

# Johnsonova shema

---

Šupe, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:887584>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Katarina Šupe

# **Johnsonova shema**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

1	Uvod	1
2	Johnsonovi grafovi	2
3	Dizajni	13
4	Asocijacijske sheme	22
5	Parametri Johnsonove sheme	33
	Literatura	38
	Sažetak	40
	Summary	41
	Životopis	42

# 1 Uvod

U ovom radu ćemo najprije definirati Johnsonove grafove  $J(v, k, i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  i ilustrirati ih pomoću primjera. Temeljito ćemo proučiti odgovarajuće matrice susjedstva  $A_0, \dots, A_k$ . Dokazat ćemo da te matrice imaju nekoliko zanimljivih svojstava: simetrične su, u sumi daju matricu ispunjenu jedinicama te je  $A_0$  jedinična matrica. Cilj poglavlja je pokazati da je vektorski prostor  $\mathcal{A}$ , razapet matricama  $A_0, \dots, A_k$ , komutativna algebra. U tu svrhu ćemo definirati novu familiju matrica  $W_{t,k}$ , pomoću koje uvodimo matrice  $C_0, \dots, C_k$ , takve da je  $C_i = W_{i,k}^\tau \cdot W_{i,k}$ . One također razapinju vektorski prostor  $\mathcal{A}$  te će odigrati glavnu ulogu u dokazivanju da je  $\mathcal{A}$  komutativna algebra.

U trećem poglavlju ćemo definirati  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$  dizajne. Također, vidjet ćemo da dizajn ima snagu barem  $t$  ako i samo ako njegov karakteristični vektor zadovoljava jednadžbu  $W_{t,k} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}$ , za neku konstantu  $\lambda_t$ . Dakle, povezat ćemo matrice iz prethodnog poglavlja s dizajnima. Cilj poglavlja je dokazati Ray-Chaudhurijev i Wilsonov teorem koji govori o donjoj granici kardinaliteta skupa blokova  $t$ -dizajna. Da bismo ga dokazali, potrebno je uvesti matrice  $W_i(\mathcal{B})$ , koje sadrže redom sve stupce matrice  $W_{i,k}$  koji odgovaraju blokovima dizajna te dokazati linearnu nezavisnost redaka tih matrica. Za to će biti potrebno definirati komplement dizajna te familiju matrica  $\overline{W}_{t,k}$ . Kada dokažemo bitna svojstva tih matrica, moći ćemo dokazati Ray-Chaudhurijev i Wilsonov teorem iz kojeg će slijediti Fishereova nejednakost.

U četvrtom poglavlju ćemo se napokon upoznati s pojmom Johnsonove sheme. Osim što ćemo vidjeti da je Johnsonova shema primjer asocijacijske sheme, sve što smo prethodno dokazali za matrice susjedstva Johnsonovih grafova  $J(v, k, i)$ , poslužit će za bolje razumijevanje naizgled komplicirane definicije asocijacijske sheme. Definirat ćemo Bose-Mesnerovu algebru sheme, dokazati da je zatvorena na Schurov produkt i zaključiti da je algebra  $\mathcal{A}$ , iz prvog poglavlja, zapravo Bose-Mesnerova algebra Johnsonove sheme. Za asocijacijske sheme će još biti bitno spomenuti svojstvene i dualne svojstvene vrijednosti sheme te presječne brojeve i Kreinove parametre.

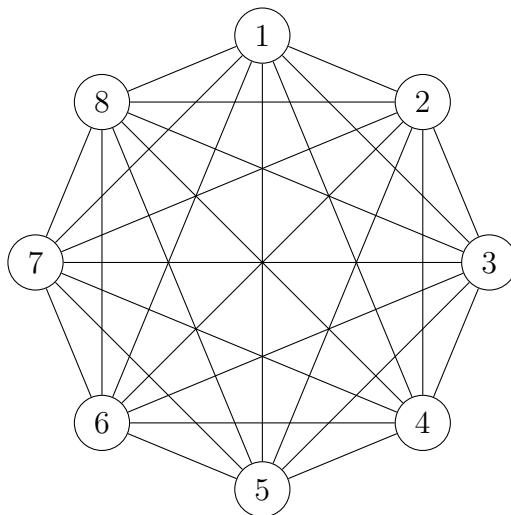
U zadnjem poglavlju bavit ćemo se parametrima Johnsonove sheme, kao konkretnim primjerom parametara neke asocijacijske sheme. Dokazat ćemo bitan rezultat o svojstvenim potprostorima Johnsonove sheme koji će povlačiti glavni rezultat četvrtog poglavlja – Delsarteov teorem koji povezuje  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$  dizajne iz trećeg poglavlja sa svojstvenim potprostorima Johnsonove sheme.

## 2 Johnsonovi grafovi

Da bismo definirali Johnsonove grafove potrebno je najprije prisjetiti se nekih osnovnih pojmova.

**Definicija 2.1.** Graf je uređen par  $G = (V, E)$ , pri čemu je  $V$  konačan skup vrhova, a  $E$  skup jednočlanih ili dvočlanih podskupova od  $V$  koje zovemo bridovima. Jednočlane bridove zovemo petljama. Kažemo da su vrhovi  $u, v \in V$  susjedni ako postoji brid  $e = \{u, v\} \in E$ . Kažemo da je vrh  $v$  incidentan s bridom  $e$  ukoliko je  $e = \{v\}$  ili  $e = \{u, v\}$ , za neki vrh  $u \in V$ .

**Definicija 2.2.** Neka je  $G = (V, E)$  graf,  $|V| = n \in \mathbb{N}$  te  $E = \binom{V}{2}$  skup svih dvočlanih podskupova od  $V$ . Tada kažemo da je graf  $G$  potpuni graf te ga označavamo s  $K_n$ .

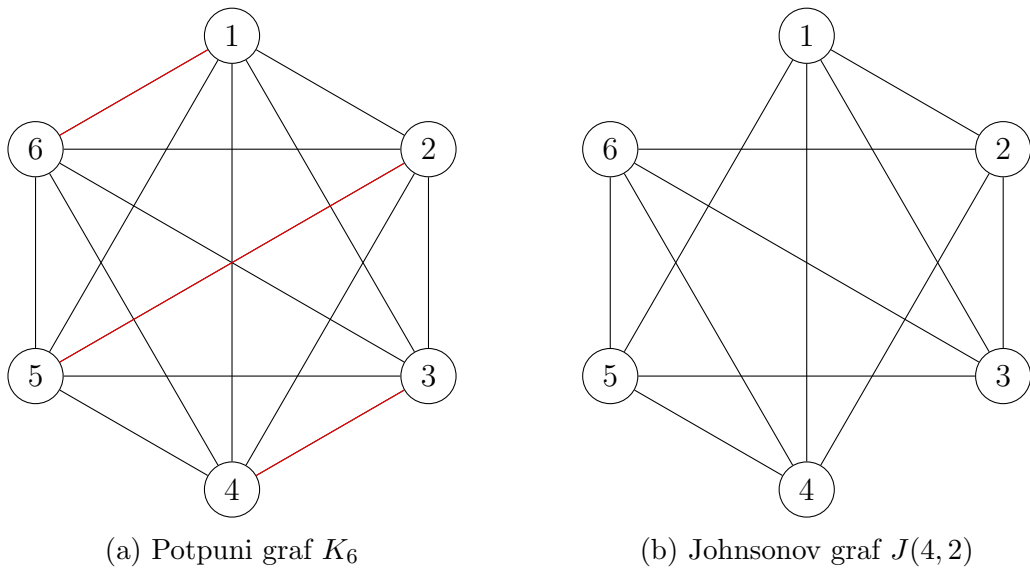


Slika 1: Potpuni graf  $K_8$

**Definicija 2.3.** Neka je  $V$  skup od  $v$  elemenata i  $\Omega = \binom{V}{k}$  familija svih  $k$ -članih podskupova od  $V$ . Generalizirani Johnsonov graf  $J(v, k, i)$  ima  $\Omega$  kao skup vrhova, a dva vrha su susjedna ako se sijeku u  $k - i$  elemenata.

Graf  $J(v, k, 1)$  označavat ćemo s  $J(v, k)$  te ga zvati Johnsonovim grafom. Dakle, dva vrha su susjedna u Johnsonovu grafu, ako se sijeku u  $k - 1$  elemenata. Očito je onda  $J(n, 1)$  potpuni graf  $K_n$ .

**Primjer 2.4.** Neka je  $V = \{a, b, c, d\}$  zadani skup. Tada je  $\Omega = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$  familija svih dvočlanih podskupova od  $V$ , tj.  $\Omega$  je skup vrhova Johnsonova grafa  $J(4, 2)$ . Susjedni vrhovi su oni koji imaju točno jedan zajednički element. Označimo šest elemenata skupa  $\Omega$  redom brojevima od 1 do 6. Pogledajmo zatim sliku 2. Lijevo, na slici 2a imamo nacrtan potpuni graf  $K_6$ . Iz definicije 2.2 znamo da su u tom grafu svi vrhovi susjedni. Pogledajmo stoga koji vrhovi iz potpunog grafa nisu susjedni u Johnsonovom grafu  $J(4, 2)$ . Takvi bridovi označeni su crvenom bojom. Desno, na slici 2b, ti bridovi su uklonjeni te je ostao Johnsonov graf  $J(4, 2)$ .



Slika 2: Johnsonov graf kao razapinjući podgraf potpunog grafa.

**Definicija 2.5.** Podgraf grafa  $G = (V, E)$  je graf  $G' = (V', E')$ , pri čemu je  $V' \subseteq V$  i  $E' \subseteq E$ . Razapinjući podgraf je podgraf oblika  $G' = (V, E')$ .

Dakle, u razapinjućem podgrafu nekog grafa  $G = (V, E)$  skup vrhova je jednak skupu  $V$ , dok je skup bridova neki podskup od  $E$ . Možemo zaključiti da je Johnsonov graf  $J(4, 2)$  na slici 2b razapinjući podgraf grafa na slici 2a.

**Definicija 2.6.** Grafovi  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  su izomorfni ukoliko postoji bijekcija  $\Theta: V_1 \rightarrow V_2$ , takva da za sve vrhove  $u$  i  $v$  iz  $V_1$  vrijedi da su  $u$  i  $v$  susjedni u  $G_1$  ako i samo ako su vrhovi  $\Theta(u)$  i  $\Theta(v)$  susjedni u  $G_2$ .

Grafovi  $J(v, k)$  i  $J(v, v - k)$  su izomorfni. Izomorfizam je preslikavanje  $\Theta: \binom{V}{k} \rightarrow \binom{V}{v-k}$  koje  $k$ -članom podskupu  $\alpha \subseteq V$  pridružuje njegov komplement, odnosno  $\Theta(\alpha) = V \setminus \alpha$ . Dva vrha iz  $J(v, k)$ , tj. podskupa  $\alpha, \beta \subseteq V$ ,  $|\alpha| = |\beta| = k$ , su susjedna ako i

samo ako je  $|\alpha \cap \beta| = k - 1$ . To je ekvivalentno s  $|(V \setminus \alpha) \cap (V \setminus \beta)| = v - k - 1$ , odnosno da su slike  $\Theta(\alpha)$  i  $\Theta(\beta)$  susjedne u  $J(v, v - k)$ . Zbog njihove izomorfности, za Johnsonov graf  $J(v, k)$ , često ćemo pretpostavljati da je  $v \geq 2k$ .

**Definicija 2.7.** *Neka je  $G = (V, E)$  te  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Matrica susjedstva grafa  $G$  je matrica  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , takva da je*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je  $I$  jedinična matrica, a  $J$  kvadratna matrica reda  $n = \binom{v}{k}$  ispunjena jedinicama, dimenzija jednakih dimenzijama matrica  $A_0, A_1, \dots, A_k$ , koje su redom matrice susjedstva grafova  $J(v, k, i)$ . One zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- $A_i^\tau = A_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

Matrice  $A_i$  su simetrične, jer je relacija susjedstva u Johnsonovu grafu simetrična, tj. ako je vrh  $\alpha$  susjedan vrhu  $\beta$ , tada je očito i vrh  $\beta$  susjedan vrhu  $\alpha$  i obratno. Dakle, vrijedi  $A_i^\tau = A_i$  za svaki  $i = 0, \dots, k$ .

