Steinerovih 10 teorema o potpunom četverostranu

Šumiga, Ines

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:381369

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-11**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ines Šumiga

STEINEROVIH 10 TEOREMA O POTPUNOM ČETVEROSTRANU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru, prof. dr. sc. Juraju Šiftaru, na pomoći, strpljenju i trudu uloženom da bi ovaj rad bio završen.
Ovaj diplomski rad posvećujem mami, tati, sestri, Luki i Tobiju te svim prijateljima koji su me podržavali tijekom cijelog studija.
Posebno mjesto u posveti ostavljam Aaronu, koji me čuvao i pazio sve probdjele noći.
U najljepšem sjećanju, Hvala.

Sadržaj

Uvod

Mnogi poznati matematičari kroz povijest su objavljivali svoje ideje i rezultate u različitim oblicima, davno prije nego što su ustanovljeni specijalizirani časopisi i matematička literatura u suvremenom smislu. Katkad su svoja postignuća iznosili u pismima drugim matematičarima, bilježili ih posve neformalno i bez dokaza ili ih postavljali kao zadatke, u društvu ili u publikacijama koje nisu uvijek bile izrazito matematičke.

Prvim časopisom posvećenim isključivo matematici (istina, uz nešto fizike), a pritom pretežno geometriji, smatra se francuski journal "Annales de Mathematiques Pures et Appliquées", skraćeno zvani "Journal de Gergonne" po svojem osnivaču, koji je izlazio od 1810.-1831. godine. U tom časopisu, koji je ubrzo postao uzorom matematičke publikacije visokog standarda, objavljivali su svoje radove znameniti autori kao Cauchy, Abel, Poisson i Liouville, zatim cijela elita tadašnje geometrije - Steiner, Poncelet, Chasles, Plücker, Brianchon i drugi. Svoj prvi objavljeni rad i to na temu verižnih razlomaka imao je u Gergonneovom časopisu tada 18-godišnji učenik Evariste Galois.

Tema ovog rada je opsežni teorem o potpunom četverostranu koji je u dvobroju spomenutog časopisa iz 1827.-1828. godine objavio istaknuti švicarski matematičar Jakob Steiner (1796.-1863.) i to u formi zadatka, dakle bez dokaza. "Journal de Gergonne" redovito je objavljivao zadatke (questions proposèes) pa i dostavljena rješenja, što je i danas praksa nekih časopisa. Riječ je zapravo o deset tvrdnji, dostatno složenih da ih se i zasebno nazove teoremima, a većinom su i povezane međusobno.

Čini se da Steiner nikad nije pružio uvid u vlastite dokaze. Kako se Steinera s razlogom smatra najvećim "čistim" geometričarem 19.stoljeća, nema dvojbe da je bio sasvim uvjeren u istinitost svih deset propozicija. Radi potpunosti, valja napomenuti kako je uz teorem o četverostranu dodao još dva zanimljiva zadatka drukčijeg tipa, od kojih je drugi prostorna verzija prvog. Proučavajući ovih 10 teorema, vrijedno je primijetiti kako Steiner postupno gradi kompleksnu i skladnu strukturu točaka, pravaca i kružnica, polazeći od četiri trokuta određena stranicama potpunog četverostrana. Promatraju se opisane, upisane i pripisane kružnice tih trokuta, njihovi ortocentri, simetrale svih kutova, uočavaju se kolinearnosti i koncikličnosti koje dovode do novih konfiguracija te ortogonalnih pramenova kružnica. Posebno je efektno kako se istom točkom o kojoj govori prvi teorem završava deseti teorem, zatvarajući tako jednu sjajnu geometrijsku konstrukciju.

U prvom poglavlju ovog rada iznijet ćemo dio potrebnog predznanja za dokaze Steinerovih rezultata o potpunom četverostranu, dok ćemo se mnogim činjenicama iz euklidske geometrije, koje su obuhvaćene standardnim geometrijskim kolegijima, poslužiti kao poznatima. Ipak, radi potpunijeg izlaganja i lakšeg praćenja dokaza, istaknut ćemo i neke definicije i tvrdnje koje su dio poznatog gradiva, a važne su za ovu temu.

U drugom poglavlju izložit ćemo dokaze, većinom detaljno razrađene, svih 10 Steinerovih tvrdnji koje ćemo promatrati kao svaki teorem zasebno. Pritom kao glavni izvor slijedimo članak [4] autora J. P. Ehrmanna. Mnogi matematičari bavili su se dokazivanjem Steinerovih tvrdnji, na različite načine. Dokazi 1. i 4. teorema mogu se naći i u knjizi [6] D. Palmana, a nove dokaze 8. i 9. teorema objavio je 2020. godine V. Volenec u članku [9].

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati iz geometrije

Glavni predmet promatranja ovog rada je *potpuni četverostran* koji je jedna od najvažnijih geometrijskih figura, posebno u projektivnoj geometriji. Potpuni četverostran određen je s četiri pravca, *stranica* potpunog četverostrana, koji se u parovima sijeku u šest različitih točaka, *vrhovima* potpunog četverostrana. Iz uvjeta o sjecištima pravaca slijedi da sve četiri stranice pripadaju jednoj ravnini, ako se polazi od euklidskog prostora

U terminima projektivne geometrije, *dualni pojam* potpunog četverostrana je *potpuni četverovrh*, figura određena s četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne te su u parovima spojene sa šest različitih pravaca, stranica potpunog četverovrha. Dakle, treba razlikovati ove pojmove od četverokuta u elementarnoj planimetriji, u smislu poligona sa četiri vrha i četiri stranice, određene zadanim redoslijedom vrhova pri čemu su stranice segmenti pravaca. Četverokutu je bliži pojam običnog četverovrha odnosno običnog četverostrana uzimajući u obzir da su stranice pravci, a ne segmenti pravaca, kao što je to slučaj kod četverokuta.Osnovni pojmovi projektivne geometrije su točka i pravac te relacija incidencije; neka točka i pravac su incidentni ili nisu incidentni. Svake dvije točke incidentne su s točno jednim zajedničkim pravcem, njihovom spojnicom, a svaka dva različita pravca incidentna su s jednom zajedničkom točkom te je ona jedina zajednička točka tih pravaca. Dakle, u projektivnoj geometriji nema paralelnih pravaca. Euklidska ravnina može se proširiti do projektivne ravnine, tako da se klase paralelnih pravaca (smjerovi) uzmu za nove točke, koje se često tradicionalno nazivaju „beskonačno daleke točke“.

Kada govorimo o transformacijama u projektivnoj geometriji, one se temelje na centralnom projiciranju te stoga „ne čuvaju“ metrička svojstva, kao što su udaljenosti točaka i mjere kutova, kao ni djelišni omjer niti ortogonalnost. Primjerice, projektivna transformacija općenito ne preslikava polovište dužine u polovište slike dužine, a par okomitih pravaca ne preslikava u par također okomitih pravaca. No, za svaka dva potpuna četverovrha odnosno potpuna četverostrana postoji jedinstvena transformacija koja jedan preslikava u drugi. Nadalje, pomoću potpunog četverovrha odnosno četverostrana definira se harmonička četvorka točaka odnosno pravaca, samo na temelju incidencije, a ta posebna relacija četvorki točaka odnosno pravaca invarijantna je pod djelovanjem projektivnih transformacija. Ovo su ključni razlozi za naročitu važnost potpunog četverovrha i četverostrana.

Kao što je prethodno spomenuto, Steinerovih 10 teorema formulirano je u terminima euklidske planimetrije. Obuhvaćaju pojmove okomitosti, ortocentra trokuta, polovišta dužine, paralelnosti pravaca, kružnice i ortogonalnosti kružnica. Naglasak ipak nije na metričkim svojstvima nego na međusobnom položaju geometrijskih figura. U doba objavljivanja tih tvrdnji (1828.) projektivna geometrija bila je već značajno razvijena u pogledu rezultata, ali nije još bila strogo aksiomatski zasnovana niti je bila sasvim jasno pozicionirana u odnosu na euklidsku geometriju. Ta dostignuća uslijedila su kroz nekoliko daljnjih desetljeća, no geometričari su bez obzira na to uspješno kombinirali različite pristupe i metode, služeći se onima koje su smatrali prikladnima i efikasnima za postavljene probleme.

U nastavku ovog poglavlja istaknuti ćemo neke definicije i tvrdnje koje su dio poznatog gradiva, primjerice o potenciji točke i inverziji s obzirom na kružnicu, ortogonalnosti kružnica i potencijalnoj osi. Također biti će važno i navesti i osnovne činjenice o istosmjernoj sličnosti te o Simson-Wallaceovom pravcu trokuta. U sažetom pregledu potrebnih predznanja obuhvatit ćemo i polaritet te polarnu kružnicu trokuta, zatim pojmove harmoničke četvorke i Desarguesov teorem, karakteristične za projektivnu geometriju, a važne i za ovu temu.

1.1 Obodni kut i konciklične točke

Jedan od najviše korištenih pojmova u geometriji je pojam kuta. Pojmovi kao što su središnji i obodni kut povezuju dva važna koncepta, a to su kut i kružnica. Neka je k kružnica sa središtem S, a A i B različite točke na kružnici. Te točke dijele kružnicu na dva kružna luka. Ako je C točka kružnice k, različita od A i B, takva da je kut (CA, CB) konveksan, označimo s $\hat{AB}$ onaj od dva luka koji se nalazi unutar kuta (CA, CB). Kut (CA, CB) nazivamo tada obodnim kutom nad lukom $\hat{AB}$, a kut (SA, SB) središnjim kutom nad istim lukom. Obodni i središnji kut možemo definirati i nad tetivom kružnice.

Najvažnija svojstva povezana s ovim pojmovima navest ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1.1. *Vrijede sljedeća svojstva:*

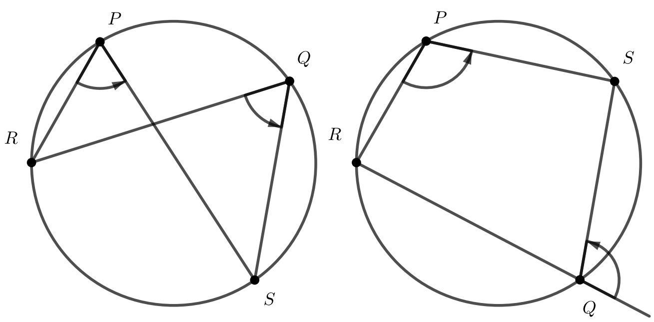
1. *Središnji kut nad nekim lukom dvostruko je veći od svakog obodnog kuta nad tim lukom.*

2. *Svi obodni kutovi nad istim lukom odnosno tetivom su jednaki.*

3. *Posebno, svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut, a pripadni središnji kut je ispruženi kut (mjere* 180 *stupnjeva).*

4. *Različite točke P, Q, R i S pripadaju istoj kružnici (konciklički su) ako i samo ako su orijentirani kutovi (PR, PS) i (QR, QS) jednaki. Pritom se za orijentirani kut (p, q) dvaju pravaca p i q uzima manji od kutova za koje pravac p treba zakrenuti u pozitivnom smjeru da bi se poklopio s pravcem q.*

5. *Simetrala obodnog kuta prolazi polovištem pripadnog luka.*



Slika 1.1: Konciklički točke

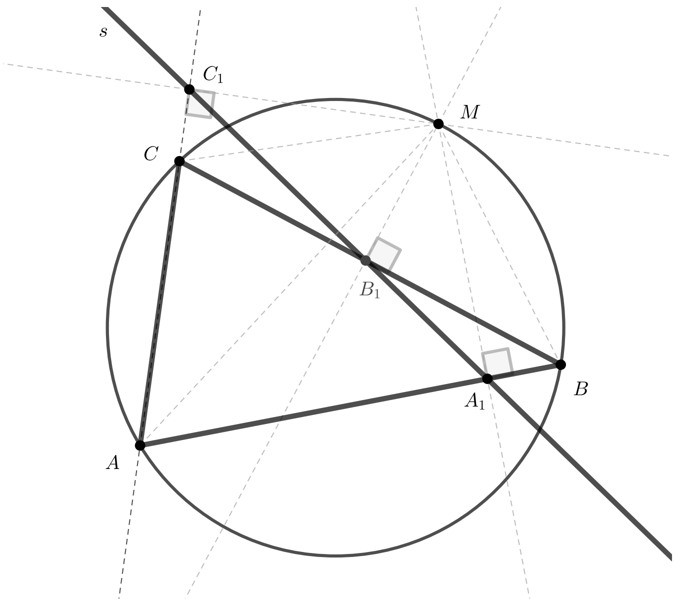
1.2 Simson-Wallaceov pravac

U geometriji trokuta karakteristične točke ortocentar, središta trokutu opisane i upisane kružnice i težište trokuta najpoznatije su točke vezane za trokut. Mnogi značajni pravci usko su povezani s karakterističnim točkama trokuta također i s elementima pridruženim trokutu kao što su upisane i opisane kružnice trokuta. Jedan takav pravac je i Simson-Wallaceov pravac.

Teorem 1.2.1. *Dan je trokut ABC i njemu opisana kružnica k. Iz točke M kružnice k spuštene su okomice na stranice trokuta ABC te su nožišta tih okomica točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne točke. Pravac s kojem pripadaju točke A_1, B_1 i C_1 naziva se **Simson-Wallaceov pravac** točke M s obzirom na trokut ABC.*

Dokaz. Pokažimo da tvrdnja vrijedi u oba smjera.
($\Rightarrow$) Neka je dan trokut ABC i točka M na njemu opisanoj kružnici. Neka su točke A_1, B_1 i C_1 nožišta okomica na stranice trokuta AB, BC i CA. Promotrimo trokute MA_1B i MB_1B. Ti trokuti su pravokutni trokuti s pravim kutom pri vrhovima A_1 i B_1. Obzirom da trokuti dijele hipotenuzu MB, opisane kružnice oba trokuta, s promjerom MB, se podudaraju. Dakle, četverokut MBA_1B_1 je tetivni četverokut. Sada slijedi da su kutovi A_1MB i A_1B_1B sukladni obzirom da su oba obodni kutovi nad tetivom A_1B.

