SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Šimunović

SKUPOVI BROJEVA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Početci matematike vezani su uz razvoj ljudskog društva. Dugo je vremena prošlo dok ljudi nisu počeli brojati kao što to danas radimo. Ljudi su se prije bavili lovom te se brojanje svodilo na uspoređivanje broja elemenata jednog skupa s elementima drugog, već poznatog skupa. Prošlo je vremena dok ljudi nisu počeli uvoditi pojam broja. Simboli za brojeve su pronađeni u najranijim ostacima ljudskog pisanja te su tako za označavanje brojeva korišteni kamenčići, prsti, školjke ili nešto drugo. Iako su se brojevi koristili još u prapovijesti, druga polovica 19. stoljeća smatra se začetkom teorije skupova kao grane matematike. Smatra se da je nastala Cantorovim[1] otkrićem da postoje beskonačnosti različite "veličine". Tijekom razvoja teorije skupova pojavljivali su se paradoksi koji su se nastojali razrješiti, a njihova pojava uvelike je doprinijela daljnjem razvoju teorije skupova.

Tema ovog rada su skupovi brojeva u nastavi matematike, odnosno način na koji se uvode skupovi brojeva u školi te usporedba tog pristupa s aksiomatskom teorijom skupova brojeva. Kroz dva poglavlja ovog rada navest ćemo na koje načine se skupovi brojeva uvode u školi te komentirati neke zanimljivosti kod uvođenja potaknuti iskustvom rada u školi.

U prvom poglavlju opisan je ukratko povijesni pregled nastanka teorije skupova te su definirani pojedinačno skupovi brojeva. Definirane su operacije na skupovima te svojstva koje te operacije zadovoljavaju. Također navedeni su dokazi svojstava operacija na skupu prirodnih brojeva, koji se analogno provode i za svojstva operacija na ostalim skupovima.

U drugom poglavlju opisan je način i pristup pri uvođenju skupova brojeva u školi. Navedeno je kako se u udžbenicima uvode skupovi brojeva u pojedinom razredu osnovne, odnosno srednje škole te problematika manjka teorije skupova već u nižim razredima osnovne škole. Opisana je aktivnost za uvođenje dijeljenja razlomaka na satu matematike te je provedena u jednom 6. razredu. Svrha istraživanja je uočiti miskoncepcije koje se javljaju kod učenika tijekom dijeljenja razlomaka, s obzirom da učenici znaju imati problema već i s pojmom razlomka koji se uvodi u 5. razredu.

[1] Georg Cantor (1845. – 1918.) – njemački matematičar.

Poglavlje 1

Aksiomatska teorija skupova brojeva

Početci matematike vezani su uz brojanje i geometrijske uzorke te mjerenje. Najranije tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (rovaši), a nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili i žetoni. Međutim, prva pomagala za računanje bili su ipak prsti. Najstariji izvori potječu iz doba tzv. srednjeg carstva, a dva najvažnija su Rhindov papirus (oko 1650. pr.Kr.) i Moskovski papirus (oko 1850. pr.Kr.). Prije otkrića izrade papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski hijeroglifski brojevni sustav.
U području Mezopotamije tijekom prva tri tisućljeća izmijenili su se različiti dominantni narodi, ali su svi koristili varijante klinastog pisma te su sačuvane mnoge glinene pločice s matematičkim sadržajima iz starobabilonskog carstva (oko 1900. - 1600. pr.Kr.), od kojih su najvažnije YBC 7289 i Plimpton 322.
Kada govorimo o starogrčkoj matematici, u jonskom periodu (do početka 5.st.pr.Kr.) u starogrčkom smislu, korišteni su samo prirodni brojevi. U jonskom periodu postojale su dvije artimetike: praktična i teorijska, pri čemu se upravo teorijska aritmetika može smatrati začetkom teorije brojeva. Pitagorejci su prvi koji su razvijali teorijsku aritmetiku te je prema njihovoj filozofiji bit svijeta u harmoniji (prirodnih) brojeva. Oni su prvi gledali brojeve kao samostalne objekte te su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima. Ovim kratkim pregledom povijesti pojave brojeva, a time i prirodnih brojeva, uočavamo da su se brojevi koristili još u prapovijesti. U ovom poglavlju ćemo se kratko osvrnuti na nastanak teorije skupova te zatim proučiti formalne definicije skupova brojeva u matematici i operacija na njima.[1]

1.1 Povijesni pregled nastanka teorije skupova

Teorija skupova nastala je krajem 19. stoljeća i bavi se matematičkim objektima koje nazivamo skupovima, pri čemu se posebno proučavaju beskonačni skupovi. Teorija skupova je jedna od matematičkih disciplina za koju možemo reći da ima jednog „tvorca“ i to je upravo njemački matematičar Georg Cantor. S obzirom na proučavanje beskonačnih skupova, smatra se da je teorija skupova nastala Cantorovim otkrićem da postoje beskonačnosti različite „veličine“. Cantorov dokaz da realnih brojeva nema jednako mnogo kao i prirodnih smatra se nastankom teorije skupova. Time je prvi put dokazano da postoje dva beskonačna skupa koji nemaju jednako mnogo elemenata, odnosno Cantor je uveo pojam karidnalnosti te definirao kad skupovi imaju jednako elemenata i na osnovu toga pokazao da ne postoji bijekcija između skupa realnih i skupa prirodnih brojeva. Nadalje, uveo je i pojam prebrojivosti[2] skupa te dokazao da su prebrojivi skupovi najmanji beskonačni skupovi. Taj dokaz Cantor je objavio 1874. godine.

Krajem 19. stoljeća teorija skupova se činila kao kompletna matematička teorija, međutim pojavili su se paradoksi[3] koji u početku nisu prihvaćeni ozbiljno te su se pokušali izbjeći na razne načine. Ipak, paradoksi su znatno doprinijeli daljnem razvoju teorije skupova. Prvi paradoks teorije skupova objavljen je 1897. godine – paradoks Burali – Fortija[4] . Paradoks Burali – Fortija prvi je ukazao na to da se ne može svako svojstvo uzeti kao definicijsko za elemente skupa. Drugi paradoks je otkrio sam Cantor 1899. godine na temelju kojeg zaključujemo da ne postoji skup svih skupova. Posljednji od znamenitih paradoksa je 1902. godine otkrio Bertrand Russell[5] koji se sastoji od pokušaja definicije skupa svih objekata koji nisu elementi samog sebe.

Kako je teorija skupova već tada imala veliki utjecaj na druga područja matematike, tražili su se načini za eliminaciju paradoksa. Ernst Zermelo[6] je prvi pokušao aksiomatizirati teoriju skupova te je tako od njegovog sustava aksioma s doradama kojim su doprinijeli mnogi drugi matematičari dobiven danas uobičajeni sustav aksioma, poznat kao Zermelo – Fraenkelovi aksiomi teorije skupova koji s jedne strane onemogućuju pojavu paradoksa, a s druge strane omogućuju korištenje svih Cantorovih rezultata teorije skupova.[2, 3]

1.2 Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$

U ovom potpoglavlju će biti definiran skup prirodnih brojeva i operacije zbrajanja i množenja, kao i uređaj na skupu $\mathbb{N}$. Navest ćemo svojstva koja zadovoljavaju operacije zbrajanja i množenja te njihove dokaze.

[2]Kažemo da je skup A prebrojiv ako je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, odnosno ako postoji barem jedna bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ u skup A.

[3]Paradoks nije isto što i kontradikcija. Paradoks je tvrdnja čiji je dokaz logički neupitan, ali je intuitivno sama tvrdnja vrlo upitna.

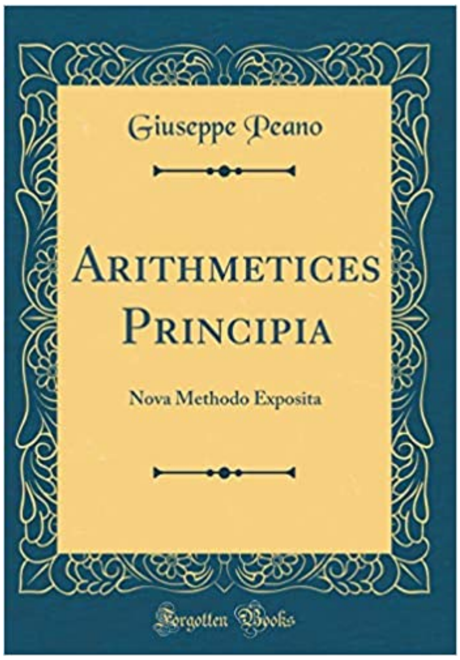
[4]Cesare Burali–Forti (1861. – 1931.) – talijanski matematičar.

[5]Bertrand Russell (1872. – 1970.) – engleski logičar.

[6]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871. – 1953.) – njemački logičar i matematičar.

1.2.1 Definicija skupa prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$. Dedekind[7] je u svom djelu "Was sind und was sollen die Zahlen?"[8] osim definicije beskonačnog skupa, predložio aksiomatske temelje za prirodne brojeve u kojima su osnovni pojmovi bili broj jedan i funkcija sljedbenika. Pozivajući se na Dedekindov rad, Peano[9] je objavio u letku "Arithmetices principia, nova methodo exposita"[10] precizniju i jednostavniju verziju skupa aksioma za aritmetiku, terminima koje vežemo uz skupove. Upravo zbog takve aksiomatizacije aritmetike, koja je poslije opće prihvaćena i postala standardna aksiomatizacija te po njemu dobila ime, Peano se smatra začetnikom matematičke logike i teorije skupova. Najpoznatiji i najčešći prikaz Peanovih aksioma dan je u analizi prilikom definiranja skupa prirodnih brojeva koje ćemo iznijeti u nastavku.



Slika 1.1: Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita, Giuseppe Peano

Definicija 1.2.1. *Prirodnim brojevima nazivaju se elementi svakog nepraznog skupa* $\mathbb{N}$ *na kojem postoji relacija "biti sljedbenik" koja zadovoljava sljedeće aksiome:*

(*A*1) *1 je prirodan broj.*

(*A*2) *Sljedbenik svakog prirodnog broja je prirodan broj.*

(*A*3) *Nikoja dva različita prirodna broja nemaju isti sljedbenik.*

[7] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831. – 1961.) – njemački matematičar.
[8] "Što su i čemu služe brojevi?"
[9] Giuseppe Peano (1858. – 1932.) – talijanski matematičar, osnivač matematičke logike.
[10] "Principi aritmetike, predstavljeni novom metodom"

(*A*4) *1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja.*

(*A*5) *Neka je M bilo koji podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži 1 i sadrži sljedbenik svakog svog elementa. Tada je $M = \mathbb{N}$.*

Definiciju prirodnih brojeva možemo i reformulirati tako da kažemo da prirodne brojeve čini trojka $(\mathbb{N}, \mathrm{s}, 1)$, pri čemu je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ skup, 1 element tog skupa i $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima:

(1) s je injekcija,

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})(s(n) \neq 1)$,

(3) ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ skup sa svojstvima:

(3.1) $1 \in M$,

(3.2) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in M \Rightarrow s(n) \in M)$,

tada je $M = \mathbb{N}$.

Aksiomi $(A1) - (A5)$ nazivaju se Peanovi aksiomi. Tvrdnju $(A5)$ nazivamo princip matematičke indukcije. Princip matematičke indukcije lako se može objasniti i shvatiti. Ukoliko je ispunjeno da je $1 \in M$, tada slijedi da je i $s(1) = 2 \in M$. Zatim slijedi da je $s(2) = 3 \in M$, što povlači da je i $s(3) = 4 \in M$ i tako dalje. Nastavimo li dalje s istim postupkom, uočavamo da će promatrani skup M sadržavati sve prirodne brojeve. Upravo iz razloga što prethodni postupak ne možemo nastaviti u beskonačnost, potreban nam je princip matematičke indukcije.[4]

1.2.2 Zbrajanje, množenje i uređaj na skupu $\mathbb{N}$

U nastavku ćemo pokazati da se na modelu trojke $(\mathbb{N}, \mathrm{s}, 1)$ mogu definirati operacije zbrajanja i množenja koje se podudaraju s našom intuicijom i neformalnim znanjem razvijenim u osnovnoj školi.

Definicija 1.2.2. *Funkcija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi:*

(*B*1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n + 1 = s(n)$,

(*B*2) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n + s(m) = s(n + m)$,

naziva se zbrajanje na skupu $\mathbb{N}$. Brojevi n i m su pribrojnici, a $n + m$ je zbroj.

Za funkciju zbrajanja na skupu $\mathbb{N}$ vrijede svojstva asocijativnosti i komutativnosti koje ćemo dokazati u nastavku.

Teorem 1.2.3. *(Asocijativnost zbrajanja) Za proizvoljne brojeve $n, m, p \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$(n + m) + p = n + (m + p) \tag{1.1}$$

Dokaz: Svojstvo asocijativnosti zbrajanja prirodnih brojeva dokazat ćemo principom matematičke indukcije po p. Neka su n i m bilo koja dva prirodna broja. Pokazat ćemo da za svaki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja (1.1).
Neka je S skup svih prirodnih brojeva p za koje vrijedi tvrdnja (1.1). Provjerimo bazu matematičke indukcije za $p = 1$:
Baza indukcije: ako je $p = 1$, onda vrijedi

$$(n+m)+1 \overset{(B1)}{=} s(n+m) \overset{(B2)}{=} n+s(m) \overset{(B1)}{=} n+(m+1), \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $p \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(p)$ vrijedi

$$\begin{aligned} (n+m)+s(p) &\overset{(B2)}{=} s((n+m)+p) \\ &\overset{(pretp.)}{=} s(n+(m+p)) \\ &\overset{(B2)}{=} n+s(m+p) \\ &\overset{(B2)}{=} n+(m+s(p)) \end{aligned}$$

Time smo dobili da tvrdnja (1.1) vrijedi i za $s(p) \in S$. Zaključujemo prema principu matematičke indukcije (A5) da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja (1.1) vrijedi za svake $n, m, p \in \mathbb{N}$. □

Na sličan način dokazat ćemo i svojstvo komutativnosti zbrajanja, ali prije nego krenemo na dokaz svojstva komutativnosti dokazat ćemo jednu pomoćnu lemu.

Lema 1.2.4. *Za svaki prirodan broj n vrijedi $1 + n = s(n)$. (L1)*

Dokaz: Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} : 1 + n = s(n)\}$. Dokaz ćemo provest principom matematičke indukcije po n.
Baza indukcije: ako je $n = 1$, onda vrijedi $1 + 1 \overset{(B1)}{=} s(1)$. Dakle, $1 \in S$.
Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(n)$ vrijedi

$$1+s(n) \overset{(B2)}{=} s(1+n) \overset{(pretp.)}{=} s(s(n)).$$

Time smo pokazali da je i $s(n) \in S$, stoga prema principu matematičke indukcije (A5) slijedi da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja (L1) vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Teorem 1.2.5. *(Komutativnost zbrajanja) Za proizvoljne brojeve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$n + m = m + n. \tag{1.2}$$

Dokaz: Svojstvo komutativnosti zbrajanja dokazat ćemo principom matematičke indukcije po m. Neka je n bilo koji prirodan broj i $S = \{m \in \mathbb{N} : n + m = m + n\}$.
Baza indukcije: ako je $m = 1$, onda vrijedi

$$n+1 \overset{(B1)}{=} s(n) \overset{(L1)}{=} 1+n, \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(m)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
n + s(m) &\overset{(B2)}{=} s(n+m) \\
&\overset{(pretp.)}{=} s(m+n) \\
&\overset{(B2)}{=} (m+n)+1 \\
&\overset{(1.1)}{=} m+(n+1) \\
&\overset{(L1)}{=} m+(1+n) \\
&\overset{(1.1)}{=} (m+1)+n \\
&\overset{(B1)}{=} s(m)+n
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je i $s(m) \in S$ te zaključujemo prema principu matematičke indukcije (A5) da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja teorema vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$. □

Definicija 1.2.6. *Funkcija* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *za koju vrijedi:*

(*C*1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot 1 = n,$

(*C*2) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot s(m) = n \cdot m + n,$

naziva se množenje na skupu $\mathbb{N}$. *Brojevi* n *i* m *su faktori, a* $n \cdot m$ *je umnožak.*

Za funkciju množenja na skupu $\mathbb{N}$ vrijede također svojstva asocijativnosti i komutativnosti kao i za zbrajanje te svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Teorem 1.2.7. *(Distributivnost množenja prema zbrajanju) Za proizvoljne brojeve* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

(*D*1) $n \cdot (m+p) = n \cdot m + n \cdot p$ *[distributivnost množenja prema zbrajanju slijeva]*

(*D*2) $(n+m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$ *[distributivnost množenja prema zbrajanju zdesna]*

Dokaz: Dokazat ćemo tvrdnju (D1) teorema, odnosno svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju slijeva principom matematičke indukcije po p. Neka su n i m bilo koja dva prirodna broja i $S = \{p \in \mathbb{N} : n \cdot (m+p) = n \cdot m + n \cdot p\}$.
Baza indukcije: ako je $p = 1$, onda vrijedi

$$n \cdot (m+1) \overset{B1}{=} n \cdot s(m) \overset{C2}{=} n \cdot m + n \overset{C1}{=} n \cdot m + n \cdot 1, \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $p \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(p)$ vrijedi

$$\begin{aligned} n \cdot (m + s(p)) &\overset{(B2)}{=} n \cdot s(m+p) \\ &\overset{(C2)}{=} n \cdot (m+p) + n \\ &\overset{(pretp.)}{=} n \cdot m + n \cdot p + n \\ &\overset{(C2)}{=} n \cdot m + n \cdot s(p) \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je i $s(p) \in S$. Prema principu matematičke indukcije (A5), zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$, odnosno da tvrdnja (D1) vrijedi za sve prirodne brojeve n, m i p.
Dokaz tvrdnje (D2) teorema, odnosno svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju zdesna provodi se na analogan način kao dokaz tvrdnje (D1), pri čemu će korak indukcije biti nešto duži.

