SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Razum

Elipsa pridružena broju $\frac{1}{7}$

Diplomski rad

Zagreb, rujan 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Razum

Elipsa pridružena broju $\frac{1}{7}$

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Veliko hvala mom mentoru, prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na velikoj pomoći i podršci tijekom izrade diplomskog rada.

Veliko hvala mojoj obitelji koja je bila uz mene tijekom cijelog studija i koja je uvijek vjerovala u mene.

I na kraju, veliko hvala prijateljima koji su učinili studentske dane zabavnijima.

Sadržaj

Uvod

Racionalni broj $1/7$ ima čisto periodički beskonačni decimalni zapis s periodom 142857. Kad se od susjednih znamenaka ovog perioda formira šest uređenih parova, uzimajući ciklički poredak te se uređeni parovi shvate kao koordinate točaka u pravokutnom Kartezijevom sustavu, dobivenih šest točaka nalazi se na jednoj elipsi. Analogni rezultat dobiva se uzimanjem po dviju susjednih znamenaka navedenog perioda.

Tema ovog rada je objašnjenje i poopćenje ove pojave, čime se dolazi i do postupka za generiranje daljnjih primjera, budući da $1/7$ nije jedini nego samo najjednostavniji razlomak s opisanim svojstvom. U tu svrhu potrebno je uočiti simetriju promatranih skupova od po šest točaka i povezati je sa centralnosimetričnim krivuljama 2. reda, dakle centralnim konikama.

U prvom poglavlju dan je pregled osnovnih činjenica o konikama koje će nam biti potrebne, s naglaskom na centralne konike.

U drugom poglavlju najprije se uočava geometrijska pravilnost skupa od šest točaka dobivenih pomoću perioda broja $1/7$ te se primjenom zaključaka iz prvog poglavlja pokazuje da te točke pripadaju jednoj konici. Zatim se poopćavanjem načina kako šestorka realnih brojeva s odgovarajućim svojstvima generira šestorke točaka u ravnini određuju daljnje konike. One mogu biti neraspadnute, dakle elipse i hiperbole ili raspadnute, to jest parovi pravaca.

U trećem poglavlju izračunava se opći oblik racionalnih brojeva čiji beskonačni periodički decimalni zapis ima isto promatrano svojstvo kao $1/7$.

Dok se izlaganje u ova dva poglavlja uglavnom temelji na članku [1], dokaz osnovnog rezultata o konici pridruženoj broju $1/7$ u tom se članku izvodi pozivanjem na Pascalov teorem, odnosno njegov obrat, o šesterovrhu upisanom konici. U ovom radu zaključak je izveden jednostavnije, ne promatrajući centralno simetrični šesterovrh kao poseban slučaj spomenutih teorema. Međutim, budući da je ključno pitanje kako se za koniku određenu s pet točaka u općem položaju može zaključiti prolazi li i kroz neku daljnju, šestu točku, u četvrtom poglavlju dan je kratak pregled iskaza važnih teorema iz teorije algebarskih krivulja koji pružaju potpuniji uvid u tu problematiku.

Poglavlje 1

Konike

U ovom uvodnom poglavlju osvrnut ćemo se na neke od najvažnijih pojmova i rezultata koje ćemo koristiti u radu. Navest ćemo nekoliko bitnih činjenica o krivuljama 2. reda (to jest čunjosječnicama ili konikama), posebno o centralnim konikama jer će na takvima biti naglasak u daljnjem tekstu.

Kružnica, elipsa, parabola i hiperbola, odnosno konike, proučavaju se više od 2000 godina. Te krivulje od davnina pobuđuju zanimanje, kako u matematici i astronomiji tako i u svakodnevnom životu (putanje planeta i drugih nebeskih tijela, kosi hitac, oblici vidljivi kod različitih prirodnih pojava). Dobro su poznate mnoge primjene konika u tehnici, graditeljstvu, optici i drugim područjima. Još u antičkoj matematici zapaženo je kako su konike povezane i s rješavanjem nekih algebarskih problema. Dok se otkriće konika kao krivulja nastalih siječenjem stošca ravninom pripisuje grčkom matematičaru Menehmu (4. stoljeće pr. Kr.), kapitalno djelo o konikama napisao je Apolonije iz Perga (262.-190. pr. Kr.) koji je i uveo nazive elipsa, hiperbola, parabola.

Osim geometrijskog pristupa pomoću presijecanja stošca, odnosno dvostruke stožaste plohe ravninom, poznat je i opis konika pomoću omjera udaljenosti od jedne čvrste točke, fokusa (žarišta) i jednog pravca, ravnalice (direktrise).

Promatranje konika kao algebarskih krivulja 2. reda pruža cjeloviti pristup koji omogućuje primjenu analitičke metode i algebarsko razlikovanje neraspadnutih (nesingularnih, nedegeneriranih) od raspadnutih (singularnih, degeneriranih) konika.

Neka je u euklidskoj ravnini zadan pravokutan koordinatni sustav i neka je $f(x, y)$ realni polinom stupnja n u dvjema varijablama, x i y, stupnja barem 1. Algebarska krivulja n-tog reda tada se definira kao skup svih realnih nultočaka polinoma

f. Posebno, algebarska krivulja 2. reda kraće se naziva konika, a krivulja 3. reda kubika.

Algebarska krivulja $f(x, y) = 0$ je singularna (raspadnuta) ako je polinom f reducibilan na poljem $\mathbb{R}$, to jest ako se može faktorizirati kao umnožak dvaju realnih polinoma stupnjeva manjih od n. Za konike moguća je faktorizacija samo u dva polinoma stupnja 1, koji se mogu i podudarati. U protivnom konika je neraspadnuta (nesingularna, nedegenerirana). Potpuniji uvid dobiva se promatranjem nad poljem kompleksnih brojeva.

Polinom $f(x, y)$ stupnja 2 ima 6 koeficijenata, uz x^2, xy, y^2, x, y i slobodni koeficijent, a barem jedan je različit od 0 pa se za takav koeficijent može izabrati 1, čime se ne mijenja skup nultočaka (jednadžbe $f(x, y) = 0$ i $kf(x, y) = 0$, uz $k \neq 0$ imaju isti skup rješenja). Stoga je jednadžba konike određena s 5 koeficijenata. Nesingularna konika onda je geometrijski određena s 5 točaka u općem položaju (nikoje 3 od njih nisu kolinearne) jer uvrštavanje koordinata takvih točaka daje homogeni sustav od pet linearnih jednadžbi sa šest nepoznanica. Taj sustav ima jednodimenzionalno rješenje, dakle skup proporcionalnih šestorki koeficijenata koje sve određuju jednu te istu koniku (dakako, s izuzetkom trivijalnog rješenja u kojem su sve vrijednosti 0).

Važan je još i projektivni pristup konikama. Kad se euklidska ravnina proširi do projektivne ravnine, gubi se razlika između različitih tipova neraspadnutih konika. O projektivnoj geometriji bit će ukratko riječi u 4. poglavlju. U tom poglavlju bit će izložen i jedan sasvim geometrijski argument da je neraspadnuta konika određena s pet točaka u općem položaju.