Promotrimo sada trokute MC_1C i MB_1C. Analogno zaključujemo da se opisane kružnice oba trokuta, s promjerom MC, podudaraju pa je četverokut MC_1CB_1 tetivni četverokut. Također su i kutovi CB_1C_1 i CMC_1 sukladni obzirom da su oba obodni kutovi nad tetivom CC_1. Dodatno, uočimo još dva tetivna četverokuta $ABMC$ i AA_1MC_1.



Slika 1.2: Teorem 1.2.1

Primjenjujući svojstvo tetivnog četverokuta da dva nasuprotna kuta zatvaraju ispruženi kut, vrijede sljedeće jednakosti. Iz tetivnog četverokuta $ABMC$ slijedi:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle CAB + \angle BMC \\ &= \angle CAB + \angle BMA_1 + \angle A_1MC \end{aligned}$$

Iz tetitvnog četverokuta AA_1MC_1 slijedi:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle C_1AA_1 + \angle A_1MC_1 \\ &= \angle CAB + \angle A_1MC + \angle CMC_1 \end{aligned}$$

Iz prethodnih jednakosti izravno slijedi $\angle BMA_1 = \angle CMC_1$. Obzirom da $\angle A_1MB = \angle A_1B_1B$ i $\angle CB_1C_1 = \angle CMC_1$, pa slijedi $\angle A_1B_1B = \angle CB_1C_1$. Dakle, točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne točke.

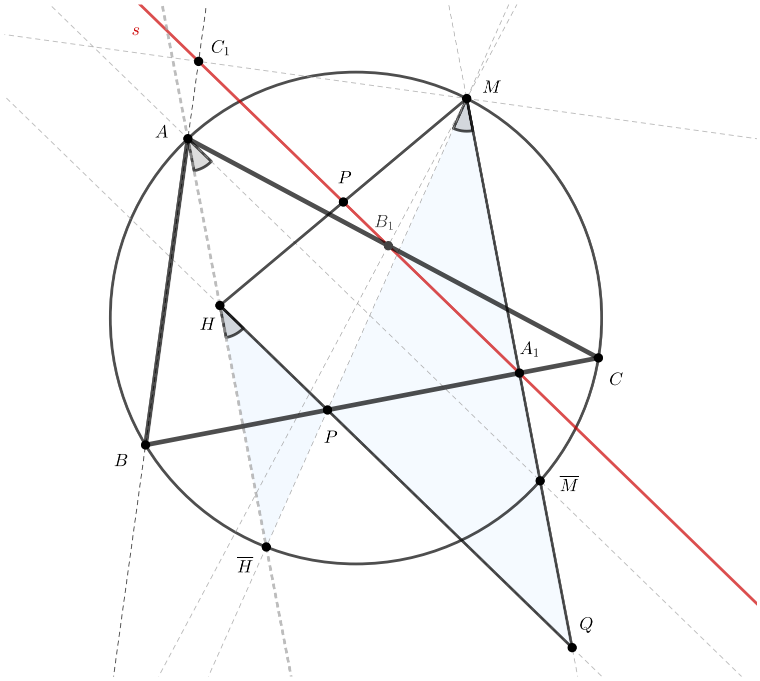
($\Leftarrow$) Neka su nožišta okomica na stranice trokuta ABC iz točke M kolinearna. Promotrimo trokute MB_1B i MBA_1. Trokuti su pravokutni te dijele hipotenuzu, dakle njihove opisane kružnice se podudaraju pa je četverokut MB_1A_1B tetivni četverokut. Slijedi da je kut A_1B_1B sukladan kutu A_1MB obzirom da su oba obodni kutovi na tetivom A_1B. Analogno zaključujemo, promatrajući trokute CMC_1 i MB_1C, da su kutovi C_1MC i C_1B_1C sukladni. Uočimo još da su kutovi C_1B_1C i A_1B_1B vršni kutovi te slijedi $\angle C_1B_1C = \angle A_1B_1B$. Iz same konstrukcije četverokuta AA_1MC_1 zaključujemo da je tetivni te slijedi:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle C_1AA_1 + \angle A_1MC_1 \\ &= \angle CAB + \angle BMA_1 + \angle A_1MC \\ &= \angle CAB + \angle BMC \end{aligned}$$

Dakle, četverokut $ABCM$ je tetivni četverokut pa točka M pripada opisanoj kružnici trokuta ABC. □

Teorem 1.2.2. *Simson-Wallaceov pravac neke točke M opisane kružnice k trokuta ABC prolazi polovištem P dužine $\overline{MH}$ gdje je H ortocentar trokuta ABC.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i neka je dan Simson-Wallaceov pravac točke M u oznaci s. Konstruirajmo točke $\overline{M}$ i $\overline{H}$, točku $\overline{M}$ kao sjecište okomice A_1M na stranicu $\overline{BC}$ i kružnice k te točku $\overline{H}$ kao sjecište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i kružnice k. Obzirom da točka $\overline{H}$ pripada opisanoj kružnici k trokuta ABC slijedi da je točka $\overline{H}$ osnosimetrična točki H obzirom na pravac BC. Neka je točka P sjecište pravaca BC i $\overline{H}M$ te točka Q sjecište pravaca HP i MA_1. Trokuti $H\overline{H}P$ i MQP su slični pa slijedi da $|MA_1| = |A_1Q|$. Uočimo $\angle \overline{H}A\overline{M} = \angle \overline{H}M\overline{M}$ te kako su trokuti $H\overline{H}P$ i MQP slični, slijedi $\angle \overline{H}HQ = \angle \overline{H}M\overline{M}$.



Slika 1.3: Teorem 1.2.2

Dakle, možemo zaključiti da je pravac HQ paralelan s pravcem $A\overline{M}$. Obzirom da je pravac $A\overline{M}$ paralelan s pravcem s, prema svojstvu tranzitivnosti slijedi da je $HQ \parallel s$. Promotrimo sada trokut QHM. Pravac s raspolavlja dužinu $\overline{QM}$ u točki A_1 i paralelan je sa stranicom HQ pa je ujedno i srednjica trokuta QHM. Iz toga slijedi da pravac s raspolavlja i stranicu HM u točki P. □

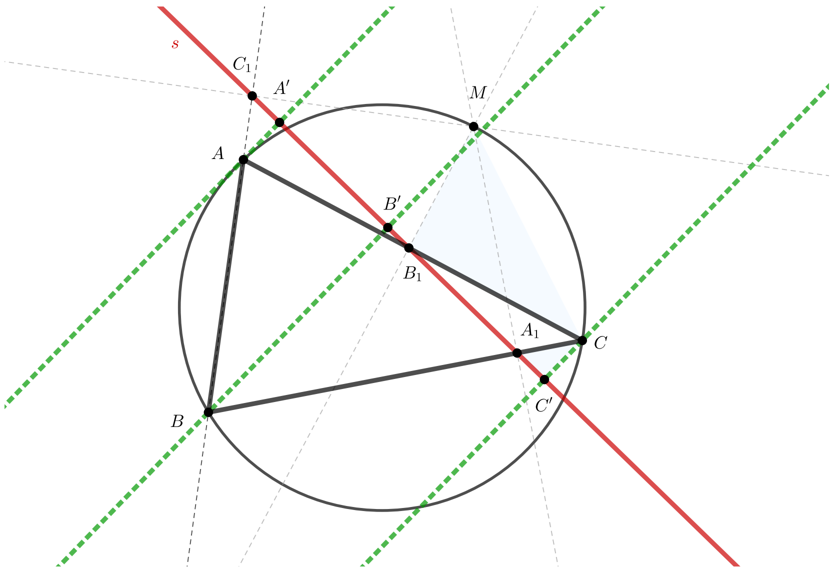
Izogonalne točke i pravci

Definicija 1.2.3. *Neka je dan kut koji zatvaraju dva polupravca p i q. Za par pravaca (l, l') kažemo da su izogonalni pravci ako zatvaraju sukladne kutove s polupravcima p i q.*

Definicija 1.2.4. *Neka je dan trokut ABC i neka točka P. Izogonalni pravci pravcima AP, BP i CP sijeku se u točki Q. Tada za točku Q kažemo da je izogonalno konjugirana točki P u odnosu na trokut ABC.*

Teorem 1.2.5. *Neka je dan trokut ABC i njemu opisana kružnica k. Neka točka M pripada kružnici k. Točka M je izogonalno konjugirana točka, u odnosu na trokut ABC, beskonačno daleke točke na pravcima određenog smjera koji je okomit na svoj Simson-Wallaceov pravac s.*

Dokaz. Neka je dan Simson-Wallaceov pravac s točke M s obzirom na trokut ABC. Označimo nožišta okomica iz točke M na stranice BC, AC i AB redom s A_1, B_1 i C_1. Neka je C' nožište okomice iz vrha C na pravac s. Promotrimo četverokut MB_2A_1C. Obzirom da je B_2 nožište visine iz točke M na stranicu AC, trokut MB_2C je pravokutan trokut. Dodatno, A_1 je nožište visine na stranicu BC pa je i trokut MA_1C pravokutan trokut. Dakle, četverokutu MB_2A_1C možemo opisati kružnicu promjera MC. Iz toga slijedi da je četverokut MB_2A_1C tetivni četverokut. Iz svojstva tetivnog četverokuta slijedi $\angle(B_1MC) + \angle(B_1A_1C) = 180°$. Uočimo dodatno da su točke B_1, A_1, C' kolinearne pa vrijedi $\angle(B_1A_1C) + \angle(CA_1C') = 180°$. Sada zaključujemo $\angle(B_1MC) = \angle(CA_1C')$. Slijedi da trokuti MB_2C i MA_1C imaju dva sukladna kuta pa prema KKK teoremu o sličnosti, trokut MB_2C je sličan trokutu MA_1C. Dakle, i kutovi MCB_1 i $C'CA_1$ sukladni.



Slika 1.4: Teorem 1.2.5

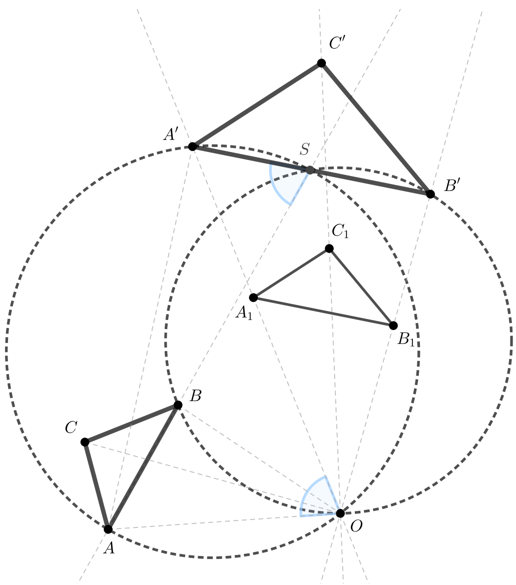
Time smo pokazali da pravci CM i CC' sukladnim kutovima zatvaraju stranice trokuta. Prema definiciji 1.2.3, par pravaca CM i CC' su izogonalni pravci. Ukoliko označimo s A' i B' nožišta okomica iz vrhova A i B na pravac s, analogno možemo pokazati da su izogonalni parovi pravaca (AM, AA') i (BM, BB'). Uočimo da su sva tri izogonalna pravca pravcima AM, BM i CM okomiti na pravac s, pa slijedi da su pravci AA', BB' i CC' paralelni pravci. Dakle, prema definiciji 1.2.4, izogonalno konjugirana točka točki M je beskonačno daleka točka na pravcima određenog smjera koji je okomit na Simson-Wallaceov pravac s. □

1.3 Istosmjerna sličnost

Definicija 1.3.1. *Transformacije ravnine koje preslikavaju skup točaka bijektivno na sebe, dok svaku dužinu AB preslikaju na njoj proporcionalnu dužinu $A'B'$ ($|A'B'| = k|AB|$) s konstantnim koeficijentom proporcionalnosti $k > 0$ nazivamo sličnostima. Sličnost se naziva istosmjernom ili direktnom ako svaki pozitivno orijentirani trokut preslikava u pozitivno orijentirani trokut.*

Dodatno, za svake dvije figure koje su slične i jednako orijentirane kažemo da su **istosmjerno slične**.

Teorem 1.3.2. *Svaku **istosmjernu sličnost** možemo prikazati kao kompoziciju rotacije r i homotetije h tako da je centar rotacije O istovremeno i centar homotetije. Centar O je jedina fiksna točka istosmjerne sličnosti.*

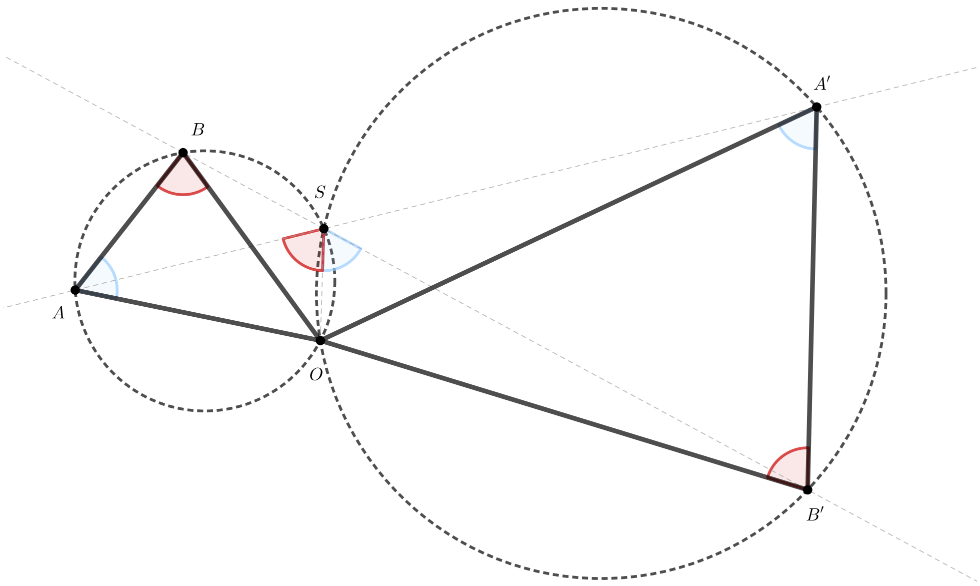


Slika 1.5: Teorem 1.3.2

Dokaz. Istosmjerna sličnost zadana je s dva istosmjerna slična trokuta ABC i $A'B'C'$. Obzirom da je istosmjerna sličnost kompozicija rotacije i homotetije, trokut ABC prvo rotiramo oko neke točke O za kut α do pozicije trokuta $A_1B_1C_1$. Kut rotacije je određen na način da stranice trokuta $A_1B_1C_1$ budu paralelne stranicama trokuta $A'B'C'$ obzirom da ti trokuti moraju biti homotetični. Slijedi da je kut rotacije jednak $\angle(ASA')$ za S sjecište pravaca AB i $A'B'$. Dakle, točka A i B se rotiraju za kut α u točke A_1 i B_1 tako da točke A_1 i A' te točke B_1 i B' budu kolinearne s točkom O. Iz toga slijedi $\angle(AOA') = \angle(BOB') = \angle(ASA') = \alpha$. Centar rotacije O mora pripadati kružnici koja je određena točkama A, A', S i kružnici koja je određena točkama B, B', S. Te dvije kružnice će se očito sjeći u dvije točke, S i O. Obzirom da su točke A_1 i A' kolinearne s točkom O kao i točke B_1 i B', točka O je također i centar homotetije.