- $A_0 = I$ .

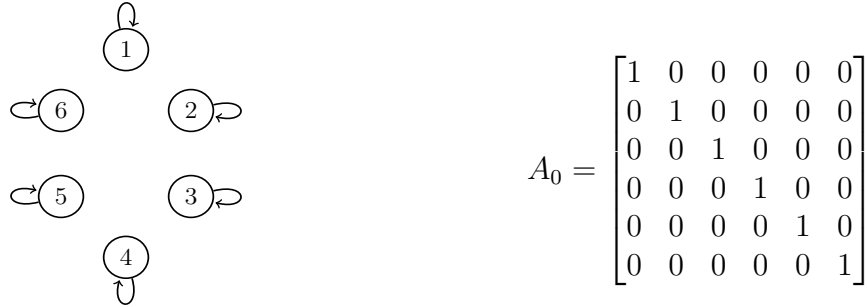
Graf  $J(v, k, 0)$  je Johnsonov graf u kojem su dva vrha susjedna ako se sijeku u  $k$  elemenata. Kako se skup vrhova  $\Omega$  takvog grafa sastoji od  $k$ -članih podskupova nekog  $v$ -članog skupa, tada se samo dva jednaka podskupa od  $\Omega$  mogu sjeći u točno  $k$  elemenata. Stoga zaključujemo da su bridovi grafa  $J(v, k, 0)$  isključivo petlje na svakom vrhu tog grafa, tj. matrica susjedstva  $A_0$  je očito jedinična matrica  $I$ , za svaki  $v$  i  $k$ .

- $\sum_{i=0}^k A_i = J$ .

U matrici susjedstva  $A_i$  na nekom mjestu se nalazi jedinica, ako pripadni vrhovi imaju  $k - i$  zajedničkih elemenata. Dakle, matrice  $A_i$  su očito različite za svaki  $i$ . Primijetimo da unija bridova grafova  $J(v, k, i)$ , za  $i \neq 0$ , čini skup bridova potpunog grafa  $K_n$ . Iz toga slijedi da je zbroj matrica susjedstva  $A_1, \dots, A_k$  jednak matrici susjedstva potpunog grafa  $K_n$ , koja je  $n \times n$  matrica s nulama na dijagonali i jedinicama na preostalim mjestima, jer graf  $K_n$  ne sadrži petlje. Pribrojimo li toj matrici matricu  $A_0$ , dobit ćemo matricu  $J$ . Stoga,  $\sum_{i=0}^k A_i = J$ .

**Primjer 2.8.** *Provjerimo zadovoljavaju li matrice susjedstva  $A_0, A_1$  i  $A_2$  grafova  $J(4, 2, 0)$ ,  $J(4, 2, 1)$  te  $J(4, 2, 2)$  navedene uvjete. Ukoliko promatramo Johnsonov graf  $J(4, 2, 0)$  na slici 3, možemo primijetiti da su svi njegovi bridovi petlje. Tada*





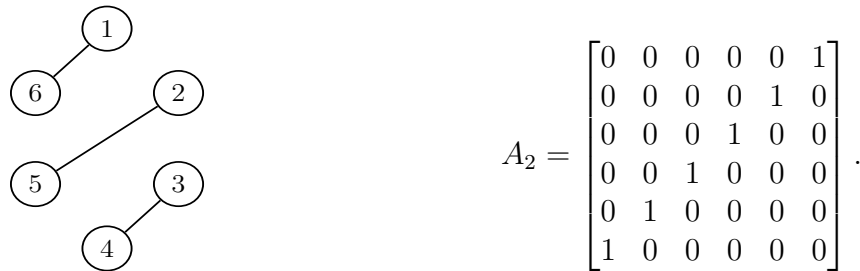
Slika 3: Johnsonov graf  $J(4, 2, 0)$  s pripadnom matricom susjedstva  $A_0$ .

je očito  $A_0 = I_6$ , odnosno jedinična  $6 \times 6$  matrica. Znamo da je jedinična matrica simetrična, pa vrijedi  $A_0^T = A_0$ .

Johnsonov graf  $J(4, 2, 1)$  je graf  $J(4, 2)$  na slici 2b. Pripadna matrica susjedstva je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica  $A_1$  je očito simetrična, tj.  $A_1^T = A_1$ . Na kraju, promatramo  $A_2$ , matricu susjedstva Johnsonovog grafa  $J(4, 2, 2)$  na slici 4.



Slika 4: Johnsonov graf  $J(4, 2, 2)$  s pripadnom matricom susjedstva  $A_2$ .

$A_2$  je također simetrična matrica, odnosno  $A_2^T = A_2$ . Uočimo još da je suma matrica  $A_0$ ,  $A_1$  i  $A_2$  matrica ispunjena jedinicama, odnosno matrica  $J$ .

Neka je  $\mathcal{A}$  vektorski prostor razapet matricama  $A_0, A_1, \dots, A_k$  nad poljem  $\mathbb{R}$ , tj.  $\mathcal{A} = \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ . Pokazat ćemo da je vektorski prostor  $\mathcal{A}$  zatvoren na matrično

množenje, tj. da je matična algebra. U tu svrhu ćemo najprije definirati važnu familiju matrica.

**Definicija 2.9.** *Neka su  $t$ ,  $k$  i  $v$  fiksni te neka je  $V$  skup od  $v$  elemenata. Proizvoljno poredajmo  $t$ -člane i  $k$ -člane podskupove od  $V$ . Tada je  $W_{t,k}(v)$   $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$  matrica ispunjena nulama i jedinicama. Na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{t,k}(v)$  se nalazi 1, ako je  $i$ -ti  $t$ -člani podskup od  $V$  sadržan u  $j$ -tom  $k$ -članom podskupu od  $V$ . Inače se na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{t,k}(v)$  nalazi 0.*

Obično će iz konteksta biti jasno na koji  $v$ -člani skup  $V$  se matrica  $W_{t,k}(v)$  odnosi pa ćemo je označavati s  $W_{t,k}$ . Primijetimo da je  $W_{t,k}$  matrica s  $\binom{v-t}{k-t}$  jedinica u svakom retku te  $\binom{k}{t}$  jedinica u svakom stupcu. Fiksni  $k$ -člani podskup od  $V$  sadrži  $i$ -ti  $t$ -člani podskup od  $V$  ako je taj  $t$ -člani skup njegov podskup. Znamo da je broj  $t$ -članih podskupova  $k$ -članog skupa jednak  $\binom{k}{t}$ , stoga slijedi da matrica  $W_{t,k}$  ima  $\binom{k}{t}$  jedinica u svakom stupcu. Neki  $k$ -člani podskup od  $V$  možemo kreirati tako da prvo odaberemo  $t$ -člani podskup od  $V$  koji zatim nadopunimo do  $k$ -članog skupa. Za fiksni  $t$ -člani podskup od  $V$  to možemo napraviti na  $\binom{v-t}{k-t}$  načina pa slijedi da matrica  $W_{t,k}$  ima  $\binom{v-t}{k-t}$  jedinica u svakom retku.

**Primjer 2.10.** *Prisjetimo se Johnsonovih grafova i njihovih matrica susjedstva iz primjera 2.8. Dakle,  $v = 4$ ,  $k = 2$  i neka je  $t = 1$  te  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  skup od  $v$  elemenata. Poredajmo  $t$ -člane i  $k$ -člane podskupove od  $V$  na sljedeći način:*

$$\Omega_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

*i*

$$\Omega_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

*Najprije pogledajmo kako će izgledati matrica  $W_{1,2}$ :*

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Na mjestu  $(1, 1)$  u matrici  $W_{1,2}$  nalazi se 1, jer vrijedi  $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ . Preciznije, prvi  $t$ -člani podskup od  $V$ , tj. prvi element skupa  $\Omega_1$ , sadržan je u prvom  $k$ -članom podskupu od  $V$ , odnosno u prvom elementu skupa  $\Omega_2$ . Na mjestu  $(3, 3)$  u matrici  $W_{1,2}$  nalazi se 0, jer  $\{3\} \not\subseteq \{1, 4\}$ . Analogno za preostale elemente matrice  $W_{1,2}$ . Primijetimo da matrica  $W_{1,2}$  zaista ima  $\binom{v-t}{k-t} = \binom{4-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$  jedinica u svakom retku te  $\binom{k}{t} = \binom{2}{1} = 2$  jedinica u svakom stupcu.*

Sada definiramo matrice  $C_0, \dots, C_k$  na sljedeći način:

$$C_i = W_{i,k}^T \cdot W_{i,k}. \quad (1)$$

**Primjer 2.11.** Kada transponiramo matricu  $W_{1,2}$  iz primjera 2.10 dobijemo

$$W_{1,2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada iz jednakosti (1) zaključujemo da je

$$C_1 = W_{1,2}^T \cdot W_{1,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dijagonala matrice  $C_1$  ispunjena je dvojkama, jer je svaki dvočlani skup iz  $\Omega_2$  nadskup dva jednočlana skupa iz  $\Omega_1$ . Primijetimo da je  $C_1 = 2A_0 + A_1$ , pri čemu su  $A_0$  i  $A_1$  matrice susjedstva Johnsonovih grafova iz primjera 2.8.

**Propozicija 2.12.** Za sve  $i \in \{0, \dots, k\}$  vrijedi sljedeća jednakost

$$C_i = \sum_{r \geq i} \binom{r}{i} A_{k-r}. \quad (2)$$

*Dokaz.* Neka su  $\alpha, \beta \in \Omega = \binom{V}{k}$ . Promotrimo mjesto  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $C_i = W_{i,k}^T \cdot W_{i,k}$ . Po definiciji množenja matrica, to je suma po svim  $\gamma \in \binom{V}{i}$  produkta  $(W_{i,k}^T)_{\alpha,\gamma} \cdot (W_{i,k})_{\gamma,\beta}$ . Produkt je 1 ako je  $\gamma \subseteq \alpha$  i  $\gamma \subseteq \beta$ , tj.  $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta$ , a inače je 0. Dakle, na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $C_i$  je broj  $i$ -članih podskupova od  $\alpha \cap \beta$ , tj.  $(C_i)_{\alpha,\beta} = \binom{|\alpha \cap \beta|}{i}$ . S druge strane, element na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $A_{k-r}$  je 1 ako je  $|\alpha \cap \beta| = r$ , a inače je 0. Zato je i  $(\sum_{r \geq i} \binom{r}{i} A_{k-r})_{\alpha,\beta} = \sum_{r \geq i} \binom{r}{i} (A_{k-r})_{\alpha,\beta} = \binom{|\alpha \cap \beta|}{i}$ . Time smo dokazali da je  $C_i = \sum_{r \geq i} \binom{r}{i} A_{k-r}$ .  $\square$

**Lema 2.13.** Vrijedi

$$\binom{n}{j} \binom{j}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k}. \quad (3)$$

*Dokaz.* Jednakost ćemo dokazati kombinatornim argumentom. Recimo da imamo  $n$  kuglica u nekoj posudi. Na lijevoj strani jednakosti najprije biramo  $j$  kuglica od  $n$  na  $\binom{n}{j}$  načina. Nakon toga od tih  $j$  kuglica biramo  $k$  kuglica koje stavljamo u ladicu, a preostale u kutiju. Dakle, u kutiji je ukupno  $j - k$  kuglica. Na desnoj strani jednakosti biramo kuglice tako da prvo odaberemo njih  $k$  koje stavljamo u ladicu te zatim od preostalih  $n - k$  kuglica biramo  $j - k$  kuglica koje idu u kutiju.  $\square$

**Teorem 2.14** (Relacija ortogonalnosti za binomne koeficijente). *Vrijedi sljedeća relacija:*

$$\delta_{nk} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k}. \quad (4)$$