Zatim će nas zanimati centralne konike. Konika je centralna ako ima centar simetrije. Već po izgledu konika možemo naslutiti da su elipsa i hiperbola centralne, da parabola nije centralna, a da su raspadnute konike također centralne i one ne moraju imati jedinstveni centar.

Sljedeći teorem daje nam kriterij za postojanje centra neraspadnute konike, a ujedno i izračun koordinata centra u slučaju da postoji.

Teorem 1.1. Neka je nesingularna (neraspadnuta) konika zadana jednadžbom $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Tada je konika centralna ako i samo ako vrijedi $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$.
Ako je konika nesingularna i centralna, njezin centar je jedinstven.

Dokaz:

Ako konika ima centar i ako je to točka (s,t) to znači da za svaku točku (x,y) te konike njoj simetrična točka (x',y') također pripada toj konici, pri čemu je $\frac{x+x'}{2} = s$ i $\frac{y+y'}{2} = t$. Odnosno, $x' = 2s - x$ i $y' = 2s - y$.

Ako točka (x',y') pripada konici onda ona također zadovoljava gornju jednadžbu. Znači da treba vrijediti:

$$a(2s-x)^2 + 2b(2s-x)(2t-y) + c(2t-y)^2 + 2d(2s-x) + 2e(2t-y) + f = 0$$

$$4as^2-4asx+ax^2+8bst-4bsy-4btx+2bxy+4ct^2-4cty+cy^2+4ds-2dx+4et-2ey+f = 0$$

Koristeći da je $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ ostaje:

$$4as^2 - 4asx + 8bst - 4bsy - 4btx + 4ct^2 - 4cty + 4ds - 4dx + 4et - 4ey = 0$$

$$4(as^2 + 2bst + ct^2 + ds + et) - 4x(as + bt + d) - 4y(bs + ct + e) = 0$$

$$as^2 + 2bst + ct^2 + ds + et = x(as + bt + d) + y(bs + ct + e)$$

Raspisivanjem lijeve strane se dobiva:

$$s(as + bt + d) + t(as + bt + d) = x(as + bt + d) + y(bs + ct + e),$$

$$(x - s)(as + bt + d) + (y - t)(bs + ct + e) = 0.$$

Ova jednadžba mora vrijediti za svaku točku konike (x,y) pa mora vrijediti:

$$as + bt + d = 0$$

$$bs + ct + e = 0$$

Sustav ima jedinstveno rješenje ako za determinantu nesingularne konike vrijedi $ac - b^2 \neq 0$.
Rješavanjem sustava dobivamo: $s = \frac{be-cd}{ac-b^2}$, $t = \frac{bd-ae}{ac-b^2}$.

Dakle, točka (s,t) je centar konike pa je konika centralna.

$\square$

Nadalje, neka su $A, A', B.B'$ točke u ravnini koje ne pripadaju istom pravcu i vrijedi da dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ imaju zajedničko polovište S. Svaka konika koja prolazi točkama A, A', B, B' je tada centralna konika sa centrom u točki S. To ćemo malo kasnije i pokazati.

Uz iste pretpostavke, neka je C bilo koja točka koja ne pripada ni pravcu AA', ni pravcu BB'. Ako je C' točka simetrična točki C s obzirom na točku S, onda svih šest točaka A, A', B, B', C, C' pripadaju jednoj konici, a ta konika je centralna i centar joj je točka S.

Pokažimo to:

Teorem 1.2. Neka su $A, A', B.B'$ točke u ravnini koje ne pripadaju istom pravcu i vrijedi da dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ imaju zajedničko polovište S. Svaka konika koja prolazi točkama A, A', B i B' je centralna konika sa centrom u točki S.

Dokaz:

Ishodište koordinatnog sustava smjestimo u točku S te ćemo dokazati da je za bilo koju točku konike (x, y) i njoj simetrična točka $(-x, -y)$ također na toj konici.
Jednadžba konike je $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, pri čemu je $f \neq 0$, u suprotnom bi konika prolazila kroz ishodište, a to nije moguće jer bi tri točke konike bile na istoj osi, a promatramo nesingualarnu koniku. Zato, bez smanjenja općenitosti, odaberimo $f = 1$.
Dalje, neka su na konici točke $(x_1, 0), (-x_1, 0), (x_2, y_2)$ te $(-x_2, -y_2)$. Kada svaku od tih točaka uvrstimo u gornju jednadžbu dobivamo iduće relacije:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + 2dx_1 + 1 &= 0 \\ ax_1^2 - 2dx_1 + 1 &= 0 \\ ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + 1 &= 0 \\ ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 - 2dx_2 - 2ey_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo: $4dx_1 = 0$, a $x_1 \neq 0$ pa je $d = 0$.

Oduzimanjem četvrte jednadžbe od treće dobivamo: $dx_2 + ey_2 = 0$, a $d = 0$ i $y_2 \neq 0$ pa je $e = 0$.

Sada se početna jednadžba svela na

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 1 = 0$$

što je ekvivalentno s

$$a(-x)^2 + 2b(-x)(-y) + c(-y)^2 + 1 = 0.$$

Vidi se da ako točka (x, y) pripada konici da onda i točka $(-x, -y)$ također pripada toj konici.

□

Pokazali smo da je dovoljno da konika sadrži dva para centralno simetričnih točaka (ili da je u koniku upisan neki paralelogram) da bi bila centralna. Tada za svaku točku na konici postoji točka koje je njen simetričan par.

Dakle, kako bilo kojih pet točaka u ravnini, od kojih nikoje tri nisu na istome pravcu, određuje točno jednu nesingularnu koniku, postoji konika koja prolazi kroz točke A, A', B, B' i C. Ta konika sadrži A, A', B, B', odnosno dva para centralno simetričnih točaka pa sada lako možemo zaključiti da sadrži i točku C' koja je centralno simetrična točki C.

Time je dokazan:

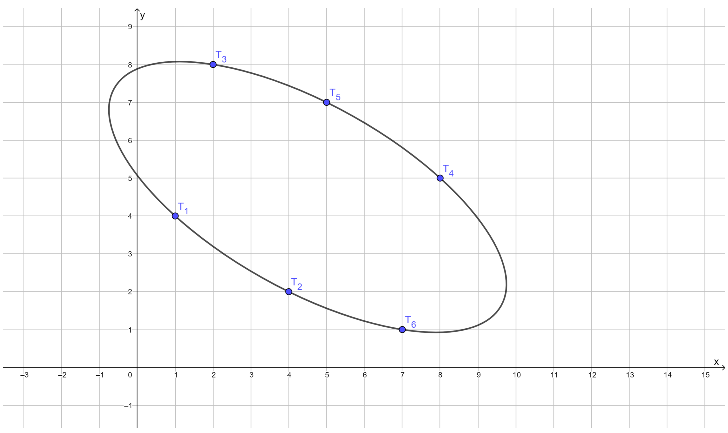
Teorem 1.3. Neka su točke A, A', B, B' takve da su pravci AA' i BB' različiti i da dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ imaju zajedničko polovište S. Tada je svaka konika koja prolazi točkama A, A', B, B' centralna sa centrom u točki S.
Nadalje, bilo koja točka C u istoj ravnini pripada konici koja prolazi točkama A, A', B, B' ako i samo ako točka C', simetrična točki C s obzirom na S pripada toj konici.