□

Teorem 1.3.3. *Neka su dani pravci AA' i BB' te neka je točka presjeka ta dva pravca točka S. Kružnice kojima pripadaju točke A, B, S te A', B', S sijeku se u točki O, $O \neq S$. Iz toga slijedi da je točka O centar istosmjerne sličnosti koja preslikava pravac AB u pravac $A'B'$.*



Slika 1.6: Teorem 1.3.3

Dokaz. Obzirom da $O \neq S$, četverokut $A, B, A'B'$ ne može biti paralelogram. Promotrimo sljedeće kutove:

$$\angle(OAB) = \angle(OSB') = \angle(OA'B')$$
$$\angle(ABO) = \angle(ASO) = \angle(A'B'O)$$

Prema KKK teoremu o sličnosti, slijedi $\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$. Sada možemo zaključiti da istosmjerna sličnost s centrom u točki O preslikava pravac AB u pravac $A'B'$. □

1.4 Potencijalna os i pramen kružnica

Neka su dane kružnice k_1 i k_2 sa središtima u S_1 i S_2 radijusa r_1 i r_2. Za dvije kružnice kažemo da su ortogonalne ako i samo ako kut koji zatvaraju tangente tih kružnica u njihovim presječnim točkama je jednak pravom kutu. Dodatno, kružnice k_1 i k_2 sijeku se ortogonalno ukoliko tangente prve kružnice u svakom od sjecišta prolazi središtem druge kružnice i tangente druge kružnice u svakom od sjecišta prolazi središtem prve kružnice.

Sada se možemo vratiti na teorem iz prethodnog odjeljka, teorem 1.3.3. Pogledamo li poseban položaj pravaca tako da su AB i $A'B'$ okomiti onda su kružnice opisane četverokutima A, B, S i O i A', B', S i O ortogonalne. Tada zaključujemo da u toj istosmjernoj sličnosti kut rotacije je $90°$. Stoga su spojnice točke O sa središtima kružnica međusobno okomiti radijusi tih kružnica. Dakle, kružnice su ortogonalne.

Teorem 1.4.1. *Neka je dana kružnica $k(S, r)$, točka A koja ne pripada kružnici k i bilo koji pravac q kroz točku A koji siječe kružnicu k u točkama Q_a i Q_2. Produkt $p = |AQ_1| \cdot |AQ_2|$ ne ovisi o izboru pravca q i nazivamo ga* ***potencijom*** *točke A s obzirom na kružnicu k.*

Definicija 1.4.2. ***Radikalnu os ili potencijalu*** *dviju kružnica $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ definiramo kao geometrijsko mjesto točaka za koje je vrijednost potencijala jednaka s obzirom na kružnice k_1 i k_2.*

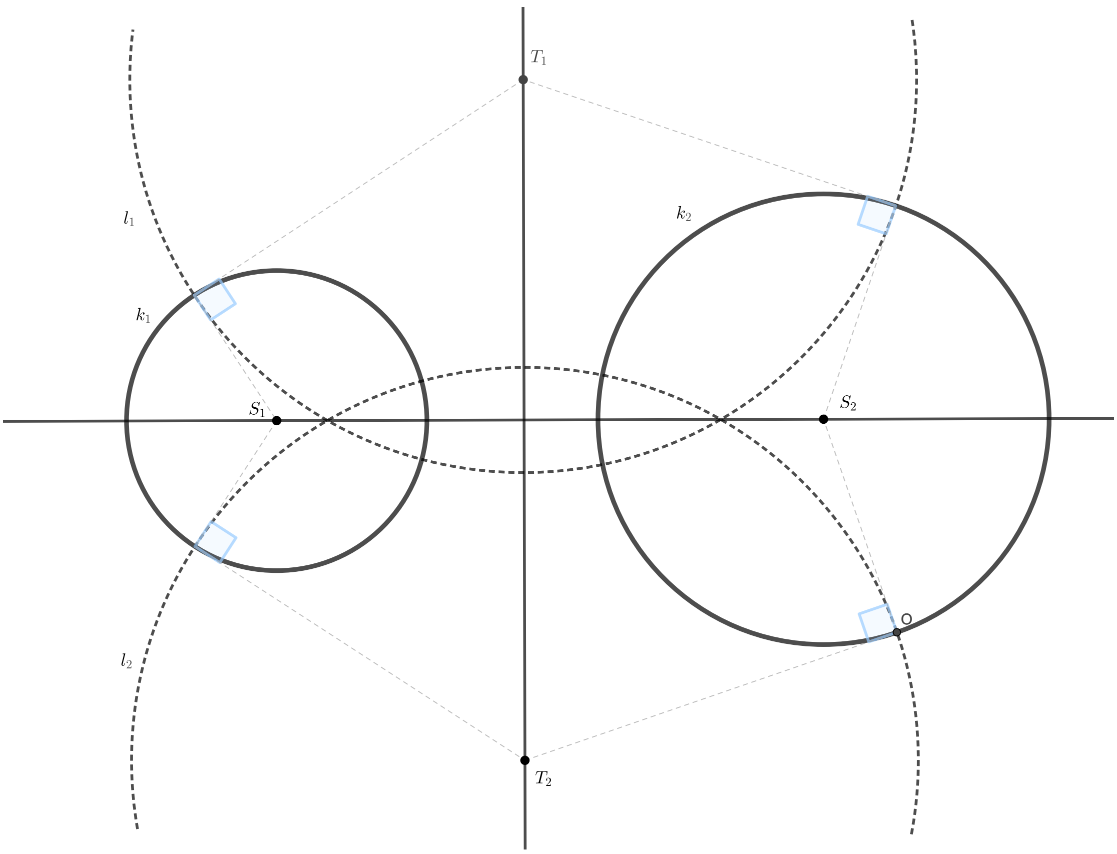
Teorem 1.4.3. *Neka je centrala pravac kojem pripadaju dva središta kružnica $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$. Pravac okomit na centralu je potencijala p tih dviju kružnica k_1 i k_2.*

Ukoliko se dvije kružnice sijeku, potencijala tih kružnica jednaka je spojnici njihovih sjecišta.

Promotrimo sada par kružnica $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ koje se ne sijeku. Nad kružnicama k_1 i k_2 konstruirajmo bilo koje kružnice $l_1(T_1, m_1)$ i $l_2(T_2, m_2)$. Na potencijali kružnica

k_1 i k_2 pripadaju središta kružnica l_1 i l_2. Nadalje, možemo izraziti potencije točaka T_1 i T_2 s obzirom na kružnice k_1 i k_2 kao m_1^2 i m_2^2, odnosno potencije točaka S_1 i S_2 s obzirom na kružnice l_1 i l_2 kao r_1^2 i r_2^2.

Sada zaključujemo da je potencijala kružnica l_1 i l_2 spojnica središta S_1 i S_2, odnosno centrala kružnica k_1 i k_2. Obzirom da potencijala kružnica k_1 i k_2 može sadržavati središta bilo kojih kružnica, označimo ih s l, takvih da su ortogonalne na kružnice k_1 i k_2, postoji skup takvih kružnica koji ćemo označit s $\mathcal{L}$.



Slika 1.7: Pramen kružnica

Definicija 1.4.4. ***Pramenom kružnica*** *nazivamo skup kružnica u kojem za sadržane kružnice postoji čvrsti pravac koji je potencijala svakog para kružnica tog skupa.*

Dodatno, možemo razmatrati i da kružnice k_1 i k_2 ortogonalno sijeku kružnice l_1 i l_2 pa analogno zaključiti da potencijala kružnica l_1 i l_2 može sadržavati središta bilo kojih kružnica, označimo ih s k te da sve takve kružnice k čine pramen kružnica $\mathcal{K}$.

Uzimajući u obzir kako smo birali kružnice k i l, sve kružnice jednog pramena ortogonalne su na sve kružnice drugog pramena. Takva dva pramena nazivamo **ortogonalno spregnutim pramenovima**.

1.5 Polaritet. Polarna kružnica trokuta

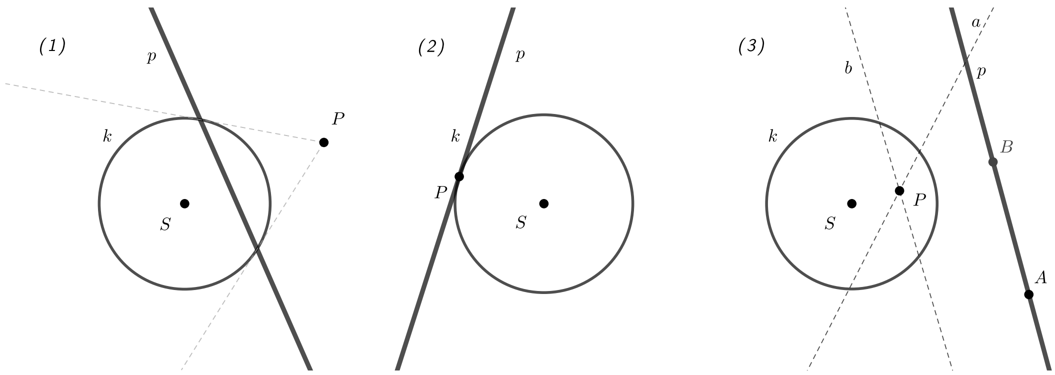
Polaritet ravnine bijektivno je preslikavanje skupa točaka na skup pravaca i skup pravaca na skup točaka, pri čemu su ispunjena određena svojstva. Pridružene točke i pravci čine parove međusobno pridruženih elemenata, dakle, polaritet je involutorno preslikavanje. Naime, ako je točki P pridružen pravac p, onda je pravcu p pridružena točka P. Tada je p **polara** točke P, a P je **pol** pravca p. Bitan je uvjet da polaritet čuva incidenciju točaka i pravaca, to jest da točka P pripada pravcu q ako i samo ako polara p točke P prolazi polom Q pravca q, polaritet je potpuno određen.

Polaritet s obzirom na zadanu kružnicu k ostvaruje se na sljedeći način:

1. Ako se točka P nalazi izvan kružnice, njezina polara je spojnica dirališta tangenti iz točke P na kružnicu k.

2. Polara točke P koja pripada kružnici je tangenta kružnice k u toj točki P.

3. Za točku P unutar kružnice polara se određuje posredno. Kroz točku P povuku se dva pravca, a i b, zatim se odrede njihovi polovi A i B, te je tada spojnica AB tih polova polara točke P.



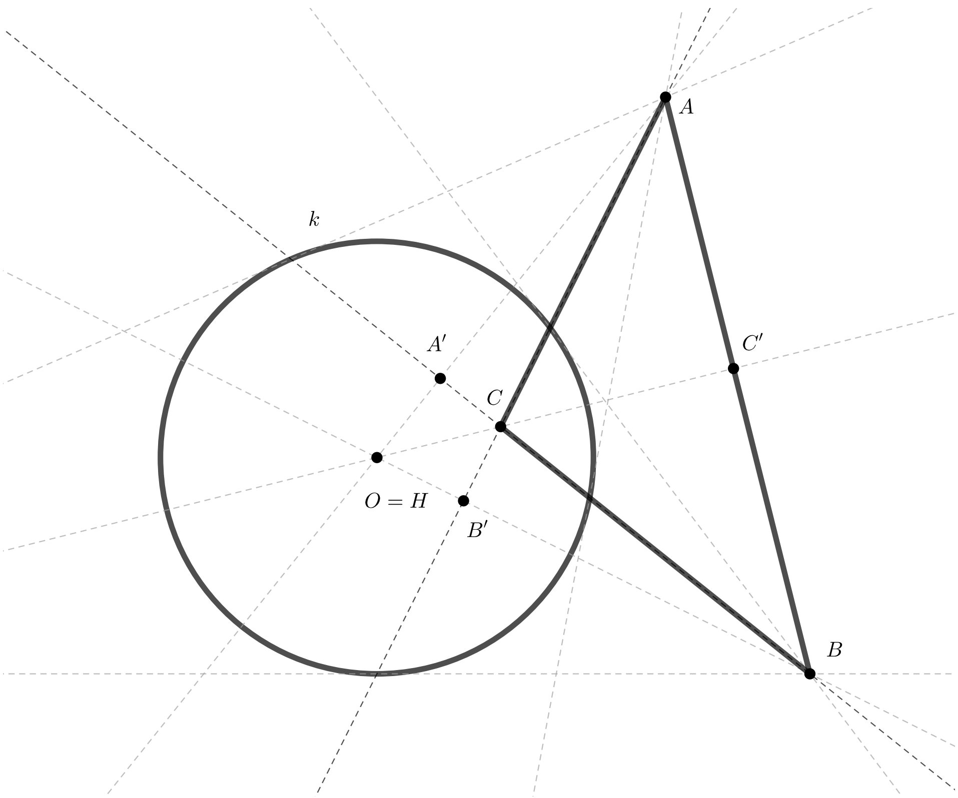
Slika 1.8: Pol i polara

Definicija 1.5.1. *Dvije točke A i B su konjugirane u nekom polaritetu ako jedna točka pripada polari druge točke.*

Analogno se definiraju i konjugirani pravci u polaritetu.