Neka su n i m bilo koja dva prirodna broja i $S = \{p \in \mathbb{N} : (n+m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p\}$. Tvrdnju dokazujemo prema principu matematičke indukcije po p, kao i tvrdnju (D1).
Baza indukcije: ako je $p = 1$, onda vrijedi

$$(n+m) \cdot 1 \overset{C1}{=} n + m \overset{C1}{=} n \cdot 1 + m \cdot 1, \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $p \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(p)$ vrijedi

$$\begin{aligned} (n+m) \cdot s(p) &\overset{(C2)}{=} (n+m) \cdot p + (n+m) \\ &\overset{(pretp.)}{=} (n \cdot p + m \cdot p) + (n+m) \\ &\overset{(1.1)}{=} n \cdot p + (m \cdot p + (n+m)) \\ &\overset{(1.2)}{=} n \cdot p + (m \cdot p + (m+n)) \\ &\overset{(1.1)}{=} n \cdot p + ((m \cdot p + m) + n) \\ &\overset{(C2)}{=} n \cdot p + (m \cdot s(p) + n) \\ &\overset{(1.2)}{=} n \cdot p + (n + m \cdot s(p)) \\ &\overset{(1.1)}{=} (n \cdot p + n) + m \cdot s(p) \\ &\overset{(C2)}{=} n \cdot s(p) + m \cdot s(p) \end{aligned}$$

Time smo dobili da tvrdnja (D2) vrijedi i za $s(p) \in S$. Zaključujemo prema principu matematičke indukcije (A5) da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja (D2) vrijedi za svaki $p \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorem 1.2.8. *(Asocijativnost množenja) Za proizvoljne brojeve $n, m, p \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p). \tag{1.3}$$

Dokaz: Svojstvo asocijativnosti množenja dokazat ćemo principom matematičke indukcije po p. Neka su n i m bilo koja dva prirodna broja i $S = \{p \in \mathbb{N} : (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)\}$. Provjerimo bazu matematičke indukcije za $p = 1$:
Baza indukcije: ako je $p = 1$, onda vrijedi

$$(n \cdot m) \cdot 1 \stackrel{(C1)}{=} n \cdot m \stackrel{(C1)}{=} n \cdot (m \cdot 1), \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $p \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(p)$ vrijedi

$$\begin{aligned} (n \cdot m) \cdot s(p) &\stackrel{(C2)}{=} (n \cdot m) \cdot p + n \cdot m \\ &\stackrel{(pretp.)}{=} n \cdot (m \cdot p) + n \cdot m \\ &\stackrel{(D1)}{=} n \cdot (m \cdot p + m) \\ &\stackrel{(B2)}{=} n \cdot (m \cdot s(p)) \end{aligned}$$

Time smo pokazali da tvrdnja teorema vrijedi i za $s(p) \in S$. Prema principu matematičke indukcije (A5) zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$, odnosno da tvrdnja teorema vrijedi za svaki $p \in \mathbb{N}$. □
Prije dokaza svojstva komutativnosti množenja, dokazat ćemo pomoćnu lemu koju ćemo koristiti u dokazu za komutativnost.

Lema 1.2.9. *Za svaki prirodan broj n vrijedi $1 \cdot n = n$. (L2)*

Dokaz: Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} : 1 \cdot n = n\}$. Dokaz ćemo provest principom matematičke indukcije po n.
Baza indukcije: ako je $n = 1$, onda vrijedi $1 \cdot 1 \stackrel{(C1)}{=} 1$. Dakle, $1 \in S$.
Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(n)$ vrijedi

$$1 \cdot s(n) \stackrel{(C2)}{=} 1 \cdot n + 1 \stackrel{(pretp.)}{=} n + 1 \stackrel{(B1)}{=} s(n).$$

Time smo pokazali da je i $s(n) \in S$, stoga prema principu matematičke indukcije (A5) slijedi da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja leme vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Teorem 1.2.10. *(Komutativnost množenja) Za proizvoljne brojeve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$n \cdot m = m \cdot n. \tag{1.4}$$

Dokaz: Svojstvo komutativnosti množenja dokazat ćemo principom matematičke indukcije po m, analogno kao i komutativnost zbrajanja prirodnih brojeva.
Neka je n bilo koji prirodan broj i $S = \{m \in \mathbb{N} : \text{za m vrijedi } n \cdot m = m \cdot n\}$.
Baza indukcije: ako je $m = 1$, onda vrijedi

$$n \cdot 1 \overset{(C1)}{=} n \overset{(L2)}{=} 1 \cdot n, \text{ odnosno } 1 \in S.$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in S$.
Korak indukcije: Tada za $s(m)$ vrijedi

$$\begin{aligned} n \cdot s(m) &\overset{(C2)}{=} n \cdot m + n \\ &\overset{(C1)}{=} n \cdot m + n \cdot 1 \\ &\overset{(D2)}{=} (m+1) \cdot n \\ &\overset{(B1)}{=} s(m) \cdot n \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je i $s(m) \in S$ te zaključujemo prema principu matematičke indukcije (A5) da je $S = \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja teorema vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Na skupu prirodnih brojeva, osim što smo definirali funkcije $+$ i $\cdot$ koje se podudaraju s intuitivno uvedenim operacijama zbrajanja i množenja, definirat ćemo i uređaj na skupu prirodnih brojeva.

Definicija 1.2.11. *Neka su n i m prirodni brojevi. Tada je $\boldsymbol{n < m}$ ako i samo ako postoji prirodan broj $\boldsymbol{p}$ takav da vrijedi $\boldsymbol{n + p = m}$. Nadalje, $\boldsymbol{n \leq m}$ ako vrijedi $\boldsymbol{n < m}$ ili $\boldsymbol{n = m}$.*

Za relaciju uređaja "$\leq$" vrijede svojstva:

1. Refleksivnost: $n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. Antisimetričnost: ako je $n \leq m$ i $m \leq n$, tada je $n = m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$
3. Tranzitivnost: ako je $n \leq m$ i $m \leq p$, tada je $n \leq p$, $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$.

Relacija strogog uređaja " $<$ " usklađena je s operacijama zbrajanja i oduzimanja na skupu $\mathbb{N}$ te imamo:

(1) Ako je $m = n + p$, onda je $mk = (n + p) \cdot k = n \cdot k + p \cdot k, k \in \mathbb{N}$, stoga $n < m \Rightarrow nk < mk$.

(2) Ako je $m = n+p$ i $m' = n'+p'$, onda je $m+m' = n+p+n'+p' = (n+n')+(p+p')$, stoga $n < m$ i $n' < m' \Rightarrow n + n' < m + m'$.

Uočavamo kroz prethodno iskazane teoreme i leme te njihove dokaze da se, svojstva operacija prirodnih brojeva koje učenici obrađuju u nižim razredima osnovne škole nepotpunom indukcijom, mogu dokazati i razumijeti bez većih poteškoća ukoliko skup prirodnih brojeva definiramo kao trojku $(\mathbb{N}, \mathrm{s}, 1)$.

1.3 Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$

Potreba za proširenjem skupa prirodnih brojeva pojavila se s obzirom da operacija oduzimanja nije zatvorena u skupu $\mathbb{N}$. Neka je razlika dva prirodna broja x, y definirana na sljedeći način:

$$x - y = z \text{ ako je } x = y + z.$$

Vrijedi sljedeće: ako je $x < y$, onda operacija oduzimanja nema rezultat.

Preciznije, operacija oduzimanja nije binarna operacija na skupu $\mathbb{N}$, kao što su to operacije zbrajanja i oduzimanja. Stoga, cilj je proširiti skup prirodnih brojeva kako bismo dobili novi skup koji će sadržavati skup $\mathbb{N}$, operacije $+$ i $\cdot$ bit će proširenja operacija $+$ i $\cdot$ u skupu $\mathbb{N}$, uz uvjete da vrijede svojstva asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti množenja prema zbrajanju koja smo prethodno dokazali te da je broj 1 neutralni element za množenje, odnosno da vrijedi da je $x \cdot 1 = x$, $\forall x$.[5]

1.3.1 Definicija skupa cijelih brojeva

Svaki cijeli broj se može zapisati kao razlika dva prirodna broja, $a-b, a, b \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da cijele brojeve trebamo promatrati kao uređene parove (a, b). Dva uređena para (a, b) i (c, d) mogu opisivati isti broj (odnosno mogli bismo pisati $a - b = c - d$) ako i samo ako vrijedi $a + d = b + c$.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\sim$ relacija na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana s:*

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ako i samo ako je } a + d = b + c.$$

Lako se pokaže da je prethodno definirana relacija, relacija ekvivalencije, odnosno da zadovoljava svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti.

Definicija 1.3.2. *Skup cijelih brojeva definiramo kao* ***kvocijentni skup****, odnosno skup svih klasa ekvivalencije $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$.*

- Klasu čiji je predstavnik oblika (x, x) označavamo s 0.
- Za prirodan broj n klasu čiji su elementi oblika $(n + x, x)$ označavamo s n, a klasu čiji su elementi oblika $(x, n + x)$ označavamo s $-n$.
- Brojevi n i $-n$ nazivaju se suprotni brojevi.

Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ unija je skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, broja nula i skupa negativnih cijelih brojeva $\{-1, -2, -3, -4, ...\}$.
S obzirom na prethodno definiran skup cijelih brojeva, skup $\mathbb{N}$ smatramo podskupom skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ i pišemo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.3.2 Zbrajanje, množenje i uređaj na skupu $\mathbb{Z}$

Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definirat ćemo operacije i uređaj kao proširenje operacija zbrajanja i množenja na skupu $\mathbb{N}$ te navesti svojstva koje operacije zadovoljavaju.

Definicija 1.3.3. *Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definiramo operacije zbrajanja i množenja na sljedeći način:*

$$[(a+b)] + [(c+d)] = [(a+c, b+d)],$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)].$$

Prethodno definirane operacije s klasama svode se na operacije s predstavnicima tih klasa. Zbrajanje i množenje cijelih brojeva je "dobro definirano", odnosno ne ovisi o izboru predstavnika što se može lako i pokazati. Nadalje, svojstva asocijativnost, komutativnost i distributivnost množenja prema zbrajanju vrijede i na skupu $\mathbb{Z}$, kao i na skupu $\mathbb{N}$.

Skup cijelih brojeva sadrži element 0 koji se naziva **neutralni element za zbrajanje** i vrijedi sljedeće svojstvo:

$$x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Dokažimo prethodno navedeno svojstvo, odnosno da $\forall x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x+0 = 0+x = x$.

<u>*Dokaz*</u>: Primjenjujući definiciju cijelih brojeva te klase koje reprezentiraju cijeli broj 0, pozitivni broj x i negativan broj $-x$, vrijedi sljedeće:

- $x + 0 = [(x+1, 1)] + [(1,1)] = [(x+2, 2)] = x$, za x pozitivan cijeli broj;
- $x + 0 = [(1, 1-x)] + [(1,1)] = [(2, 2-x)] = x$, za x negativan cijeli broj;
- $0 + 0 = [(1,1)] + [(1,1)] = [(2,2)] = 0$, za $x = 0$.

Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi, odnosno da $\forall x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x + 0 = x$. S obzirom da vrijedi komutativnost zbrajanja, vrijedi analogno da je i $0 + x = x$. Time smo dokazali prethodno definirano svojstvo. Dokazi da su definicije operacija dobre, kao i svojstva operacija, provode se analogno primjenjujući definiciju cijelih brojeva.

Kao što je jedinica bila neutralni element za množenje na skupu $\mathbb{N}$, analogno će vrijediti i na skupu $\mathbb{Z}$. Uz sva prethodno navedena svojstva, u skupu $\mathbb{Z}$ vrijedi i sljedeće svojstvo:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists!(-x) \in \mathbb{Z})(x + (-x) = (-x) + x = 0).$$

Ovo svojstvo nazivamo **postojanje suprotnog broja** ili **inverznog elementa**. Inverzni element je jedinstveno određen i označavamo ga s $-x$. Primijetimo da je $-(-x) = x$. Kod operacije množenja ne postoji inverzni element jer operacija dijeljenja nije definirana na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Definiranjem inverznog elementa u

skupu cijelih brojeva uvodimo operaciju oduzimanja kao operaciju zbrajanja sa suprotnim, odnosno inverznim elementom i zapisujemo $x - y = x + (-y)$.
Nadalje, skup cijelih brojeva s obzirom na operaciju zbrajanja čini Abelovu[11] grupu. Dakle, $(\mathbb{Z}, +)$ je Abelova grupa i zadovoljava svojstva: zatvorenost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa i komutativnost. Dokaz da je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa se provodi jednostavno koristeći definiciju operacije zbrajanja na skupu cijelih brojeva. Također, skup cijelih brojeva s obzirom na operacije zbrajanja i množenja čini komutativan prsten s jedinicom.

Definicija 1.3.4. *Relaciju uređaja na skupu $\mathbb{Z}$ definiramo na sljedeći način:*

$$a < b \text{ ako i samo ako } b - a \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, $a \leq b$ ako vrijedi $a < b$ ili $a = b$.

Za relaciju uređaja " $\leq$ " kod cijelih brojeva vrijede ista svojstva kao i kod prirodnih brojeva (refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost).

1.4 Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$

Kao što kod skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ nije bilo moguće definirati operaciju oduzimanja za svaka dva prirodna broja, tako u skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ nije moguće definirati operaciju dijeljenja, odnosno ne možemo za svaka dva cijela broja x i y pronaći cijeli broj n tako da je $y = n \cdot x$. S obzirom na to, pojavljuje se potreba za proširenjem skupa cijelih brojeva.

1.4.1 Definicija skupa racionalnih brojeva

Skup racionalnih brojeva definira se na sličan način kao skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Promatrat ćemo Kartezijev produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i na njemu relaciju " $\approx$ " te kvocijentni skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/_{\approx}$.

Definicija 1.4.1. *Neka je $\approx$ relacija na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definirana s:*

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ ako i samo ako je } ad = bc.$$

Relacija " $\approx$ " je relacija ekvivalencije što se lako može pokazati (svojstvo refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti), stoga možemo promatrati kvocijentni skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\approx$.

Definicija 1.4.2. *Skup racionalnih brojeva definiramo kao* ***kvocijentni skup****, odnosno skup svih klasa ekvivalencije $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}/_{\approx}$.*

Predstavnik (a, b) klase tog kvocijentnog skupa češće označavamo s $\frac{a}{b}$ te $a \in \mathbb{Z}$ zovemo brojnik, a $b \in \mathbb{N}$ nazivnik. U tim oznakama vrijedi da $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ pripadaju istoj klasi, odnonso predstavljaju isti racionalni broj ako i samo ako vrijedi $ad = bc$.
Cijeli broj x predstavljen je klasom $[(x, 1)]$ i na taj način skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ smatramo podskupom skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Štoviše, slijedi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

[11] Niels Henrik Abel (1802. - 1829.) - norveški matematičar.