*Dokaz.*  $\delta_{nk}$  je Kroneckerov simbol, koji je definiran za svaki par prirodnih brojeva  $(n, k)$  na sljedeći način:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = k \\ 0, & \text{ako je } n \neq k. \end{cases}$$

Kada raspišemo desnu stranu jednakosti (4) dobijemo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} &= \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^{n-k-j} (-1)^j \\ &= \binom{n}{k} (1-1)^{n-k} \\ &= \delta_{nk}. \end{aligned}$$

U prvoj jednakosti koristili smo identitet (3), dok smo u predzadnjoj jednakosti koristili binomni teorem.  $\square$

**Teorem 2.15** (Binomna inverzija). *Za svake dvije funkcije  $f, g: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow M_m$  ekvivalentno je*

1.  $g(i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f(j), \forall i \in \{0, 1, \dots, n\},$

2.  $f(i) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j), \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$

*Dokaz.* Pokažimo da je  $\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j)$  uistinu  $f(i)$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j) &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} f(k) \\
&= \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^j \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^j \sum_{j=k}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^i \sum_{j=k}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^i f(k) \sum_{j=k}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} \\
&= \sum_{k=0}^i f(k) \delta_{ik} \\
&= f(i).
\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti koristili smo formulu 1. Zatim smo unutar druge sumacije ubacili sve što ne ovisi o  $k$ , nakon čega smo zamijenili poredak sumacije. Drugu sumaciju po  $j$  smo pomakli da kreće od  $k$ , jer za  $j < k$  je  $\binom{j}{k} = 0$ . Nakon toga smo prvu sumaciju po  $k$  proširili do  $i$ , što ne utječe na ukupnu sumu, jer je  $\binom{j}{k} = 0$ , za  $k > j$ . U šestoj jednakosti smo izlučili  $f(k)$  ispred sume po  $j$ , a zatim smo primijenili relaciju ortogonalnosti (4). Na sličan način se dokazuje da formula 1 implicira formulu 2.  $\square$

Upravo dokazani teorem je tvrdnja poznata kao *binomna inverzija*. Funkciju  $g$  nazivamo *binomnom transformacijom* funkcije  $f$ .

**Korolar 2.16.** *Za sve  $i \in \{0, \dots, k\}$  vrijedi sljedeća jednakost*

$$A_{k-i} = \sum_{r \geq i} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} C_r. \quad (5)$$

*Dokaz.* Slijedi iz teorema 2.15, jer je binomna inverzija formule (2) formula (5).  $\square$

Dakle, matrice  $C_i$  također razapinju vektorski prostor  $\mathcal{A}$ , tj.  $\mathcal{A} = \langle C_0, C_1, \dots, C_k \rangle$ . Dokažimo prvo neke rezultate koji će nam, zajedno s matricama  $C_i$ , pomoći pri dokazivanju da je  $\mathcal{A}$  komutativna algebra.

**Propozicija 2.17** (Vandermondeova konvolucija). *Vrijedi*

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}. \quad (6)$$

*Dokaz.* Kombinatornim argumentom možemo jednostavno dokazati gornju jednakost. Interpretirajmo najprije desnu stranu jednakosti. Promotrimo skup koji ima  $m+n$  obojanih elemenata. Neka je  $m$  elemenata obojano crvenom, a  $n$  elemenata plavom bojom. Recimo da želimo odabrati  $r$  elemenata iz tog skupa. To možemo učiniti na  $\binom{m+n}{r}$  načina, jer nam nije važno koje elemente odabiremo, već nam je dovoljno da ih je točno  $r$ . S druge strane, biramo elemente  $(m+n)$ -članog skupa tako da najprije odaberemo nekoliko crvenih elemenata i zatim preostale plave elemente. Stoga prvo odabiremo  $k$  crvenih elemenata na  $\binom{m}{k}$  načina i onda od  $n$  plavih elemenata biramo preostalih  $r-k$  elemenata na  $\binom{n}{r-k}$  načina, za svaki  $k = 0, \dots, r$ . Takav odabir možemo napraviti na ukupno  $\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$  načina, što je lijeva strana jednakosti (6).  $\square$

**Propozicija 2.18.** *Vrijedi*

$$W_{s,k} W_{t,k}^\tau = \sum_{i=0}^t \binom{v-s-t}{v-k-i} W_{i,s}^\tau W_{i,t}. \quad (7)$$

*Dokaz.* Neka je  $\alpha$   $s$ -člani podskup i  $\beta$   $t$ -člani podskup  $v$ -članog skupa  $V$ . Na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{s,k}$  se nalazi 1, ako je  $i$ -ti  $s$ -člani podskup od  $V$  sadržan u  $j$ -tom  $k$ -članom podskupu od  $V$ . Inače se na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{s,k}$  nalazi 0. Na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{t,k}$  se nalazi 1, ako je  $i$ -ti  $t$ -člani podskup od  $V$  sadržan u  $j$ -tom  $k$ -članom podskupu od  $V$ . Inače se na mjestu  $(i, j)$  u matrici  $W_{t,k}$  nalazi 0. Kada transponiramo matricu  $W_{t,k}$  te je slijeva pomnožimo s matricom  $W_{s,k}$ , možemo primijetiti da se u dobivenoj matrici  $W_{s,k} W_{t,k}^\tau$  na mjestu  $(\alpha, \beta)$  nalazi broj  $k$ -članih podskupova od  $V$  koji su nadskupovi skupova  $\alpha$  i  $\beta$ . Takav  $k$ -člani skup možemo odabrati tako da prvo odaberemo sve elemente koji se nalaze u skupovima  $\alpha$  i  $\beta$ , a njih je ukupno  $|\alpha \cup \beta|$ , te zatim od preostalih  $v - |\alpha \cup \beta|$  elemenata biramo  $k - |\alpha \cup \beta|$  elemenata na  $\binom{v-|\alpha \cup \beta|}{k-|\alpha \cup \beta|}$  načina. Dakle, na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{s,k} W_{t,k}^\tau$  nalazi se

$$\binom{v - |\alpha \cup \beta|}{k - |\alpha \cup \beta|}.$$

Analogno, na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,s}^\tau W_{i,t}$  nalazi se broj  $i$ -članih podskupova  $v$ -članog skupa koji se nalaze u presjeku skupova  $\alpha$  i  $\beta$ . Dakle od  $|\alpha \cap \beta|$  elemenata možemo odabrati njih  $i$  na  $\binom{|\alpha \cap \beta|}{i}$  načina pa se na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,s}^\tau W_{i,t}$  nalazi

$$\binom{|\alpha \cap \beta|}{i}.$$

Kada promatramo desnu stranu jednakosti (7), sada vidimo da na mjestu  $(\alpha, \beta)$  imamo

$$\sum_{i=0}^t \binom{v-s-t}{v-k-i} \binom{|\alpha \cap \beta|}{i}.$$

Raspišimo dobivenu sumu, koristeći se Vandermondeovom konvolucijom u prvom koraku, tako da dobijemo vrijednost s lijeve strane jednakosti:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^t \binom{v-s-t}{v-k-i} \binom{|\alpha \cap \beta|}{i} &= \binom{v-s-t+|\alpha \cap \beta|}{v-k} \\ &= \binom{v-(s+t-|\alpha \cap \beta|)}{v-k} \\ &= \binom{v-(|\alpha|+|\beta|-|\alpha \cap \beta|)}{v-k} \\ &= \binom{v-|\alpha \cup \beta|}{v-k} \\ &= \binom{v-|\alpha \cup \beta|}{v-|\alpha \cup \beta|-(v-k)} \\ &= \binom{v-|\alpha \cup \beta|}{v-|\alpha \cup \beta|-v+k} \\ &= \binom{v-|\alpha \cup \beta|}{k-|\alpha \cup \beta|}. \end{aligned}$$

Na kraju smo dobili vrijednost na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{s,k} W_{t,k}^\tau$ , stoga smo pokazali da jednakost (7) vrijedi.  $\square$

**Propozicija 2.19.** *Ako je  $s \leq t \leq k$ , onda vrijedi*

$$W_{s,t} W_{t,k} = \binom{k-s}{t-s} W_{s,k}. \quad (8)$$

*Dokaz.* Ako je  $\alpha$   $s$ -člani, a  $\beta$   $k$ -člani podskup od  $V$ , tada se na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{s,t} W_{t,k}$  nalazi broj  $t$ -članih podskupova od  $V$  koji sadrže  $\alpha$  te se nalaze u  $\beta$ . To je upravo jednako  $\binom{k-s}{t-s}$ .  $\square$

Sada ćemo pokazati da zatvorenost na množenje i komutativnost vrijedi za matrice  $C_i$  iz čega će slijediti da je  $\mathcal{A}$  komutativna algebra.

**Teorem 2.20.** *Vrijedi*

$$C_i C_j = \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{k-r}{j-r} C_r. \quad (9)$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} C_i C_j &= W_{i,k}^\tau W_{i,k} W_{j,k}^\tau W_{j,k} \\ &= W_{i,k}^\tau \left( \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} W_{r,i}^\tau W_{r,j} \right) W_{j,k} \\ &= \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} (W_{i,k}^\tau W_{r,i}^\tau) (W_{r,j} W_{j,k}) \\ &= \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} (W_{r,i} W_{i,k})^\tau \binom{k-r}{j-r} W_{r,k} \\ &= \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} \binom{k-r}{i-r} W_{r,k}^\tau \binom{k-r}{j-r} W_{r,k} \\ &= \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{k-r}{j-r} W_{r,k}^\tau W_{r,k} \\ &= \sum_{r \leq i, j} \binom{v-i-j}{v-k-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{k-r}{j-r} C_r \end{aligned}$$

U prvoj i zadnjoj jednakosti koristili smo definiciju matrica  $C_i$ , tj. jednakost (1), u drugoj jednakosti primijenili smo propoziciju 2.18, dok smo u četvrtoj i petoj jednakosti koristili propoziciju 2.19.  $\square$

**Korolar 2.21.**  $C_i C_j = C_j C_i$ , za bilo koje  $i, j$ .

*Dokaz.* Slijedi direktno iz činjenice da je desna strana jednakosti (9) simetrična s obzirom na  $i$  i  $j$ .  $\square$

**Teorem 2.22.**  $\mathcal{A}$  je komutativna algebra.



*Dokaz.* Definirali smo da je  $\mathcal{A} = \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ . Iz propozicije 2.12 i korolara 2.16 slijedi da je  $\mathcal{A} = \langle C_0, \dots, C_k \rangle$ . Također vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i C_i \cdot \sum_{j=0}^k b_j C_j &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (a_i C_i \cdot b_j C_j) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (a_i b_j \cdot C_i C_j), \end{aligned}$$

gdje su  $a_i$  i  $b_j$  neki skalari. U teoremu 2.20 pokazali smo da je  $C_i C_j \in \mathcal{A}$ , a dobivena sumacija je neka linearna kombinacija matrica  $C_i$  pa zaključujemo da je  $\mathcal{A}$  zatvorena na množenje. Iskoristimo li komutativnost matrica  $C_i$  iz korolara 2.21 i nastavimo raspisivati dobiveni umnožak, dobijemo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i C_i \cdot \sum_{j=0}^k b_j C_j &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (a_i b_j \cdot C_j C_i) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (b_j C_j \cdot a_i C_i) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k (b_j C_j \cdot a_i C_i) \\ &= \sum_{j=0}^k b_j C_j \cdot \sum_{i=0}^k a_i C_i. \end{aligned}$$

