}[f(G) \mid e_j \textit{ je otkriven za svaki } 1 \leq j \leq i]$$

Intuitivno, svaka slučajna varijabla X_i dobije se tako da "otkrijemo" sve bridove $e_1, \dots e_i$, tj. provjerimo jesu li u slučajnom grafu G te s tim saznanjem izračunamo očekivanje od $f(G)$.

Sličan martingal je **otkrivanje vrhova**.

Primjer 4.2.3. *Pretpostavimo da je dan slučajni graf $G(n, p)$. Neka je f neka funkcija iz teorije grafova. Sada definiramo martingal $X_1, \dots X_n$ na sljedeći način.*

$$X_i = \mathbb{E}[f(G) \,|\, \textit{za svaki } x, y \leq i,\ e_{x,y} \textit{ je otkriven}]$$

Intuitivno, X_i dobijemo tako da "otkrijemo" podgraf induciran vrhovima $\{v_1, \dots v_i\}$ te izračunamo očekivanje od $f(G)$ uz tu informaciju.

4.3 Azumina nejednakost

Kazuoki Azuma je dokazao koncentracijsku nejednakost za vrijednosti martingala čije su razlike ograničene. Za dokaz nejednakosti, bit će nam potrebna sljedeća tehnička lema.

Lema 4.3.1. *Ako je X slučajna varijabla s očekivanjem 0 te x realan broj za koji vrijedi $|x| \leq c$, onda*

$$\mathbb{E}\left[e^X\right] \leq \cosh c \leq e^{c^2/2}$$

Teorem 4.3.2. *Neka je $0 = X_0, X_1, \dots X_m$ martingal takav da vrijedi*

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 1, \qquad \forall i \in 0, \dots m$$

Tada za bilo koji $\lambda > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_m > \lambda \sqrt{m}) < e^{-\lambda^2/2}$$

Dokaz. Neka je $\alpha = \lambda / \sqrt{m}$. Definiramo slučajne varijable Y_i kao $Y_i = X_i - X_{i-1}$ pa vrijedi $|Y_i| \leq 1$ te $\mathbb{E}[Y_i \,|\, X_{i-1}, \dots X_0] = 0$. Prema Lemi 4.3.1 vrijedi

$$\mathbb{E}[e^{\alpha Y_i} \,\big|\, X_{i-1}, \dots X_0] \leq \cosh \alpha \leq e^{\alpha^2/2}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_m}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} e^{\alpha Y_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{m-1} e^{\alpha Y_i}\right)\mathbb{E}\left[e^{\alpha Y_m}\,\middle|\,X_{m-1},\dots X_m\right]\right] \\
&\le e^{\alpha^2/2}\,\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m-1} e^{\alpha Y_i}\right] \\
&\le e^{m\alpha^2/2}
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost slijedi induktivno - ponavljamo ono što smo napravili u prethodnim koracima za varijable $Y_{m-1},\dots Y_1$. Konačno, iz ovoga slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_m > \lambda\sqrt{m}) &= \mathbb{P}\left(e^{\alpha X_m} > e^{\alpha\lambda\sqrt{m}}\right) \\
&< \mathbb{E}[e^{\alpha X_m}]e^{-\alpha\lambda\sqrt{m}} && \text{(Markovljeva nejednakost)} \\
&\le e^{m\alpha^2/2-e^{\alpha\lambda\sqrt{m}}} \\
&= e^{-\lambda^2/2}
\end{aligned}$$

□

Azumina nejednakost povlači i sljedeći korolar.

Korolar 4.3.3. *Neka je $c = X_0, X_1, \dots X_m$ martingal takav da vrijedi*

$$|X_{i+1} - X_i| \le 1, \qquad \forall i \in 0,\dots m$$

Tada za bilo koji $\lambda > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(|X_m - c| > \lambda\sqrt{m}) < 2e^{-\lambda^2/2}$$

Vrlo impozantan rezultat koji je posljedica Azumine nejednakosti tiče se **kromatskog broja** grafa.

Definicija 4.3.4. *Kromatski broj grafa $G(V, E)$ je najmanji broj boja potreban da bismo obojali vrhove grafa tako da nijedna dva susjedna vrha nisu iste boje. Oznaka kromatskog broja je $\chi(G)$.*

Shamir i Spencer su 1987. dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.3.5. *Neka je $G(n, p)$ slučajni graf. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\Big(|\chi(G) - \mathbb{E}[\chi(G)]| > \lambda\sqrt{n-1}\Big) < 2e^{-\lambda^2/2}$$

Dokaz. Neka je $X_1, \dots X_n$ martingal otkrivanja vrhova opisan u primjeru 4.2.3 te neka je funkcija f jednaka kromatskom broju grafa $G(n, p)$. Za fiksni i, znamo "status" svih bridova incidentnih s nekim od prvih i vrhova.