Poglavlje 2

Elipsa jedne sedmine

Matematika obiluje primjerima zanimljivih, često posve neočekivanih primjera povezanosti različitih područja. Neki od tih primjera mogu se učiniti kao slučajne koincidencije ili kurioziteti, no zapravo može biti riječ o složenim vezama i zakonitostima koje upućuju na dublje proučavanje. Poznato je, primjerice, kako mnogi rezultati iz algebre imaju geometrijsko tumačenje, i obrnuto, kako se geometrijske relacije i pravilnosti mogu izraziti algebarski.

Promotrimo broj $1/7$. Jedan sasvim običan racionalan broj. Znamo da je decimalni zapis ovog racionalnog broja beskonačan periodičan broj, odnosno da je to $0.\dot{1}4285\dot{7}$. Promotrimo sada period tog decimalnog broja - 142857 - te ispišimo uređene parove koji se sastoje od susjednih znamenaka. Uz ciklički redoslijed, tako da se posljednji par sastoji od šeste i prve znamenke, dobivamo parove $(1,4)$, $(4,2)$, $(2,8)$, $(8,5)$, $(5,7)$, $(7,1)$. Zanimljivo je da kad ove parove shvatimo kao koordinate točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu, tih šest točaka nalazi se na jednoj elipsi.



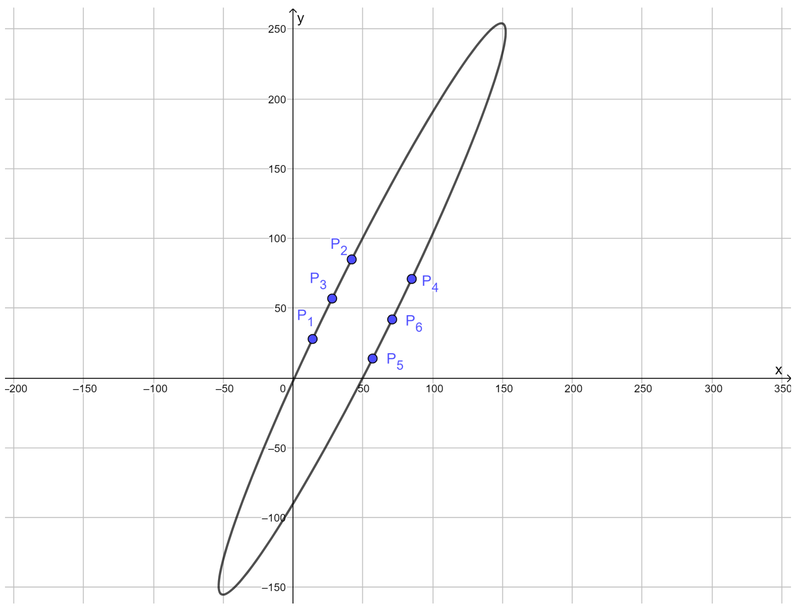
Slika 1. Elipsa kroz $(1,4)$, $(4,2)$, $(2,8)$, $(8,5)$, $(5,7)$, $(7,1)$

To se može provjeriti i računski, primjerice tako da se odredi jednadžba krivulje 2.reda koja prolazi kroz prvih pet točaka, a ona glasi:

$$19x^2 + 36xy + 41y^2 - 333x - 531y + 1638 = 0$$

i predstavlja elipsu.
Uvrštavanjem koordinata $x = 7, y = 1$ za šestu točku vidi se da i ona pripada krivulji. No, naravno da na taj način ne bismo doznali u čemu je stvarno "tajna" znamenaka perioda broja $1/7$.

Nadalje, ako ispišemo koordinate točaka koje se sastoje od po dvije susjedne znamenke opet dobivamo šest uređenih parova $(14, 28)$, $(42, 85)$, $(28, 57)$, $(85, 71)$, $(57, 14)$, $(71, 42)$. Sada je opet zanimljivo da i ovih šest točaka također leži na nekoj elipsi.

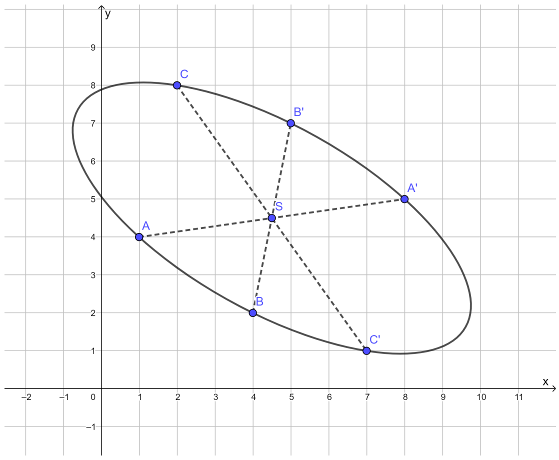


Slika 2. Elipsa kroz $(14, 28)$, $(42, 85)$, $(28, 57)$, $(85, 71)$, $(57, 14)$, $(71, 42)$

Kako objasniti ovu pojavu, da pojedine znamenke jednog racionalnog broja dovode do stanovite geometrijske pravilnosti i to na više načina formiranja koordinata točaka pomoću tih znamenaka? Objašnjenje bi trebalo pružiti odgovore i na druga pitanja koja se onda prirodno postavljaju, primjerice je li $1/7$ jedinstveni racionalni broj s takvim svojstvom ili ih ima još te kako ih možemo odrediti.

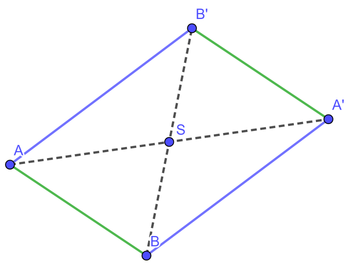
Na prvu možda izgleda da je ovo nešto čime se bavi teorija brojeva, no ipak, ovaj je problem vezan za geometriju. Primijetimo da za brojeve 142857 koji se javljaju u periodu vrijedi $1+8=4+5=2+7$. Isto tako vrijedi $14+85=42+57=28+71$.

Pogledajmo netrivijalni slučaj, kada imamo šest nekolinearnih točaka A B, C, A', B', C' koje su raspoređene u tri centralno simetrična para s obzirom na točku $S(s/2, s/2)$. To su, na primjer, točke dobivene iz decimalnog zapisa broja $1/7$ na gore opisani način te je njihov centar simetrije točka $S(9/2, 9/2)$, odnosno $S(99/2, 99/2)$. Pokazat ćemo da to nije jedini primjer, štoviše, da takvih skupova točaka ima beskonačno mnogo.