Dakle, množenje u  $\mathcal{A}$  je komutativno. □

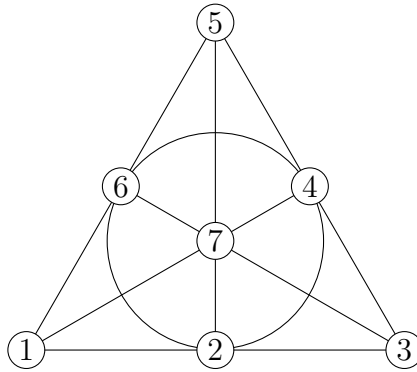
### 3 Dizajni

**Definicija 3.1.** *Neka je  $V$  neki fiksni  $v$ -člani skup te neka je  $\mathcal{B}$  familija  $k$ -članih podskupova od  $V$ . Uređeni par  $(V, \mathcal{B})$  nazivamo dizajn, gdje je  $V$  skup točaka, a  $\mathcal{B}$  skup blokova ili pravaca. Nadalje, kažemo da  $(V, \mathcal{B})$  ima snagu barem  $t$  ako postoji konstanta  $\lambda_t$  takva da svaki  $t$ -člani podskup od  $V$  leži u točno  $\lambda_t$  blokova. Dizajn  $(V, \mathcal{B})$  koji ima snagu barem  $t$  nazivat ćemo  $t$ -( $v, k, \lambda_t$ ) dizajn.*

**Primjer 3.2.** Neka je  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , a  $\mathcal{B}$  sljedeći skup tročlanih podskupova od  $V$ :

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}\}.$$

Tvrdimo da je tada dizajn  $(V, \mathcal{B})$  zapravo 2-(7, 3, 1) dizajn. Zaista, ukupan broj točaka je broj elemenata skupa  $V$ , tj. 7. Također, u svakom bloku leže točno 3 točke. Na kraju, lako se provjeri da su svi dvočlani podskupovi od  $V$  sadržani u točno jednom bloku (npr. skup  $\{2, 5\}$  je sadržan samo u bloku  $\{2, 5, 7\}$ ), odnosno  $t = 2$  i  $\lambda_t = 1$ . Taj dizajn prikazujemo kao Fanovu ravninu na slici 5, koja je konačna projektivna ravnina reda 2 sa 7 točaka i 7 pravaca (blokova). Na svakom pravcu nalaze se 3 točke, a kroz svaku točku prolaze 3 pravca.



Slika 5: Fanova ravnina.

Primijetimo da je broj točaka jednak broju blokova. Takve dizajne nazivamo *simetričnim dizajnima*.

Sada ćemo vidjeti da su matrice  $W_{t,k}$  iz definicije 2.9 važne i za dizajne. Neka je  $V$  neki  $v$ -člani skup,  $\Omega$  familija svih  $k$ -članih podskupova od  $V$ , kao i ranije. Ako je  $\mathcal{B}$  neki podskup od  $\Omega$ , tada ga možemo predstaviti kao vektor stupac  $f$  duljine  $\binom{v}{k}$ . Vektor  $f$  na  $i$ -tom mjestu ima 1, ako je  $i$ -ti element iz  $\Omega$  sadržan u  $\mathcal{B}$ , a inače na tom mjestu ima 0. Vektor  $f$  zovemo *karakterističnim vektorom* dizajna  $(V, \mathcal{B})$ . Dizajn ima snagu barem  $t$  ako i samo ako njegov karakteristični vektor zadovoljava jednadžbu

$$W_{t,k} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}, \quad (10)$$

za neku konstantu  $\lambda_t$ . Ovdje je  $\mathbf{1}$  vektor stupac duljine  $\binom{v}{t}$  kojem su svi unosi 1. Dakle,  $t$ -( $v, k, \lambda_t$ ) dizajni odgovaraju  $\{0, 1\}$ -rješenjima jednadžbe (10).

**Primjer 3.3.** *Prisjetimo se primjera 2.10. Pokažimo da je sada jednostavno naći neki  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$  dizajn. Tražimo  $\{0, 1\}$ -rješenja jednadžbe*

$$W_{1,2} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}.$$

gdje je  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$ . Odatle imamo

$$\begin{bmatrix} f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + f_4 + f_5 \\ f_2 + f_4 + f_6 \\ f_3 + f_5 + f_6 \end{bmatrix} = \lambda_t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jedno rješenje dane jednadžbe je  $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , za  $\lambda_t = 1$ . Taj  $f$  određuje dizajn  $(V, \mathcal{B})$ , odnosno 1-(4, 2, 1) dizajn, gdje je  $\mathcal{B}$  sljedeći skup:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Uistinu, svaki jednočlani podskup od  $V$  nalazi se u točno jednom bloku. Još jedno rješenje dane jednadžbe za  $\lambda_t = 2$  je  $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Taj  $f$  određuje dizajn  $(V, \mathcal{B})$ , odnosno 1-(4, 2, 2) dizajn, gdje je  $\mathcal{B}$  sljedeći skup:

$$\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}.$$

Primijetimo da se svaki jednočlani podskup od  $V$  nalazi u točno dva bloka.

**Lema 3.4.** *Ako je  $s \leq t$  i  $(V, \mathcal{B})$  neki  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$  dizajn, tada je  $(V, \mathcal{B})$  i  $s$ -dizajn, gdje je*

$$\lambda_s = \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \lambda_t.$$

*Dokaz.* Danu tvrdnju ćemo dokazati na dva načina:

1. Neka je  $S \subseteq V$  bilo koji  $s$ -člani skup točaka. Označimo sa  $\lambda_s$  broj blokova koji sadrže  $S$ . Dvostrukim prebrojavanjem parova u skupu  $\{(T, B) : S \subseteq T \subseteq B, |T| = t, B \in \mathcal{B}\}$  dobivamo jednakost  $\binom{v-s}{t-s} \cdot \lambda_t = \lambda_s \cdot \binom{k-s}{t-s}$ . Slijedi da  $\lambda_s$  ne ovisi o izboru skupa  $S$ , nego samo o njegovoj kardinalnosti  $s$  i možemo ga izraziti kao u iskazu leme.

2. Pretpostavimo da je  $(V, \mathcal{B})$  neki  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$  dizajn. Tada karakteristični vektor  $f$  familije  $\mathcal{B}$  zadovoljava jednadžbu (10) te vrijedi:

$$\binom{k-s}{t-s} W_{s,k} \cdot f = W_{s,t} \cdot W_{t,k} \cdot f = W_{s,t} \cdot \lambda_t \mathbf{1} = \lambda_t W_{s,t} \cdot \mathbf{1} = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} \mathbf{1}.$$

U prvoj jednakosti smo koristili propoziciju 2.19, a u drugoj jednakosti smo koristili činjenicu da je  $f$  rješenje jednadžbe (10). Pri definiranju matrice  $W_{s,t}$  rekli smo da ima  $\binom{v-s}{t-s}$  jedinica u svakom retku, što koristimo u zadnjoj jednakosti. Iz gornjih jednakosti slijedi da je

$$W_{s,k} \cdot f = \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \lambda_t \mathbf{1}.$$

$(V, \mathcal{B})$  je sada očito i  $s$ -dizajn, gdje je  $\lambda_s = \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \lambda_t$ .

□

Primijetimo da  $\lambda_s$  mora biti cijeli broj, za bilo koji  $s \in \{0, 1, \dots, t\}$  pa smo dobili i koristan nužan uvjet na parametre  $t$ -dizajna.

Ako je  $\mathcal{B}$  poskup od  $\Omega$ , tada s  $W_i(\mathcal{B})$  označavamo podmatricu matrice  $W_{i,k}$ , formiranu tako da matrica  $W_i(\mathcal{B})$  sadrži redom sve stupce matrice  $W_{i,k}$  koji odgovaraju elementima skupa  $\mathcal{B}$ .

**Primjer 3.5.** Neka je  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ , iz primjera 3.3. Tada matrica  $W_1(\mathcal{B})$  sadrži prvi, treći, četvrti i šesti stupac matrice  $W_{1,2}$ , jer ti stupci redom odgovaraju elementima skupa  $\mathcal{B}$ . Dakle,

$$W_1(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada promotrimo skup  $\mathcal{B}$  iz primjera 3.2. Matrica  $W_{1,3}$  je  $\binom{7}{1} \times \binom{7}{3} = 7 \times 35$  matrica. Matrica  $W_1(\mathcal{B})$  sadrži samo one stupce koji odgovaraju blokovima u  $\mathcal{B}$ . Matricu  $W_1(\mathcal{B})$  nazivamo incidencijskom matricom dizajna  $(V, \mathcal{B})$ . Matrica  $W_{2,3}$  je  $\binom{7}{2} \times \binom{7}{3} = 21 \times 35$  matrica. Matrica  $W_2(\mathcal{B})$  također sadrži samo one stupce koji odgovaraju blokovima u

$\mathcal{B}$ . Dakle,

$$W_1(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ te } W_2(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Teorem 3.6.** *Neka je  $(V, \mathcal{B})$   $t$ -dizajn te  $i + j \leq t$ . Tada vrijedi*

$$|\mathcal{B}|^{-1} W_i(\mathcal{B}) W_j(\mathcal{B})^\tau = \binom{v}{k}^{-1} W_{i,k} W_{j,k}^\tau.$$

*Dokaz.* Označimo s  $b = |\mathcal{B}|$ , što je ujedno broj  $\lambda_0$  iz leme 3.4. Neka je  $\alpha$  neki  $i$ -člani podskup od  $V$ , a  $\beta$  neki  $j$ -člani podskup od  $V$  i neka je  $|\alpha \cup \beta| = s$ . Tada je na mjestu koje odgovara paru  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_i(\mathcal{B}) \cdot W_j(\mathcal{B})^\tau$  broj blokova iz  $\mathcal{B}$  koji su nadskupovi od  $\alpha$  i  $\beta$ , odnosno broj blokova koji sadrže  $\alpha$  i  $\beta$ . Budući da je  $s \leq i + j \leq t$ , taj broj je  $\lambda_s$  iz leme 3.4. S druge strane, na mjestu koje odgovara paru  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau$  nalazi se broj  $k$ -članih podskupova od  $V$  koji su nadskupovi od  $\alpha \cup \beta$ , a taj broj je  $\binom{v-s}{k-s}$ . Da bismo provjerili jednakost iz teorema, treba vidjeti da je  $\frac{\lambda_s}{b} = \frac{\binom{v-s}{k-s}}{\binom{v}{k}}$ . Iz leme 3.4 slijedi da je lijeva strana  $\frac{\lambda_s}{b} = \frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\binom{k}{s}}{\binom{v}{s}}$ , pa se jednakost svodi na  $\binom{v}{k} \binom{k}{s} = \binom{v}{s} \binom{v-s}{k-s}$ , a to smo dokazali u lemi 2.13.  $\square$

Upravo dokazani teorem pomoći će nam pri dokazivanju linearne nezavisnosti redaka matrica  $W_i(\mathcal{B})$ , što ćemo koristiti u dokazu teorema 3.15.

**Definicija 3.7.** Komplement dizajna  $(V, \mathcal{B})$  je dizajn sa skupom vrhova  $V$  i skupom blokova  $V \setminus \beta$ , gdje  $\beta$  ide po svim blokovima iz  $\mathcal{B}$ .

**Definicija 3.8.** Neka su  $t$ ,  $k$  i  $v$  fiksni te uzmimo proizvoljno poredane  $t$ -člane i  $k$ -člane podskupove fiksnog  $v$ -članog skupa. Tada definiramo  $\overline{W}_{t,k}$  kao  $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$  matricu koja na mjestu  $(i, j)$  ima 1, ako su  $i$ -ti  $t$ -člani i  $j$ -ti  $k$ -člani podskupovi od  $V$  međusobno disjunktni, a 0 inače.

Neka je  $\alpha$  neki  $t$ -člani podskup od  $V$ , a  $\beta$  neki  $k$ -člani podskup od  $V$ . Primijetimo da vrijedi  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  ako i samo ako je  $\alpha \subseteq V \setminus \beta$ . Zato matricu  $\overline{W}_{t,k}$  dobijemo permutacijom stupaca matrice  $W_{t,v-k}$  koja odgovara komplementiranju. Štoviše,  $\overline{W}_{k,v-k}$  je permutacijska matrica.