Primijetimo da vrijedi $|X_i - X_{i-1}| \leq 1$. Naime, i-ti vrh možemo obojiti novom bojom. Sjetimo se da su X_i i X_{i-1} uvjetna očekivanja od $\chi(G)$ uz otkrivene bridove incidentne s prvih i odnosno $i - 1$ vrhova. S obzirom na to da smo i-ti vrh obojali novom bojom, očekivanja se razlikuju za najviše 1.

Zadovoljene su sve pretpostavke Azumine nejednakosti pa iz Korolara 4.3.3 slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem je dokazao da je kromatski broj slučajnog grafa koncentriran oko očekivanja, iako uopće nije poznato čemu je očekivanje jednako.

Bibliografija

[1] Klappenecker A., *The Lovász Local Lemma*, `https://people.engr.tamu.edu/andreas-klappenecker/csce658-s18/lovasz.pdf`, (kolovoz 2021.).

[2] Lovász L. Erdős P., *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, Infinite and Finite Sets, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 11 (1975).

[3] Vondrak J. Matoušek J., *The Probabilistic Method*, `https://www.cs.cmu.edu/~15850/handouts/matousek-vondrak-prob-ln.pdf`, (kolovoz 2021.).

[4] Balachandran N., *The Probabilistic Method in Combinatorics*, `http://www.math.iitb.ac.in/~niranj/The_Probabilistic_method_Combinatorics.pdf`, (kolovoz 2021.).

[5] Alon N. Spencer J., *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience, New Jersey, 2008.

[6] Hefeng W., *Determine Ramsey numbers on a quantum computer*, Phys. Rev. A 93 (2009), `https://arxiv.org/abs/1510.01884`.

Sažetak

U ovom radu, bavimo se vjerojatnosnom metodom - moćnim alatom za dokazivanje da objekti s određenim svojstvima postoje. Ključna ideja vjerojatnosne metode je sljedeća: da bismo pokazali da postoji objekt koji zadovoljava određena svojstva, konstruiramo odgovarajući vjerojatnosni prostor i dokažemo da slučajno odabrani objekt iz tog prostora zadovoljava tražena svojstva s vjerojatnošću strogo većom od 0.

U prvom poglavlju, na primjerima pokazujemo osnovne ideje vjerojatnosne metode te način na koji se ona može iskoristiti. Drugo poglavlje uvodi matematičko očekivanje koje ima široku primjenu u vjerojatnosnoj metodi. Bavimo se i situacijama u kojima vjerojatnosna metoda ne nudi rješenje odmah, već je potrebno odraditi neke prepravke kako bismo dobili željeni rezultat.

U trećem poglavlju je predstavljen vrlo važan teorem mađarskog matematičara Lászla Lovásza - lokalna lema. Lokalna lema je primjenjiva u slučajevima kad relativno mali broj objekata u vjerojatnosnom prostoru zadovoljava svojstvo od interesa. Konačno, četvrto poglavlje se bavi koncentracijskim nejednakostima te martingalima. Koncentracijske nejednakosti generalno daju ocjenu na devijaciju slučajne varijable od njezinog očekivanja. Martingali su se ispostavili kao vrlo koristan alat vjerojatnosne metode, a na primjerima pokazujemo kako se mogu koristiti u teoriji grafova.

Summary

In this thesis, a brief introduction to probabilistic method is given. Probabilistic method is a powerful tool used to prove the existence of objects with certain properties. The key idea behind the method is the following: in order to show the existence of an object that has some wanted property, an adequate probability space is constructed and then we prove that a randomly chosen object in this space satisfies the wanted property with positive probability.

In the first chapter, basic ideas of probabilistic method are showcased through a number of examples. The second chapter is dedicated to the concept of mathematical expectation which is widely applied in probabilistic method. We also consider the situations in which the method does not offer the solution immediately, but some alterations are necessary in order to get the end result.

Third chapter introduces a very important theorem by Hungarian mathematician László Lovász - the local lemma. Local lemma is generally used when the objects of interest are scarce. Finally, the fourth chapter is dedicated to the use of concentration inequalities and martingales. Concentration inequalities are generally used to estimate the deviation of a random variable from its mean. Martingales are very useful tool of probabilistic method. Through some examples in graph theory, the use of martingales is demonstrated.

Životopis

Rođen sam 29.11.1996. u Zadru, gdje sam pohađao srednju i osnovnu školu. Osnovna škola koju sam pohađao je OŠ Stanovi u Zadru, koju završavam s odličnim uspjehom. 2011. godine upisujem opći smjer Gimnazije Franje Petrića u Zadru, koji također završavam s odličnim uspjehom.

2015. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, smjer matematika. Preddiplomski studij završavam 2018. godine s vrlo dobrim uspjehom. Iste godine upisujem diplomski studij Matematičke statistike.