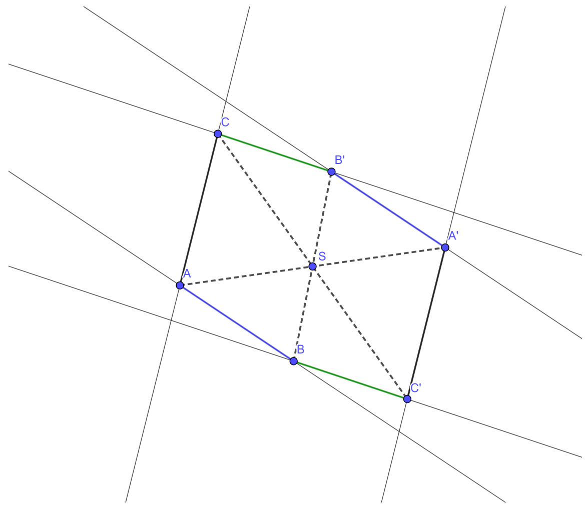
Slika 3. Točka $S(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ je centar elipse

Neka su A, A', B, B' točke u ravnini koje ne pripadaju istom pravcu i vrijedi da dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ imaju zajedničko polovište S, odnosno vrijedi da su dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ centralno simetrične s obzirom na centar S. To znači da su pravci AB i $A'B'$ te AB' i $A'B$ paralelni. Dakle, četverokut $ABA'B'$ je paralelogram (dijagonale konveksnog četverokuta se raspolavljaju, tj. sijeku se u zajedničkom polovištu ako i samo ako je taj četverokut paralelogram).



Slika 4. Dijagonale paralelograma se raspolavljaju

Zatim, neka su A, A', B, B', C, C' šest različitih točaka u ravnini takve da su AA', BB' i CC' različiti pravci koji se sijeku u točki S. Ako je S zajednički centar simetrije dužina $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ tada su u šesterokutu $ABCA'B'C'$ parovi suprotnih stranica, odnosno parovi pravaca na kojima se nalaze suprotne stranice šesterokuta, AB i $A'B'$, BC i $B'C'$ te CA i $C'A'$, paralelni. Pokazat ćemo da tih šest točaka pripada jednoj konici. (Slika 5.)



Slika 5. Nasuprotne stranice šesterokuta sa centrom S su paralelne

Pokazali smo u 1. poglavlju da je dovoljno da konika sadrži barem dva para centralno simetričnih točaka da bi bila centralna. Sad izravno iz Teorema 1.3. slijedi da se na jednoj konici nalaze točke $(1,4)$, $(4,2)$, $(2,8)$, $(8,5)$, $(5,7)$, $(7,1)$. Budući da $(1,4)$ i $(8,5)$, $(4,2)$ i $(5,7)$ te $(2,8)$ i $(7,1)$ čine centralno simetrične parove s obzirom na točku $S(9/2, 9/2)$, time je dokazana tvrdnja o elipsi pridruženoj broju $1/7$. Analogno, tvrdnja očito vrijedi i za šest točaka s koordinatama oblika (a, b) i $(s-a, s-b)$, (b, c) i $(s-b, s-c)$ te (c, a) i $(s-c, s-a)$. Razmotrit ćemo i nešto općenitiji rezultat.

Neka je zadano šest brojeva

$$z_1 = a, z_2 = b, z_3 = c,$$

$$z_4 = s-a, z_5 = s-b, z_6 = s-c$$

$z_1 \neq z_2 \neq \cdots \neq z_6$. Za svaki $n = 1, \ldots, 6$ definiramo P_n kao skup od šest uređenih parova (z_i, z_{i+n}), $i = 1, \ldots, 6$ (redoslijed shvaćamo ciklički).
Lako prepoznajemo centralno simetrične parove točaka u skupovima $P_i, i = 1, \ldots, 6$, no možemo uočiti i parove paralelnih pravaca.

Promotrimo skup P_1. Definirajmo skupove pravaca, dobivenih na gore opisani način su:

$$L_1 = \{\text{pravac određen točkama } (a,b) \text{ i } (b,c),$$
$$\text{pravac određen točkama } (c, s-a) \text{ i } (s-a, s-b),$$
$$\text{pravac određen točkama } (s-b, s-c) \text{ i } (s-c, a)\}$$

i

$$L_2 = \{\text{pravac određen točkama } (b,c) \text{ i } (c, s-a),$$
$$\text{pravac određen točkama } (s-a, s-b) \text{ i } (s-b, s-c),$$
$$\text{pravac određen točkama } (s-c, a) \text{ i } (a,b)\}.$$

Pogledajmo nagibe k zadanih pravaca iz skupa L_1, pa zatim nagibe k' pravaca iz skupa L_2, redom.

$$k_1 = \frac{c-b}{b-a}$$
$$k_2 = \frac{s-b-s+a}{s-a-c} = \frac{a-b}{s-a-c}$$
$$k_3 = \frac{a-s-c}{s-c-s+b} = \frac{a-s+c}{b-c}$$
$$k_1' = \frac{s-a-c}{c-b} = \frac{a-s+c}{b-c} = k_3$$
$$k_2' = \frac{s-c-s+b}{s-b-s+a} = \frac{b-c}{a-b} = \frac{c-b}{b-a} = k_1$$
$$k_3' = \frac{b-a}{a-s+c} = \frac{a-b}{s-a-c} = k_2$$

Vidi se da je svaki pravac iz skupa L_2 ima isti koeficijent smjera kao i neki pravac iz skupa L_1, odnosno svaki pravac iz skupa L_2 je paralelan s nekim pravcem iz skupa L_1. Isto smo mogli pokazati i koristeći paralelograme i svojstvo da se dijagonale paralelograma raspolavljaju. Tada vrijedi:

Teorem 2.1. Neka su a, b, c, $s-a$, $s-b$, $s-c$ šest različitih realnih brojeva. Tada za svaki $n = 1,2,3,4,5,6$ vrijedi:

1. Šest točaka iz P_n leži na jedinstvenoj konici. Središte svake konike je točka $(s/2, s/2)$. Za $n = 3$ ta konika je pravac $x + y = s$, dok je za $n = 6$ ta konika pravac $x = y$.

2. Ako su $n \neq n'$ iz $\{1, 2, 4, 5\}$, onda se $P_{n'}$ može dobiti zrcaljenjem P_n. Isto zrcaljenje povezuje konike određene svakim skupom točaka.

Dokaz:

1. Slučajevi $n = 3$ i $n = 6$ su trivijalni.
   Ispišimo skupove P_3 i P_6 po elementima.

   $$P_3 = \{(a, s-a), (b, s-b), (c, s-c), (s-a, a), (s-b, b), (s-c, c)\}$$

   $$P_6 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (s-a, s-a), (s-b, s-b), (s-c, s-c)\}$$

   Očito se sve točke iz P_3 nalaze na pravcu $x + y = s$, a sve točke iz P_6 na pravcu $x = y$.

2. Uzmimo sada $n, n' \in \{1, 2, 4, 5\}, n \neq n'$. Imamo

   $$P_1 = \{(a, b), (b, c), (c, s-a), (s-a, s-b), (s-b, s-c), (s-c, a)\}$$

   tako da P_1 odgovara prije navedenom skupu točaka za $a = 1, b = 4, c = 2, s = 9$. Za P_1 već smo dokazali da točke tog skupa pripadaju jednoj konici. Lako se vidi da analogno svojstvo vrijedi i za P_2, P_4 i P_5, no možemo se poslužiti i zrcaljenjem s obzirom na pravce $y = x, x+y = sx = \frac{s}{2}$ i $y = \frac{s}{2}$. Možemo pokazati da su P_j i P_k, $j, k \in \{1, 2, 4, 5\}$, $j \neq k$ povezani jednim ili dva od ovih zrcaljenja.