**Primjer 3.9.** Neka je  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  te neka je  $\Omega_1$  familija svih jednočlanih,  $\Omega_2$  familija svih dvočlanih te  $\Omega_3$  familija svih tročlanih podskupova od  $V$ , tj.

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, \\ \Omega_2 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\} \\ \Omega_3 &= \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \\ &\quad \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}.\end{aligned}$$

Tada imamo

$$\overline{W}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

te

$$W_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako se u matrici  $W_{1,3}$  na mjestu  $(\alpha, \gamma)$  nalazi 1, tada je  $\alpha \subseteq \gamma$ . Također, znamo da postoji  $\beta \in \Omega_2$  takav da je  $\gamma = V \setminus \beta$ . Slijedi da su  $\gamma$  i  $\beta$  međusobno disjunktne skupovi, pa su posebno i  $\alpha$  i  $\beta$  međusobno disjunktne skupovi. Dakle, na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $\overline{W}_{1,2}$  također se nalazi 1. Inače, ako se u matrici  $W_{1,3}$  na mjestu  $(\alpha, \gamma)$  nalazi 0, tada  $\alpha$  nije sadržan u  $\gamma$  pa su  $\alpha$  i  $\gamma$  dva međusobno disjunktne skupa. Kako je  $\gamma$  tročlani podskup od  $V$ , znamo da postoji  $\beta \in \Omega_2$ , takav da je  $\beta = V \setminus \gamma$ . S obzirom na to da su  $\alpha$  i  $\gamma$  međusobno disjunktne, slijedi da je  $\alpha \subseteq V \setminus \gamma = \beta$ , odnosno

skupovi  $\alpha$  i  $\beta$  nisu disjunktni pa se na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $\overline{W}_{1,2}$  također nalazi 0. Sada je očito je da se  $\overline{W}_{1,2}$  razlikuje od  $W_{1,3}$  za permutaciju njezinih stupaca, a matrica permutacije je  $10 \times 10$  matrica s jedinicama na sporednoj dijagonali, što upravo odgovara matrici  $\overline{W}_{2,3}$ .

**Lema 3.10.** *Vrijedi*

1.  $\overline{W}_{t,k} = \sum_i (-1)^i W_{i,t}^\tau W_{i,k}$ ,

2.  $W_{t,k} = \sum_i (-1)^i W_{i,t}^\tau \overline{W}_{i,k}$ .

*Dokaz.* Neka je  $\alpha$   $t$ -člani podskup od  $V$  te neka je  $\beta$   $k$ -člani podskup od  $V$ . Na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $\overline{W}_{t,k}$  nalazi se 1, ako je  $\alpha$  disjunktan s  $\beta$ , a 0 inače. Kao što smo već objasnili u dokazu propozicije 2.18, na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,t}^\tau W_{i,k}$  nalazi se  $\binom{|\alpha \cap \beta|}{i}$ . Ako su  $\alpha$  i  $\beta$  međusobno disjunktni skupovi, tada je  $|\alpha \cap \beta| = 0$  pa je  $\binom{|\alpha \cap \beta|}{i} = 0$ , za svaki  $i > 0$ . U slučaju kada je  $i = 0$ , tada je  $\binom{|\alpha \cap \beta|}{i} = 1$ . Ako je  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$  te ako stavimo  $s := |\alpha \cap \beta|$ , tada koristeći binomni teorem dobijemo

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} = (1 + (-1))^s = 0.$$

Stoga desnu stranu jednakosti tvrdnje 1 možemo zapisati kao

$$\sum_i (-1)^i \binom{|\alpha \cap \beta|}{i} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \alpha \cap \beta = \emptyset \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako se s desne strane dobivene jednakosti nalaze odgovarajuće vrijednosti za matricu  $\overline{W}_{t,k}$ , pokazali smo da tvrdnja 1 vrijedi.

Nadalje, znamo da se na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{t,k}$  nalazi 1 ako je  $t$ -člani podskup od  $V$  sadržan u  $k$ -članom podskupu od  $V$ , a inače se na tom mjestu nalazi 0. Na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,t}^\tau \overline{W}_{i,k}$  nalazi se broj  $i$ -članih podskupova od  $V$  koji su podskupovi od  $\alpha$ , a disjunktni su s  $\beta$ . Takvih skupova ima  $\binom{|\alpha \setminus \beta|}{i}$ . Ako je  $\alpha \subseteq \beta$ , tada je  $|\alpha \setminus \beta| = 0$ , pa je  $\binom{|\alpha \setminus \beta|}{i} = 0$ , za svaki  $i > 0$ . U slučaju kada je  $i = 0$ , tada je  $\binom{|\alpha \setminus \beta|}{i} = 1$ . Inače, ako  $\alpha$  nije podskup skupa  $\beta$  te  $r := |\alpha \setminus \beta|$ , koristeći binomni teorem dobijemo

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} = (1 + (-1))^r = 0.$$

Stoga desnu stranu jednakosti tvrdnje 2 možemo zapisati kao

$$\sum_i (-1)^i \binom{|\alpha \setminus \beta|}{i} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \alpha \subseteq \beta \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

S desne strane oĉito imamo odgovarajuće vrijednosti za matricu  $W_{t,k}$  pa smo dokazali tvrdnju 2.  $\square$

**Lema 3.11.** *Vrijedi*

$$W_{i,t}\overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-i}{t-i}\overline{W}_{i,k}.$$

*Dokaz.* Neka je  $V$  neki fiksni skup od  $v$  elemenata te neka je  $\alpha$   $i$ -ĉlani i  $\beta$   $k$ -ĉlani podskup od  $V$ . Tada se na mjestu  $(\alpha, \beta)$  u matrici  $W_{i,t}\overline{W}_{t,k}$  nalazi broj  $t$ -ĉlanih podskupova od  $V$  koji sadrže  $\alpha$  i disjunktني su s  $\beta$ . Ako  $\alpha$  i  $\beta$  nisu disjunktني, takvi  $t$ -ĉlani podskupovi ne postoje, pa je na lijevoj strani 0, kao i u matrici  $\overline{W}_{i,k}$  na desnoj strani. Ako su  $\alpha$  i  $\beta$  disjunktني, od  $v-k-i$  elemenata koji nisu niti u  $\alpha$  niti u  $\beta$  biramo  $t-i$  elemenata da bismo nadopunili  $\alpha$  do  $t$ -ĉlanog podskupa disjunktنيog s  $\beta$ . Tada je na lijevoj i na desnoj strani  $\binom{v-k-i}{t-i}$ .  $\square$

**Lema 3.12.** *Ako je  $t \leq k \leq v-t$ , onda je prostor razapet retcima matrice  $W_{t,k}$  jednak prostoru razapetom retcima matrice  $\overline{W}_{t,k}$  nad  $\mathbb{Q}$ .*

*Dokaz.* Potrebno je pokazati da je svaki redak matrice  $\overline{W}_{t,k}$  linearna kombinacija redaka matrice  $W_{t,k}$  te da je svaki redak matrice  $W_{t,k}$  linearna kombinacija redaka matrice  $\overline{W}_{t,k}$ . Iz propozicije 2.19 imamo

$$W_{i,t}W_{t,k} = \binom{k-i}{t-i}W_{i,k}.$$

Kada podijelimo gornju jednakost sa  $\binom{k-i}{t-i}$  dobijemo

$$W_{i,k} = \binom{k-i}{t-i}^{-1}W_{i,t}W_{t,k},$$

pa iz tvrdnje 1 leme 3.10 slijedi

$$\overline{W}_{t,k} = \sum_i (-1)^i W_{i,t}^\tau \binom{k-i}{t-i}^{-1} W_{i,t}W_{t,k}.$$

Kada sredimo dobivenu jednakost dobijemo

$$\overline{W}_{t,k} = \left( \sum_i (-1)^i \binom{k-i}{t-i}^{-1} W_{i,t}^\tau W_{i,t} \right) W_{t,k},$$

jer matrica  $W_{t,k}$  ne ovisi o  $i$  te je  $W_{i,t}^\tau \binom{k-i}{t-i}^{-1} = \binom{k-i}{t-i}^{-1} W_{i,t}^\tau$ . Iz toga slijedi da je svaki redak matrice  $\overline{W}_{t,k}$  linearna kombinacija redaka matrice  $W_{t,k}$ . Nadalje, iz leme 3.11 vrijedi

$$W_{i,t}\overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-i}{t-i}\overline{W}_{i,k},$$



pa tvrdnja 2 leme 3.10 povlači jednakost

$$W_{t,k} = \left( \sum_i (-1)^i \binom{v-k-i}{t-i}^{-1} W_{i,t}^\tau W_{i,t} \right) \overline{W}_{t,k}.$$

Dakle, svaki redak matrice  $W_{t,k}$  možemo prikazati kao linearnu kombinaciju redaka matrice  $\overline{W}_{t,k}$ . □

**Teorem 3.13.** *Dizajn i njegov komplement imaju jednaku snagu.*

*Dokaz.* U lemi 3.12 smo pokazali da postoje matrice  $G$  i  $H$  takve da vrijedi

$$\overline{W}_{t,k} = G \cdot W_{t,k} \quad \text{i} \quad W_{t,k} = H \cdot \overline{W}_{t,k}.$$

Sume redaka matrica  $G$  i  $H$  su konstante pa ako vrijedi da je  $W_{t,k} \cdot x = \lambda \mathbf{1}$ , tada je  $\overline{W}_{t,k} \cdot x = G \cdot W_{t,k} \cdot x = G \cdot \lambda \mathbf{1} = \lambda G \cdot \mathbf{1} = c \mathbf{1}$ , za neku konstantu  $c$ . S obzirom na to da se matrica  $W_{t,v-k}$  dobiva iz matrice  $\overline{W}_{t,k}$  permutacijom njezinih stupaca, slijedi da komplement dizajna snage  $t$  ima snagu barem  $t$ . □

**Teorem 3.14.** *Ako je  $t \leq k$ , rang matrice  $W_{t,k}$  nad  $\mathbb{Q}$  je  $\min\{\binom{v}{t}, \binom{v}{k}\}$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $t \leq k \leq v - t$ . Prvo razmotrimo slučaj kad je  $v = t + k$ . Tada su  $W_{t,v-t}$  i  $\overline{W}_{t,k}$  kvadratne matrice istog reda. Kako je  $\overline{W}_{t,v-t}$  permutacijska matrica, ona je regularna. S obzirom da su prostori razapeti retcima matrica  $\overline{W}_{t,v-t}$  i  $W_{t,v-t}$  jednaki, što smo pokazali u lemi 3.12, vrijedi da one imaju isti rang pa je matrica  $W_{t,v-t}$  regularna. Sada razmotrimo slučaj kada je  $t \leq h \leq v - t$ . Tada iz leme 3.11 imamo

$$W_{t,h} W_{h,v-t} = \binom{v-2t}{h-t} W_{t,v-t}.$$

Kako je matrica s desne strane jednadžbe regularna, slijedi da su retci matrice  $W_{t,h}$  linearno nezavisni. □

**Teorem 3.15** (Ray-Chaudhuri i Wilson). *Neka je  $(V, \mathcal{B})$   $t$ -dizajn takav da je  $t < k \leq v - t$ . Tada je  $|\mathcal{B}| \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}$ .*

*Dokaz.* Označimo  $i := \lfloor t/2 \rfloor$ . Dovoljno je pokazati da  $W_i(\mathcal{B})$  ima linearno nezavisne retke. Kako je  $\frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$ , iz teorema 3.6 slijedi jednakost

$$|\mathcal{B}|^{-1} W_i(\mathcal{B}) W_i(\mathcal{B})^\tau = \binom{v}{k}^{-1} W_{i,k} W_{i,k}^\tau.$$

U teoremu 3.14 pokazali smo da su za  $k \leq v - t$  retci matrice  $W_{i,k}$  linearno nezavisni pa je  $W_{i,k}W_{i,k}^\tau$  regularna. Slijedi da je matrica  $W_i(\mathcal{B})W_i(\mathcal{B})^\tau$  regularna pa su retci matrice  $W_i(\mathcal{B})$  linearno nezavisni.  $\square$

**Korolar 3.16** (Fisherova nejednakost). *Neka je  $(V, \mathcal{B})$  2-dizajn takav da je  $2 < k \leq v - 2$ . Tada je  $|\mathcal{B}| \geq v$ .*

*Dokaz.* Slijedi iz teorema 3.15, za  $t = 2$ .  $\square$

**Korolar 3.17.** *Ako je  $(V, \mathcal{B})$  dizajn snage barem  $2s$ , tada su retci matrice  $W_s(\mathcal{B})$  linearno nezavisni.*

*Dokaz.* Slijedi iz dokaza teorema 3.15.  $\square$

## 4 Asocijacijske sheme

Dosad smo promatrali Johnsonove grafove i pokazali koja svojstva zadovoljavaju njihove matrice susjedstva. Ukoliko promatramo skup bilo kojih grafova s odgovarajućim svojstvima, doći ćemo do definicije asocijacijske sheme koju će sada biti jednostavnije razumjeti.