Definicija 1.5.2. *Ako je polara svakog vrha trokuta u zadanom polaritetu njemu nasuprotna stranica, tada se taj trokut naziva* ***autopolarni trokut****.*

Lako pronalazimo trokut koji je autopolaran s obzirom na zadanu kružnicu. Za dva vrha uzmu se konjugirane točke A i B, a treći vrh C tada je sjecište polara a i b. No, obrnuto, ako nije unaprijed zadan polaritet tj. kružnica kojom je polaritet zadan, samo za neke trokute moguće je pronaći kružnicu k takvu da trokut bude autopolaran s obzirom na k. Pokazuje se da takva kružnica postoji ako i samo ako je trokut tupokutan i onda je jedinstvena. U tom slučaju kružnica k se naziva **polarnom kružnicom** zadanog trokuta. Budući da će polarna kružnica biti važna u istraživanju svojstava četverostrana, zadržat ćemo se malo detaljnije na tom pojmu.



Slika 1.9: Polarna kružnica

Pretpostavimo da je trokut ABC autopolaran s obzirom na kružnicu k sa središtem O i radijusom r. Polara svake točke okomita je na spojnicu te točke sa središtem 0. Stoga je pravac AO okomit na stranicu BC i analogno je pravac BO okomit na stranicu CA kao što je i pravac CO okomit na stranicu AB. Rezultat zapisujemo u obliku leme.

Lema 1.5.3. *Neka je kružnica k sa središtem u O i radijusom r polarna kružnica trokuta ABC. Ortocentar trokuta ABC podudara se sa središtem O polarne kružnice k.*

Dodatno, nožišta visina, A', B' i C', ujedno su točke uzajamno pridružene s točkama A, B i C respektivno u inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, r)$. Za r^2 stoga vrijedi

$$r^2 = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$$

čime je radijus jednoznačno određen.

Teorem 1.5.4. *Neka je dan trokut ABC. Neka su točke A', B', C' nožišta visina, točke A_1, B_1, C_1 polovišta stranica trokuta te točke A_2, B_2, C_2 polovišta dužina $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ gdje je H ortocentar trokuta ABC. Svih 9 točaka pripadaju istoj kružnici koju nazivamo kružnica devet točaka.*

Budući da kružnica devet točaka trokuta ABC prolazi kroz nožišta visina A', B', C', a te točke su uzajamno pridružene vrhovima A, B, C u inverziji, slijedi da je kružnica opisana trokutu ABC pridružena njegovoj kružnici devet točaka u inverziji s obzirom na polarnu kružnicu.

Uočimo još sljedeću činjenicu. Neka je ABC tupokutan trokut i k njegova polarna kružnica. Ako se neki od vrhova spoji s bilo kojom točkom na suprotnoj stranici, kružnica s nad tom dužinom kao promjerom ortogonalna je na polarnu kružnicu k.

Primjerice, točka A' koja je pridružena točki A u inverziji s obzirom na kružnicu k pripada kružnici s budući da je AA' okomito na BC.

Teorem 1.5.5. *Svaka kružnica koja prolazi parom inverznih točaka ortogonalna je na kružnicu inverzije.*

Dokaz. Dokaz teorema nalazimo u literaturi [6] □

1.6 Desarguesov teorem

Desarguesov teorem jedan je od najvažnijih teorema u projektivnoj geometriji. Taj teorem ne vrijedi u svakoj projektivnoj ravnini, ali vrijedi u modelu dobivenom proširivanjem euklidske ravnine, a također i u svakom projektivnom prostoru dimenzije barem 3.
Teorem u osnovi proizlazi iz zapažanja jednostavne činjenice pri centralnom projiciranju točaka jedne ravnine u prostoru na drugu ravninu, iz točke koja ne pripada nijednoj od tih ravnina: svaki pravac jedne ravnine i njegova projekcija na drugu ravninu sijeku se u nekoj točki presječnice tih ravnina. Primijenjeno na trokut ABC u jednoj ravnini i njegovu centralnu projekciju $A'B'C'$ u drugoj ravnini, to povlači da se pravci određeni odgovarajućim stranicama trokuta sijeku na jednom pravcu, dakle da su sjecišta pravaca AB i $A'B'$, BC i $B'C'$ te CA i $C'A'$ tri kolinearne točke.

Definirajmo sada pojmove centralne i osne perspektivnosti u ravnini. Pritom svaki podskup točaka i pravaca nazivamo, radi jednostavnosti, figurom.

Definicija 1.6.1. *Dvije ravninske figure su perspektivne s obzirom na centar O ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje elemenata figura takvo da sve spojnice pridruženih točaka prolaze točkom O. Točku O zovemo centrom perspektiviteta a spojnice točaka zrake perspektiviteta.*

Dualno, dvije figure su perspektivne s obzirom na os o ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje elemenata figura takvo da se parovi pridruženih pravaca sijeku u točkama pravca o. Pravac o zovemo os perspektiviteta tih dviju figura.

Iskažimo sada **Desarguesov teorem**.

Teorem 1.6.2. *Neka su dani trokuti ABC i $A'B'C'$ u ravnini. Pravci AA', BB' i CC' prolaze istom točkom O ako i samo ako sjecišta odgovarajućih stranica AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ te BC i $B'C'$ pripadaju jedno te istom pravcu o.*

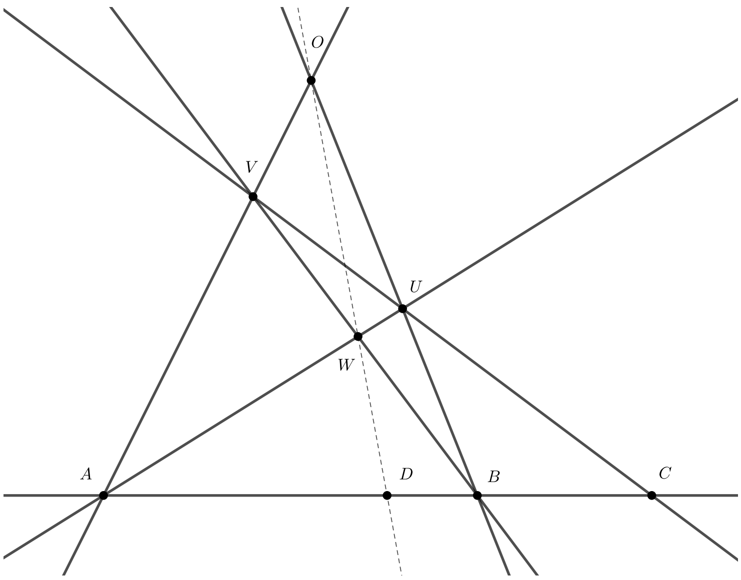
Drukčije rečeno, trokuti ABC i $A'B'C'$ centralno su perspektivni ako i samo ako su osno perspektivni.

U proširenoj euklidskoj ravnini ovaj teorem može se dokazati na različite načine. Važno je uočiti da tvrdnja, kao teorem projektivne geometrije, obuhvaća kao posebne slučajeve neke tvrdnje koje se moraju razmatrati zasebno u euklidskoj ravnini, zbog moguće paralelnosti nekih pravaca. Primjerice, odgovarajuće stranice dva trokuta mogu biti paralelne, kad su trokuti homotetični, a tri kolinearna sjecišta su tada "beskonačno daleke točke". Štoviše, i spojnice odgovarajućih vrhova mogu biti paralelni pravci, a centar perspektiviteta tada je neka beskonačno daleka točka (zajednički smjer tih triju spojnica). Ako odjednom nastupe oba slučaja, da je centar beskonačno daleka točka, a os beskonačno daleki pravac, trokuti su sukladni i mogu se jedan u drugog preslikati translacijom.

Desarguesov teorem ima važne primjene, a jedna od njih bit će spomenuta u idućem odjeljku, u vezi s harmoničkim četvorkama točaka.

1.7 Harmonička četvorka i dvoomjer

U projektivnoj geometriji pomoću potpunog četverovrha definira se **harmonička četvorka**.



Slika 1.10: Harmonička četvorka

Neka je dan četverovrh $ABUV$. Spojnice vrhova sačinjavaju stranice četverovrha: AB, AU, AB, BU, BV i UV. Dvije stranice koje ne prolaze istim vrhom potpunog četverovrha su nasuprotne stranice četverovrha. Takvih parova stranica u potpunom četverovrhu ima tri te su za zadani četverovrh dani s (AB, UV), (AV, BU) i (AU, BV). Sjecišta parova nasuprotnih stranica nazivamo dijagonalnim točkama potpunog četverovrha.

Označimo sjecišta nasuprotnih stranica s C, O i W tako da $C = AB \cap UV$, $O = AV \cap BU$ i $W = AU \cap BV$. Ukoliko dijagonalne točke C, O, W ne pripadaju istom pravcu, spojnica dijagonalnih točaka koje ne pripadaju stranici AB, a to su O i W, sijeku stranicu AB u točki D.

Tada kažemo da je točka D harmonički konjugirana ili pridružena točki C s obzirom na par točaka A i B. Nije teško vidjeti da je i točka C harmonički pridružena točki D s obzirom na par točaka A i B te da vrijedi:

$$H(AB, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(CD, AB)$$

Uz pretpostavku da u projektivnoj ravnini vrijedi Desarguesov teorem, tri kolinearne točke A, B i C jednoznačno određuju točku D tako da vrijedi $H(AB, CD)$. U proširenoj euklidskoj ravnini važan primjer harmoničke četvorke za bilo koje dvije točke A i B dobiva se tako da se za točku C uzme polovište dužine AB a za točku D beskonačno daleka točka pravca AB.

Također u proširenoj euklidskoj ravnini svojstvo četvorke kolinearnih točaka A, B, C i D da čine harmoničku četvorku može se karakterizirati pomoću dvoomjera. Naime, dvoomjer $R(AB, CD)$ je realni broj definiran s $R(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ pritom za točke P i Q, $\overline{PQ}$ ovdje označava orijentiranu dužinu. Dvoomjer je poopćenje djelišnog omjera, a za razliku od djelišnog omjera, dvoomjer je invarijantan pri djelovanju projektivnih transformacija. Pokazuje se da vrijedi $H(AB, CD) \Leftrightarrow R(AB, CD) = -1$.

Primjerice, ako je C polovište dužine $\overline{AB}$, a D je beskonačno daleka točka pravca AB, onda vrijedi $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -1$ jer je $\overline{BC} = -\overline{AC}$ dok je $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = 1$ pa je $R(AB, CD) = -1$.

Važnost harmoničke četvorke dolazi do izražaja i kod polariteta. Uzmimo da je zadan polaritet s obzirom na kružnicu k i da je P točka koja je pripada toj kružnici. Tada ako neka sekanta kružnice k koja prolazi kroz P siječe kružnicu u točkama S_1 i S_2, onda točka Q za koju vrijedi $H(S_1S_2, PQ)$ pripada polari točke P.
Stoga se polara točke P može odrediti tako da se postave dvije sekante točkom P i na njima točke harmonički pridružene točki P s obzirom na sjecišta.

Korisna je sljedeća tvrdnja koja se može dokazati na temelju prethodnih činjenica: Dijagonalni trovrh četverovrha upisanog kružnici je autopolaran.

Poglavlje 2

Steinerovih 10 teorema o potpunom četverostranu

U ovom poglavlju izlažemo Steinerovih 10 teorema o potpunom četverostranu te njihove dokaze.

Neka se četiri pravca sijeku dva po dva u šest različitih točaka. Iz toga slijedi da se ti pravci nalaze u jednoj ravnini.

(1) Četiri pravca, uzimajući u obzir tri po tri, formiraju četiri trokuta čije opisane kružnice prolaze točkom F.

(2) Središta četiriju kružnica, uključujući i točku F, pripadaju istoj kružnici.

(3) Nožišta okomica iz točke F na sva četiri pravca pripadaju pravcu $\mathcal{R}$, te je točka F jedina točka s tim svojstvom.

(4) Ortocentri četiri trokuta pripadaju pravcu $\mathcal{R}'$.

(5) Pravci $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ su paralelni, pravac $\mathcal{R}$ prolazi polovištem dužine čije krajnje točke su F i nožište okomice iz točke F na pravac $\mathcal{R}'$.

(6) Polovišta dijagonala potpunog četverostrana formiranog od četiriju pravaca pripadaju pravcu $\mathcal{R}''$.

(7) Pravac $\mathcal{R}''$ je zajednički okomiti pravac na pravce $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.

(8) Svaki od četiriju trokuta iz (1) ima upisanu kružnicu te tri pripisane kružnice. Središta tih šesnaest kružnica pripadaju, četiri po četiri, osam novih kružnica.

(9) Novih osam kružnica formiraju dva skupa po četiri kružnica tako da svaka kružnica iz prvog skupa je ortogonalna na kružnicu iz drugog skupa. Središta kružnica iz istih skupova pripadaju istom pravcu. Ta dva pravca su okomita.

(10) Konačno, ta dva pravca sijeku se u točki F.

U nastavku poglavlja dokazati ćemo svaki od teorema. Za početak uvedimo oznake koje ćemo koristiti u dokazu.