   Na primjer, ako zrcalimo

   $$P_1 = \{(a, b), (b, c), (c, s-a), (s-a, s-b), (s-b, s-c), (s-c, a)\}$$

   s obzirom na pravac $x = \frac{s}{2}$, dobivamo:

   $$\{(s-a, b), (s-b, c), (s-c, s-a), (a, s-b), (b, s-c), (c, a)\} = P_4$$

   Ako P_1 zrcalimo s obzirom na pravac $y = \frac{s}{2}$, opet dobivamo:

   $$\{(a, s-b), (b, s-c), (c, a), (s-a, b), (s-b, c), (s-c, s-a)\} = P_4.$$

   Ako P_1 zrcalimo s obzirom na pravac $y = x$, dobivamo:

   $$\{(b, a), (c, b), (s-a, c), (s-b, s-a), (s-c, s-b), (a, s-c)\} = P_5.$$

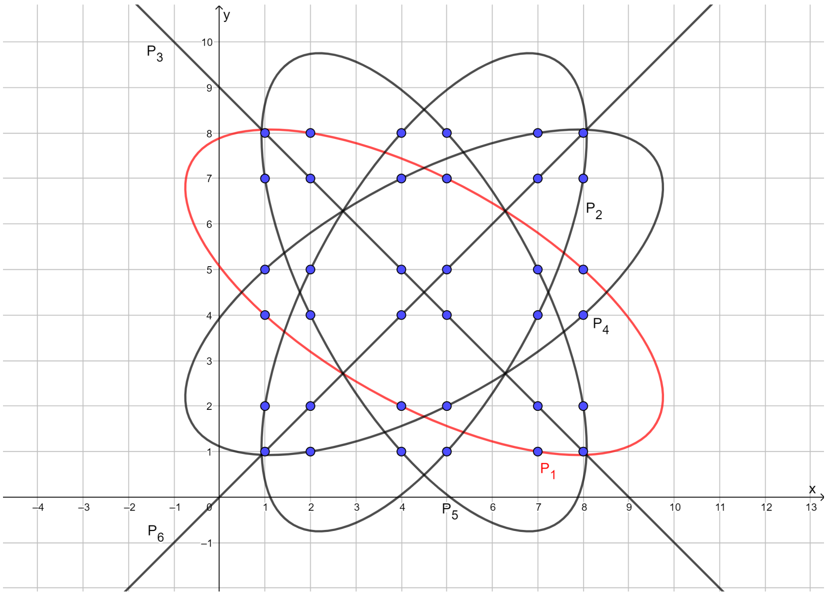
   Ako P_1 zrcalimo s obzirom na pravac $x + y = s$, opet dobivamo:

   $$\{(s-b, s-a), (s-c, s-b), (a, s-c), (b, a), (c, b), (s-a, c)\} = P_5.$$

Analogno bismo pokazali i ostale veze.
Da bismo pokazali da je svaka konika dobivena istim zrcaljenjima, uočimo da zrcaljenjem konike opet dobivamo koniku. Kako šest točaka određuje najviše jednu koniku, skup zrcaljenja koje točku P_j preslikaju u točku P_k će također preslikati i koniku kroz točku P_j u koniku kroz točku P_k.

□

Ove primjere ćemo lako i prikazati u koordinatnom sustavu. Uzimamo izvorni niz $\{1, 4, 2, 8, 5, 7\}$ da bismo dobili elipsu.



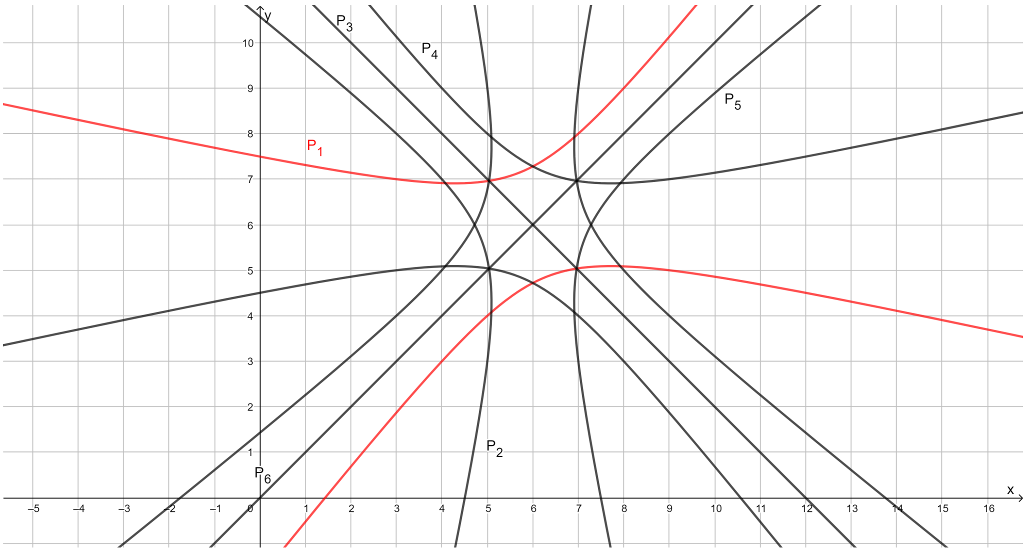
Slika 6. Elipse (i pravci) dobivene pomoću skupova P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6

Prikazane su četiri elipse koje su dobivene na prethodno opisani način pomoću skupova P_1, P_2, P_4 i P_5 te pravci pomoću skupova P_3 i P_6.

Poglavlje 3

Poopćenja elipse pridružene broju $\frac{1}{7}$

Pogledajmo zatim primjer kada se po Teoremu 2.1. dobiva centralna konika koja nije elipsa, nego hiperbola. Uzmimo skup $\{5, 4, 3, 7, 8, 9\}$, ako je $s = 12$, a broj je $\frac{1633}{3003}$.



Slika 7. Hiperbole (i pravci) dobivene pomoću skupova P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6

Za paralelne pravce bismo mogli uzeti skup $\{1, 2, 4, 8, 7, 5\}$.

Kako Teorem 2.1 vrijedi za svaki $a, b, c \in \mathbb{R}$, pretpostavimo da vrijedi a, b, c, $s - a$, $s - b$, $s - c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pogledajmo sada još neke brojeve za koje vrijedi slično. Takvih brojeva postoji konačno mnogo. Napišimo broj x kao sumu beskonačnog reda:

$$x = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{s-a}{10^4} + \frac{s-b}{10^5} + \frac{s-c}{10^6}$$
$$+\frac{a}{10^7} + \frac{b}{10^8} + \frac{c}{10^9} + \frac{s-a}{10^{10}} + \frac{s-b}{10^{11}} + \frac{s-c}{10^{12}} + \dots$$

Kada izlučimo $\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{s-a}{10^4} + \frac{s-b}{10^5} + \frac{s-c}{10^6}$ dobivamo:

$$x = \left(\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{s-a}{10^4} + \frac{s-b}{10^5} + \frac{s-c}{10^6}\right)\left(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \dots\right)$$