**Definicija 4.1.** *Asocijacijska shema s  $d$  klasa na  $n$ -članom skupu  $V$  je skup grafova  $G_0, G_1, \dots, G_d$  sa skupom vrhova  $V$ , takav da vrijedi:*

- *Graf  $G_0$  sadrži samo petlje, odnosno sve jednočlane bridove.*
- *Ako su  $x$  i  $y$  dva različita vrha u  $V$ , tada postoji točno jedan graf  $G_i$  u kojem je  $\{x, y\}$  brid.*
- *Neka su  $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$  i  $x, y \in V$  elementi takvi da je  $\{x, y\}$  brid u  $G_k$ . Tada broj elemenata  $z \in V$  takvih da je  $\{x, z\}$  brid u  $G_i$  te  $\{y, z\}$  brid u  $G_j$  ne ovisi o izboru elemenata  $x$  i  $y$ , nego samo o indeksima  $i, j, k$ . Taj broj je nenegativna konstanta  $p_{i,j}^k$  koju zovemo presječnim brojem sheme.*

Kažemo da je graf  $G_i$   $i$ -ta klasa sheme, tj. klasu poistovjećujemo s grafom. Zajednički skup vrhova grafova  $G_i$  nazivamo skupom vrhova sheme. Za dva susjedna vrha u grafu  $G_i$  kažemo da su  $i$ -asocirani. Asocijacijska shema određuje particiju skupa bridova potpunog grafa na  $d$  razapinjućih podgrafova  $G_1, \dots, G_d$ . Definiciju 4.1 možemo izreći i u terminima matrica. Za matrice  $A_0, \dots, A_d$ , koje su redom matrice susjedstva grafova  $G_0, \dots, G_d$  vrijedi:

1.  $A_i^\tau = A_i, i = 0, \dots, d,$

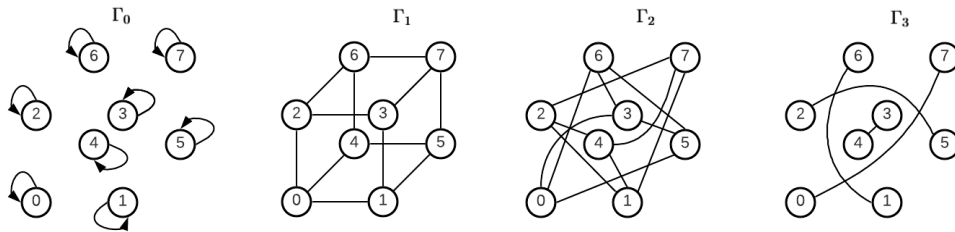
2.  $A_0 = I$ ,
3.  $\sum_{i=0}^d A_i = J$ ,
4.  $A_i A_j = A_j A_i$ , za sve  $i, j$ ,
5. Produkt matrica  $A_i A_j$  je linearna kombinacija matrica  $A_0, \dots, A_d$ , za sve  $i, j$ .

Skup  $\{0, 1\}$ -matrica tipa  $n \times n$ , različitih od nulmatrice, koje zadovoljavaju gore navedene uvjete, nazivamo asocijacijskom shemom s  $d$  klasa. Zbog 3. svojstva očito je da su matrice  $A_0, \dots, A_d$  linearno nezavisne, pa razapinju potprostor vektorskog prostora  $M_n(\mathbb{R})$  dimenzije  $d + 1$ . Iz 4. i 5. svojstva slijedi da je taj vektorski prostor komutativna algebra s jedinicom koju nazivamo Bose-Mesnerovom algebrom sheme. Objasnimo još vezu između 5. svojstva te presječnih brojeva iz definicije 4.1. Matricu  $A_i A_j$  možemo prikazati kao linearnu kombinaciju matrica  $A_0, \dots, A_d$ , tj.

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^d \alpha_{i,j}^k A_k.$$

S lijeve strane jednakosti imamo cjelobrojnu matricu s nenegativnim vrijednostima te svaka matrica  $A_i$  ima jedinice na različitim mjestima pa zaključujemo da su koeficijenti  $\alpha_{i,j}^k$  nužno nenegativni cijeli brojevi. Nadalje, na mjestu  $(x, y)$  u matrici  $A_i A_j$  nalazi se broj vrhova  $z$  koji su susjedi s  $x$  u  $G_i$  te susjedi s  $y$  u  $G_j$ . Možemo zaključiti da je takva interpretacija ekvivalentna 5. svojstvu iz definicije 4.1, tj. koeficijenti  $\alpha_{i,j}^k$  su presječni brojevi sheme.

**Primjer 4.2.** Neka je  $V = \{0, \dots, 7\}$ . Tada grafovi  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_3$  sa slike 6 čine asocijacijsku shemu poznatu pod nazivom 3-kocka.



Slika 6: Četiri grafa 3-kocke.

Uzmimo sada za primjer brid  $\{0, 7\}$  iz grafa  $\Gamma_3$ . Provjerimo koliko iznosi presječni broj  $p_{1,2}^3$ . Vrh 0 je u grafu  $\Gamma_1$  susjed s tri vrha, tj. u grafu  $\Gamma_1$  imamo bridove  $\{0, 1\}$ ,

$\{0, 2\}$  te  $\{0, 4\}$ . Pogledajmo postoje li u grafu  $\Gamma_2$  bridovi  $\{1, 7\}$ ,  $\{2, 7\}$  te  $\{4, 7\}$ . Vidimo da ti bridovi postoje, stoga postoje tri vrha  $z$  takva da je  $\{0, z\}$  brid u  $\Gamma_1$  te  $\{z, 7\}$  brid u  $\Gamma_3$ . Lako se provjeri da isto vrijedi za sve bridove u  $\Gamma_3$ , odnosno neovisno o odabiru brida u  $\Gamma_3$ , vrijedi da je  $p_{1,2}^3 = 3$ . Uvjerimo se sada još da je ekvivalentna definicija s matricama ispravna, tako što ćemo provjeriti umnožak matrica susjedstva grafova  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , odnosno  $A_1$  i  $A_2$ . Tvrđimo da je  $A_1 \cdot A_2 = \sum_{k=0}^3 p_{1,2}^k A_k$ . Iz grafova na slici 6 vidimo da je  $p_{1,2}^0 = 0$ ,  $p_{1,2}^1 = 2$ ,  $p_{1,2}^2 = 0$ , a pokazali smo da je  $p_{1,2}^3 = 3$ . Dakle, imamo:

$$A_1 \cdot A_2 = p_{1,2}^0 A_0 + p_{1,2}^1 A_1 + p_{1,2}^2 A_2 + p_{1,2}^3 A_3 = 2A_1 + 3A_3.$$

Uistinu,

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 + 3A_3.$$

**Primjer 4.3.** Prethodno smo definirali matrice  $A_1, \dots, A_k$  kao matrice susjedstva Johnsonovih grafova  $J(v, k, i)$ . Matrice  $A_1, \dots, A_k$  zajedno s matricom  $A_0$  čine asocijacijsku shemu s  $k$  klasa na skupu od  $n = \binom{v}{k}$  vrhova. Stoga je skup koji sadrži grafove  $G_i = J(v, k, i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  asocijacijska shema koju nazivamo Johnsonovom shemom te označavamo s  $J(v, k)$ . Dakle,  $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_k \rangle$  je Bose-Mesnerova algebra Johnsonove sheme.

**Primjer 4.4.** Drugi važan primjer asocijacijske sheme je Hammingova shema  $H(k, q)$ . Skup vrhova ove sheme su sve riječi duljine  $k$  nad alfabetom veličine  $q$ . Hammingova udaljenost između dvije riječi  $u$  i  $v$  je broj indeksa  $r$  takvih da je  $u_r \neq v_r$ . Neka je  $G_i$  graf s riječima kao vrhovima. Dva vrha su susjedna ako i samo ako je Hammingova udaljenost među njima  $i$ . Tada skup koji sadrži grafove  $G_0, \dots, G_k$  čini asocijacijsku shemu s  $k$  klasa na skupu od  $n = q^k$  vrhova koju nazivamo Hammingovom shemom. Primijetimo da su dva vrha susjedna u  $G_i$  ako i samo ako su na udaljenosti  $i$  u grafu  $G_1$ . Hammingova shema je veoma važna u teoriji kodiranja. Uočimo da je primjer 4.2 zapravo Hammingova shema  $H(3, 2)$ . U toj shemi imamo vrhove koji su riječi duljine 3 nad alfabetom duljine 2. Ukoliko uzmemo za alfabet  $\{0, 1\}$ , tada su vrhovi riječi 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 te 111. Pridružimo li svakoj riječi odgovarajući broj u dekadskom sustavu, dobivamo upravo vrhove u grafovima  $\Gamma_i$ . Očito je i da su bridovi u grafovima  $\Gamma_i$  odgovarajući. Primjerice, u grafu  $G_3$  Hammingove sheme dva su vrha

susjedna ako i samo ako je Hammingova udaljenost među njima 3. Iz toga slijedi da je skup bridova grafa  $G_3$  jednak  $\{\{000, 111\}, \{001, 110\}, \{010, 101\}, \{011, 100\}\}$ , što je ekvivalentno bridovima  $\{\{0, 7\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$  u  $\Gamma_3$ .

**Primjer 4.5.** Skup vrhova sheme  $J(n, k)$  možemo povezati sa skupom riječi težine  $k$  u Hammingovoj shemi  $H(n, 2)$ . Kažemo da je riječ  $w$  težine  $k$ , ako se sastoji od  $k$  znakova različitih od 0. Neka je  $n = 4$ ,  $k = 3$  te uzmimo alfabet  $\{0, 1\}$ . Tada je skup riječi težine 2 iz skupa vrhova Hammingove sheme  $H(4, 2)$  jednak  $\{0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100\}$ . S druge strane, prisjetimo se primjera 2.4 te skup riječi težine 2 interpretirajmo tako da svaka riječ određuje brid u  $J(4, 2)$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 0011 &\rightarrow \{c, d\} \\ 0101 &\rightarrow \{b, d\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tada očitno dobijemo pripadni skup bridova  $\Omega$ .

Pokazali smo već da je Bose-Mesnerova algebra  $\mathcal{A}$  asocijacijske sheme zatvorena na matricno množenje. Sada ćemo definirati Schurov produkt te pokazati da je  $\mathcal{A}$  zatvorena i na takvo množenje.

**Definicija 4.6.** Neka su  $A$  i  $B$  dvije matrice istih dimenzija. Schurov produkt matrica  $A$  i  $B$  označava se sa  $A \circ B$  i definira kao

$$(A \circ B)_{i,j} = (A)_{i,j}(B)_{i,j}.$$

Schurov produkt često se naziva i Hadamardov produkt.