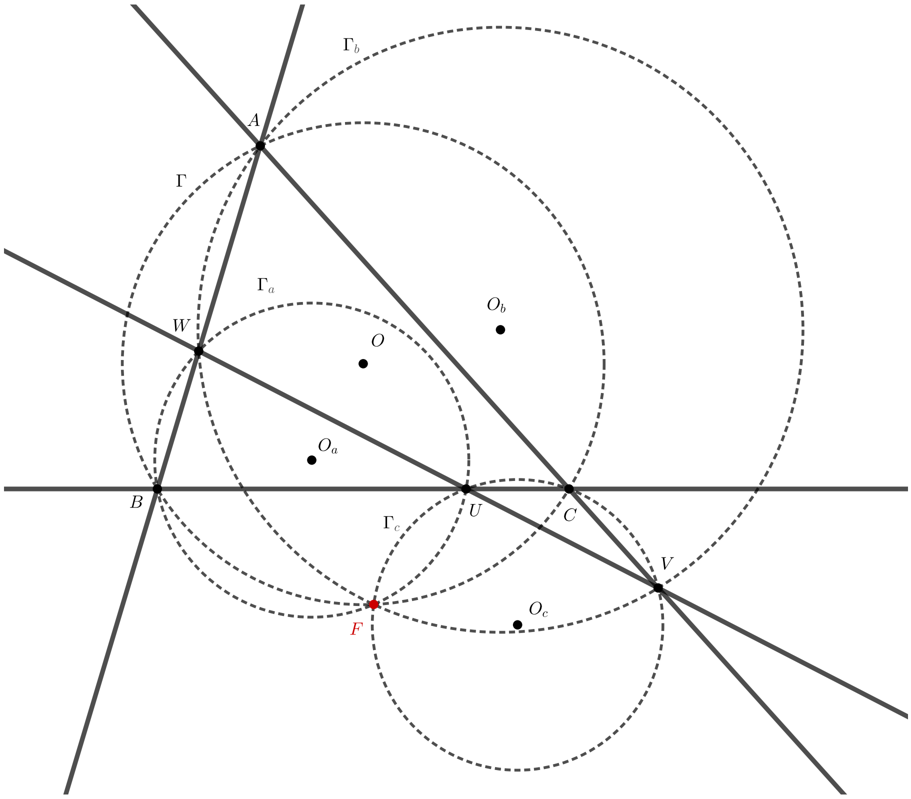
Točke u kojima se četiri pravca sijeku su A, B, C, U, V i W. Dijagonale četverostrana su AU, BV i CW. Četiri trokuta formirana pravcima su ABC, AVW, BWU i CUV.

Elementima pridruživih trokuta četverostrana dodjeljujemo:

- oznake H, H_a, H_b, H_c ortocentarima trokuta;
- oznake $\Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ opisanim kružnicama trokuta;
- oznake O, O_a, O_b, O_c središtima opisanih kružnica.

2.1 Dokaz teorema 1-7

Teorem (1)
Četiri pravca, uzimajući u obzir tri po tri, formiraju četiri trokuta čije opisane kružnice prolaze točkom F.



Slika 2.1: Teorem 1

Dokaz. Prvi teorem ćemo dokazati tako da promotrimo opisane kružnice Γ i Γ_a trokuta ABC i AVW. Opisane kružnice se sijeku u dvije točke. Prva presječna točka je zajednička točka oba trokuta, točka A. Neka druga presječna točka bude točka F. Promotrimo kut (FB, FW). Kut (FB, FW) možemo zapisati kao zbroj druga dva kuta:

$$(FB, FW) = (FB, FA) + (FA, FW)$$

Uočimo da su kutovi (FB, FA) i (FA, FW) obodni kutovi nad tetivama AB i AW pripadnih kružnica. Obzirom da su svi obodni kutovi nad istim tetivama sukladni, početni kut možemo zapisati i kao zbroj sljedeća dva kuta:

$$(FB, FW) = (CB, CA) + (VA, VW)$$

Sa slike vidimo kako je zbroj kutova (CB, CA) i (VA, VW) jednak kutu (UB, UW). Time smo pokazali

$$(FB, FW) = (UB, UW)$$

Prema teoremu 1.1.1, točke F, B, U i W su konciklične točke tj. točka F pripada i opisanoj kružnici Γ_b trokuta BWU.

Analogno možemo pokazati i da točka F pripada opisanoj kružnici Γ_c promatrajući kružnice Γ_a i Γ_c. Kut (FU, FC) možemo zapisati kao:

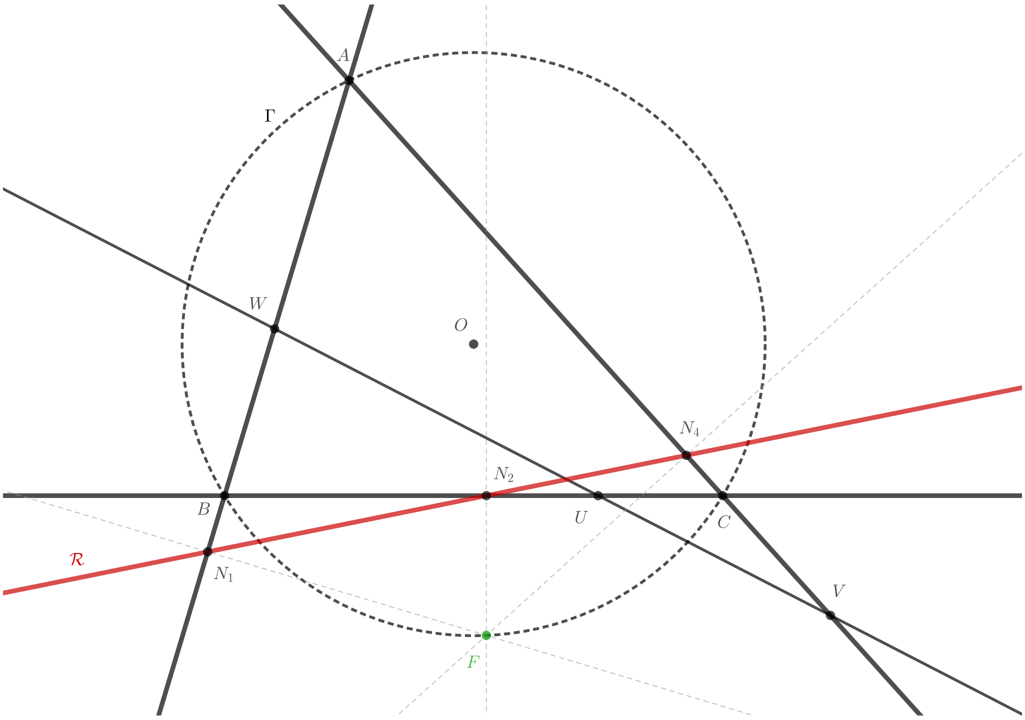
$$\begin{aligned}(FU, FC) &= (FU, FV) + (FV, FC) \\ &= (CU, CV) + (UC, UV) \\ &= (CU, CV) + (UW, UC) \\ &= (VU, VC)\end{aligned}$$

Ponovo zaključujemo da su točke F, U, C i V konciklične tj. da točka F pripada i opisanoj kružnici Γ_c trokuta CUV.

Na taj način dokazali smo da točka F pripada svima četiri opisanim kružnicama trokuta ABC, AVW, BWU i CUV. □

Teorem (3)
Nožišta okomica iz točke F na sva četiri pravca pripadaju pravcu $\mathcal{R}$, te je točka F jedina točka s tim svojstvom.

Dokaz. Iz teorema (1) poznato je da točka F pripada svim četiri opisanim kružnicama $\Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b$ i Γ_c. Promatrajmo sada trokut po trokut, počevši s trokutom ABC. Obzirom da točka F pripada opisanoj kružnici Γ, spuštanjem okomica iz točke F na stranice trokuta ABC dobivamo nožišta okomica koja pripadaju stranicama trokuta. Obzirom da stranice trokuta ABC pripadaju pravcima AB, BC i AC, presječne točke, odnosno nožišta okomica, u oznakama N_1, N_2 i N_3 pripadaju pravcima AB, BC i AC. Prema teoremu 1.2.1, točke N_1, N_2 i N_3 su kolinearne tj. pripadaju istom pravcu. Označimo taj pravac s $\mathcal{R}$.



Slika 2.2: Teorem 3

Promotrimo sada trokut AVW. Stranice trokuta AVW pripadaju pravcima AC, VW i AB. Spuštanjem okomica na stranice trokuta iz točke F, koja pripada opisanoj kružnici Γ_a, presječne točke, odnosno nožišta okomica, leže na pravcima AC, VW i AB. Obzirom da se dva pravca kojima pripadaju stranice trokuta AVW podudaraju s pravcima na kojima pripadaju stranice trokuta ABC, nožišta okomica iz točke F na ta dva pravca se podudaraju. Dakle, nožišta okomica na stranice trokuta AVW označit ćemo s N_3, N_4 i N_1. Ponovo, prema teoremu 1.2.1, točke N_3, N_4 i N_1 su kolinearne. Obzirom da točke N_1 i N_3 već pripadaju pravcu $\mathcal{R}$ te su kolinearne s točkom N_4, slijedi da i točka N_4 pripada pravcu $\mathcal{R}$.

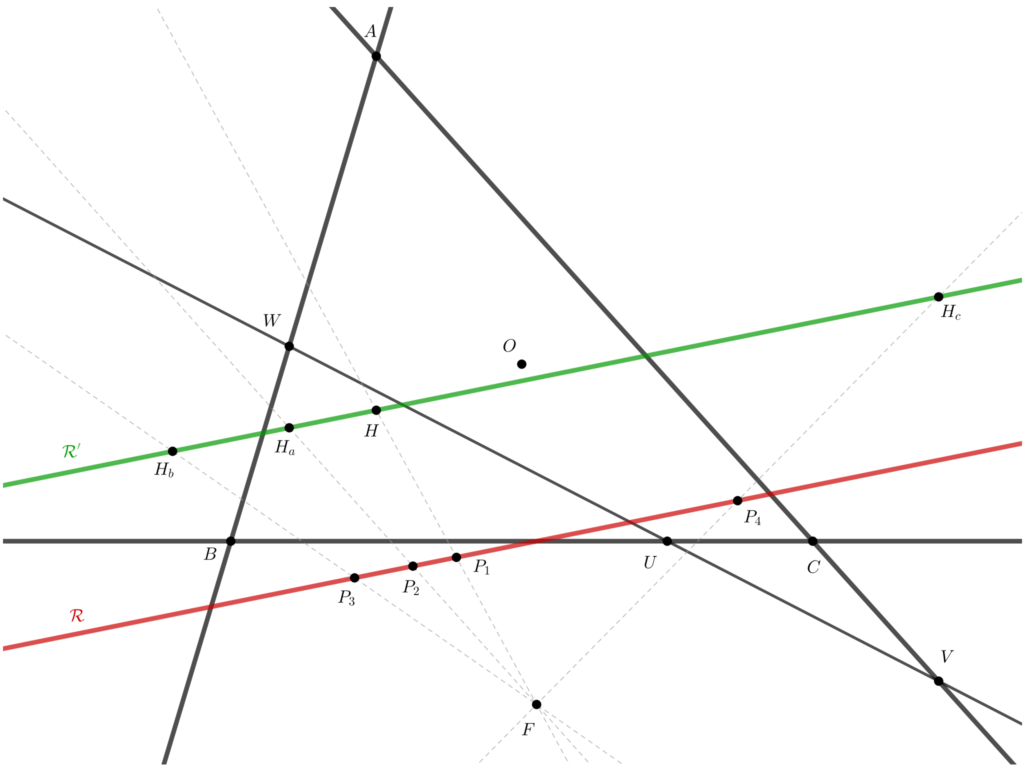
Analogno možemo zaključiti da su presječne točke okomica iz točke F na stranice preostala dva trokuta BWU i CUV jednake nožištima okomica N_1, N_4, N_2 i N_2, N_4, N_3. Dakle, nožišta okomica iz točke F na sva četiri pravca leže na pravcu $\mathcal{R}$.

Pokažimo još da je točka F jedina točka s tim svojstvom.
Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji i točka M takva da su nožišta okomica na sva četiri pravca kolinearna i da pripadaju pravcu $\mathcal{R}$. Ta nožišta okomica, nožišta su okomica povučenih iz točke M na stranice svih četiriju trokuta.

Prema teoremu 1.2.1, ukoliko su nožišta okomica na stranice trokuta iz točke M kolinearna, točka M pripada opisanoj kružnici tog trokuta. Obzirom da sva nožišta okomica na stranice svih četiriju trokuta pripadaju pravcu $\mathcal{R}$, slijedi da točka M pripada opisanim kružnicama svih četiriju trokuta. Dakle, $M = F$.

Time smo dokazali da je točka F jedina točka sa svojstvom da nožišta okomica povučenih iz te točke na sva četiri pravca pripadaju pravcu $\mathcal{R}$. □

Teoremi (4) i (5)
Ortocentri četiri trokuta pripadaju pravcu $\mathcal{R}'$. Pravci $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ su paralelni, pravac $\mathcal{R}$ prolazi polovištem dužine čije krajnje točke su F i nožište okomice iz točke F na pravac $\mathcal{R}'$.