1.4.2 Zbrajanje, množenje i uređaj na skupu $\mathbb{Q}$

Na skupu racionalnih brojeva definirat ćemo operacije zbrajanja i množenja te navesti koja svojstva zadovoljavaju.

Definicija 1.4.3. *Na skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ definiramo operacije zbrajanja i množenja na sljedeći način:*

$$[(a+b)] + [(c+d)] = [(ad+bc, bd)],$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)].$$

Operacije zbrajanja i množenja racionalnih brojeva definirane su pomoću operacija zbrajanja i množenja cijelih brojeva. Može se pokazati da su tako definirane operacije na skupu $\mathbb{Q}$ dobro definirane, odnosno da ne ovise o izboru predstavnika. Analogno kao i na skupu prirodnih i cijelih brojeva, vrijede svojstva asocijativnost, komutativnost i distributivnost množenja prema zbrajanju. Skup racionalnih brojeva kao i skup cijelih brojeva ima neutralne elemente za zbrajanje i množenje. Neutralni element za zbrajanje je 0, a neutralni element za množenje je 1.
U skupu $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva također vrijedi svojstvo postojanja inverznog elementa s obzirom na zbrajanje, pa tako za svaki racionalan broj $n = \frac{a}{b}$ postoji jedinstven racionalan broj $m = \frac{-a}{b}$ takav da vrijedi $n + m = m + n = 0$.
Za razliku od skupa prirodnih i cijelih brojeva koji nisu imali svojstvo inverznog elementa kod operacije množenja, skup racionalnih brojeva ima i to svojstvo.
Kod operacije množenja svaki racionalan broj $n = \frac{a}{b} \neq 0$ ima inverzni element $m = n^{-1} = \frac{b}{a}$ takav da vrijedi $n \cdot m = m \cdot n = 1$.
Može se pokazati da skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ s operacijama zbrajanja i množenja čini polje. To znači da $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ima sljedeća svojstva: asocijativnost zbrajanja, postojanje neutralnog elementa za zbrajanje, postojanje inverza za zbrajanje, komutativnost zbrajanja, asocijativnost množenja, postojanje neutralnog elementa za množenje, postojanje inverznog elementa za množenje, komuntativnost množenja i distributivnost množenja prema zbrajanju. Sva navedena svojstva mogu se dokazati koristeći definicije operacija zbrajanja i množenja na skupu racionalnih brojeva.

Definicija 1.4.4. *Za racionalne brojeve $n = \frac{a}{b}$ i $m = \frac{c}{d}$ definiramo relaciju uređaja:*

$$n \leq m \text{ ako i samo ako } a \cdot d \leq b \cdot c.$$

Za relaciju uređaja " $\leq$ " na skupu racionalnih brojeva vrijede ista svojstva kao i kod skupa cijelih brojeva (refleksivnost, antisimetričnosti i tranzitivnost). Relacija uređaja je usklađena s operacijama zbrajanja i množenja na skupu racionalnih brojeva pa možemo reći s obzirom na sva svojstva koja ispunjava skup racionalnih brojeva da je skup $\mathbb{Q}$ uređeno polje.[8]

1.5 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

Kada racionalne brojeve nanosimo na brojevni pravac, s obzirom da je skup $\mathbb{Q}$ gust, mogli bi pomisliti da će njegovi elementi prekriti cijeli brojevni pravac, koji je glavni model za realne brojeve u školi. Međutim, postoje brojevi koji su pridruženi nekoj točki brojevnog pravca, a ipak nisu racionalni. Možemo se lako uvjeriti u to nanesemo li na brojevni pravac duljinu dijagonale kvadrata čija je stranica duljine 1, za čiju ćemo duljinu po Pitagorinom poučku dobiti da je jednaka $\sqrt{2}$. Lako se može pokazati da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan, stoga nam se prirodno pojavljuje potreba za definiranjem iracionalnih brojeva. Brojeve koje ne možemo prikazati u obliku razlomka nazivaju se iracionalni brojevi. Jedan učenicima poznat primjer broja koji nije racionalan je broj π, omjer opsega i promjera kruga, s kojim se učenici susreću u sedmom razredu osnovne škole.

1.5.1 Skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$

Skup iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$ i k tome vrijedi $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \{\emptyset\}$. Skup racionalnih brojeva i skup iracionalnih brojeva čine skup realnih brojeva te zapisujemo: $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Pri dokazivanju (i)racionalnosti broja koristimo sljedeći teorem čiji dokaz nećemo navoditi.

Teorem 1.5.1. *[Teorem o racionalnim korijenima polinoma] Ako je racionalan broj* $\frac{p}{q}$ $(M(p,q) = 1)$ *rješenje (korijen) jednadžbe*

$$a_n x^{\mathrm{n}} + a_{n-1} x^{\mathrm{n}-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0,\ \ a_n \neq 0$$

sa cjelobrojnim koeficijentima, tada je p djelitelj slobodnog člana i q je djelitelj vodećeg koeficijenta.

Navedeni teorem se koristi pri dokazivanju (i)racionalnosti broja tako da pretpostavimo da je zadani broj rješenje neke jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima. Odredimo tu jednadžbu i kandidate za racionalna rješenja dobivene jednadžbe. Ako dođemo do toga da nijedan kandidat ne zadovoljava jednadžbu, slijedi da jednadžba nema racionalnih rješenja. S obzirom da je zadani broj rješenje, zaključujemo da je onda iracionalan broj.

Definicija 1.5.2. *Algebarski brojevi su brojevi koji su nultočke polinoma s racionalnim (cjelobrojnim) koeficijentima.*

Iz same definicije algebarskih brojeva zaključujemo da su racionalni brojevi algebarski i da možemo pronaći proizvoljan polinom s cjelobrojnim koeficijentima koji ima za nultočku broj $\frac{a}{b}$. Isto tako, među algebarskim brojevima ima i iracionalnih brojeva. Jedan od primjera iracionalnog broja koji nije algebarski je broj π. Brojevi koji nisu algebarski nazivaju se transcedenti. Intuitivno, prethodna definicija nas navodi na zaključak da su transcedentni brojevi iracionalni. Najpoznatiji primjeri transcedentnih brojeva su π i e.

Nadalje, kako je skup svih korijena polinoma s racionalnim koeficijentima prebrojiv, algebarskih brojeva ima prebrojivo mnogo, iz čega slijedi da je transcedentnih brojeva neprebrojivo mnogo. Sada možemo definirati skup realnih brojeva i operacije zbrajanja i množenja na njemu, kao i uređaj.

1.5.2 Definicija skupa realnih brojeva

U prethodnom potpoglavlju smo spomenuli brojeve π i $\sqrt{2}$ koji su iracionalni brojevi. Potreba da se dokazuje da brojevi π i $\sqrt{2}$ nisu racionalni seže još iz Stare Grčke i razvoja geometrije u vrijeme Pitagore, kada su se često koristili racionalni brojevi, a zatim je došlo do zaključka da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva[12] sa duljinom stranice a.
Svaki iracionalan broj se može aproksimirati racionalnim brojem s unaprijed zadanom točnošću, ali je važno da razlikujemo definiciju broja od njegove aproksimacije. Bitno je naglasiti, na primjer kod broja $\sqrt{2}$, da $\sqrt{2} \neq 1.41$, nego $\sqrt{2} \approx 1.41$, odnosno da je to aproksimacija broja $\sqrt{2}$ na dvije decimale. Pri ovakvim primjerima javljaju se osnovne miskoncepcije kod učenika. Postavljaju se pitanja: "Je li broj ili interval odgovor?", "Kako su definirani realni brojevi?", Kako definiramo $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{2}$?", "Kako definiramo, a kako aproksimiramo 2^x za realni broj x?".
Time se prirodno pojavljuje potreba za definicijom skupa realnih brojeva za koji smo spomenuli da je unija skupa racionalnih i iracionanih brojeva. Zapisujemo: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Definicija 1.5.3. *Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je neprazan skup na kojem su definirane operacije zbrajanja i oduzimanje te uređaj tako da vrijedi:*

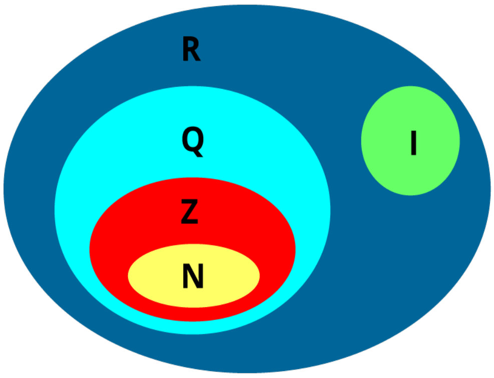
(1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *je polje,*

(2) $(\mathbb{R}, \leq)$ *je potpuno uređen skup,*

(3) *Uređaj se slaže sa operacijama zbrajanja i oduzimanja,*

(4) *[AKSIOM POTPUNOSTI] Svaki neprazan odozgo omeđen podskup ima najmanju gornju među (supremum).*

[12]Dužine a i b su sumjerljive ako postoji dužina c koja ide u a i b cijeli broje puta, tj. postoje prirodni brojevi m i n tako da je $a = mc, b = nc$, odnosno ako je omjer tih dužina racionalan broj.



Slika 1.2: Odnos skupova brojeva prikazan Vennovim dijagramom

Prva tri svojstva (1) - (3) daju 14 aksioma koji su zadovoljeni i u skupu racionalnih brojeva. Aksiom potpunosti, odnosno svojstvo (4), je aksiom po kojem se realni brojevi razlikuju od racionalnih. U nastavku ćemo navesti svih 14 aksioma koje zadovoljava i skup racionalnih i skup realnih brojeva.

Definicija 1.5.4. *Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ i neka su na skupu $\mathbb{R}$ definirane operacije zbrajanja i množenja te uređaj manje ili jednako ($\leq$). $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je uređeno polje za koje vrijede sljedeća svojstva:*

(*R*1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ *(asocijativnost zbrajanja)*

(*R*2) $x+0 = 0+x = x$ *(postojanje neutralnog elementa za zbrajanje)*

(*R*3) $x+(-x) = -x+x = 0$ *(postojanje suprotnog elementa za zbrajanje)*

(*R*4) $x+y = y+x$ *(komutativnost zbrajanja)*

(*R*5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(asocijativnost množenja)*

(*R*6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ *(postojanje neutralnog elementa za množenje)*

(*R*7) $x \neq 0, \exists\, x^{-1}, x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ *(postojanje inverznog elementa za množenje)*

(*R*8) $x \cdot y = y \cdot x$ *(komutativnost množenja)*

(*R*9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju)*

(*R*10) $x = y$ *ili* $x \leq y$ *ili* $y \leq x$ *(usporedljivost)*

(*R*11) $x \leq y$ *i* $y \leq x \Rightarrow x = y$ *(antisimetričnost relacije)*

(*R*12) $x \leq y$ *i* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ *(tranzitivnost relacije)*

(*R*13) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z, \forall z \in \mathbb{R}$ *(relacija uređaja je kompatibilna sa zbrajanjem)*

(*R*14) $0 \leq x$ *i* $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$ *(relacija uređaja je kompatibilna sa množenjem)*

Navest ćemo u nastavku teorem koji vrijedi za skup realnih brojeva, ali ga nećemo dokazivati.

Teorem 1.5.5. *Za skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *vrijedi sljedeće:*

(i) skup $\mathbb{Q}$ *je gust u skupu* $\mathbb{R}$*, odnosno za svaka dva realna broja* $a < b$ *postoji racionalan broj* r *takav da je* $a < r < b$*;*

(ii) skup $\mathbb{R}$ *je neprebrojivo beskonačan, odnosno ne postoji bijekcija između skupa prirodnih i realnih brojeva;*

(iii) elementi skupa $\mathbb{R}$ *prekrivaju čitavi brojevni pravac.*

Glavni model za realne brojeve koji koristimo u školi je brojevni pravac, ali nije formalni matematički model, nego grafički i didaktički te ga shvaćamo i koristimo intuitivno. Glavni problem modela brojevnog pravca je kako odrediti koje sve vrijednosti leže na brojevnom pravcu, upravo iz tog razloga ga ne možemo ni smatrati formalnim matematičkim modelom za realne brojeve. Kada gradimo teoriju na temelju teorije skupova, onda ćemo prvo realne brojeve definirati kao određeni skup, a brojevni pravac tek nakon toga, kao određeni prostor kojem je taj skup nosač i koji ima još neka dodatna svojstva, kao recimo funkcija udaljenosti.
S obzirom na to, postoje različiti matematički modeli koji zadovoljavaju aksiome skupa realnih brojeva, na primjer decimalni brojevi, Cauchyevi nizovi, Dedekindovi rezovi i tako dalje.
Ukoliko koristimo model Cauchyevih nizova racionalnih brojeva, definirat ćemo skup realnih brojeva na jedan drugačiji način. Prije nego što zapišemo definiciju realnih brojeva pomoću modela Cauchyevih nizova, podsjetimo se definicije Cauchyevog niza.

Definicija 1.5.6. *Niz* (x_n) *racionalnih brojeva je* ***Cauchyev*** *ako za svaki prirodan broj* k *postoji prirodan broj* $n_0(k)$ *takav da vrijedi* $n, m \geq n_0(k) \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{1}{k}$.

Definicija Cauchyevog niza nam kaže da su "od nekog mjesta svi članovi niza proizvoljno blizu jedan drugome".

Definicija 1.5.7. *Kažemo da su Cauchyevi nizovi* (x_n) *i* (y_n) *racionalnih brojeva* ***ekvivalenti*** *ako im razlika teži u nulu, odnosno ako za svaki prirodan broj* k *postoji prirodan broj* $n_0(k)$ *takav da vrijedi* $n \geq n_0(k) \Rightarrow |x_n - y_n| < \frac{1}{k}$.

Realne brojeve konstruiramo na sljedeći način:
Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ se sastoji od klasa ekvivalencija $C/_{\sim}$ Cauchyevih nizova racionalnih brojeva. Realan broj je zapravo klasa koja je reprezentirana nekim nizom racionalanih brojeva. Vrijedi sljedeći odnos među već spomenutim skupovima:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.5.3 Decimalni zapis realnih brojeva

S obzirom da su racionalni brojevi brojevi koji se mogu zapisati u obliku $\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, možemo ih zapisati i u obliku decimalnog zapisa. Decimalni zapis nekog racionalnog razlomka određujemo dijeljenjem brojnika s nazivnikom. Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.5.8. *Razlomak ima konačan ili beskonačan periodičan decimalan zapis.*

Ukoliko razlomak ima beskonačan decimalni zapis (prikaz), tada za decimalni prikaz ima: čisto periodički broj ili mješovito periodički broj. Također, vrijedi i obrat prethodno navedenog teorema, odnosno vrijedi da se konačan ili beskonačno periodičan decimalan zapis može prikazati kao razlomak.
Intuitivno se postavlja pitanje što je s brojevima koji imaju beskonačan neperiodičan decimalan zapis. Takve brojeve više ne možemo nazivati razlomcima jer brojevi s beskonačno neperiodičkim decimalnim zapisom nisu racionalni brojevi. Upravo skup tih brojeva čini skup iracionalnih brojeva o kojem smo prethodno pričali.
Dale, iracionalni brojevi su brojevi koji imaju beskonačan neperiodički decimalan zapis. Svaki se iracionalan broj može aproksimirati racionalnim brojem s unaprijed zadanom točnošću. Na brojevnom pravcu racionalni brojevi su gusto poredani, ali ga ipak ne ispunjavaju, upravo zato jer postoje i iracionalni brojevi.

Definicija 1.5.9. *Svaki realan broj a možemo prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom prikazu:*

$$a = \pm a_0.a_1a_2a_3...$$

pri čemu je a_0 prirodan broj ili nula, a $a_1, a_2, a_3...$ neke od znamenaka $0, 1, 2, ..., 9$.