**Propozicija 4.7.** Bose-Mesnerova algebra je zatvorena na Schurov produkt.

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$  Bose-Mesnerova algebra dimenzije  $d+1$ . Matrice  $A_i$  su matrice asocijacijske sheme s  $d$  klasa pa vrijedi

$$\sum_{i=0}^d A_i = J.$$

Iz toga vidimo da matrica  $J$ , koja je neutralni element za Schurovo množenje, leži u  $\mathcal{A}$ . Vrijedi sljedeća jednakost:

$$A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (11)$$

Element na mjestu  $(i, j)$  matrice  $A \circ B$  jednak je produktu elemenata na mjestu  $(i, j)$  matrica  $A$  i  $B$ . Pokažimo da je tada Schurov produkt dvije linearne kombinacije matrica  $A_0, \dots, A_d$  također linearna kombinacija tih matrica:

$$\left( \sum_{i=0}^d \alpha_i A_i \right) \circ \left( \sum_{j=0}^d \beta_j A_j \right) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d \alpha_i \beta_j A_i \circ A_j = \sum_{i=0}^d \alpha_i^2 A_i \in \mathcal{A}.$$

Dakle, algebra razapeta matricama  $A_0, \dots, A_d$  je zatvorena na Schurov produkt pa je Bose-Mesnerova algebra  $\mathcal{A}$  zatvorena na Schurov produkt.  $\square$

Iz (11) slijedi da su matrice  $A_i$  idempotentne s obzirom na Schurov produkt pa ih zovemo Schurovim idempotentama sheme. Sljedeći teorem ćemo samo iskazati kao važnu karakterizaciju Bose-Mesnerove algebre, a dokaz može se naći u knjizi [1] na 57. stranici.

**Teorem 4.8.** *Svaki potprostor vektorskog prostora simetričnih matrica koji sadrži  $I$  i  $J$  te je zatvoren na matrično i Schurovo množenje je Bose-Mesnerova algebra neke asocijacijske sheme.*

Osim matričnog i Schurovog produkta, na Bose-Mesnerovoj algebri možemo definirati i skalarni produkt.

**Propozicija 4.9.** *Bose-Mesnerova algebra asocijacijske sheme je unitaran prostor, sa skalarnim produktom*

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB),$$

gdje  $AB$  predstavlja matrično množenje.

*Dokaz.* Produkt  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\tau)$  je skalarni produkt na vektorskom prostoru matrica  $M_n(\mathbb{R})$ , a u našem slučaju, zbog simetričnosti matrica asocijacijske sheme, vrijedi jednakost  $\text{tr}(AB^\tau) = \text{tr}(AB)$  pa je zadani produkt također skalaran.  $\square$

Prethodno definirani skalarni produkt alternativno možemo zapisati pomoću Schurovog produkta.

**Propozicija 4.10.** *Neka je  $\text{sum}(A)$  suma svih elemenata matrice  $A$ . Tada za svake dvije simetrične matrice  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  vrijedi:*

$$\langle A, B \rangle = \text{sum}(A \circ B).$$

*Dokaz.* Vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \langle A, B \rangle &= \text{tr}(AB) \\
 &= \text{tr} \left( \left[ \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j} \right] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{i,k} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A \circ B)_{i,k} \\
 &= \text{sum}(A \circ B).
 \end{aligned}$$

□

Schurove idempotente  $A_i$  su u parovima ortogonalne s obzirom na Schurov produkt te čine bazu za  $\mathcal{A}$ . Pokazat ćemo da postoji druga baza za  $\mathcal{A}$  koju čine idempotentne matrice koje su u parovima ortogonalne s obzirom na matrično množenje. Prije toga, prisjetimo se nekih pojmova iz linearne algebre. Neka su  $A, B \in M_n$  kvadratne matrice istog reda. Za matricu  $A$  kažemo da je regularna ako postoji matrica  $B$  takva da vrijedi  $AB = BA = I$ . Tada matricu  $B$  nazivamo inverz matrice  $A$  i označavamo s  $A^{-1}$ . Kažemo da je matrica  $A$  ortogonalna ako vrijedi  $AA^T = A^T A = I$ . Tada je očito svaka ortogonalna matrica regularna, gdje je  $A^{-1} = A^T$ . Kažemo da je matrica  $A$  slična matrici  $B$ , ako postoji regularna matrica  $T \in M_n$  takva da je  $B = T^{-1}AT$ . Za kvadratnu matricu kažemo da je dijagonalizabilna ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici. Za daljnje tvrdnje potrebno je još iskazati sljedeći važan teorem, čiji se dokaz može naći u [15].

**Teorem 4.11.** *Kvadratnu realnu matricu  $A$  možemo prikazati u Schurovoj formi  $A = URU^T$ , gdje je  $U$  ortogonalna, a  $R$  gornjetrokutasta matrica.*

Sada ćemo vidjeti da se sve simetrične matrice mogu dijagonalizirati. Štoviše, za simetrične matrice postoje ortogonalne matrice koje ih dijagonaliziraju.

**Teorem 4.12.** *Matrica  $A \in M_n$  se može ortogonalno dijagonalizirati ako i samo ako je simetrična.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da se  $A$  može ortogonalno dijagonalizirati. To znači da postoji ortogonalna matrica  $L$  takva je  $D = L^T A L$  dijagonalna. Pomnožimo sada taj izraz s  $L$  slijeva i  $L^T$  zdesna. Tada imamo:

$$L D L^T = L L^T A L L^T.$$

S obzirom da je  $L$  ortogonalna, onda vrijedi da je  $L L^T = I$  pa dobijemo:

$$L D L^T = A.$$

Pokažimo sada da to povlači da je matrica  $A$  nužno simetrična.

$$A^T = L^T D^T (L^T)^T = L^T D L = A.$$

S druge strane, pretpostavimo da je  $A$  simetrična i pokažimo da se ona tada može ortogonalno dijagonalizirati. Matricu  $A$  možemo zapisati u Schurovoj formi pa imamo da je  $A = L R L^T$ , gdje je  $L$  ortogonalna i  $R$  gornjetrokutasta matrica. Zbog pretpostavke da je  $A$  simetrična, vrijedi:

$$L R L^T = A = A^T = (L^T)^T R^T L^T = L R^T L^T.$$

Da bi jednakost vrijedila, gornjetrokutasta matrica  $R$  mora biti simetrična, iz čega slijedi da je dijagonalna.  $\square$

**Korolar 4.13.**  $\{0, 1\}$ -matrice  $A_0, \dots, A_d$  dimenzije  $n \times n$  koje čine asocijacijsku shemu mogu se ortogonalno dijagonalizirati.

*Dokaz.* S obzirom da su matrice  $A_0, \dots, A_d$  simetrične, tvrdnja slijedi iz teorema 4.12.  $\square$

Iskažimo sada važan teorem o simultanoj dijagonalizaciji, čiji se dokaz može pronaći u [2] na 9. stranici.

**Teorem 4.14** (Simultana dijagonalizacija). *Neka su  $A_1, \dots, A_r$  realne matrice takve da je svaka matrica  $A_i$  dijagonalizabilna. Tada se  $A_1, \dots, A_r$  mogu simultano dijagonalizirati ako i samo ako matrice  $A_i$  međusobno komutiraju.*

**Teorem 4.15.** *Neka  $\{0, 1\}$ -matrice  $A_0, \dots, A_d$  dimenzije  $n \times n$  čine asocijacijsku shemu te neka je  $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$  pripadna Bose-Mesnerova algebra dimenzije  $d + 1$ . Tada postoji skup u parovima ortogonalnih idempotentnih matrica  $E_0, \dots, E_d$  i realni brojevi  $p_i(j)$  takvi da:*

1.  $\sum_{j=0}^d E_j = I,$



2.  $A_i E_j = p_i(j) E_j$ ,
3.  $E_0 = \frac{1}{n} J$ ,
4.  $\{E_0, \dots, E_d\}$  je baza za  $\mathcal{A}$ .

*Dokaz.* Iz teorema 4.14 slijedi da postoji ortogonalna matrica  $L$ , takva da su  $D_i := L^T A_i L$  dijagonalne matrice, za  $i = 0, \dots, d$ . Matrice  $D_i$  razapinju  $(d+1)$ -dimenzionalnu algebru  $\mathcal{B}$  dijagonalnih matrica izomorfnu Bose-Mesnerovoj algebri  $\mathcal{A}$ . Na dijagonali matrice  $D_i$  nalaze se svojstvene vrijednosti matrice  $A_i$ . Promotrimo sada elemente na dijagonalama matrica  $D_0, \dots, D_d$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
s_0 &:= (\lambda_{0,0}, \lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{d,0}) \\
s_1 &:= (\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{d,1}) \\
&\vdots \\
s_d &:= (\lambda_{0,d}, \lambda_{1,d}, \dots, \lambda_{d,d}), \\
&\vdots \\
s_n &:= (\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{d,n}),
\end{aligned}$$

gdje je  $\lambda_{i,j}$   $j$ -ta vrijednost na dijagonali matrice  $D_i$ . Među  $n$  uređenih  $(d+1)$ -torki postoji  $d+1$  različitih zbog dimenzije algebre  $\mathcal{B}$ ; označimo ih s  $t_0, \dots, t_d$ . Definiramo matricu  $F_i$  tako da se na mjestu  $(j, j)$  nalazi 1, ako je  $s_j = t_i$ . Na preostalim mjestima se nalaze nule. Za matrice  $F_i$  vrijedi da je  $\sum_{i=0}^d F_i = I$  te  $F_i F_j = 0$ , za sve  $i \neq j$ . Matrice  $F_i$  su  $\{0, 1\}$ -matrice koje čine bazu algebre  $\mathcal{B}$ . Sada definiramo matrice  $E_i$  kao  $E_i := L F_i L^T$ . Tada za matrice  $E_i$  vrijedi:

$$E_i E_j = \begin{cases} E_i, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i

$$\sum_{j=0}^d E_j = I. \tag{12}$$

Dakle, matrice  $E_i$  su idempotentne i u parovima ortogonalne s obzirom na obično matrično množenje. Neka je  $U_i = \{E_i x : x \in \mathbb{R}^n\}$ . Za vektore  $u \in U_i$ , zbog idempotentnosti matrica  $E_i$ , postoji vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  takav da je:

$$u = E_i v = E_i^2 v = E_i(E_i v) = E_i u.$$

Stoga, vektore iz  $U_i$  matrica  $E_i$  ostavlja fiksnima. Za  $w \in U_i^\perp$  vrijedi:

$$\langle E_i w, E_i w \rangle = \langle E_i^2 w, w \rangle = \langle E_i w, w \rangle = 0,$$

jer je  $E_i w \in U_i$ , a  $w \in U_i^\perp$  pa je  $E_i w$  nulvektor. Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  možemo zapisati kao  $x = y + z$ , gdje je  $y \in U_i$  te  $z \in U_i^\perp$ . Tada vrijedi:

$$E_i x = E_i y + E_i z = y + E_i z.$$

S obzirom da je  $E_i z$  nulvektor, slijedi da je  $y = E_i x$  pa matrica  $E_i$  predstavlja ortogonalnu projekciju na potprostor od  $\mathbb{R}^n$ . Pokažimo da to mora biti svojstveni potprostor za bilo koju matricu  $A \in \mathcal{A}$ , odnosno  $A = \sum_{j=0}^d \alpha_j E_j$ . Neka je  $y \in U_i$  pa je  $y = E_i x$ , za  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pomnožimo li  $y$  s  $A$  slijeva, dobijemo:

$$Ay = AE_i x = \sum_{j=0}^d \alpha_j E_j E_i x = \alpha_i E_i E_i x = \alpha_i E_i x = \alpha_i y.$$

U trećoj jednakosti iskoristili smo ortogonalnost matrica  $E_i$ , tj.  $E_i E_j = 0$ , za  $i \neq j$ . Jedini sumandi koji ostaju su za  $j = i$ , a onda u četvrtoj jednakosti koristimo idempotentnost matrica  $E_i$ , zbog čega je  $E_i E_i = E_i$ . Na kraju,  $\alpha_i y$  je također u  $U_i$  pa zaključujemo da matrica  $A$  preslikava prostor  $U_i$  u njega samoga. Onda postoje realni brojevi  $p_i(j)$  takvi da je

$$A_i E_j = p_i(j) E_j \quad (13)$$

pa iz (12) dobijemo:

$$A_i = A_i I = A_i \sum_j E_j = \sum_j A_i E_j = \sum_j p_i(j) E_j, \quad i = 0, \dots, d. \quad (14)$$

Zaključujemo da je svaka matrica  $A_i$  linearna kombinacija matrica  $E_j$ . S obzirom da su  $E_j$  u parovima ortogonalne, one su linearno nezavisne pa je  $\{E_0, \dots, E_d\}$  baza za  $\mathcal{A}$ . Preostalo nam je pokazati da je  $E_0 = \frac{1}{n} J$ . Znamo da je  $J \in \mathcal{A}$  pa slijedi da  $J$  komutira sa svakom idempotentom  $E_j$ . Stoga,  $J E_j = \gamma E_j$ , gdje je  $\gamma$  suma stupca matrice  $E_j$ . Također,  $\gamma$  mora biti svojstvena vrijednost od  $J$  pa je  $\gamma = 0$  ili  $\gamma = n$ . Iz toga zaključujemo da jedna od idempotenti  $E_j$  mora biti jednaka  $\frac{1}{n} J$ , a možemo pretpostaviti da je to  $E_0$ . □

Sve matrice  $E_i$  leže u  $\mathcal{A}$  pa također postoje i realni brojevi  $q_i(j)$  takvi da je

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_j q_i(j) A_j, \quad i = 0, \dots, d. \quad (15)$$

Dakle,  $E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j) A_j$  te  $A_i \circ E_j = \frac{1}{n} q_j(i) A_i$ .