Raspišimo prvu zagradu, a drugu napišimo kao sumu geometrijskog reda:

$$x = \left(\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{s}{10^4} - \frac{a}{10^4} + \frac{s}{10^5} - \frac{b}{10^5} + \frac{s}{10^6} - \frac{c}{10^6}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}}\right)$$

$$= \left(\frac{10^3a-a}{10^4} + \frac{10^3b-b}{10^5} + \frac{10^3c-c}{10^6} + \frac{s}{10^4} + \frac{s}{10^5} + \frac{s}{10^6}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}}\right)$$
$$= \left(\frac{999a}{10^4} + \frac{999b}{10^5} + \frac{999c}{10^6} + \frac{s}{10^4} + \frac{s}{10^5} + \frac{s}{10^6}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}}\right)$$

Izlučimo li $\frac{999}{1000}$ iz prva tri pribrojnika prve zagrade te $\frac{s}{1000}$ iz druga tri pribrojnika prve zagrade, a u drugoj zagradi raspišemo dvojni razlomak dobivamo:

$$= \left[\frac{999}{1000}\left(\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3}\right) + \frac{s}{1000}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)\right]\left(\frac{10^6}{10^6-1}\right)$$

Jednostavnim računom zatim dolazimo do:

$$x = [999\,(100a + 10b + c) + 111s]\,\frac{1}{10^6-1}$$
$$= \frac{100a + 10b + c}{1001} + \frac{s}{9009}.$$

Sada lako možemo odabrati a, b, c, S, na primjer $a = 3, b = 2, c = 4, s = 9$ te dobivamo broj

$$x = \frac{100 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 4}{1001} + \frac{9}{9009} = \frac{324}{1001} + \frac{9}{9009}$$

odnosno $x = \frac{25}{77}$.

Još neki brojevi koje bismo dobili na ovaj način su:

$\frac{185}{1287}$ (za $a = 1, b = 4, c = 3, s = 8$)

$\frac{53}{429}$ (za $a = 1, b = 2, c = 3, s = 6$)

$\frac{16}{63}$ (za $a = 2, b = 5, c = 3, s = 11$) .

Poglavlje 4

Pascalov teorem i njemu srodni teoremi

Dokaz Teorema 2.1., dakle poopćenja "problema elipse pridružene broju $1/7$", očito je značajno olakšan simetričnim rasporedom promatranih točaka. Time se i određivanje krivulje drugog reda koja prolazi kroz svih šest točaka sužava na centralne krivulje. No, to nas ujdndo navodi i na uočavanje šire slike, u koju se taj primjer uklapa kao iznimno jednostavan.

Riječ je o čisto geometrijskoj karakterizaciji skupova od šest točaka koji se nalaze na jednoj konici. Uzmimo zasad da će ta konika biti neraspadnuta, jer nam je taj slučaj od većeg interesa, iako ni raspadnute konike zapravo nisu isključene. Naravno, konika ne mora biti centralna, a za zadane točke pretpostavljamo da su u općem položaju, to jest da nikoje tri od njih šest nisu kolinearne. Označimo li točke redom s P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6 (često se govori i o šesterovrhu upisanom konici), parovi pravaca P_1P_2 i P_4P_5, P_2P_3 i P_5P_6 te P_3P_4 i P_6P_1 odgovaraju parovima suprotnih stranica šesterovrha. U slučaju točaka zadanih pomoću znamenaka perioda broja $1/7$, kao i u poopćenju, imali smo paralelnost suprotnih stranica, a više nam je odgovaralo promatrati centralnu simetriju koja je tome ekvivalentna (u smislu međusobnog raspolavljanja dijagonala paralelograma).

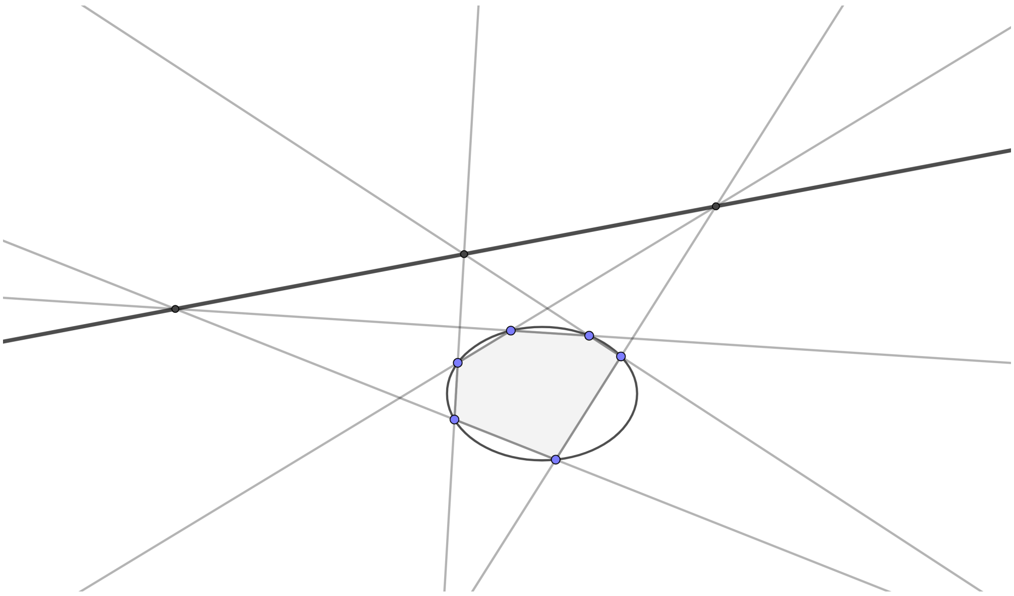
Što ako ovi parovi pravaca nisu paralelni? Jedan od najvažnijih teorema teorije konika, Pascalov teorem, govori da će se sjecišta parova suprotnih stranica biti tri kolinearne točke, ako točke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6 pripadaju jednoj neraspadnutoj konici.

U našim primjerima takva sjecišta parova pravaca ne postoje, jer su ti parovi pravaca paralelni. Međutim pristup je u projektivnoj geometriji takav da objedinjuje slučajeve koji se međusobno isključuju u afinoj geometriji pa posebno i u euklidskoj geometriji ravnine.

Osnovni tip preslikavanja u projektivnoj geometriji je centralno projiciranje. Uzmimo, primjerice, dvije različite ravnine π i π' u euklidskom prostoru te točku S koja ne pripada nijednoj od tih ravnina kao centar projiciranja. Točki A ravnine π tada se pridružuje točka A' ravnine π' tako da je A' probodište pravca SA i ravnine π'. Vidimo da neće svaka točka ravnine π imati svoju projekciju na ravninu π'. Iznimku čine one točke ravnine π koje se nalaze u ravnini σ postavljenoj točkom S paralelnoj ravnini π'. Te točke nalaze se na jednom pravcu, presječnici ravnina π i σ. S druge strane, postoje točke ravnine π' koje nisu projekcije niti jedne točke ravnine π i također se nalaze na jednom pravcu. Analogno se događa u ravnini, kada se skup točaka jednog pravca projicira iz nekog centra na skup točaka drugog pravca. Kaže se da se neke točke projiciraju u beskonačno daleke točke, odnosno da su neke točke projekcije beskonačno dalekih točaka. Proširivanje euklidske ravnine odgovarajućim beskonačno dalekim točkama i jednim beskonačno dalekim pravcem dovodi do geometrije u kojoj svaka dva različita pravca imaju zajedničku točku (točno jednu), moguće beskonačno daleku, a to je - ako su paralelni u euklidskom smislu - njihov zajednički smjer. Dakle, "nove" točke zapravo su smjerovi, klase paralelnih pravaca. Sve takve točke incidentne su s jednim "novim" pravcem, beskonačno dalekim, koji se uvodi upravo na taj način, kao novi objekt, incidentan sa svim "novim" točkama. Analogno se postupa u prostoru, gdje se svakoj klasi paralelnih ravnina, pridružuje zajednički beskonačno daleki pravac.