Stoga definiciju, odnosno karakterizaciju skupa realnih brojeva pomoću modela decimalnih brojeva možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2a_3.... \in \mathbb{Z} \times \mathbb{D}^{\mathbb{N}} : a_k < 9 \text{ za beskonačno mnogo } k\}.$$

Imamo uvjet $a_k < 9$ za beskonačno mnogo k kako bi izbjegli dvostruke decimalne zapise. Nedostatak ovog modela za realne brojeve je što je definicija računskih operacija komplicirana.[9]

1.5.4 Zbrajanje, množenje i uređaj na skupu $\mathbb{R}$

Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ uvest ćemo operacije zbrajanja i množenja te uređaj pomoću modela Cauchyevih nizova racionalnih brojeva.

Definicija 1.5.10. *Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo operaciju zbrajanja $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:* $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$.

Teorem 1.5.11. *Definicija operacije zbrajanja na skupu realnih brojeva ne ovisi o izboru predstavnika.*

Dokaz: Neka je $(x_n) \sim (x'_n)$ i $(y_n) \sim (y'_n)$ te neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada postoje $n_0(2k)$ i $m_0(2k)$ takvi da je $n \geq n_0(2k) \Rightarrow |x_n - x'_n| < \frac{1}{2k}$ i $n \geq m_0(2k) \Rightarrow |y_n - y'_n| < \frac{1}{2k}$. Za $n \geq max\{n_0(2k), m_0(2k)\}$ slijedi:

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| \leq |(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}.$$

Pritom, prva nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta, dok druga nejednakost slijedi iz definicije Cauchyevog niza. Dakle, slijedi $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ te smo time dokazali tvrdnju teorema. □

Definicija 1.5.12. *Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo operaciju množenja $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n \cdot y_n)]$.*

Teorem 1.5.13. *Definicija operacije množenja na skupu realnih brojeva ne ovisi o izboru predstavnika.*

Lako se može pokazati tvrdnja prethodnog teorema, na analogan način kao i da defincija operacije zbrajanja na skupu realnih brojeva ne ovisi o izboru predstavnika, stoga dokaz tvrdnje ovog teorema nećemo navoditi.

Definicija 1.5.14. *Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo uređaj manje ili jednako "$\leq$" na sljedeći način:*

$(x_n) \leq (y_n)$ *ako postoji prirodan broj N takav da za sve $n \leq N$ vrijedi $x_n \leq y_n$.*

Jedno od osnovnih svojstava realnih brojeva je Arhimedovo[13] svojstvo koje ćemo iskazati i dokazati u nastavku.

Teorem 1.5.15. *Za svaka dva pozitivna realna broja a, b postoji prirodan broj n takav da je $b < n \cdot a$.*

Dokaz: Dokaz ćemo provesti svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije točna, odnosno da postoje pozitivni realni brojevi a, b takvi da za svaki prirodan broj n vrijedi $n \cdot a \leq b$. Tada je skup $A = \{n \cdot a \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen s b, pa prema aksiomu potpunosti postoji najmanja gornja međa tog skupa m. Budući da je m najmanja gornja međa, broj $m - a$ nije gornja međa, odnosno postoji prirodan broj n takav da je $m - a < n \cdot a$. Dakle, vrijedi $m < (n+1) \cdot a$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je m gornja međa skupa A. Time smo dokazali tvrdnju teorema. □

1.6 Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

Jednadžba kao što je $x^2 - 2 = 0$ ima rješenja u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ i to su $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, dok njoj jako slična jednadžba $x^2 + 2 = 0$ nema rješenja u skupu realnih brojeva

[13] Arhimed iz Sirakuze (oko 287. pr.Kr. - 212. pr.Kr.) - grčki fizičar, astronom i jedan od najvećih matematičara starog vijeka te navodno jedan od trojice najgenijalnijih matematičara svih vremena.

zbog toga što vrijedi da je $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Upravo zbog toga javlja se potreba za proširenjem skupa realnih brojeva u kojem će navedena jednadžba imati rješenje.
Potrebu za proširenjem polja realnih brojeva među prvima je uočio talijanski matematičar Cardano[14]. On je rješavajući jedan geometrijski problem dobio jednakost $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 40$ iz koje je uočio da je produkt "nerealnih brojeva" realan broj. Pri potrebi za proširenjem skupa realnih brojeva postavljamo si pitanje koja svojstva od realnih brojeva bismo željeli zadržati.
Time dolazimo do skupa kompleksnih brojeva koji ćemo definirati u nastavku, ali ćemo prije toga definirati imaginarnu jedinicu i koja će nam imati osnovnu ulogu za definiranje novog skupa kompleksnih brojeva kojeg označavamo s $\mathbb{C}$.

Dakle, postoji kompleksan broj i koji je rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ i nazivamo ga **imaginarna jedinica** te vrijedi $i^2 = -1$.

1.6.1 Definicija skupa i operacija kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi su proširenje skupa realnih brojeva te zapisujemo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, odnosno kažemo da je polje realnih brojeva potpolje polja kompleksnih brojeva. Navest ćemo dvije formalne konstrukcije kompleksnih brojeva, nakon čega ćemo uočiti i vezu među njima.

Konstrukcija 1 :
Prvi korak pri ovoj konstrukciji kompleksnih brojeva je definirati prsten polinoma s realnim koeficijentima na sljedeći način:

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n : n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Drugi korak pri konstrukciji je definirati kvocijentni prsten na sljedeći način:

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \{a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}.$$

Oznaka za ovu konstrukciju je $\mathbb{R}[i]$, što označava proširenje skupa realnih brojeva s i, pri čemu je $i^2 = -1$. Time je imaginarna jedinica definirana s $i := 0 + 1 \cdot x$, dok reprezentante možemo pisati u obliku $a + bi$. Realni brojevi su elementi oblika $a + 0 \cdot i$.
Operacije zbrajanja i množenja na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ su definirane na sljedeći način:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Lako se može pokazati da tako definiran skup kompleksnih brojeva s operacijama zbrajanja i množenja čini polje te kažemo da je trojka $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje.

[14]Girolamo Cardano (24.09.1501. - 21.09.1576.) - talijanski fizičar, matematičar, astronom, liječnik i filozof; među prvim matematičarima koji su računali s kompleksnim brojevima.

Kompleksne brojeve možemo konstruirati i na način da promatramo uređene parove realnih brojeva te na njima definiramo imaginarnu jedinicu i. Pri toj konstrukciji, uređeni par realnih brojeva možemo identificirati s točkom u kooordinatnoj ravnini. Pritom imaginarnu jedinicu i zapisujemo u obliku uređenog para $i = (0, 1)$, dok su realni brojevi oblika $(a, 0)$.

Možemo uočiti i vezu između prethodne dvije konstrukcije (izraz $a + bi$ odgovara uređenom paru (a, b)). Način konstrukcije kompleksnih brojeva promatranjem uređenih parova realnih brojeva nam daje geometrijsku interpretaciju: kompleksne brojeve prikazujemo u Gaussovoj ravnini, pri čemu se os apscisa naziva još i **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**.

Kompleksan broj najčešće označavamo sa z i zapisujemo u obliku $z = a+bi$, pri čemu su a i b realni brojevi. Takav zapis nazivamo algebarski ili standardni oblik kompleksnog broja z. S prethodnom konstrukcijom kompleksnih brojeva pokazali smo da jednadžba $x^2 + 2 = 0$ s početka potpoglavlja ima rješenje u skupu $\mathbb{C}$. Time smo pokazali i da je skup $\mathbb{C}$ zatvoren na određivanje drugog korijena, a time i na određivanje n-tog korijena. Stoga, nemamo potrebu za daljnim proširenjem skupa kompleksnih brojeva. Ono u čemu se skup kompleksnih brojeva razlikuje od prethodno navedenih skupova je taj da na skupu $\mathbb{C}$ nije definiran uređaj, odnosno kompleksne brojeve ne možemo uspoređivati.
Intuitivno nam se pojavljuje još jedno pitanje: kada su dva kompleksna broja jednaka?
Dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ jednaka su kada im se podudaraju realni i imaginarni dio, odnosno kada vrijedi $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.[10]

1.6.2 Kompleksno konjugiranje i modul kompleksnog broja

U nastavku ćemo definirati funkciju kompleksnog konjugiranja, odnosno par kompleksno konjugiranih brojeva te modul kompleksnog broja.

Definicija 1.6.1. ***Kompleksno konjugiranje*** *je funkcija* $\overline{()} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *s pravilom pridruživanja*

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Kompleksno konjugiranje je involucija, odnosno funkcija je sama sebi inverz te za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi $\bar{\bar{z}} = z$. Stoga, kompleksno konjugiranje geometrijski interpretiramo na način da tražimo osnosimetričnu sliku točke (a, b) s obzirom na realnu os te se njoj pridružuje točka $(a, -b)$. Par kompleksnih brojeva z i $\bar{z}$ nazivamo parom kompleksno konjugiranih brojeva.

Definicija 1.6.2. ***Modul kompleksnog broja*** $z = a + bi$ *je nenegativan realan broj za koji vrijedi*

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2,\ tj.\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

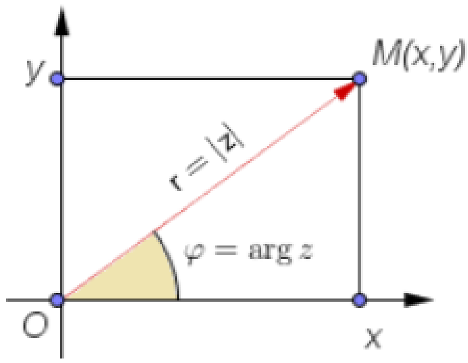
Modul kompleksnog broja geometrijski interpretiramo kao udaljenost točke z od ishodišta Gaussove ravnine. Modul kompleksnog broja ima sljedeća svojstva:

(1) Modul umnoška dvaju kompleksnih brojeva jednak je umnošku njihovih modula: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(2) Modul količnika dvaju kompleksnih brojeva jednak je količniku njihove apsolutne vrijednosti: $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$.

1.6.3 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Neka je točka $M = (a, b)$ točka Gaussove ravnine koja odgovara kompleksnom broju $z = a + bi$. Položaj točke $M = (a, b)$ obično opisujemo njezinim Kartezijevim koordinatama koje su vezane uz algebarski prikaz kompleksnog broja. Međutim, kompleksan broj z može se prikazati i pomoću druga dva podatka, udaljenosti r točke M $M = (a, b)$ od ishodišta i kuta φ koji radijvektor te točke zatvara s pozitivnim dijelom realne osi, kao što je prikazano na slici 1.3. Varijable r i φ se nazivaju polarne koordinate kompleksnog broja z.



Slika 1.3: Položaj točke M u Gaussovoj ravnini opisan polarnim koordinatama

Definicija 1.6.3. ***Argument kompleksnog broja*** *$z = a + bi$ je mjera orijentiranog kuta koji polupravac kroz točku z s početkom u ishodištu zatvara s pozitivnim dijelom realne osi. Oznaka: $arg\ z$.*

Svaki kompleksni broj možemo prikazati u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pri čemu je $r \geq 0$ modul $(r = |z|)$, a $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ argument $(\varphi = arg\ z)$.
Argument nije jednoznačno određen jer je mjera kuta određena do na višekratnik od 2π. Koje je od dva rješenja unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$ 'pravo', određujemo pomoću predznaka brojeva a i b, odnosno na osnovi informacije o kvadrantu u kojem se nalazi kompleksni broj z.
U drugom poglavlju ćemo usporediti i kako se navedeni skupovi brojeva uvode i definiraju u školi te ćemo uočiti razliku s obzirom na formalnu konstrukciju svih

navedenih skupova i izostavljanje rasprave o egzistenciji, ali prije toga definirat ćemo operacije množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva u trigonometrijskom zapisu.

1.6.4 Operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom zapisu

Propozicija 1.6.4. *Neka su* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *kompleksni brojevi zapisani u trigonometrijskom obliku. Primjenom adicijskih formula slijedi*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Dakle, množimo li dva kompleksna broja, njihovi moduli se množe, a argumenti zbrajaju. Množenje kompleksnim brojem geometrijski interpretiramo kao kompoziciju rotacije i homotetije sa središtem u ishodištu Gaussove ravnine.
Direktna algebarska posljedica prethodne propozicije množenja kompleksnim brojem je operacija potenciranja kompleksnih brojeva koju definiramo na sljedeći način:

Propozicija 1.6.5. *Neka je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Vrijedi de Moivreova formula:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \text{ za svaki prirodan broj } n.$$

Prethodna propozicija se može dokazati metodom matematičke indukcije.

Propozicija 1.6.6. *Neka su* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *kompleksni brojevi zapisani u trigonometrijskom obliku. Primjenom adicijskih formula slijedi*

$$\tfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \tfrac{1}{z_2} = \tfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Dakle, dijelimo li dva kompleksna broja,njihove moduli podijelimo, a argumente oduzmemo. Preostaje nam još prikazati korenjenovanje kompleksnih brojeva.

Propozicija 1.6.7. *Neka je* $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. *Jednadžba* $z^n = a$ *ima točno* n *različitih rješenja u skupu kompleksnih brojeva:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, ..., n-1$$

pri čemu je r *modul, a* φ *argument broja* a.

U slučaju kada je $a = 0$, jednadžba $z^n = 0$ ima jedno rješenje i ono je nula. Kratnost tog rješenja je upravo n.

Poglavlje 2

Skupovi brojeva u školi i metodički pristup

Nastava matematike od prvog razreda osnovne škole usko je povezana s pojmom broja i skupova brojeva. Kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje, učenici se susreću s različitim skupovima brojeva te usvajaju definicije istih, kao i operacije na njima. U ovom poglavlju ćemo navest na koji način se uvode pojedini skupovi brojeva u školi te kako se učenike motivira na otkrivanje svojstava pojedinog skupa brojeva i usporediti s teorijom skupova koju smo obradili u prethodnom poglavlju. "Koliko je teorija skupova zastupljena u osnovnoškolskom, odnosno srednjoškolskom obrazovanju?", "Demotivira li učenike površnost pri obradi skupova brojeva te manjak motivacijskih zadataka koji potiču učenike na razvoj stavaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti?", "Je li potrebno učenike rasteretiti formalnih definicija skupova brojeva i formalnih dokaza nekih naizgled složenih tvrdnji, iako se u tome kriju odgovori na česta pitanja i nedoumice učenika?", neka su od pitanja koje ćemo obraditi u ovom poglavlju i približiti sliku zastupljenosti teorije skupova u današnjem osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. Prikazat ćemo primjer aktivnosti za uvođenje operacije dijeljenja racionalnih brojeva koja je provedena u jednom 6.razredu te učenička rješenja i postignuća, kao i njihova razmišljanja i zaključke.

2.1 Uvođenje skupova brojeva u osnovnoj i srednjoj školi

Početkom sedamdesetih godina dvadesetog stoljeća suvremena matematika temeljila se na pojmovima teorije skupova i algebarskih struktura. Time je gradivo matematike u 5. razredu osnovne škole započinjalo s uvođenjem osnovnih pojmova teorije skupova kao što su primjeri skupova i njihovo zadavanje, Vennovi dijagrami, pojan praznog skupa, podskupa skupa, partitivnog skupa, unije i presjeka dvaju skupova. Također uvodili su se i pojmovi: Kartezijev produkt dvaju skupova, uređen par objekata, binarna realcija uključujući relaciju ekvivalencije i relaciju uređaja. Nadalje, definirani su i pojmovi funkcija, bijekcija, ekvipotentnost te konačni i beskonačni skupovi.