Slika 2.3: Teoremi 4 i 5

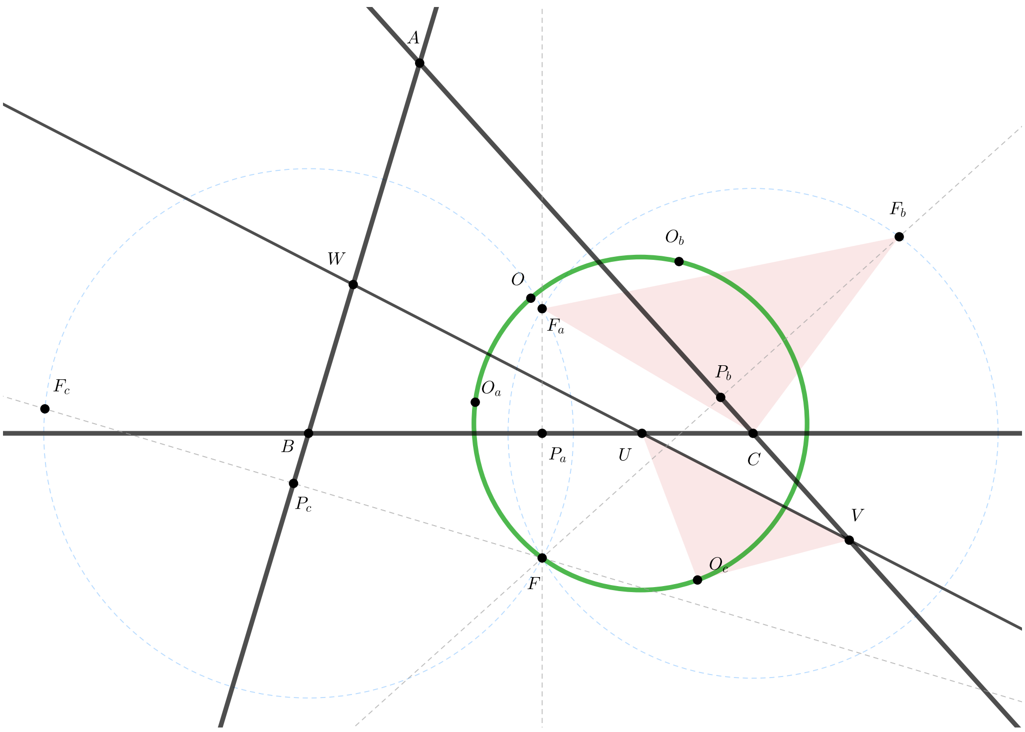
Dokaz. Neka su H, H_a, H_b i H_c redom ortocentri trokuta ABC, AVW, BWU i CUV. Prema teoremu 1.2.2, pravac $\mathcal{R}$ prolazi polovištima dužina $\overline{FH}, \overline{F, H_a}, \overline{F, H_b}$ i $\overline{FH_c}$. Označimo polovišta s P_1, P_2, P_3 i P_4.

Primijetimo da su točke u skupovima $\{F, P_1, H\}$,
$\{F, P_2, H_a\}, \{F, P_3, H_b\}$ i $\{F, P_4, H_c\}$ kolinearne i da vrijedi:

$$|FH| = 2|FP_1| \quad , \quad |FH_a| = 2|FP_2|$$
$$|FH_b| = 2|FP_3| \quad , \quad |FH_c| = 2|FP_4|$$

Zaključujemo da su točke H, H_a, H_b i H_c slike točaka P_1, P_2, P_3 i P_4 preslikavanja **homotetijom** $h(F, 2)$ čije središte je u točki F a koeficijent preslikavanja jednak je 2. Prisjetimo se, homotetija je preslikavanje koje pravac preslikava u njemu paralelan pravac.
Dakle, homotetija preslikava pravac $\mathcal{R}$, pravac kojemu pripadaju polovišta dužina u pravac kojemu pripadaju ortocentri četiriju trokuta. Označimo taj pravac s $\mathcal{R}'$. Konačno, pravac $\mathcal{R}'$ paralelan je pravcu $\mathcal{R}$. Na pravcu $\mathcal{R}'$ leže ortocentri četiriju trokuta. Ovime su dokazani teoremi (4) i (5). □

Teorem (2)
Središta četiriju kružnica, uključujući i točku F, pripadaju istoj kružnici.



Slika 2.4: Teorem 2

Dokaz. Neka su F_a, F_b i F_c redom zrcalne slike točke F obzirom na pravce BC, AC i AB. Uočimo da su točke F_a, F_b i F_c pridružene točkama P_a, P_b i P_c s obzirom na homotetiju $h(F, 2)$. Obzirom na konstrukciju točaka F_a i F_b, točke F_a, F_b i F su konciklične točke kružnice sa središtem u točki C. Iz svojstva homotetije slijedi da su točke F, P_a, P_b i C konciklične točke. Ovdje možemo uočiti da je točka C sjecište para pravaca P_aU, P_bV pa prema teoremu 1.3.3 slijedi da je točka F centar istosmjerne sličnosti koja točke P_a i P_b preslikava u točke U i V.

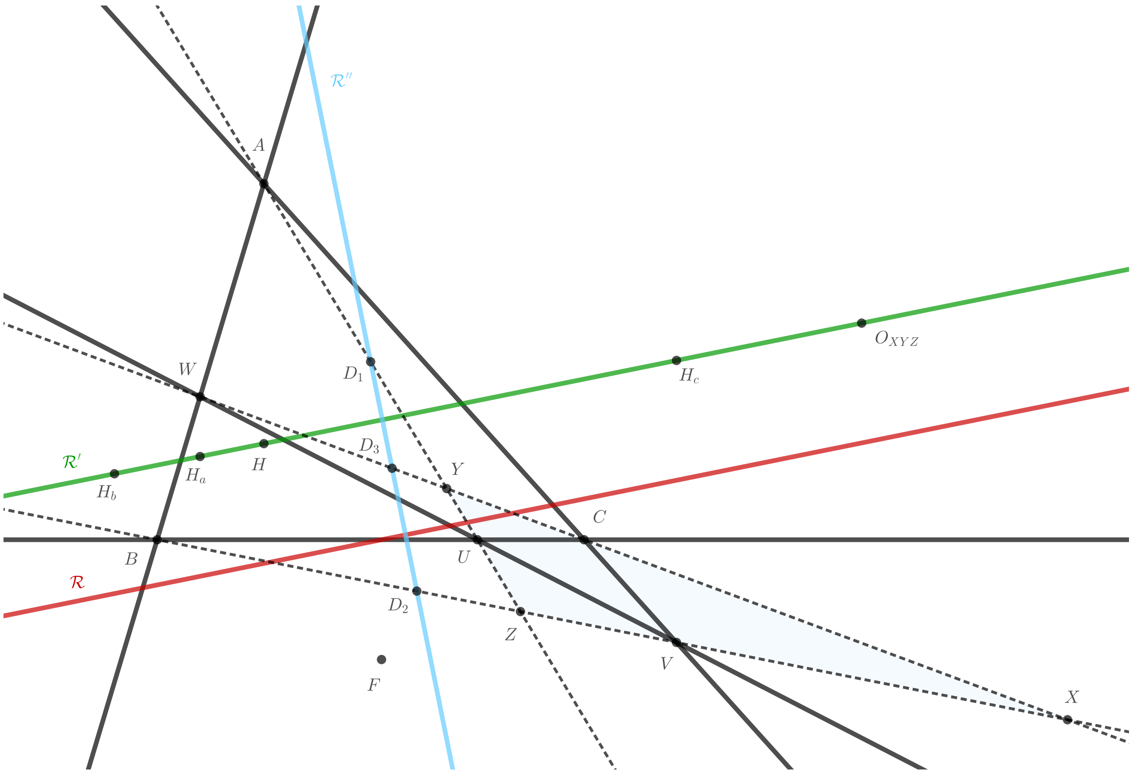
Analogno, obzirom na konstrukciju točaka F_a i F_c, točke F_a, F_c i F su konciklične točke kružnice sa središtem u točki B pa su i F, P_a, P_c, B konciklične točke. Točka B sjecište je pravaca P_aU i P_cW pa ponovo prema teoremu 1.3.3 slijedi da je točka F centar istosmjerne sličnosti koja točke P_a i P_c preslikava u točke U i W.

Dakle, postoji istosmjerna sličnost σ koja točku F_a preslikava u U, F_b u V i F_c u W. Promotrimo sada trokut F_aCF_b. Tom trokutu pridružen je trokut UO_cV obzirom na istosmjerna sličnost σ pa slijedi da se točka C preslikava u točku O_c.

Analogno možemo pokazati da istosmjerna sličnost σ preslikava točke A i B u točke O_a i O_b. Iz teorema (1) slijedi da su točke A, B, C i F konciklične točke a obzirom da postoji istosmjerna sličnost σ koje točke A, B, C preslikava u točke O_a, O_b, O_c s centrom preslikavanja u F, slijedi da su i točke O_a, O_b, O_c i F konciklične točke.

Dodatno, obzirom da istosmjerna sličnost σ preslikava trokut ABC u trokut $O_aO_bO_c$, opisana kružnica trokutu ABC sa središtem u O preslikava se u opisanu kružnicu trokuta $O_aO_bO_c$ tako da točka O sada pripada toj opisanoj kružnici. Dakle, središta četiriju pridruženih trokuta i točka F pripadaju istoj kružnici. □

Teoremi (6) i (7)
Polovišta dijagonala potpunog četverostrana formiranog od četiriju pravaca pripadaju pravcu $\mathcal{R}''$. Pravac $\mathcal{R}''$ je zajednički okomiti pravac na pravce $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.



Slika 2.5: Teoremi 6 i 7

Dokaz. Dijagonale četverostrana dobiti ćemo kao spojnice parova nasuprotnih vrhova četverostrana. Dakle, dijagonale četverostrana su AU, BV i CW. Dijagonalne stranice generiraju dijagonalni trostran potpunog četverostrana. Označimo trostran s XYZ. Trostranu XYZ također možemo opisati kružnicu.

Promotrimo za početak četverovrh $AUBV$. Dijagonalna točka nasuprotnih stranica AU i BV jednaka je točki Z. Preostale dvije dijagonalne točke, koje ne pripadaju stranici AU, su točke C i W koje dobivamo, respektivno, kao presjek stranica AV i BU te AB i UV. Spojnica dijagonalnih točaka, točaka koje ne pripadaju stranici AU, i treće dijagonalne točke siječe stranicu AU u točki X. Prema definiciji harmoničkih četvorki, točke A, U, Y, Z čine harmoničku četvorku i pišemo $H(AU, YZ)$.

Analogno, promatrajući četverovrh $BVCW$ i $CWAU$ možemo pokazati da su četvorke (B, V, Z, X) i (C, W, X, Y) harmonijske.
Sada možemo zapisati dvoomjere:

$$\frac{AY}{UY} : \frac{AZ}{UZ} = -1 \ , \ \frac{BZ}{VZ} : \frac{BX}{VX} = -1 \ , \ \frac{CX}{WX} : \frac{CY}{WY} = -1$$

Nadalje, za harmonijski pridružene točke, u parovima $(Y, Z), (Z, X), (X, Y)$ pokazat ćemo da su također pridružene točke inverzijom s obzirom na kružnice promjera AU, BV i CW. Označimo središta kružnica nad promjerima AU, BV i CW, respektivno, s D_1, D_2 i D_3.
Uzmimo, primjerice, pridružen par točaka Y i Z. Pretpostavimo da su točke Y i Z inverzne točke s obzirom na kružnicu nad promjerom AU. Prema definiciji inverzije mora vrijediti

$$D_1Y \cdot D_1Z = \left(\frac{AU}{2}\right)^2$$

Uzimajući u obzir da su sve dužine usmjerene uzmimo da je na dužini AU pozitivan smjer od A prema U. Sada slijedi:

$$AY = AU + UY \text{ i } AZ = AU + UZ.$$

Uvrštavanjem u dvoomjer $\frac{AY}{UY} : \frac{AZ}{UZ} = -1$ dobivamo:

$$\frac{AU + UY}{UY} : \frac{AU + UZ}{UZ} = -1$$

Obje strane pomnožimo razlomkom $\frac{AU+UZ}{UZ}$ i pojednostavnimo:

$$\frac{AU}{UY} + 1 = -\left(\frac{AU}{UZ} + 1\right)$$

Jednadžbu sredimo tako da varijable prebacimo na jednu stranu a brojeve na drugu:

$$\frac{AU}{UY} + \frac{AU}{UZ} = -2$$

Lijevu stranu svedemo na zajednički nazivnik:

$$\frac{AU \cdot UZ + AU \cdot UY}{UY \cdot UZ} = -2$$

Obje strane podijelimo s 2 i pomnožimo izrazom iz nazivnika s lijeve strane:

$$\frac{AU}{2}(UZ + UY) = -UY \cdot UZ$$

Provjerimo sada zadovoljavaju li točke Y i Z uvjet iz definicije inverzije:

$$\begin{aligned} D_1Y \cdot D_1Z &= \left(\frac{AU}{2} + UY\right) \cdot \left(\frac{AU}{2} + UZ\right) \\ &= \left(\frac{AU}{2}\right)^2 + \frac{AU}{2} \cdot UZ + \frac{AU}{2} \cdot UY + UY \cdot UZ \\ &= \left(\frac{AU}{2}\right)^2 + \frac{AU}{2} \cdot (UZ + UY) + UY \cdot UZ \\ &= \left(\frac{AU}{2}\right)^2 + (-UY \cdot UZ) = +UY \cdot UZ \\ &= \left(\frac{AU}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Time smo pokazali da su točke Y i Z pridružene točke inverzijom s obzirom na kružnicu nad promjerom AU. Prema teoremu 1.5.5 slijedi da je svaka kružnica koja prolazi točkama Y i Z ortogonalna na kružnicu inverzije, u našem slučaju, kružnicu nad promjerom AU.

Analogno bismo pokazali da su parovi pridruženih točaka (Z, X) i (X, Y) točke pridružene inverzijom s obzirom na, respektivno, kružnice nad promjerima BV i CW. Dodatno, sve kružnice koje prolaze točkama Z i X ortogonalne su na kružnicu inverzije, odnosno na kružnicu promjera BV kao što su i sve kružnice koje prolaze točkama X i Y ortogonalne na kružnicu promjera CW.
Zaključno, kružnica koja prolazi svim trima točkama X, Y i Z ortogonalna je na sve kružnice promjera AU, BV i CW. Uočimo da je kružnica koja prolazi trima točkama X, Y i Z opisana kružnica trostrana XYZ.

Nadalje, uočimo da točke U, V, W pripadaju stranicama BC, AC, AD koje su nasuprot vrhovima A, B, C. Ako pretpostavimo da je trokut ABC autopolaran, tada prema definiciji 1.5.1 slijedi da je točka U, na stranici BC, konjugirana točki A. Na isti način zaključujemo da je točka V konjugirana točki B i da je točka W konjugirana točki C. Iz činjenice da su kružnice nad promjerima čije krajnje točke su konjugirane točke u polaritetu s obzirom na polarnu kružnicu ortogonalne na tu kružnicu zaključujemo da su kružnice nad promjerima AU, BV, CW ortogonalne na polarnu kružnicu trokuta ABC.