Ovakva konstrukcija proširenja euklidske ravnine odnosno prostora do projektivne ravnine odnosno projektivnog prostora pruža velike prednosti u proučavanju geometrijskih svojstava koja se odnose na incidenciju (pripada li točka pravcu ili ne, nalazi li se pravac u ravnini ili ne, pripada li točka krivulji ili ne itd). Metrička svojstva (udaljenost, mjera kuta, posebno okomitost pravaca, djelišni omjer) nisu invarijante centralnog projiciranja te općenito nisu predmet projektivne geometrije, iako u pojedinim modelima, kao što su proširena euklidska ravnina i prostor, mogu također imati važne uloge. Pascalov teorem vrijedi u proširenoj euklidskoj ravnini, kao projektivnoj ravnini i nije potrebno izdvajanje posebnih slučajeva do kojih dolazi zbog paralelnosti u samoj euklidskoj ravnini.

Teorem 4.1. (Pascal, 1639.) Ako je šesterokut upisan u koniku, onda se tri para suprotnih stranica tog šesterokuta sijeku u trima točkama koje pripadaju jednom pravcu.



Slika 8. Pascalov teorem

Vrlo slična tvrdnja o šest točaka i kolinearnosti triju sjecišta parova suprotnih stranica pripadnog šesterovrha bila je poznata davno prije Pascalovog teorema, no nije se odnosila na nesingularnu koniku nego na dva različita pravca, što je primjer raspadnute konike. Taj teorem zapisao je Pappus iz Aleksandrije, u prvoj polovici 4. stoljeća.

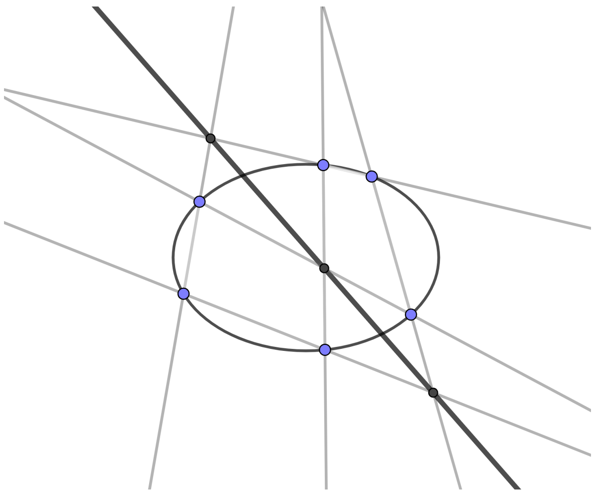
Šesterokut u Pascalovoj tvrdnji ne mora biti pravilan pa ni konveksan. Konike je promatrao kao skupove točaka koji nastaju presijecanjem ravninom ne samo stošca kao omeđenog prostornog tijela, nego neomeđene stožaste plohe. Takva ploha nastaje povlačenjem svih pravaca (izvodnica) koji prolaze točkama jedne kružnice i jednom čvrstom točkom u prostoru koja ne pripada ravnini te kružnice. Ta točka je onda zajednički vrh dva neomeđena konusa. Neka ravnina može takvu stožastu plohu sjeći u samo jednoj točki (vrhu), duž jednog pravca (izvodnice), u paru dviju izvodnica, odnosno u omeđenoj krivulji (elipsi ili posebno kružnici), u paraboli ili u hiperboli, ovisno o tome s koliko izvodnica je presječna ravnina paralelna (nijednom, jednom ili dvjema).

Iako to iz nepotpuno sačuvanog Pascalovog rada nije sasvim jasno, vjerojatno je da se u zaključivanju služio projektivnom metodom. Ideja je u sljedećem: Ako se tvrdnja koja se odnosi na incidenciju točaka i konika dokaže za slučaj kružnice, kao najjednostavniji, onda se centralnim projiciranjem proširuje na bilo koju (neraspadnutu) koniku. Dakako, ova metoda primjenjiva je samo na svojstva koja su projektivno invarijantna pa su isključena metrička svojstva.

Uočimo, međutim, da je za argument o pripadnosti šest točaka jednoj konici zapravo potreban obrat Pascalovog teorema. Iz kolinearnosti triju sjecišta parova suprotnih stranica šesterovrha treba slijediti da se svih šest vrhova nalazi na jednoj konici. Iako se u literaturi Pascalov teorem katkad iskazuje u obliku ekvivalencije dvaju svojstava, ta ekvivalencija nije očita niti sasvim jednostavna.

Za ovu svrhu pogodan je teorem koji se uobičajeno pripisuje dvojici škotskih matematičara iz 18. stoljeća, Braikenridgeu i Maclaurinu, ne zato što su surađivali, nego stoga što se između njih razvila oštra rasprava o prioritetu otkrića do kojeg su došli nezavisno. Ovaj rezultat navodimo ne u izvornoj formulaciji, nego u posebnoj varijanti koja je primjenjiva na šesterovrh.

Teorem 4.2. (Braikenridge - Maclaurin) Ako tri pravca sijeku druga tri pravca u devet različitih točaka i ako su tri od tih sjecišta kolinearne točke, onda se preostalih šest sjecišta nalazi na jednoj konici.



Slika 9. Braikenridge-Maclaurinov teorem

Precizirajmo kako se ovaj teorem može primijeniti na šesterovrh. Označimo vrhove, kao i prije, s P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6 . Za jednu trojku pravaca uzmimo P_1P_2, P_3P_4 i P_5P_6, a za drugu P_2P_3, P_4P_5 i P_6P_1. Označimo sjecišta suprotnih stranica P_1P_2 i P_4P_5 s Q_1, P_2P_3 i P_5P_6 s Q_2 te P_3P_4 i P_6P_1 s Q_3. Sjecišta pravaca prve trojke s pravcima druge trojke sada su redom točke: P_2, Q_1, P_1, P_3, P_4, Q_3, Q_2, P_5 i P_6. Ako su Q_1, Q_2 i Q_3 kolinearne točke, navedeni teorem tvrdi da preostalih šest sjecišta pripada jednoj konici. To su točke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6.

Ovo je, dakle, obrat Pascalovog teorema. U proširenoj euklidskoj ravnini, kao projektivnoj ravnini, slučaj kad su parovi suprotnih stranica paralelni, to jest kad su Q_1, Q_2 i Q_3 beskonačno daleke točke i time kolinearne na beskonačno dalekom pravcu, ravnopravan je s bilo kojim drugim slučajem kolinearnosti navedenih točaka.