Kako navode i autori članka "O skupovima i ljudima (jedna zaboravljena godišnjica)", Ivo Baras, Renata Kožul Blaževski i Julija Mardešić, takav pristup nastavi matematike je bio podlegnut raznim kritikama što je bilo očekivano. Najveći pritisak su vršili roditelji koji su smatrali da njihova djeca uče "neku drugu" matematiku i pregršt pojmova koje nisu u mogućnosti savladati. Međutim, pokazalo se da su djeca s navršenih 10 godina dobro usvajala pojmove teorije skupova i rado ih primjenjivala. Uz to, time su razvijali svoje matematičko izražavanje te su s lakoćom opisivali i klasificirali matematičke objekte.
Prethodno opisani sustav i nastavni program zaživio je sve do devedestih godina dvadesetog stoljeća kada su nastupile promjene u školskom programu i predmetnom kurikulumu za matematiku. Tih godina započeo je proces "rasterećenja" nastavnog programa čime je došlo do praktičnog izbacivanja teorije skupova iz gradiva osnovnih škola. S obzirom da je do tada elementarna teorija skupova bila temelj za daljnje svladavanje gradiva, gradivo matematike se moralo drastično reorganizirati. Glavni propust ovih promjena je bio taj što se osnovnoškolsko obrazovanje nije uskladilo sa srednjoškolskim i visokoškolskim obrazovanjem, stoga je došlo do problema kada se na višim stupnjevima obrazovanja od učenika očekivalo da znaju i vladaju nekim dijelom gradiva za koje zapravo nikada nisu čuli.
O ovom problemu govore i autori članka "U potrazi za skupovima" Milana i Mladen Vuković, iz 2010. godine, koji su naveli svoja iskustva sa studentima prvih godina raznih studija te su ostali začuđeni kako studenti neke osnovne pojmove teorije skupova ne znaju. Ustvari, zaključuju da neke osnovne pojmove o skupovima nigdje ni ne uče te žele skrenuti pažnju na to koliko je bitno pažljivo postupati sa skupovima i uvoditi ih na adekvatan način tokom osnovnoškolskog, odnosno srednjoškolskog obrazovanja.
U nastavku ćemo navesti sadržaje najnovijih udžbenika koji su propisani od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja te ćemo proučiti s kojim pojmovima o skupovima se učenici upoznaju te kako se uvode pojedini skupovi brojeva u osnovnoj i srednjoj školi.

U udžbenicima *Nina i Tino 1, 2, 3 i 4* raznih autora, nakladnik Profil, 1. izdanje, Zagreb, 2020. i 2021. godine, za razrednu nastavu od prvog do četvrtog razreda, riječ "skup" nije spomenuta niti u jednom od sadržaja. Učenicima nižih razreda osnovne škole uvode se postupno prirodni brojevi jedan po jedan te se uvode operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja pisanim postupkom. Na primjer, u navedenom udžbeniku za prvi razred nalaze se naslovi: "Pribrojnici i zbroj", "Brojevi od 11 do 20", "Zbrajanje (10+6)", "Oduzimanje (13-7)", dok autori članka "U potrazi za skupovima" pak navode kako su pri potrazi za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima matematike naišli na naslov "Oduzimati i uspoređivati u skupu brojeva do 10" u udžbeniku za prvi razred. Treba napomenuti kako je navedeni članak iz 2010. godine te su autori koristili udžbenike i ostale materijale tiskane do 2009. godine. Nadalje, u udžbeniku *Matematika 5* raznih autora, nakladnik Profil, 2.izdanje, Zagreb, 2020. godine, u nastavnoj cjelini "Prirodni brojevi" nalazi se nastavna jedinica "Skup prirodnih brojeva" u kojoj su dane sljedeće definicije:

- Skup prirodnih brojeva označava se slovom $\mathbb{N}$ i piše: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.
- Skup svih prirodnih brojeva zajedno s brojem 0 čini skup brojeva koji se označava $\mathbb{N}_0$ (čitamo: en nula) i piše: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.
  Dakle, broj 0 nije član skupa $\mathbb{N}$, ali jest član skupa $\mathbb{N}_0$.

U narednim nastavnim jedinicama obrađuju se operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva te njihova svojstva. Pri obradi svojstava operacija na skupu prirodnih brojeva, najčešće se učenicima iznosi motivacijski primjer koji pokušaju riješiti individualno ili u grupi te otkriti zadano svojstvo. Međutim, nakon samo jednog primjera s učenicima se zaključuje da vrijedi određeno svojstvo, što sa matematičkog stajališta znamo da ne možemo zaključiti, odnosno takva indukcija se naziva nepotpuna indukcija i ona nema moć dokaza. Proučavajući načine obrade nastavnih jedinica s učenicima u školi, svi dokazi i zaključci svode se na nepotpunu indukciju.
Ako pogledamo i nešto starija izdanja udžbenika za peti razred, na primjer udžbenik *Tajni zadatak 005*, autorica Renate Svedrec, Nikol Radović, Tanje Soucie i Ivane Kokić, nakladnik Školska knjiga, Zagreb, 2007. godine, u naslovu nastavne jedinice niti nema riječi "skup", nego se nastavna jedinica naziva "Prirodni brojevi", a tek se u tekstu spominje da svi prirodni brojevi čine skup prirodnih brojeva koji označavamo s $\mathbb{N}$. Pogledajmo kako se uvode cijeli i racionalni brojevi u šestom razredu te iracionalni i realni brojevi u osmom razredu.
Cijeli brojevi se najčešće uvode s motivacijskim primjerom očitavanja temperature na termometru te se na taj, učenicima poznat i prikladan, način uvode negativni brojevi te prikazivanje cijelih brojeva na brojevnom pravcu. U udžbeniku *Matematika 6* raznih autora, nakladnik Profil, 1.izdanje, Zagreb, 2020. godine, nakon prethodno uvedenih negativnih brojeva i prikazivanja cijelih brojeva na brojevnom pravcu učenicima se iznosi sljedeća definicija:

- Skup svih cijelih brojeva označava se velikim slovom $\mathbb{Z}$.
  Dakle, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
  Svaki prirodni broj i broj nula cijeli su brojevi pa vrijedi $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

Potom slijede nastavne jedinice "Suprotni brojevi i apsolutna vrijednost" te "Koordinatni sustav u ravnini", a nakon njih operacije i svojstva operacija cijelih brojeva, analogno kao i za prirodne brojeve. U nastavnoj jedinici "Koordinatni sustav u ravnini" definiran je pojam uređenog para na sljedeći način: "Par brojeva za koji se točno zna koji je prvi, a koji drugi naziva se uređeni par". Uočavamo da je formalna definicija time dosta pojednostavljena, kako bi bila jednostavnija i za usvojiti učenicima, ali učenicima takav pristup može stvoriti i mnoge miskoncepcije u kasnijem učenju matematike, odnosno poteškoće pri prepoznavanju razlike pojma uređenog para i neuređenog para, tj. dvočlanog skupa. Svojstva operacija na skupu cijelih brojeva ne obrađuju se opširno, uz par primjera navedeno je u udžbeniku kako vrijede ista svojstva kao i za prirodne brojeve te uz to vrijedi i svojstvo suprotnog broja.

Učenici dosta rijetko koriste svojstva operacija cijelih brojeva pri rješavanju zadataka, što potkrepljuju i iskustva nastavnika matematike. Mogući razlog tome je i površnost pri uvođenju i obradi istih, stoga učenici "zaobilaze" primjenu svojstava kada uoče da mogu riješiti zadatak i na drugi način, odnosno računajući "po redu".

Nadalje, također u udžbeniku za šesti razred slijede nastavne cijeline "Razlomci" i "Računanje s razlomcima". U nastavnoj cijelini "Razlomci" imamo nastavne jedinice: "Proširivanje i skraćivanje razlomaka", "Zapisi pozitivnih racionalnih brojeva", "Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik" i "Uspoređivanje razlomaka". Kroz cijelu nastavnu cijelinu nije opisan skup racionalnih brojeva niti su definirani racionalni brojevi, što može biti dosta zbunjujuće za učenike. Pitamo se otkud odjednom naziv *"racionalni brojevi"* kada učenici znaju jedino za naziv *"razlomci"*, a da im se pritom ne definiraju racionalni brojevi niti skup racionalnih brojeva. Štoviše, u idućim nastavnim jedinicama spominje se isključivo naziv *"razlomci"*, kao i u narednoj nastavnoj cjelini koja se i zove "Računanje s razlomcima". Odgovor na to "Što je to racionalan broj?" učenici dobivaju u sedmom razredu pri obradi nastavne cjeline "Racionalni brojevi". U udžbeniku *Matematika 7* raznih autora, nakladnik Profil, 1. izdanje, Zagreb, 2020. godine, u nastavnoj cjelini "Racionalni brojevi" učenicima se uvode i negativni racionalni brojevi te prolaze kroz operacije na skupu racionalnih brojeva s negativnim racionalnim brojevima.

U udžbeniku *Matematički izazovi 8*, autori Gordana Paić, Željko Bošnjak i Boris Čulina, nakladnik Alfa, 6. izdanje, Zagreb, 2020. godine, u nastavnoj cjelini "Realni brojevi" s učenicima prvo ponavljaju skupovi brojeva koje su naučili u prethodnim razredima u nastavnoj jedinici "Prirodni, cijeli i racionalni brojevi", a zatim se obrađuje nastavna jedinica "Pisanje razlomaka u decimalnom obliku" nakon koje se uvode iracionalni brojevi, a zatim i realni. Navedena je sljedeća definicija za iracionalne i realne brojeve:

- Brojevi koji imaju konačan ili beskonačan periodični decimalni prikaz jesu **racionalni brojevi**. Sve brojeve koji nisu racionalni nazivamo **iracionalnim brojevima**. Oni imaju beskonačan neperiodičan decimalni prikaz. Skup iracionalnih brojeva bilježimo s $\mathbb{I}$. Skup svih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ i skup svih iraciolanih brojeva $\mathbb{I}$ zajedno čine **skup realnih brojeva**. Skup svih realnih brojeva označavamo s $\mathbb{R}$.

U nastavku ove cjeline slijede nastavne jedinice "Konstrukcije dužina duljine $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, "Realni brojevi i brojevni pravac" te "Graf funkcije $f(x) = x^2$", pri čemu treba napomenuti da se učenici prije te nastavne jedinice ne susreću s pojmom *funkcija*. Time učenici završavaju obradu skupova brojeva tokom osnovnoškolskog obrazovanja. Uočavamo da su neki pojmovi i područja matematike uvedeni "naglo" i "oskudno", kako bi učenici imali neki temelj za ono što ih čeka u srednjoškolskom obrazovanju, a i u svrhu rasterećenja nastavnog programa. Međutim, ako pogledamo to s matematičkog stajališta, postavlja se i pitanje, s obzirom da se dosta nastavnih jedinica obrađuje površno, koliko to učenicima koristi i koliko od toga oni uopće usvoje i zapamte. Na osnovu navedenog sadržaja udžbenika iz matematike za osnovnu školu te načina na koji se uvode pojedini skupovi brojeva, kao i sam pojam skupa, autori članka "U potrazi za skupovima" Milana i Mladen Vuković, donose sljedeći zaključak s kojim se možemo i složiti:

> Riječ "skup" se koristi samo kao ime (skupovi brojeva; grupe objekata u statistici, grupe predmeta, itd.). Uvede se oznaka $\in$ i spomene se pojam podskupa.

Možemo zaključiti da je to za razinu osnovne škole i dovoljno, iako su tvrdnje i dokazi zasnovani na nepotpunoj indukciji i vjerujemo da bi s dubljim i detaljnjijim pristupom pri obradi, konkretno skupova brojeva i operacija na skupovima, učenicima određeni odnosi u matematici bili puno jasniji i jednostavniji za usvojiti.

U nastavku ćemo proučiti i obradu skupova brojeva kroz srednju školu za gimnazijski program te koje se nastavne cjeline obrađuju. U udžbeniku za prvi razred srednje škole *Matematika 1*, autori Branimir Dakić i Neven Elezović, nakladnik Element, 1.izdanje, Zagreb, 2019. godine, obrađuju se između ostalog nastavne sjeline "Brojevi" i "Uređaj na skupu realnih brojeva". U nastavnoj cjelini "Brojevi" ponavljaju se skupovi brojeva koji su se učili kroz osnovnu školu te se ponavljaju neke već naučene operacije sa skupovima i uvodi se pojam "kardinalnosti skupa". U nastavnoj cjelini "Uređaj na skupu realnih brojeva" nailazimo na sljedeće nastavne jedinice: "Svojstva relacije uređaja", Linearne nejednadžbe", Apsolutna vrijednost realnog broja". U udžbeniku *Matematika 2* raznih autora, nakladnik Profil, 1.izdanje, Zagreb, 2020. godine, za drugi razred u nastavnoj jedinici "Korijeni" uvodi se imaginarna jedinica i u nastavnoj jedinici "Imaginarna jedinica", iako se kompleksni brojevi obrađuju po novom nastavnom planu i programu u četvertom razredu srednje škole.

U udžbeniku *Matematika 4*, autori Branimir Dakić i Neven Elezović, nakladnik Element, 1.izdanje, Zagreb, 2021. godine, u prvim dvjema nastavnim cjelinama "Realni brojevi" i "Kompleksni brojevi" ukratko se ponavaljuju skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih i iracionalnih brojeva te skup realnih brojeva. Zatim se navode aksiomi koji vrijede na skupu realnih brojeva i uvodi pojam omeđenosti skupa. Potom slijedi princip matematičke indukcije kao posebna nastavna jedinica u kojoj se nakon definicije principa matematičke indukcije, rješavaju zadaci koji se rješavaju principom matematičke indukcije. Zatim slijedi nastavna cjelina "Skup kompleksnih brojeva" u kojoj su sljedeće nastavne jedinice: "Algebarski zapis kompleksnog broja", Algebarske operacije u skupu kompleksnih brojeva", Trigonometrijski zapis kompleksnog broja", "Računske operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom zapisu" i "Jednadžbe i nejednadžbe u skupu kompleksnih brojeva".

Rezimirajući prethodne navode o tome kako se uvode skupovi brojeva u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju te operacije sa skupovima i odnosi, s matematičkog stajališta možemo reći da je to, u svrhu "rasterećenja" nastavnog programa, dosta siromašno. Na to su se osvrnuli i autori u prethodno spomenutom članku "U potrazi za skupovima" koji smatraju da to nikako nije dovoljno. Navode da bi trebalo puno više pažnje posvetiti uvođenju skupovnih operacija. Poseban naglasak stavljaju na to da se nigdje kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje ne vježba dokazivanje skupovnih identiteta (npr. de Morganova pravila, distributivnost,...).

S problematikom uvođenja skupova u nastavni program bavio se i Vladimir G. Kirin (1928. - 2000.) koji je bio redoviti profesor na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu. On je u svom članku "Što i kako sa skupovima", u stručno - metodičkom časopisu *Matematika*, 1977. godine, opisao problem uvođenja skupova u nastavni program u tadašnje vrijeme te je predvidio što će se dogoditi sa skupovima u nastavi matematike u budućnosti. Neke od rečenica iz članka su:

> *"...dilema nije da li skupove uvoditi u osnovne škole ili ne, već da li ih uvoditi ovako kako se to danas čini ili ne."*
>
> *"Tek kad se stigne do sistematskog izbrojavanja svega i svačega, tad bi po mom sudu trebalo po prvi put uzgred spomenuti skupove i elemente, ali ne odgovarati na pitanja iz razreda, što skupovi jesu. To će vidjeti iz konteksta."*
>
> *" Ogleda se naš popustljiv stav prema gomilanju činjeničnog materijala u udžbenicima. Taj je materijal ušao u njih iz opširnih programa. Vidimo da su školske knjige sve deblje i sve skuplje i da ih je sve više. Ako taj materijal bude i dalje tako vrtoglavo rastao, izvjestan njegov dio neminovno će se morati proglasiti suvišnim i bezvrijednim. Bolje će biti da to učine sami matematičari nego netko sa strane."*

Olakšavanje učenicima "rasterećenjem" nastavnog programa ili pak otežavanje učenicima za svladavanje nekih složenijih područja u matematici kroz više školovanje, pitanje je na koje bi odgovori i mišljenja vrlo vjerojatno bili podvojeni. Svakako, kroz godine se može primjetiti da je sve manji interes učenika za matematiku, možda zbog težine usvajanja gradiva, možda zbog toga što bi učenici rekli "meni jednostavno to ne ide", a možda je sve to samo odraz toga što se učenike ne motivira dovoljno da dublje razumiju ono što rade i ono što vježbaju. Često je bolja i korisnija kvaliteta od kvantitete, štoviše jedna tvrdnja, dokaz, zadatak koji je kvalitetno usvojen i savladan, može učenicima puno olakšati i posložiti "kockice u glavi", nego li hrpa zadataka koji su riješeni šablonski i zaboravljeni netom nakon ispita. Autori prethodno navedenog članka "O skupovima i ljudima (jedna zaboravljena godišnjica)" zaključuju da ima u svemu tome i zabavnih posljedica:

> *"Primjerice, dok su se sedamdesetih godina prošlog stoljeća roditelji bunili što im djeca u školi uče o skupovima, danas se ta ista djeca, u ulogama roditelja čude što njihova djeca u školi ne uče o skupovima."*

2.2 Uvođenje prirodnih i cijelih brojeva

Prilikom uvođenja prirodnih brojeva u školi, svjesni smo da učenici već poznaju brojeve, čak i računanje s njima, kao što smo naveli i u prethodnom poglavlju. Dakle, učenici u 5.razredu osnovne škole usvajaju pojam skupa prirodnih brojeva i tada stvaraju jasniju sliku o onome s čime su se već susreli. Na taj se način kod uvođenja prirodnih brojeva prirodno pojavljuju tvrdnje koje se učenicima ne dokazuju, a iza kojih se krije upravo jedan od aksioma koje zadovoljava skup prirodnih brojeva, a to je aksiom matematičke indukcije. Dosta tvrdnji se pred učenike stavlja kao "gotov proizvod" bez dokazivanja i zalaženja u dubinu same tvrdnje.
Dva su načina logičkog razmišljanja: deduktivni i induktivni. S induktivnim načinom razmišljanja učenici se susreću već pri uvođenju prirodnih brojeva, ali se induktivni dokazi provode tek u srednjoj školi, kada se u četvrtom razredu srednje škole uvodi princip matematičke indukcije. Matematička indukcija se koristi u gotovo svim granama matematike. Matematičkom indukcijom ne računamo vrijednost, već dokazujemo istinitost ili neistinitost tvrdnje ovisno o prirodnom broju. Neki od primjera zadataka koji se dokazuju principom matematičke indukcije u školi su:

Zadatak: Dokažite da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.