Analogno možemo pokazati da je svaka polarna kružnica preostala tri pridruživa trokuta AVW, BWU, CUV ortogonalna na kružnice promjera AU, BV, CW. Uzmimo sada dvije kružnice, primjerice, kružnice promjera AU i BV. Kružnica koja je ortogonalna na izabrani par kružnica ima središte koje pripada potencijali tog izabranog para kružnica. Obzirom da su polarne kružnice pridruženih trokuta, zajedno s opisanom kružnicom trostrana XYZ, ortogonalne na sve tri kružnice promjera AU, BV, CW, pa onda i na kružnice promjera AU i BV, slijedi da središta tih polarnih kružnica, zajedno s središtem opisane kružnice trostrana XYZ, pripadaju potencijali kružnica AU i BV, pa onda i potencijali kružnica promjera AU, BV i CW.

Dakle, prvi pramen kružnica sadrži polarne kružnice pridruživih trokuta i opisanu kružnicu trostrana XYZ sa zajedničkom potencijalom koja je centrala kružnica promjera AU, BV i CW. Označimo centralu kružnica promjera AU, BV i CW s $\mathcal{R}''$. Analogno, uzmimo dvije polarne kružnice, primjerice polarne kružnice trokuta ABC i AVW. Obzirom da su sve kružnice promjera AU, BV, CW ortogonalne na sve polarne kružnice pridruživih trokuta i na opisanu kružnicu trostrana XYZ, pa tako i na polarne kružnice trokuta ABC i AVW, slijedi da središta kružnica promjera AU, BV, CW pripadaju potencijali polarnih kružnica trokuta ABC i AVW pa onda i potencijali polarnih kružnica trokuta BWU i CUV i opisane kružnice trostrana XYZ.

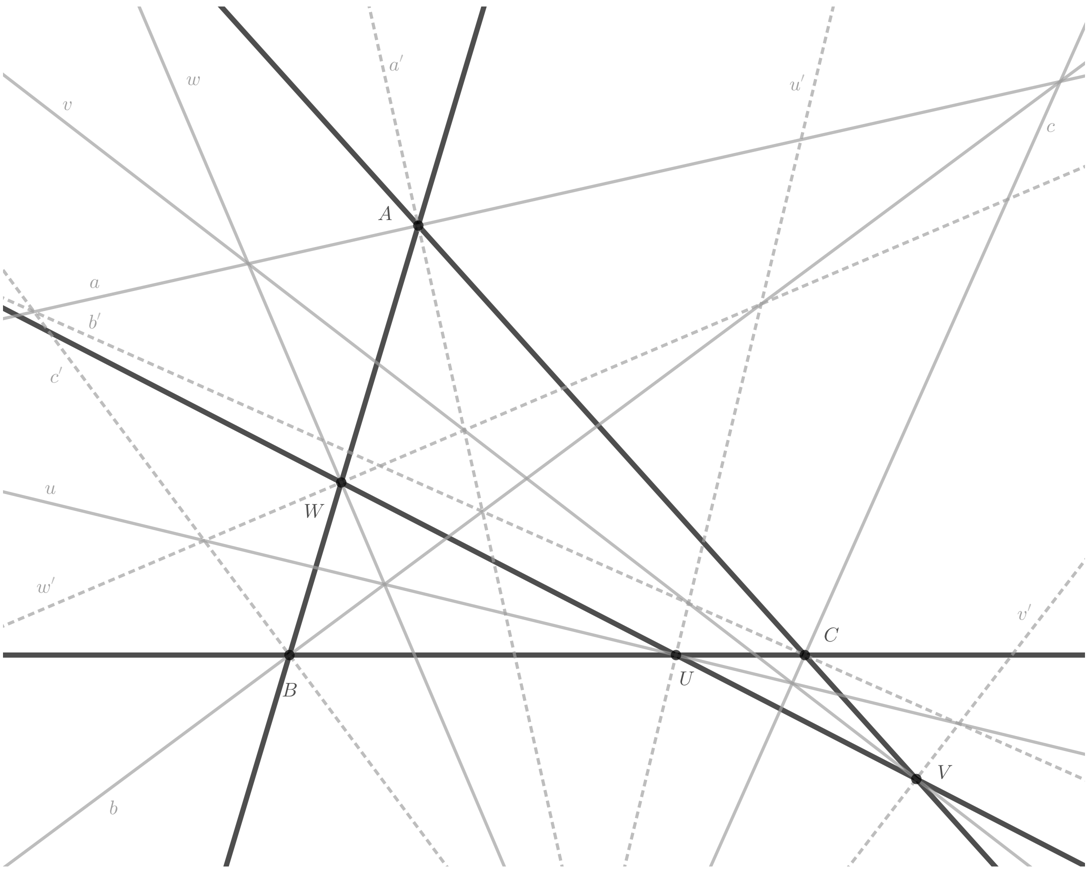
Dakle, drugi pramen kružnice sadrži kružnice promjera AU, BV, CW sa zajedničkom potencijalom koja je centrala polarnih kružnica prodruživih trokuta i opisane kružnice trostrana XYZ. Prema lemi 1.5.3, središta polarnih kružnica pridruživih trokuta su ortocentri tih trokuta pa slijedi da ortocentri H, H_a, H_b i H_c pripadaju centrali polarnih kružnica pridruživih trokuta.
Obzirom da je pravac kojem pripadaju ortocentri pridruživih trokuta pravac $\mathcal{R}'$, zajednička potencijala drugog pramena je pravac $\mathcal{R}'$.
Uočimo da su pripadna dva pramena dva ortogonalno spregnuta pramena čije potencijale su okomiti pravci. Dakle, pravac $\mathcal{R}''$ okomit je na pravac $\mathcal{R}'$. Kako su pravci $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ paralelni pravci (prema teoremu (5)), slijedi da je pravac $\mathcal{R}''$ zajednički okomiti pravac na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.
Time smo dokazali teorem (7).

Prethodno smo označili centralu kružnica promjera AU, BV i CW s $\mathcal{R}''$. Iz toga slijedi da središta kružnica promjera AU, BV, CW, odnosno polovišta dijagonala AU, BV, CW pripadaju pravcu $\mathcal{R}''$.
Time smo dokazali teorem (6). $\square$

2.2 Dokaz teorema 8-10

Dokaz preostala tri teorema odjeljujemo od dokaza prvih sedam teorema obzirom da ćemo se koristiti drugačijom notacijom. Ključni objekti dokaza su simetrale kutova pri svakom od šest sjecišta danih četiri pravaca potpunog četverostrana. Svakom kutu pri vrhovima A, B, C, U, V i W pridružujemo simetralu kuta.

Primjerice, prvi vrhu A, kutovima pridružujemo simetrale u oznaci a i a' tako da je a' simetrala kuta $\angle CAB$, a simetrala kuta u oznaci a, simetrala njegovog sukuta. Analogno, prvi vrhu B, pridružujemo simetrale b i b' tako da je b simetrala kuta $\angle ABC$, prvi vrhu C, pridružujemo simetrale c i c' tako da je c' simetrala kuta $\angle BCA$, prvi vrhu W, pridružujemo simetrale w i w' tako da je w simetrala kuta $\angle UWB$, prvi vrhu U, pridružujemo simetrale u i u' tako da je u simetrala kuta $\angle WUB$ te prvi vrhu V, pridružujemo simetrale v i v' tako da je v simetrala kuta $\angle CVU$.



Slika 2.6: Simetrale kutova

Teoremi (8) i (9)
Svaki od četiriju trokuta iz (1) ima upisanu kružnicu te tri pripisane kružnice. Središta tih šesnaest kružnica pripadaju, četiri po četiri, osam novih kružnica. Novih osam kružnica formiraju dva skupa po četiri kružnica tako da svaka kružnica iz prvog skupa je ortogonalna na kružnicu iz drugog skupa. Središta kružnica iz istih skupova pripadaju istom pravcu. Ta dva pravca su okomita.

Dokaz. Uočimo da su simetrale pri istom vrhu okomite. Promotrimo sada simetrale i pridružive trokute pojedinačno. Trokutu ABC simetrale unutarnjih kutova a', b, c' sijeku se u točki koje je središte upisane kružnice trokutu ABC. Označimo to sjecište s J_B. Dodatno, nije teško uočiti da se simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutarnjeg kuta trokuta sijeku u jednoj točki. Prema tome, sjecišta simetrala a, b, c zatim a, b', c' te a', b', c, označimo respektivno s J, J_A, J_C. Sjecišta J, J_A, J_C središta su pripisanih kružnica trokutu ABC.
Analogno, svakom od trokuta AVW, BWU i CUV pridružene su tri pripisane kružnice i jedna upisana kružnica. Dakle, trokutima iz teorema (1) pridruženo je ukupno 16 kružnica.

Pretpostavimo da se simetrale kutova v i w sijeku u jednoj točki zajedno s simetralom a. Tada zbog okomitosti simetrala sukuta pri istom vrhu i simetrale v' i w' sijeku se u jednoj točki sa simetralom kuta a. Simetrale unutarnjih kutova b i w sijeku se u središtu upisane kružnice trokuta BWU. Također, simetrale unutarnjih kutova c i v sijeku se u središtu upisane kružnice trokuta CUV. Obzirom da se sve simetrale unutarnjih kutova sijeku u istoj točki slijedi da sjecišta simetrala unutarnjih kutova $b \cap w$ i $c \cap v$ pripadaju simetrali unutarnjeg kuta, simetrali u. Ponovo, zbog okomitosti simetrala sukuta pri istom vrhu i simetrale kutova $b \cap w'$ i $c \cap v'$ se sijeku. Sada nije teško pokazati da kroz sjecišta simetrala kutova $b \cap w'$ i $c \cap v'$ prolazi i simetrala kuta u'. Dakle, pokazali smo:

- $v \cap w \in a$, $v' \cap w' \in a$, $b' \cap c' \in a$;
- $u \cap w \in b$, $u'' \cap w' \in b$, $a' \cap c' \in b$;
- $u \cap v \in c$, $u' \cap v' \in c$, $a' \cap b' \in c$

Prema definiciji 1.6.1 i svojstvu tranzitivnosti slijedi da su trokuti $T(a', b', c')$, $T(u, v, w)$ i $T(u', v', w')$ perspektivni s obzirom na centar perspektiviteta J. Nadalje, prema Desarquesovom teoremu slijedi da su presječne točke $a' \cap u$, $b' \cap v$ i $c' \cap w$ kolinearne. Analogno zaključujemo i da su presječne točke $a' \cap u'$, $b' \cap v'$ i $c' \cap w'$ kolinearne.

Dodatno, odgovarajuće stranice trokuta $T(u, v, w)$ i $T(u', v', w')$ su okomite te time zatvaraju sukladne kutove unutar trokuta. Dakle, trokuti su slični i perspektivni. Prema teoremima 1.3.2 i 1.3.3 slijedi da su točke presjeka $u \cap v$, $v \cap w$, $u \cap w$ te J konciklične. Analogno su i točke $u' \cap v'$, $v' \cap w'$, $u' \cap w'$ te J konciklične. Uočimo da obzirom da su odgovarajuće stranice trokuta okomite, kružnice opisane tim trokutima su ortogonalne.

Sljedeći cilj je pokazati da je $\Gamma(u', v', w')$ polarna kružnica trokuta s vrhovima $a \cap u'$, $b \cap v'$ i $c \cap w'$, te da je $\Gamma(u, v, w)$ polarna kružnica trokuta s vrhovima $a \cap u$, $b \cap v$ i $c \cap w$. U tu svrhu pokažimo da je polara točke $a \cap u'$ s obzirom na $\Gamma(u', v', w')$ spojnica točaka $b \cap v'$ i $c \cap w'$. Uočimo četverovrh određen točkama $J, u' \cap w', u' \cap v'$ i $v' \cap w'$ upisan kružnici $\Gamma(u', v', w')$. Pravci a i u' sijeku tu kružnicu u točkama J i $v' \cap w'$, odnosno $u' \cap w'$ i $u' \cap v'$.Točke $a \cap u'$, $b \cap v'$ i $c \cap w'$ su dijagonalne točke navedenog četverovrha pa spojnica $b \cap v'$ i $c \cap w'$ siječe pravac a u točki harmonički pridruženoj točki $a \cap u'$. Prema svojstvu polare navedenom u odjeljku 1.7., polara točke $a \cap u'$ pravac je kroz točke $b \cap v'$ i $c \cap w'$. Sažeto rečeno, trokut s vrhovima $a \cap u', b \cap v'$ i $c \cap w'$ dijagonalni je trovrh potpunog četverovrha upisanog kružnici $\Gamma(u', v', w')$. Upravo je to ono što smo željeli dokazati.

Slično se vidi i da je $\Gamma(u, v, w)$ polarna kružnica trokuta s vrhovima $a \cap u, b \cap v$ i $c \cap w$.

Prethodno smo pokazali za tri trokuta da su perspektivni s obzirom na centar perspektiviteta J. Analogno bismo mogli promatrati i druge trojke trokuta s obzirom na centre perspektiviteta J_A, J_B i J_C, respektivno:

- $T(a', b, c)$, $T(u, v', w)$, $T(u', v, w)$;
- $T(a,' b, c)$, $T(u', v, w')$, $T(u, v', w)$;
- $T(a, b, c')$, $T(u', v', w)$, $T(u, v, w')$

čije opisane kružnice u parovima drugog i trećeg trokuta iz promatranih trojki su polarne kružnice trokuta s vrhovima

- $(a \cap u, b' \cap v', c' \cap w')$ i $(a \cap u', b' \cap v, c' \cap w)$;
- $(a' \cap u', b' \cap v, c' \cap w')$ i $(a' \cap u, b \cap v', c' \cap w)$;
- $(a' \cap u', b' \cap v', c \cap w)$ i $(a' \cap u, b' \cap v, c \cap w')$.