Uočimo da obrat Pascalovog teorema omogućuje jednostavnu konstrukciju po volji mnogo točaka konike koja je zadana pomoću pet točaka u općem položaju i to samo pomoću ravnala (što je jedino i dopušteno u projektivnoj geometriji, općenito, jer su jedine "operacije" spajanje dviju točaka i presijecanje dvaju pravaca). Naime, označimo li zadane točke s P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5, možemo šestu točku potražiti tako da kroz jednu od ovih točaka, primjerice P_5, povučemo pravac p po volji, osim da ne prolazi još nekom od zadanih točaka te konstruiramo drugo sjecište tog pravca s konikom. Ta točka imat će ulogu vrha P_6. Najprije konstruiramo točke označene s Q_1 i Q_2 u prijašnjem razmatranju, što je moguće jer imamo izabrani pravac $p = P_5P_6$, iako još ne znamo položaj točke P_6 na njemu. Na pravcu Q_1Q_2 nalazi se sjecište P_3P_4 i P_6P_1, prethodno označeno s Q_3. Tu točku nalazimo, dakle, kao sjecište pravaca Q_1Q_2 i P_3P_4. Na kraju, P_6 je sjecište pravaca P_1Q_3 i izabranog pravca p.

Pascalovim teoremom i njegovim obratom ova tematika nije još ni izdaleka iscrpljena, jer su poznata različita poopćenja, od kojih su neka dana važnim teoremima iz teorije algebarskih krivulja.

Spomenimo najprije sljedeći rezultat iz 1848. godine.

Teorem 4.3. (Möbius) Neka je poligon s $4n + 2$ stranice upisan u neraspadnutu koniku. Produljivanjem parova suprotnih stranica dobiva se $2n + 1$ točaka. Ako $2n$ od tih sjecišta pripada jednom pravcu, onda i preostalo sjecište pripada istom pravcu.

Pascalov teorem očito predstavlja poseban slučaj ovog teorema za $n = 1$. Ovo je poopćenje u kojem se promatra također konika, ali broj vrhova upisanog poligona može poprimati niz vrijednosti.

Za daljnja poopćenja bitno je uočiti kako jedna konika i jedan pravac, odnosno skup od tri pravca čine raspadnute krivulje 3. reda, kraće rečeno kubike.

Navedimo teorem iz 1886. godine.

Teorem 4.4. **(Cayley - Bacharach)** Pretpostavimo da se dvije kubike u projektivnoj ravnini sijeku u devet različitih točaka. Tada bilo koja kubika koja prolazi kroz osam od tih točaka prolazi također i kroz devetu točku.

Pascalov teorem posljedica je ovog teorema ako se za dvije (raspadnute) kubike uzmu dvije trojke pravaca na način kao što je navedeno nakon iskaza Teorema 4.2. Tada se šest od devet sjecišta nalazi na konici, to su vrhovi promatranog šesterovrha, a onda preostala tri sjecišta moraju pripadati jednom pravcu. Naime, konika i pravac kroz dva sjecišta (npr. Q_1 i Q_2 u prijašnjim oznakama) određuju kubiku pa po teoremu 4.4. mora i Q_3 pripadati toj kubici.

Nešto detaljnijim razmatranjem može se vidjeti da je zapravo i Teorem 4.2. posljedica Teorema 4.4. No, pregled poopćenja zaključit ćemo sljedećim rezultatom koji pruža daljnje poopćenje Pascalovog teorema i njegovog obrata, kao i Teorema 4.4.

Teorem 4.5. **([2])** Neka se dvije krivulje stupnja k sijeku u k^2 različitih točaka. Ako neka neraspadnuta krivulja stupnja $d > 0$ prolazi kroz kd od tih k^2 sjecišta, onda postoji krivulja stupnja $k - d$ koja prolazi kroz preostalih $k(k - d)$ sjecišta.

Jasno je da izborom $k = 3$ i $d = 1$ odnosno $d = 2$ dobivamo već spomenute teoreme. Naglasimo da su ovi rezultati znatno teži i teorijski dublji od razmjerno jednostavnih geometrijskih razmatranja iz prva tri poglavlja ovog rada. Ipak, proučavanje zanimljivog primjera elipse pridružene broju $1/7$ moglo nam je poslužiti kao poticaj da saznamo više o uvjetima pripadnosti nekih točaka određenim konikama, kao i geometriji algebarskih krivulja općenito.

Bibliografija

[1] M. Chamberland, Sh. Ying, S. Suri, *A Generalization of the One-Seventh Ellipse*, Math. Mag. 93(4) (2020),271-275., www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0025570X.2020.1794198

[2] W. Traves, *From Pascal's theorem to d-constructible curves*, Amer. Math. Monthly 120(10)(2013)901-915., www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.120.10.901

[3] M. Lapaine, M. Lapaine, *Krivulja središta pramena konika*, KoG, 3 (1998), 3; 35-40.

[4] S. Suri, *One-Seventh Ellipse Problem*, 2018.,https://www.math.unl.edu/~ncuwm/21stAnnual/presentationlibrary/presentations/talk/Suri_NCUWM_2019.pdf

[5] J. Hall, *One-Seventh Ellipse*, from Math World - a Wolfram Web Resource created by Eric W. Weisstein, https://mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html

Sažetak

U ovom radu prikazana je i objašnjena sljedeća zanimljiva činjenica. Kad se od susjednih znamenaka perioda 142857 u decimalnom zapisu racionalnog broja $1/7$ formira šest uređenih parova, uzimajući ciklički poredak te se uređeni parovi shvate kao koordinate točaka u pravokutnom kartezijevom sustavu, dobivenih šest točaka nalazi se na jednoj elipsi. Analogni rezultat dobiva se uzimanjem po dviju susjednih znamenaka navedenog perioda.

Poopćenje ove pojave dovodi i do postupka za generiranje niza daljnjih primjera. U tu svrhu potrebno je uočiti simetriju promatranih skupova od po šest točaka i povezati je sa centralnosimetričnim krivuljama 2. reda, dakle centralnim konikama.

U završnom poglavlju dan je pregled rezultata iz teorije algebarskih krivulja koji obuhvaćaju opisane primjere kao specijalne slučajeve.

Summary

In this paper, the following interesting fact is presented and explained. When six ordered pairs are formed from the adjacent digits of the period 142857 in the decimal expansion of the rational number $1/7$, in a cyclic order, and the ordered pairs are interpreted as coordinates of points in a Cartesian coordinate system, these six points belong to an ellipse. An analogous result is obtained by taking pairs of adjacent digits of the same period.

A generalization of these remarks leads to a method of generating a sequence of further examples. To that purpose, it is necessary to observe a symmetry in the described sets of points and establish a connection with centrally symmetric curves of second order, that is, central conics.

The final chapter consists of a brief overview of results from the theory of algebraic curves that contain the previously exhibited examples as their special cases.

Životopis

Rođena sam 21. lipnja 1995. godine u Zagrebu. Osnovnu školu sam započela u područnoj školi Stupnik, a završila u Osnovnoj školi Lučko. U Zagrebu upisujem IX. gimnaziju. 2014. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku. Nakon završenog preddiplomskog studija upisujem Diplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na istom odsjeku.