Zadatak: Dokažite metodom matematičke indukcije da je izraz $n^3 + 11n, n \in \mathbb{N}$, djeljiv sa 6.

Cijele brojeve učenici pak, prije samog uvođenja u školi u šestom razredu, koriste u realnom svijetu prilikom određivanja temperature zraka, dubine jame i slično. Sam pojam skupa cijelih brojeva te definiciju istog i uvođenja pojma negativnih cijelih brojeva učenici susreću tek tada. Jako dobar motivacijski primjer kod uvođenja cijelih brojeva je očitavanje temperature na termometru i određivanje koji dan u tjednu je bio najhladniji. Isto tako, model koji je jako prikladan za učenike i što bolju vizualizuaciju od kojih brojeva se skup cijelih brojeva sastoji su žetoni. Primjer s plavim i crvenim žetonima, pri čemu plavi predstavljaju negativne, a crveni pozitivne cijele brojeve, najjednostavnije prikazuju učenicima što se događa prilikom zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva. Navest ćemo jedan primjer:

Zadatak: Voda je zagrijana na 20 Celzijevih stupnjeva. Ako u vodu dodamo 5 plavih žetona, kolika će biti temperatura vode? Kolika će biti temperatura vode ako dodamo 5 plavih i 5 crvenih žetona? (Uputa: dodavanjem žetona smanjujemo ili povećavamo temperaturu, ako dodajemo plave žetone temperatura se smanjuje za 1°C, a ako dodajemo crvene žetone temeperatura se povećava za 1°C.)

Možemo uočiti da postoje razni modeli pomoću kojih možemo uvesti zadane skupove brojeva u nastavi matematike, a pri kojima će učenicima biti vizualno prikazano što zapravo taj skup brojeva predstavlja. Kroz provedeno istraživanje ćemo uočiti da učenicima rješavanje zadataka uvelike olakšava vizualni prikaz.

2.3 Uvođenje dijeljenja razlomaka u 6.razredu

Učenici u osnovnoj školi se prvi put susreću s pojmom razlomka u petom razredu. Pojam "racionalni brojevi" stran im je sve do šestog razreda kada uče proširivanje i skraćivanje razlomaka te operacije s razlomcima, nakon što im je uveden skup racionalnih brojeva koji nastaje kao proširenje skupa cijelih brojeva. Od trenutka pojave pojma razlomka pa tokom daljnjeg učenja matematike u višim razredima primjetan je problem pri svladavanju pojma razlomaka i operacija s razlomcima. Ukoliko se problematika svladavanja pojma razlomaka i operacija s razlomcima ne riješi na samom početku, taj problem se očituje u daljnjem napredovanju učenja matematike. Upravo je to jedan od razloga zašto je izdvojena ta tema, odnosno skup racionalnih brojeva, točnije operacija dijeljenja razlomaka, u ovom diplomskom radu.
Učenici u 6. razredu osnovne škole imaju dvije nastavne cjeline u kojima se bave razlomcima. U nastavnoj cjelini "Razlomci" učenici obrađuju četiri nastavne jedinice: "Proširivanje i skraćivanje razlomaka", "Zapisi pozitivnih racionalnih brojeva", "Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik" i "Uspoređivanje razlomaka", dok se u nastavnoj cjelini "Računanje s razlomcima" obrađuju operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s razlomcima. Operaciju dijeljenja razlomaka učenici obrađuju kao zadnju nastavnu jedinicu u toj nastavnoj cjelini. Poteškoće pri svladavanju operacija s razlomcima prvo se očituju kod zbrajanja razlomaka, a zatim se najveći problem očituje kod dijeljenja razlomaka. "Koje su to miskoncepcije kod učenika koje se pojavljuju kod dijeljenja razlomaka?", "Na koji način učenici razmišljaju i vizualiziraju matematički problem?", "Kako povezuju već naučeno znanje o razlomcima pri svladavanju novog gradiva?", neka su od pitanja koje ćemo proučiti u nastavku kroz malo istraživanje o miskoncepcijama učenika pri dijeljenju razlomaka.

2.3.1 Istraživanje o miskoncepcijama učenika pri dijeljenju razlomaka

U nastavku će biti predstavljena aktivnost za uvođenje dijeljenja razlomaka koja je provedena u jednom 6.razredu Osnovne škole Savski Gaj u Zagrebu u čijoj je provedbi sudjelovalo 18 učenika. Istraživanje je osmišljeno u svrhu zapažanja i uočavanja glavnih miskoncepcija koje se pojavljuju kod učenika pri dijeljenju razlomaka, a uz to i miskoncepcije vezane za proširivanje/skraćivanje razlomaka koje primjenjuju prilikom operacije dijeljenja. Miskoncepcije koje će se proučavati kod sljedeće provedene aktivnosti za uvođenje dijeljenja razlomaka su:

- pri dijeljenju razlomka prirodnim brojem, učenici dijele na način da nazivnik razlomka dijele tim prirodnim brojem;
- pri dijeljenju razlomka s razlomkom, učenici zamijene mjesta djelitelja i djeljenika, odnosno ne mogu razlučiti koji razlomak ima ulogu djelitelja, a koji djeljenika;

- učenici ne primjećuju da proširivanjem/skraćivanjem razlomaka dobivaju ekvivalentan razlomak;
- učenici pri skraćivanju razlomaka misle da se vrijednost razlomka skraćivanjem smanjuje;
- učenici dolaze do krivog zaključka pri dijeljenju s $\frac{1}{2}$, misle da je podijeliti razlomak s $\frac{1}{2}$ isto što i dijeliti s 2.

Nakon postavljenih hipoteza o miskoncepcijama koje se očekuju kod učenika, provedena je aktivnost te ćemo u nastavku opisati aktivnost i njezin tijek. Nakon opisa aktivnosti, analizirat ćemo učenička rješenja te iznijeti zapažanja o pojavi navedenih miskoncepcija.

2.3.2 Aktivnost: *Dijeljenje razlomaka*

Aktivnost je namijenjena za nastavnu jedinicu "Dijeljenje razlomaka" te se provodi kod uvođenja operacije dijeljenja razlomaka.

- CILJ AKTIVNOSTI: Učenici 6.razreda osnovne škole otkrivaju kako se dijeli razlomak prirodnim brojem i razlomkom.
- OBLIK RADA: Metoda dijaloga i individualni rad
- POTREBAN MATERIJAL: Nastavni listići i pribor za pisanje
- TIJEK AKTIVNOSTI: Nastavnik/ca na početku sata podijeli svakom učenik nastavni listić 1. Učenici samostalno rješavaju zadatke na nastavnom listiću te zapisuju svoja razmišljanja i rješenja. Učenici su prethodno napomenuti da, ukoliko nešto pogriješe, ne brišu već napisano, nego ostave na papiru i označe taj dio te nastave pisati dalje, u svrhu uočavanja miskoncepcija koje se pojavljuju pri rješavanju. Nakon što učenici završe prvi nastavni listić, nastavnik/ca dijeli nastavni listić 2 za koji učenici ponovno dobivaju vrijeme za samostalno rješavanje. Nakon što učenici riješe i drugi nastavni listić, nastavnik/ca diskutira s učenicima o njihovom načinu razmišljanja i rješenjima te s učenicima prolazi kroz zadatke te pojašnjava i približava učenicima što to znači podijeliti razlomak razlomkom ili prirodnim brojem te učenici zapisuju svoja zapažanja i primjere nastavnika/ce u svoje bilježnice.

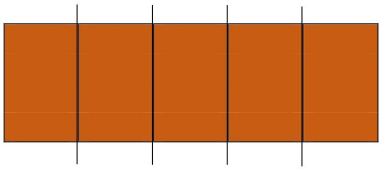
Aktivnost je osmišljenja za jedan školski sat, nakon kojeg bi se zatim formalno definiralo dijeljenje razlomaka te opisali postupci kojima se može provesti. Nakon toga, slijedi sat vježbe i rješavanja zadataka te primjena usvojenog znanja. U nastavku se nalazi primjer nastavnih listića koji su korišteni za provedbu ove aktivnosti te primjer riješenih nastavnih listića.

Dijeljenje razlomaka – Listić 1

Zadatak 1.

a) Napiši 2 ekvivalentna (jednaka) razlomka razlomku $\frac{5}{2}$.

b) Ivan je kupio čokoladu nakon škole i pojeo $\frac{2}{5}$ čokolade. Luka mu se pridružio te su ostatak čokolade podijelili na dva jednaka dijela i pojeli. Koliko je čokolade pojeo Ivan?



Zadatak 2.

a) Na dječjem rođendanu je bilo $\frac{7}{2}$ pizze. Svako dijete je dobilo $\frac{1}{4}$ pizze. Koliko je djece bilo na rođendanu?

b) Koliko je djece bilo na rođendanu ako je svako dijete dobilo $\frac{1}{2}$ pizze?

c) Što znači podijeliti s $\frac{1}{2}$? Zašto je rezultat dijeljenja s $\frac{1}{2}$ isto kao i množenje s 2?

Slika 2.1: Aktivnost: *Dijeljenje razlomaka* - Nastavni listić 1

Dijeljenje razlomaka – Listić 2

Zadatak 1.

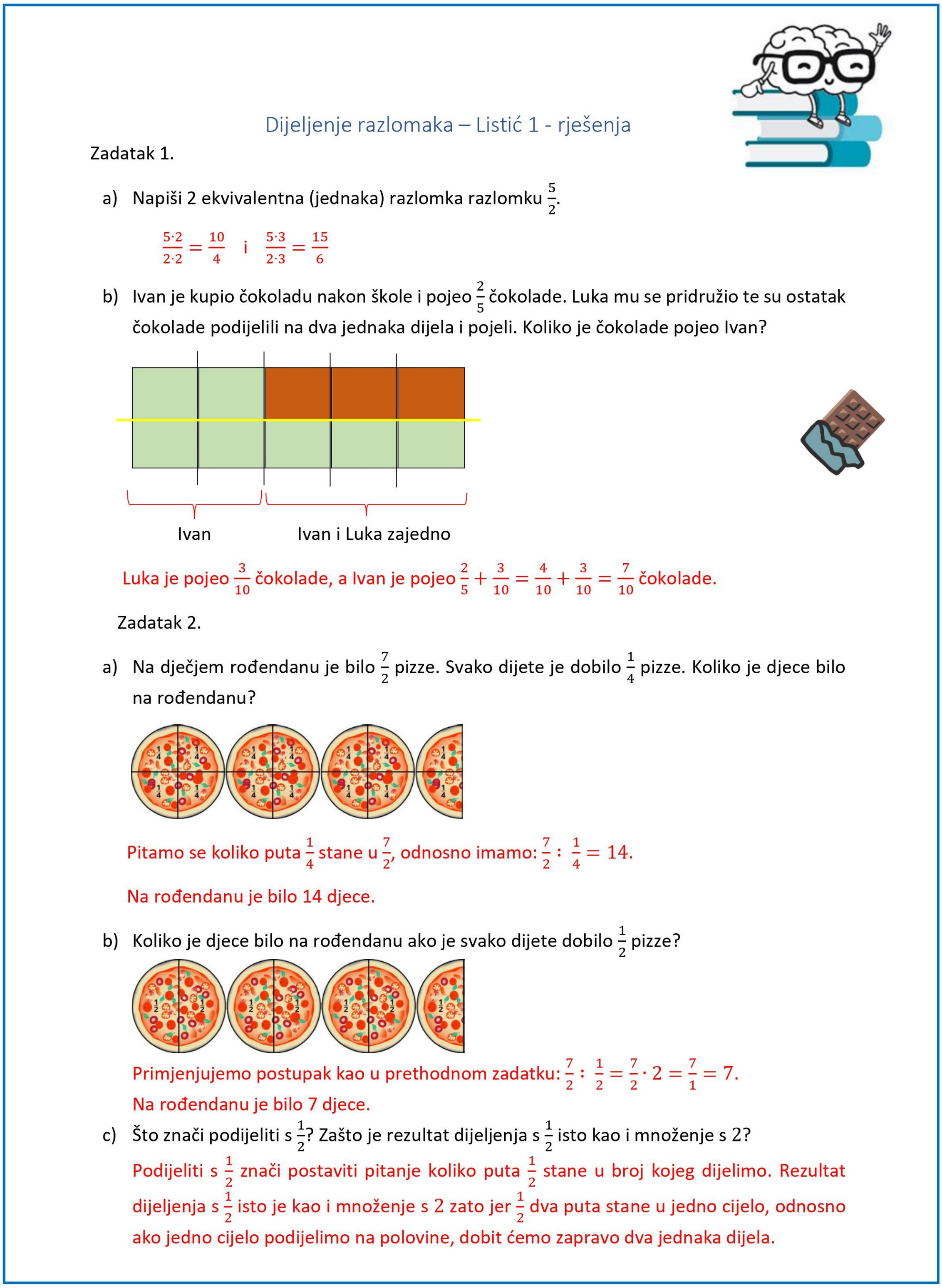
a) Zapiši dijeljenje brojeva $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$ i brojeva $\frac{5}{3}$ i $\frac{1}{6}$ pomoću znaka : i kao razlomak.

b) Podijeli razlomke $\frac{5}{4}$ i $\frac{3}{7}$ tako da razlomke prvo proširiš do razlomaka s jednakim nazivnikom, a zatim dobivene razlomke podijeliš.

c) Kako bi izračunao/la $\frac{5}{4} : \frac{3}{7}$ bez proširivanja razlomaka?

d) Zapiši različita pravila (opiši postupke) za dijeljenje razlomaka. Koji postupak je tebi najdraži?

Slika 2.2: Aktivnost: *Dijeljenje razlomaka* - Nastavni listić 2



Dijeljenje razlomaka – Listić 1 - rješenja

Zadatak 1.

a) Napiši 2 ekvivalentna (jednaka) razlomka razlomku $\frac{5}{2}$.

$\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4}$ i $\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{15}{6}$

b) Ivan je kupio čokoladu nakon škole i pojeo $\frac{2}{5}$ čokolade. Luka mu se pridružio te su ostatak čokolade podijelili na dva jednaka dijela i pojeli. Koliko je čokolade pojeo Ivan?

$\underbrace{\qquad}_{\text{Ivan}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Ivan i Luka zajedno}}$

Luka je pojeo $\frac{3}{10}$ čokolade, a Ivan je pojeo $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ čokolade.

Zadatak 2.

a) Na dječjem rođendanu je bilo $\frac{7}{2}$ pizze. Svako dijete je dobilo $\frac{1}{4}$ pizze. Koliko je djece bilo na rođendanu?