Dakle, sljedeće razmatramo dva nova četverovrha, Q_1 i Q_2, čiji vrhovi su dani s:

$Q_1 : (a' \cap u, b' \cap v, c' \cap w), (a' \cap u, b' \cap v', c' \cap w), (a \cap u', b' \cap v, c \cap w')$ i $(a \cap u', b \cap v', c' \cap w)$

$Q_2 : (a' \cap u', b' \cap v', c' \cap w'), (a' \cap u', b \cap v, c \cap w), (a \cap u, b' \cap v', c \cap w)$ i $(a \cap u, b \cap v, c' \cap w')$

Uočimo da su kružnice $\Gamma(u', v', w')$, $\Gamma(u', v, w)$, $\Gamma(u, v', w)$ i $\Gamma(u, v, w')$ polarne kružnice pridruženim trokutima četverovrha Q_1. Također, kružnice $\Gamma(u, v, w)$, $\Gamma(u, v', w')$, $\Gamma(u', v, w')$ i $\Gamma(u', v', w)$ polarne su kružnice pridruženim trokutima četverovrha Q_2. Uočimo da smo već prethodno pokazali da su kružnice $\Gamma(u', v', w')$ i $\Gamma(u, v, w)$ ortogonalne, pa promatrajući odgovarajuće parove kružnica, uočavamo prema teoremima 1.3.2 i 1.3.3 da su kružnice u parovima međusobno ortogonalne te da, respektivno, prolaze točkama J, J_A, J_B i J_C. Dakle, kružnice pridružene trokutima četevrovrha Q_1 ortogonalne su na kružnice pridružene trokutima četverovrha Q_2.

Primijenimo li razmatranja i zaključke provedene kroz dokaze teorema (6) i (7), analogno dolazimo do zaključka čiji rezultat ćemo zapisati u obliku propozicije:

Propozicija 2.2.1. *Na temelju prethodnih rezultata slijedi:*

1. *Kružnice sadržane u pramenu kružnica Φ_1 su polarne kružnice povezane s četverovrhom Q_1*

$$\Gamma(u', v', w'), \Gamma(u', v, w), \Gamma(u, v', w), \Gamma(u, v, w')$$

zajedno s kružnicama čiji promjeri su

$$(a \cap u)(a \cap u'), (b \cap v)(b \cap v'), (c \cap w)(c \cap w');$$

2. *Kružnice sadržane u pramenu kružnica Φ_2 su polarne kružnice povezane s četverovrhom Q_2*

$$\Gamma(u, v, w), \Gamma(u, v', w'), \Gamma(u', v, w'), \Gamma(u', v', w)$$

zajedno s kružnicama čiji promjeri su

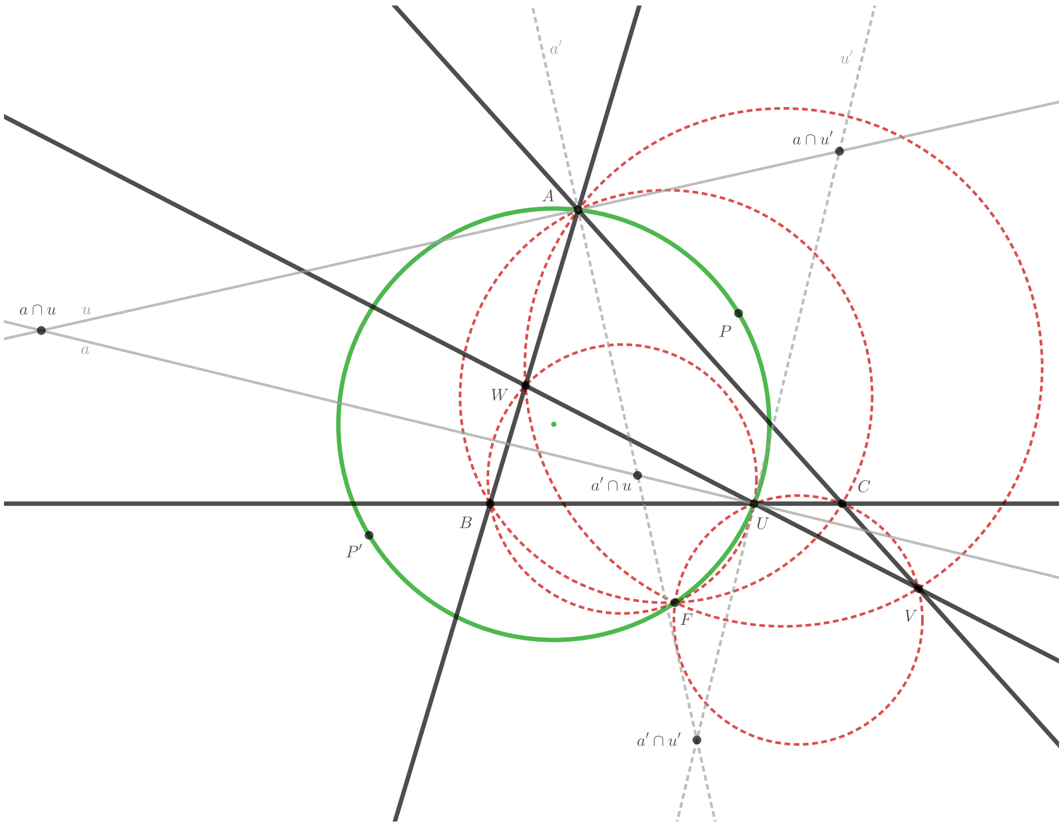
$$(a \cap u')(a' \cap u), (b \cap v')(b' \cap v), (c \cap w')(c' \cap w);$$

3. *Kružnice sadržane u pramenovima kružnica Φ_1 i Φ_2 su ortogonalne.*

Dakle, osam novih kružnica, takvih da četiri pripadaju jednom pramenu kružnica a drugih četiri drugom pramenu kružnica su prema definiciji ortogonalno spregnutih pramenova u odgovarajućim parovima ortogonalne. Također, središta kružnica koja pripadaju pramenu kružnica pripadaju jedno te istom pravcu pa slijedi da su pravci kojima pripadaju središta kružnica odgovarajućih pramenova kružnica, obzirom na ortogonalnost promatrana dva pramena, međusobno okomita.
Time smo dokazali teoreme (8) i (9). □

Teorem (10)
Konačno, ta dva pravca sijeku se u točki F.

Dokaz. Neka je točka P polovište spojnice točaka $a \cap u'$ i $a' \cap u$, te neka je P' polovište spojnice $a \cap u$ i $a' \cap u'$. Primjetimo da je točkama $a \cap u'$, $a' \cap u$, $a \cap u$ i $a' \cap u'$ dan ortocentrični sustav, odnosno, dan je potpuni četverovrh u kojem su tri para suprotnih stranica okomiti pravci. Kada gledamo kao trokut i njegov ortocentar, svaka od četiri točaka može imati ulogu ortocentra.



Slika 2.7: Kružnica devet točaka ortocentričnog sustava

Točke A i U na stranicama a i u, redom su nožišta okomica spuštenih iz nasuprotnih vrhova. Prema konstrukciji točaka P i P', trokuti $AP'P$ i $UP'P$ su pravokutni trokuti čije je zajednička hipotenuza PP'. Time slijedi da je kružnica devet točaka ortocentričkog sustava upravo kružnica opisana četverokutu $AP'UP$, odnosno kružnica s promjerom PP'. Dodatno, točke P i P' polovišta su lukova koje zatvaraju točke A i U. Uočimo čeverokut s vrhovima $A, a' \cap u, U$ i $a \cap u'$. Trokuti s vrhovima $a' \cap u, A, a \cap u'$ i $a \cap u', U, a' \cap u$ su pravokutni trokuti te im je zajednička hipotenuza spojnica točaka $a' \cap i$ i $a \cap u'$. Dakle, četverokut s vrhovima $A, a' \cap u, U$ i $a \cap u'$ je tetivni četverokut. Prema konstrukciji točke P, ona je središte opisane kružnice tog četverokuta. Sada slijedi:

$$
\begin{aligned}
(PA, PU) &= 2((a \cap u')A, (a \cap u')U) && (2.1)\\
&= 2((a \cap u'), AB) + 2(AB, UV) + 2(UV, (a \cap u')U) && (2.2)\\
&= (AC, AB) + 2(AB, UV) + (UV, BC) && (2.3)\\
&= (CA, CB) + (AB, UV) && (2.4)\\
&= (CA, CB) + (WB, WU) && (2.5)\\
&= (FA, FB) + (FB, FU) && (2.6)\\
&= (FA, FU) && (2.7)
\end{aligned}
$$

Jednakosti (2.1) i (2.2) slijede iz svojstava obodnih i središnjih kutova kružnice opisane četverokutu s vrhovima $A, a' \cap u, U$ i $a \cap u'$.
Jednakost (2.3) slijedi iz jednakosti $2((a \cap u')A, AB) = (AC, AB)$ i $2(UV(a \cap u')u) = (UV, BC)$ obzirom da su a i u' odgovarajućih kutova.
Jednakost (2.4) slijedi svojstvom zbrajanja:

$$(AC, AB) + (AB, UV) + (UV, BC) = (AC, BC)$$

Jednakost (2.5) slijedi jednostavnom zamjenom oznaka točaka na istom pravcu.
Jednakost (2.6) slijedi iz svojstva jednakosti obodnih kutova u kružnici nad istom tetivom.
Jednakost (2.7) slijedi iz svojstva zbrajanja orijentiranih kutova.

Dakle, točka F pripada kružnici devet točaka čiji je promjer PP'. Uočimo dodatno da su pravci FP i FP' simetrale kuta (FA, FU).
Obzirom na konstrukciju točaka P i P', centrale pramenova kružnica Phi_1 i Phi_2 prolaze, respektivno, tim točkama. Obzirom da su centrale ortogonalno spregnutih pramenova okomiti pravci, te ti pravci prolaze točkama p i P', sjecište centrala pripada kružnici čiji je promjer PP'. Analogno bismo pokazali i da sjecišta centrala pripadaju kružnicama FBV i FCW. Dakle, presječna točka centrala dvaju ortogonalno spregnutih pramenova je točka F.
Time je dokazan teorem (10). □

Bibliografija

[1] M.Alilović, Z. Kolar-Begović, Lj.Primorac Gajčić, *Wallace-Simsonov pravac*, Osječki matematički list, Vol.19, br. 2, 2019.

[2] J. Baca, *On a special center of spiral similarity*, 2019., Dostupno na: `https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2019-01/mr_1_2019_spiral_similarity.pdf`

[3] H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, sv. 19, The Mathematical Association of America, 1967. Dostupno na: `https://www.isinj.com/mt-usamo/NML%2019%20-%20Geometry%20Revisited%20-%20H.%20Coxeter,%20S.%20Greitzer%20(MSA,%201967).pdf`

[4] J. P. Ehrmann, *Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral*, Forum Geometricorum, Vol.4 (2004.), 35-52.

[5] R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Library of the University of Winsconsin, 1929. Dostupno na: `https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=wu.89043163211&view=1up&seq=16`

[6] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[7] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[8] J. Steiner, *Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet*, Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 18, (1827-1828), 302-304.

[9] V. Volenec, *Dva Steinerova teorema o potpunom četverostranu*, Osječki matematički list, Vol.20, br. 2, 2020.

Sažetak

Steinerov teorem o potpunom četverostranu sastoji se od 10 međusobno povezanih tvrdnji, a objavljen je u obliku zadatka, dakle bez dokaza, u izdanju časopisa "Annales de Mathematiques Pures et Appliquées", skraćeno zvanog "Journal de Gergonne" za 1827./1828. godinu.

Cilj je ovog rada izložiti dokaze svih 10 propozicija. U tu svrhu, uvodno prvo poglavlje sadrži pregled različitih pojmova i činjenica iz geometrije euklidske ravnine koje su potrebne za dokaz.
Između ostalih, to su Simson-Wallaceov pravac, kružnica devet točaka, polarna kružnica trokuta, ortogonalni pramenovi kružnica te Desarguesov teorem i harmonička četvorka, kao teme bliskije projektivnoj geometriji.

U drugom poglavlju dokazano je redom svih 10 stavaka, djelomično grupiranih prema njihovom sadržaju i metodi dokaza. Steiner polazi od četiri trokuta koji su određeni s po tri stranice potpunog četverovrha, promatra njihove opisane kružnice i ortocentre te uočava nekoliko položaja kolinearnih i konci kličkih točaka čime dolazi do daljnjih točaka, pravaca i kružnica s posebnim svojstvima. U završna tri stavka analizira se složena struktura generirana središtima upisanih i pripisanih kružnica početna četiri trokuta. Uočavaju se daljnje pravilnosti dobivenih konfiguracija te se na kraju dobiva novi opis iste točke o kojoj govori prvi stavak, a to je zajednička točka četiri kružnice opisane promatranim trokutima.

Summary

Steiner's theorem on a complete quadrilateral consists of 10 interrelated statements, and it was published in the form of a problem or a challenge, that is, without proof, in the 1827./1828. volume of the journal "Annales de Mathematiques Pures et Applique'es", also known as "Journal de Gergonne".

The main goal of this paper is to present proofs of all 10 statements. To that purpose, the introductory chapter is a brief recapitulation of numerous notions and facts from Euclidean geometry that will be used in the proofs. Some of those concepts are the Simson-Wallace line, the nine-point circle, the polar circle of a triangle, orthogonal pencils of circles, as well as several topics more related to projective geometry, such as the Desargues' theorem and harmonic quadruple of points.

In the second chapter, all 10 statements are proven. Some proofs are grouped according to the contents of the statement or the method used in the demonstration. Steiner starts by observing the four triangles associated to the complete quadrilateral, together with their circumcircles and orthocenters. By noticing some specific sets of collinear and concyclic points, he points out further specific points, lines and circles with particular properties. The last three statements are based on the analysis of a complex structure generated by incenters and centers of excircles of the initial triangles. An examination of the obtained configurations leads to the final statement, describing from a completely different perspective the point which occurred in the first proposition as a common point of all four circumcircles of associated triangles.

Životopis

Ines Šumiga rođena je 22. listopada 1993. godine u Zagrebu. Godine 2000. započinje osnovnoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Trnsko. Godine 2008. upisuje V. Gimnaziju, opći smjer. Upisuje Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek u Zagrebu 2012. godine. Prediplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički završava 2017. godine. Iste godine upisuje Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički. Tijekom fakultetskog obrazovanja radi mnoge studentske poslove među kojima je i rad u Photomathu od 2018. godine pa sve do završetka diplomskog studija.