Pitamo se koliko puta $\frac{1}{4}$ stane u $\frac{7}{2}$, odnosno imamo: $\frac{7}{2} : \frac{1}{4} = 14$.

Na rođendanu je bilo 14 djece.

b) Koliko je djece bilo na rođendanu ako je svako dijete dobilo $\frac{1}{2}$ pizze?

Primjenjujemo postupak kao u prethodnom zadatku: $\frac{7}{2} : \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \cdot 2 = \frac{7}{1} = 7$.

Na rođendanu je bilo 7 djece.

c) Što znači podijeliti s $\frac{1}{2}$? Zašto je rezultat dijeljenja s $\frac{1}{2}$ isto kao i množenje s 2?

Podijeliti s $\frac{1}{2}$ znači postaviti pitanje koliko puta $\frac{1}{2}$ stane u broj kojeg dijelimo. Rezultat dijeljenja s $\frac{1}{2}$ isto je kao i množenje s 2 zato jer $\frac{1}{2}$ dva puta stane u jedno cijelo, odnosno ako jedno cijelo podijelimo na polovine, dobit ćemo zapravo dva jednaka dijela.

Slika 2.3: Aktivnost: *Dijeljenje razlomaka* - Primjer rješenja nastavnog listića 1

Dijeljenje razlomaka – Listić 2 - rješenja

Zadatak 1.

a) Zapiši dijeljenje brojeva $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$ i brojeva $\frac{5}{3}$ i $\frac{1}{6}$ pomoću znaka : i kao razlomak.

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} \qquad \frac{5}{3} : \frac{1}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{6}}$$

b) Podijeli razlomke $\frac{5}{4}$ i $\frac{3}{7}$ tako da razlomke prvo proširiš do razlomaka s jednakim nazivnikom, a zatim dobivene razlomke podijeliš.

$$V(4,7) = 28 \;\Rightarrow\; \frac{5\cdot 7}{4\cdot 7} = \frac{35}{28} \text{ i } \frac{3\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{12}{28}$$

$$\frac{35}{28} : \frac{12}{28} = \frac{\frac{35}{28}}{\frac{12}{28}} = \frac{35}{\cancel{28}} \cdot \frac{\cancel{28}}{12} = \frac{35}{12}$$

c) Kako bi izračunao/la $\frac{5}{4} : \frac{3}{7}$ bez proširivanja razlomaka?

Količnik $\frac{5}{4} : \frac{3}{7}$ možemo zapisati u obliku dvojnog razlomka: $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{7}}$. Slijedi: $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{7}} = \frac{5\cdot 7}{4\cdot 3} = \frac{35}{12}$.

d) Zapiši različita pravila (opiši postupke) za dijeljenje razlomaka. Koji postupak je tebi najdraži?

1.pravilo: Dijeljenje razlomaka svodimo na množenje s recipročnim brojem

Podijeliti dva razlomka možemo tako da odredimo recipročan broj djelitelja te dijeljenje prelazi u množenje recipročnim brojem. Time se dijeljenje dvaju razlomaka svodi na množenje dvaju razlomaka.

2.pravilo: Dijeljenje razlomaka u obliku dvojnog razlomka

Podijeliti dva razlomka možemo tako da dijeljenje zapišemo u obliku dvojnog razlomka te razlomke u brojniku i nazivniku svedemo na najmanji zajednički nazivnik i nakon proširivanja rezultat dijeljenja je razlomak kojem je brojnik jednak brojniku prvog razlomka, a nazivnik je jednak brojniku drugog razlomka.

3.pravilo: Dijeljenje razlomaka svodimo na unakrsno množenje

Podijeliti dva razlomka možemo tako da dijeljenje svedemo na unakrsno množenje i to na način da brojnik prvog razlomka pomnožimo nazivnikom drugog razlomka, pri čemu dobiveni umnožak pišemo u brojniku razlomka koji je rješenje i pomnožimo brojnik drugog razlomka s nazivnikom prvog, pri čemu dobiveni umnožak pišemo u nazivnik razlomka koji je rješenje.

Slika 2.4: Aktivnost: *Dijeljenje razlomaka* - Primjer rješenja nastavnog listića 2

2.3.3 Rezultati istraživanja i analiza provedene aktivnosti

Prilikom analize učeničkih rješenja nastavnih listića, naglasak je stavljena na promatranje miskoncepcija kod učenike koje se pojavljuju prilikom rješavanja zadataka te usvajanja novog i primjene već naučenog gradiva. Na miskoncepcije koje smo naveli na početku ovog potpoglavlja obratit ćemo pažnju i iznijeti zapažanja nakon što analiziramo svaki zadatak pojedinačno te iznesemo neka razmišljanja od učenika prilikom rješavanja.
Prvo ćemo napraviti analizu prvog nastavnog listića te vidjeti koji su to načini koje su učenici koristili kako bi riješili zadane zadatke te kakav je postotak riješenosti.

<u>1.zadatak</u>: *a) Napiši 2 ekvivalentna (jednaka) razlomka razlomku $\frac{5}{2}$.*

Točan odgovor na podzadatak a) napisalo je 9 učenika od njih 18, što čini 50% učenika koji su sudjelovali u aktivnosti. Učenici su proširili zadani razlomak s nekim od prirodnih brojeva te dobili ekvivalentne razlomke razlomku $\frac{5}{2}$. Ostatak učenika koji nisu uspješno riješili taj zadatak, smatraju da je razlomku $\frac{5}{2}$ ekvivalentan razlomak $\frac{2}{5}$ ili $1\frac{3}{2}$, iz čega možemo zaključiti da oni nisu usvojili pojam mješovitog broja, kao ni činjenicu kada su dva razlomka jednaka.

b) Ivan je kupio čokoladu nakon škole i pojeo $\frac{2}{5}$ čokolade. Luka mu se pridružio te su ostatak čokolade podijelili na dva jednaka dijela i pojeli. Koliko je čokolade pojeo Ivan?

Točan odgovor na podzadatak b) napisalo je samo 4 učenika, što čini 22% učenika koji su rješavali nastavni listić. Ostatak učenika koji nisu uspjeli doći do rješenja, najčešće su uz pomoć slike čokolade, uspjeli vizualno prikazati ono što je u zadatku zadano, međutim nisu znali matematičkim zapisom zapisati ono što im je zadano. Drugi su učenici pak, uspjeli zapisati ono što su iščitali iz zadatka $\frac{3}{5} : 2$, ali nisu znali kako to izračunati. Uočavamo da je vizualni prikaz određenom broju učenika uvelike pomagao pri razmišljanju o načinu rješavanja zadatka, ali nisu u potpunosti uspjeli primijeniti već stečeno znanje.

<u>2.zadatak</u>: *a) Na dječjem rođendanu je bilo $\frac{7}{2}$ pizze. Svako dijete je dobilo $\frac{1}{4}$ pizze. Koliko je djece bilo na rođendanu?*

Na ovo pitanje točno su odgovorila samo 3 učenika, dok ih je još 8 bilo na tragu ka rješenju, ali nisu dobro proveli račun. Nekolicina učenika vodila se ponovno vizualnim prikazom te su crtali pizze, primijetili da imaju 3 cijele pizze i još pola pizze. Potom su svaku pizzu podijelili na 4 jednaka dijela i prebrojali koliko takvih dijelova ima u 3 cijele i još pola jedne pizze. Zapravo su se učenici pri tom pristupu zadatku vodili pitanjem: "Koliko puta $\frac{1}{4}$ stane u $\frac{7}{2}$?".Neki su učenici koristili i decimalni zapis broja te su $\frac{7}{2}$ zapisali kao 3.5, a $\frac{1}{4}$ kao 0.25 i zatim podijelili 3.5 s 0.25, ali su naišli na problem pri dijeljenju decimalnih brojeva te je samo jedan učenik na taj način riješio točno ovaj zadatak.

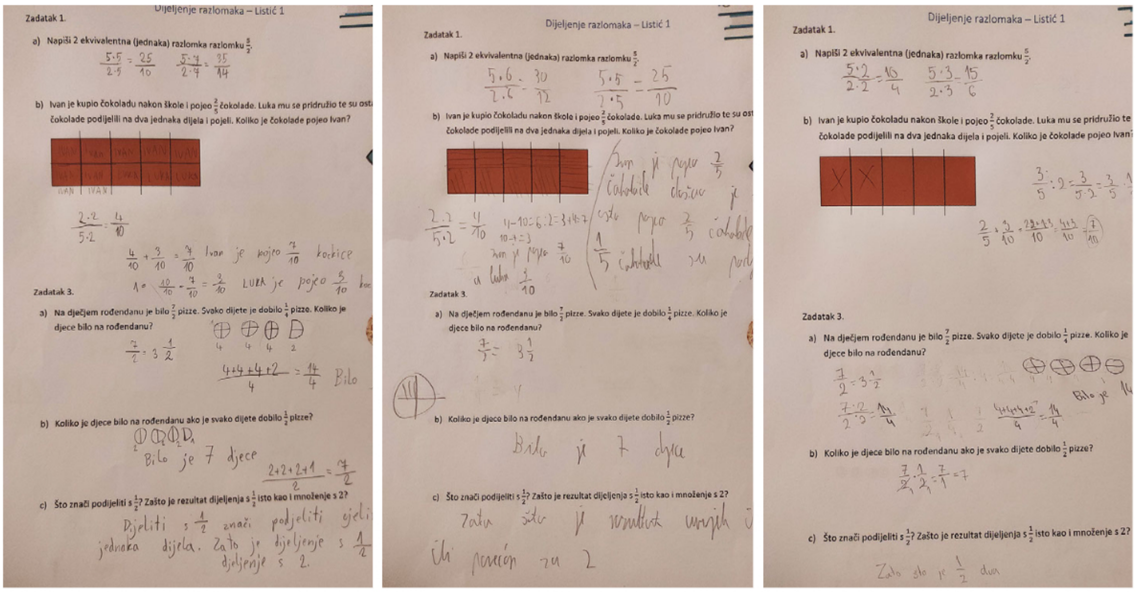
b) Koliko je djece bilo na rođendanu ako je svako dijete dobilo $\frac{1}{2}$ pizze?

Na ovo slično pitanje kao prethodno u podzadatku a), ponudilo je ipak više učenika točan odgovor, njih 6. Neki se ponovno crtali pizze i prebrojavali koliko puta $\frac{1}{2}$ pizze stane u $\frac{7}{2}$ pizze te na taj način došli do rješenja, dok su neki jednostavno obrnutim postupkom od dijeljenja, množenjem 7 sa $\frac{1}{2}$, dobili rezultat $\frac{7}{2}$ te uočili da je u tom slučaju bilo 7 djece na rođendanu. Većina učenika koji nisu točno riješili ovaj zadatak, krenuli su s rješavanjem tako da su pomnožili $\frac{7}{2}$ s $\frac{1}{2}$, što upućuje na to da nisu uočili koja operacija se krije u tekstu zadatka.

c) Što znači podijeliti s $\frac{1}{2}$?Zašto je rezultat dijeljenja s $\frac{1}{2}$ isto kao i množenje s 2?

Na ovo pitanje bilo je dosta različitih odgovora i razmišljanja. Ipak, pri ovom pitanju pojavila se i najučestalija miskoncepcija kod učenika, a to je da učenici misle da je podijeliti s $\frac{1}{2}$ isto što i podijeliti s 2. Štoviše, dosta ponuđenih odgovora od učenika je bilo da je to zato jer je $\frac{1}{2} = 2$, iz čega bismo mogli zaključiti da ti učenici nisu niti usvojili pojam razlomka koji se obrađuje još u 5.razredu. Neki od ostalih ponuđenih odgovora na ovo pitanje su:

- "To znači da se ta jedna polovina nije prepolovila, već je samo ostala $\frac{1}{2} = 2$. Možda ima veze s recipročnim razlomcima brojevima, kao da su množenje i dijeljenje opposite".
- "Jer je $\frac{1}{2} = 2$ recipročan broj broju 2."
- "Zato što je $2 : 1 = 2$, a isto tako i $2 \cdot 1 = 2$."



Slika 2.5: Rješenja nastavnog listića 1 učenika 6.razreda

U nastavku ćemo obraditi analizu drugog nastavnog listića i rješenja koja su učenici napisali te miskoncepcija koje su se pojavile pri zadatcima.

1.zadatak: *a) Zapiši dijeljenje brojeva $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$ i brojeva $\frac{5}{3}$ i $\frac{1}{3}$ pomoću znaka : i kao razlomak.*

Rješenje ovog zadatka točno je napisalo 6 učenika, dok je 9 učenika polovnično riješilo, a samo 3 učenika nisu dobro zapisali dijeljenje zadanih brojeva. Većina učenika dobro je zapisala dijeljenje pomoću znaka :, dok je 9 učenika koji su polovično riješili zadatak, pogrešno zapisala dijeljenje u obliku razlomka. Najviše poteškoća je bilo kako zapisati to kada su već dani brojevi razlomci, pa su učenici dijeljenje zapisali kao razlomak na sljedeći način: $\frac{\frac{3}{4}}{2}$. Tu se ponovno pojavljuje miskoncepcija u kojoj učenici poistovjećuju dijeljenje s $\frac{1}{2}$ kao dijeljenje s 2.

b) Podijeli razlomke $\frac{5}{4}$ i $\frac{3}{7}$ tako da razlomke prvo proširiš do razlomaka s jednakim nazivnikom, a zatim dobivene razlomke podijeliš.

Ovaj podzadatak točno je riješilo 7 učenika, dok preostalih 11 učenika je najviše poteškoća imalo s proširivanjem razlomaka i pronalaskom najmanjeg zajedničkog nazivnika dvaju zadanih razlomaka. Učenici koji su uspješno proširili razlomke, a nisu dobro riješili zadatak, imali su poteškoća pri dijeljenju razlomaka te su u neki poistovjetili dijeljenje s množenjem, dok su pak drugi zamijenili mjesta djelitelja i djeljenika.

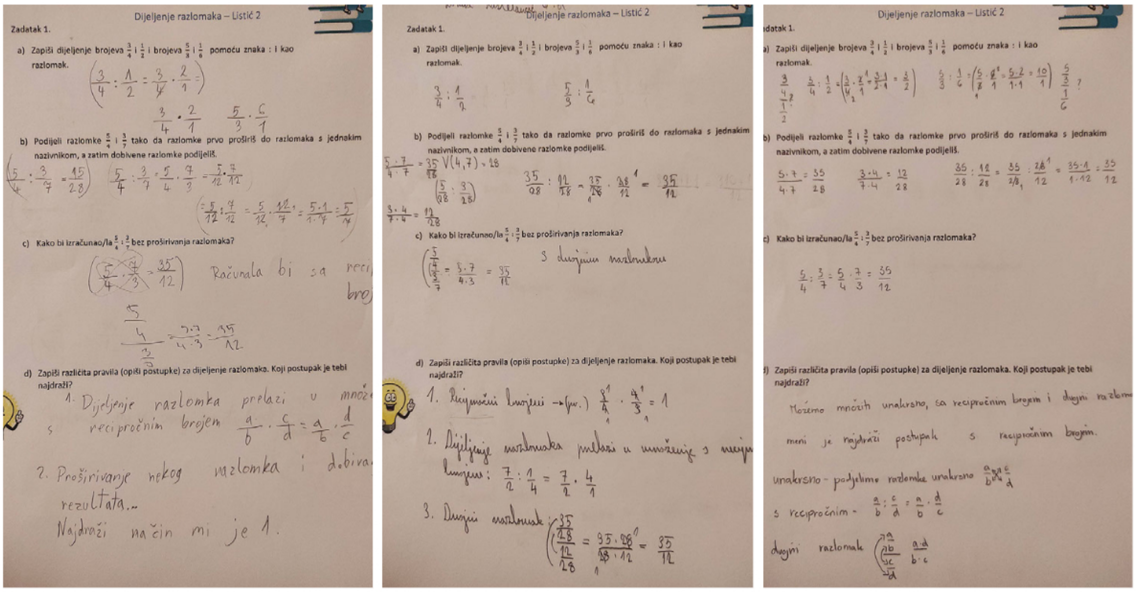
c) Kako bi izračunao/la $\frac{5}{4} : \frac{3}{7}$ bez proširivanja razlomaka?

Na ovaj zadatak točno je odgovorilo 10 učenika, što čini 56% svih učenika koji su sudjelovali u aktivnosti. To je dosta veći postotak rješenosti, u odnosu na prethodne zadatake, što može biti i utjecaj rješavanja prvog nastavnog listića kojim su učenici bili motivirani da pokušaju riješiti samostalno zadane zadatke i iznesu svoja razmišljanja i zaključke onakva kakva jesu. Time je, najčešći odgovor na ovo pitanje bilo "dijeljenje prelazi u operaciju množenja s recipročnim brojem" te "pomoću dvojnog razlomka" te su na taj način učenici većinom i izračunali te došli do točnog rješenja.

d) Zapiši različita pravila (opiši postupke) za dijeljenje razlomaka. Koji postupak je tebi najdraži?

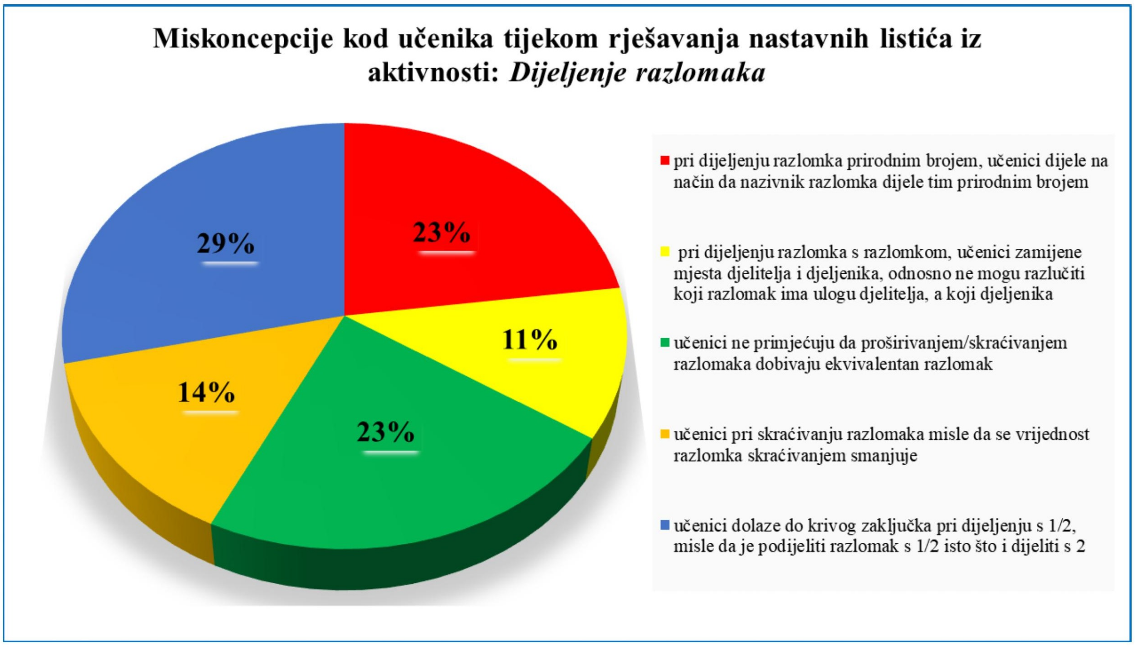
Učenici su se kod ovog pitanja, potaknuti prethodnim zadacima na listiću, oslobodili iznijeti svoje zaključke te opisati ono što su radili svojim riječima te koji im se postupak učinio najdražim. Time se među najdražim postupkom našao "dvojni razlomak", iako bi možda na prvu rekli da će im to biti manje drago. Također, neki od učenika su se potrudili opisati sva tri postupka na koje su naišli tokom aktivnosti te su tako zaključili i da se dijeljenje može svesti na unakrsno množenje.

Na kraju same analize učeničkih rješenja nastavnih listića, možemo reći da se ovakav tip aktivnosti može koristiti pri uvođenju i drugih operacija na pojedinim skupovima brojeva te uočiti koliko učenici imaju čvrsto znanje stečeno otprije te kako i na koji način ga primjenjuju pri svladavanju novog gradiva. Na ovaj način potiče se učenike na samostalno razvijanje matematičkog mišljenja i zaključivanja te motivira za daljnje učenje matematike i uočavanje da matematika nije tako štura i da je sve puno jednostavnije kada matematičke zadatke povezujemo sa situacijama iz realnog svijeta.



Slika 2.6: Rješenja nastavnog listića 2 učenika 6.razreda

Za kraj ovog istraživanja miskoncepcija koje se javljaju kod učenika prilikom uvođenja dijeljenja razlomaka, prikazat ćemo grafički koje su od navedenih miskoncepcija, koje smo na početku potpoglavlja napisali da ćemo proučiti, najzastupljenije bile kod učenika ovog 6.razreda prilikom provedene aktivnosti.



Slika 2.7: Pojavljivanje miskoncepcija kod učenika 6.razreda tijekom aktivnosti

2.3.4 Diskusija i zaključak istraživanja

Rezultati istraživanja ukazali su da ima poteškoća i miskoncepija kod učenika prilikom uvođenja dijeljenja razlomaka. Moguće je da se kod nekih učenika problem pojavio već kod pojma razlomka u 5. razredu, samo što se tome nije pridavala pozornost. Gomilanjem poteškoća pri svladavanju određenog gradiva u matematici, može dovesti samo do nemogućnosti svladavanja novog gradiva u višim razredima, a time i do demotivacije za razumijevanjem i onih jednostavnijih matematičkih pojmova i zadataka.
Tokom istraživanja i otkrivanja miskoncepcija kod učenika prilikom uvođenja novih nastavnih jedinica, uočavamo da bi učenici prilikom aktivnosti za samostalni ili grupni rad, mogli razvijati matematičko razmišljanje i logiku te uočavati kako su nastavne jedinice u matematici međusobno povezane. Na taj način miskoncepcija bi kod učenika bilo znatno manje, jer bi međusobno iznosili svoje zaključke i razmišljanja pri rješavanju zadataka te uočavali pogreške jedni drugima.
Činjenica je da su nastavnici dosta ograničeni vremenom (školski sat u trajanju od 45 minuta), kao i nastavnim planom i programom kojeg se moraju pridržavati. Također, trebamo biti svjesni i s matematičkog stajališta da je gradivo teško te da dosta učenika ima poteškoća pri svladavanju istog. Ponekad je teško u ulozi nastavnika uočiti miskoncepcije kod učenika ili ih predvidjeti. Stoga, u svrhu zajedničkog cilja da obrazovanje ide naprijed i da matematika ne postaje "tabu" tema, trebali bismo poraditi na rješavanju miskoncepcija kod učenika te motiviranju učenika za rad i učenje matematike kroz razne aktivnosti koje se mogu na adekvatan način uvesti u školski sat.
To ćemo teško postići ukoliko idemo isključivo metodom "rasterećenja" nastavnog programa te izbacivanja određenih nastavnih sadržaja koji će se očitovati kroz više obrazovanje kao nedostatak glavnog temelja znanja matematike. Potrebno je učenicima što više je moguće približiti matematičke probleme povezivanjem sa situacijama iz realnog svijeta. Nastavnici imaju tu slobodu da mogu kreirati aktivnosti i provoditi ih na satu s učenicima kako bi im se jezik matematike učinio jednako zanimljiv i jednostavan kao i ostali.

2.4 Uvođenje realnih brojeva

Kod uvođenja realnih brojeva koji se obrađuju u osmom razredu osnovne škole, najčešće se koriste decimalni brojevi. U prethodnom poglavlju smo već ukratko opisali decimalni zapis realnih brojeva te kako je formalno definiran skup realnih brojeva pomoću decimalnog zapisa.
Razlog zbog kojeg nam model decimalnih brojeva nije prvi izbor je zbog kompliciranosti računskih operacija s decimalnim brojevima. Česta pogreška kod učenika je potpisivanje decimalnih brojeva pri zbrajanju i oduzimanju, a potom i množenju i dijeljenju. Većih problema nema prilikom računskih operacija s decimalnim brojevima koji imaju konačan decimalni zapis, međutim problem se pojavljuje kod računskih operacija s decimalnim brojevima koji imaju beskonačan decimalni zapis. Kako ra-

čunati s njima? Gdje bi nam bio kraj tim računskim operacijama? Stoga, najčešći model pri uvođenju realnih brojeva koji se koristi u osnovnoj školi je brojevni pravac. Na taj način učenici u interaktivnim zadacima smještaju racionalne brojeve na brojevni pravac te uočavaju da između svaka dva racionalna broja postoji još brojeva. Time se pojavljuje potreba i za uvođenjem iracionalnih brojeva koje smo definirali u prethodnom poglavlju, a potom na brojevni pravac znaju približno smjestiti i njih te konstruktivno odrediti i neke korijene.

2.5 Uvođenje kompleksnih brojeva

Prema novom nastavnom planu i programu, skup kompleksnih brojeva se uvodi u četvrtom razredu srednje škole. Skup kompleksnih brojeva uvodi se kao proširenje skupa realnih brojeva. Iako se učenicima čine naizgled jako apstraktni, mnogo je primjera i područja u znanosti u kojima se primjenjuju kompleksnih brojevi. Najbliža grana matematike u kojoj su svoju primjenu našli kompleksni brojevi je geometrija.

U prvom poglavlju smo definirali operacije na skupu kompleksnih brojeva koje imaju i svoju geometrijsku interpretaciju. Operacija množenja na skupu kompleksnih brojeva može se geometrijski interpretirati kao kompozicija rotacije i homotetije sa središtem u ishodištu Gaussove ravnine. Kao primjer učenicima najjednostavnije je navesti množenje brojem i. Množenje broja brojem i zapravo geometrijski realiziramo kao rotaciju za 90 stupnjeva u pozitivnom smjeru oko ishodišta Gaussove ravnine, pri čemu se točka (x, y) preslikava u točku $(-y, x)$. Navest ćemo neke od primjera zadataka u kojima se mogu primijeniti kompleksni brojevi:

Zadatak: Izračunajte težište trokuta ABC u terminima koordinata točaka A, B i C.

Zadatak: Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Neka je H ortocentar trokuta ABD te neka su B' i D' točke redom simetrične točki C obzirom na pravce AB i AD. Dokažite da su točke H, B' i D' kolinearne.

Zadatak: Postavimo opisanu kružnice trokuta ABC na jediničnu kružnicu sa središtem u točki S u kompleksnoj ravnini. Izrazite koordinatu ortocentra H trokuta ABC u terminima koordinata točaka A, B, i C.

To su samo neki od primjera zadataka u kojima se primjenom kompleksnih brojeva i geometrijske interpretacije operacija na skupu $\mathbb{C}$ može olakšati rješavanje i razumijevanje različitih problema. Iako zvuče kompleksno, kako im je i naziv, ipak su kompleksni brojevi zauzeli bitnu ulogu u različitim znanstvenim područjima. Mnogi poznati teoremi u geometriji kao što su Ptolomejev teorem, Napoleonov teorem, Simsonov teorem i drugi, mogu se na jednostavniji način dokazati pomoću kompleksnih brojeva.

To su samo neki od primjera u kojima vidimo da svaki dio matematike ima svoj smisao i primjenu koja nam može uvelike pripomoći pri rješavanju zadataka. Tipovi zadataka kao što su navedeni gore najčešće se koriste za dodatnu nastavu iz matematike, ali se mogu koristiti i u redovnoj nastavi kao motivacija učenicima i razvijanje matematičkog razmišljanja te primjenu stečenog znanja. Prilikom obrade gradiva, potrebno je imati jasan i prilagođen pristup većini učenika, stoga nastavnici imaju veliku ulogu da osmisle dobru motivaciju koja će zainteresirati učenike za stjecanjem novog znanja.

Bibliografija

[1] Franka Miriam Brückler: *Pramatematika; matematika u Mezopotamiji i starom Egiptu; matemtika jonskog razdoblja grčke matematike*, dostupno na: `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat01-2021.pdf`.

[2] Franka Miriam Brückler: *Povijest matematike II*, dostupno na: `http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/main2.pdf`.

[3] Mladen Vuković: *Teorija skupova, predavanja*,web izdanje, PMF - MO, Zagreb, 2015., dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf`.

[4] Gordana Kukić: *Peanovi aksiomi*, dostupno na: `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/KUK01.pdf`.

[5] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb, 2000..

[6] Ivana Balatinac: *Prirodni, cijeli, racionalni i realni brojevi*, dostupno na: `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/BAL18.pdf`.

[7] Šime Ungar: *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku*, dostupno na: `https://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/skupovi/skupovi.pdf`.

[8] Matija Bašić: *Metodika nastave matematike 2: Racionalni brojevi, predavanja*, PMF - MO, Zagreb, 2020..

[9] Matija Bašić: *Metodika nastave matematike 2: Realni brojevi, predavanja*, PMF - MO, Zagreb, 2020..

[10] Matija Bašić: *Metodika nastave matematike 3: Kompleksni brojevi, predavanja*, PMF - MO, Zagreb, 2021..

[11] Ivo Baras, Renata Kožul Blaževski, Julija Mardešić: *O skupovima i ljudima(jedna zaboravljena godišnjica)*, Poučak (2016.), br.65, 36-46.

[12] Milana Vuković, Mladen Vuković: *U potrazi za skupovima*, Poučak (2010.), br.41, 61-69.

[13] Ramesh Kapadia: Set-Theory and Logic and School, Educational Studies in Matematichs, 1976., No.4, 409-413, dostupno na: https://www.jstor.org/stable/3481880.

[14] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole, 2. svezak, PROFIL Klett, 2020..

[15] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole, 2. svezak, PROFIL Klett, 2020..

[16] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole, 1. svezak, PROFIL Klett, 2020..

[17] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, Z. Lobor, M. Milić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole, 1. svezak, PROFIL Klett, 2021..

[18] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, Matematički izazovi 5: prvi dio, udžbenik za peti razred osnovne škole, Alfa, 2019..

[19] Lucija Kuna: *Kompleksni brojevi u nastavi matematikw*, dostupno na: http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/KUN08.pdf.

[20] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4: prvi dio, udžbenik za četvrti gimnazija i strukovnih škola, Element, 2020..

[21] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2: prvi dio, udžbenik za drugi gimnazija i strukovnih škola, Element, 2019..

[22] Orlando Merino: A Short History of Complex Numbers, University of Rhode Island, 2006., dostupno na: https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf.

[23] Zvonimir Šikić: *Što su skupovi u školi*, Matematika 3 (1989.), 19-30.

Sažetak

U ovom radu prikazana je aksiomatska teorija skupova brojeva te način uvođenje skupova brojeva u školi. Skupovi brojeva su opisani pojedinačno te su definirane operacije na njima, kao i svojstva koje te operacije zadovoljavaju. Opisana je i provedena aktivnost za uvođenje dijeljenja razlomaka u 6. razredu osnovne škole u kojoj je naglasak na miskoncepcije koje se javljaju kod učenika prilikom uvođenja dijeljenja razlomaka. Aktivnost je provedena u jednom 6.razredu Osnovne škole Savski gaj u Zagrebu te je provedena analiza rješenja učenika i njihovih miskoncepcija prilikom rješavanja zadanih zadataka.

Summary

This thesis presents the axiomatic theory of sets of numbers and the way of introducing them in school. The sets of numbers are described individually and the operations on them are defined, as well as the properties that these operations satisfy. The activity for the introduction of division of fractions in the 6th grade of primary school is described and introduced, in which the emphasis is on students' misconceptions that occur when introducing division of fractions. The activity was performed in a 6th grade of the Elementary School Savski Gaj in Zagreband we present an analysis of student solutions and their misconceptions when solving the given task.

Životopis

Zovem se Ana Šimunović, rođena sam 2. travnja 1996. godine u Dubrovniku. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Osnovnoj školi "Župa Dubrovačka" Mlini. Srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u Gimnaziji Dubrovnik, opći smjer. Nakon srednjoškolskog obrazovanja 2014. godine, upisala sam preddiplomski studij: Matematika - nastavnički smjer, na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, Matematički odsjek. Nakon preddiplomskog studija, upisala sam diplomski studij Matematika - nastavnički smjer 2018. godine na istom odsjeku. Od rujna 2018. godine radim kao student u Erste nekretninama pri odjelu analitike i istraživanju tržišta nekretnina. Od rujna 2020. godine radim u Osnovnoj školi Savski gaj u Novom Zagrebu kao nastavnica matematike.