**Definicija 4.16.** Realne brojeve  $p_i(j)$  nazivamo svojstvenim vrijednostima, a realne brojeve  $q_i(j)$  zovemo dualnim svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme. Matrice  $E_i$  nazivamo glavnim idempotentama sheme.

Sada nas zanima odnos između svojstvenih i dualnih svojstvenih vrijednosti sheme.

**Definicija 4.17.** Neka je  $P$   $(d + 1) \times (d + 1)$  matrica takva da je  $(P)_{ij} = p_j(i)$ . Matricu  $P$  nazivamo matricom svojstvenih vrijednosti asocijacijske sheme. Također definiramo matricu  $Q$  s  $(Q)_{ij} = q_j(i)$  te je nazivamo matricom dualnih svojstvenih vrijednosti asocijacijske sheme.

Ako u (14) uvrstimo (15) umjesto  $E_j$ , dobivamo  $\sum_{k=0}^d p_i(k)q_k(j) = n\delta_{ij}$ , tj.

$$PQ = nI. \quad (16)$$

Postoji još jedna važna veza između  $P$  i  $Q$ .

**Definicija 4.18.** Stupanj ili valenciju vrha  $x$  grafa  $G$  definiramo kao broj bridova grafa  $G$  koji sadrže vrh  $x$ . Ukoliko svaki vrh grafa ima isti stupanj, kažemo da je graf regularan.

Kada je graf regularan onda možemo pričati o stupnju grafa, pritom misleći na stupanj svakog vrha tog grafa. Neka je  $n_i$  zbroj elemenata u retku matrice  $A_i$ , tj. stupanj grafa  $G_i$ , za  $i > 0$ . Neka je  $m_j$  dimenzija svojstvenog potprostora koji je jednak prostoru  $U_i$  razapetom stupcima matrice  $E_j$ . Tada je očito  $m_j$  rang matrice  $E_j$ . Kako je  $E_j$  idempotentna, onda vrijedi da je  $E_j^2 - E_j = 0$  pa su sve svojstvene vrijednosti jednake 0 ili 1. Iz toga slijedi da je  $\text{tr}(E_j) = r(E_j) = m_j$ .

**Definicija 4.19.** Realne brojeve  $m_0, \dots, m_d$  nazivamo kratnostima sheme.

Sada koristeći jednakost (13) te propozicije 4.9 i 4.10 imamo:

$$p_i(j)\text{tr}(E_j) = \text{tr}(p_i(j)E_j) = \text{tr}(A_i E_j) = \langle A_i, E_j \rangle = \text{sum}(A_i \circ E_j).$$

Vidjeli smo ranije da je  $A_i \circ E_j = p_i(j)E_j$  te  $m_j = \text{tr}(E_j)$  pa konačno vrijedi:

$$p_i(j)m_j = p_i(j)\text{tr}(E_j) = \frac{1}{n}q_j(i)\text{sum}(A_i). \quad (17)$$

Znamo da  $\text{sum}(A_i)$  predstavlja sumu svih elemenata matrice  $A_i$ . Tada je  $\frac{1}{n}\text{sum}(A_i)$  suma retka matrice  $A_i$ , odnosno  $n_i$ . Gornja jednakost može se zapisati kao

$$p_i(j)m_j = q_j(i)n_i.$$

Označimo s  $\Delta_n$   $(d+1) \times (d+1)$  dijagonalnu matricu s brojevima  $n_i$  na dijagonali te s  $\Delta_m$   $(d+1) \times (d+1)$  dijagonalnu matricu s brojevima  $m_i$  na dijagonali. Tada prethodnu jednakost možemo zapisati u terminima matrica  $P$  i  $Q$ :

$$P^\tau \Delta_m = \Delta_n Q.$$

Osim  $p_i(j)$  i  $q_j(i)$  kao dualnog para familije parametara povezanih s asocijacijskom shemom, postoji još jedan zanimljiv par. Znamo da je  $A_i A_j \in \mathcal{A}$  pa postoje brojevi  $p_{i,j}^k$  takvi da je

$$A_i A_j = \sum_{r=0}^d p_{i,j}^r A_r. \quad (18)$$

Njih smo prethodno definirali kao presječne brojeve i objasnili zašto su nenegativni cijeli brojevi. Također, s obzirom na to da je  $E_i \circ E_j \in \mathcal{A}$ , postoje brojevi  $q_{i,j}^k$  takvi da je

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^d q_{i,j}^r E_r.$$

**Definicija 4.20.** Brojeve  $q_{i,j}^k$  nazivamo Kreinovim parametrima asocijacijske sheme.

Parametre  $p_{i,j}^k$  i  $q_{i,j}^k$  možemo zapisati u terminima svojstvenih vrijednosti  $p_i(j)$ . Iz (18) i idempotentnosti matrica  $A_i$  imamo:

$$(A_i A_j) \circ A_k = p_{i,j}^k A_k,$$

iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} p_{i,j}^k \cdot \text{sum} A_k &= \text{sum}((A_i A_j) \circ A_k) \\ &= \text{tr}((A_i A_j) A_k) \\ &= \text{tr} \left( \sum_{r=0}^d p_i(r) p_j(r) p_k(r) E_r \right) \\ &= \sum_{r=0}^d p_i(r) p_j(r) p_k(r) m_r. \end{aligned}$$

Na sličan način dobivamo da je

$$\frac{1}{n} q_{i,j}^k m_k = \frac{1}{n^3} \sum_{r=0}^d q_i(r) q_j(r) q_k(r) \text{sum} A_r,$$

odnosno, ako iskoristimo jednakost (17), imamo

$$q_{i,j}^k = nm_i m_j \sum_{r=0}^d \frac{p_r(i)p_r(j)p_r(k)}{(\text{sum}A_r)^2}. \quad (19)$$

Sada ćemo dokazati važan rezultat poznat kao Kreinov uvjet.

**Definicija 4.21.** *Neka su  $A = (a_{ij})$  i  $B = (b_{ij})$  matrice. Tada se zamjenom elementa  $a_{ij}$  matrice  $A$  s matricom  $a_{ij}B$ , za sve  $i$  i  $j$ , dobiva Kroneckerov produkt  $A \otimes B$ .*

**Teorem 4.22** (Kreinov uvjet). *Kreinski parametri  $q_{i,j}^k$  asocijacijske sheme su nenegativni.*

*Dokaz.* Znamo da je  $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^d q_{i,j}^k E_k$ , odakle slijedi da su  $\frac{1}{n} q_{i,j}^k$  svojstvene vrijednosti od  $E_i \circ E_j$ . Nadalje,

$$(E_i \otimes E_j)^2 = E_i^2 \otimes E_j^2 = E_i \otimes E_j,$$

stoga su sve svojstvene vrijednosti od  $E_i \otimes E_j$  jednake 0 ili 1. S obzirom da su  $E_i$  i  $E_j$  simetrične, onda je i  $E_i \otimes E_j$  simetrična. Iz toga slijedi da je  $E_i \otimes E_j$  pozitivno semidefinitna. Matrica  $E_i \circ E_j$  je iz definicije očito glavna minora matrice  $E_i \otimes E_j$  pa je također semidefinitna. Dakle, sve svojstvene vrijednosti od  $E_i \circ E_j$  su nenegativne, što povlači nenegativnost Kreinovih parametara.  $\square$

S jedne strane imamo presječne brojeve, matrice  $A_i$  te matricu  $P$ , dok s druge strane imamo Kreinove parametre, matrice  $E_i$  i matricu  $Q$ . Ukoliko su presječni brojevi neke asocijacijske sheme  $\mathcal{A}$  jednaki Kreinovim parametrima asocijacijske sheme  $\mathcal{B}$ , tada vrijedi i da su presječni brojevi sheme  $\mathcal{B}$  jednaki Kreinovim parametrima sheme  $\mathcal{A}$ . Kažemo da su takve sheme formalno međusobno dualne.

## 5 Parametri Johnsonove sheme

Johnsonovu shemu smo spominjali kao važan primjer asocijacijske sheme te smo pronašli vezu s Hammingovom shemom. Pričali smo općenito o parametrima asocijacijske sheme, a sada ćemo vidjeti da za Johnsonovu shemu možemo dati formulu za izračun presječnih brojeva.

**Propozicija 5.1.** *Presječni brojevi Johnsonove sheme  $J(v, k)$  jednaki su*

$$p_{i,j}^l = \sum_{m=0}^{k-l} \binom{k-l}{m} \binom{l}{k-i-m} \binom{l}{k-j-m} \binom{v-k-l}{i+j+m-k}.$$

*Dokaz.* Neka je  $V$   $v$ -člani skup te neka su  $X$  i  $Y$  dva  $k$ -člana podskupa od  $V$  koja se sijeku u  $k-l$  elemenata. Tada je očito u skupovima  $X$  i  $Y$  ostalo po  $l$  elemenata koji se ne nalaze u njihovom presjeku. Da bismo dobili presječni broj  $p_{i,j}^l$ , prebrojavamo koliko ima  $k$ -članih podskupova  $Z$  od  $V$  koji se sijeku s  $X$  u  $k-i$  te s  $Y$  u  $k-j$  elemenata. Takav skup  $Z$  se može sjeći s različitim brojem elemenata iz presjeka skupova  $X$  i  $Y$ . Označimo taj broj elemenata s  $m$  te zatim prebrojavamo u ovisnosti o  $m$ . Odabir  $m$  elemenata iz skupa  $X \cap Y$ , koji će biti sadržani u skupu  $Z$ , možemo napraviti na  $\binom{k-l}{m}$  načina. Trebamo još odabrati  $k-i-m$  elemenata iz  $X$  i  $k-j-m$  iz  $Y$  koji se ne nalaze u  $X \cap Y$ . To možemo napraviti na  $\binom{l}{k-i-m} \binom{l}{k-j-m}$  načina. Preostalo je nadopuniti skup  $Z$  do  $k$ -članog skupa, a to radimo s elementima iz  $V \setminus (X \cup Y)$ . Elementa iz  $V \setminus (X \cup Y)$  ima  $v - (k-l) - l - l = v - k + l - 2l = v - k - l$ , a preostalo je odabrati  $k - (2k - i - j - m) = i + j + m - k$  elemenata.  $\square$

Pokazali smo da je za dobivanje matrice svojstvenih vrijednosti  $P$  neke asocijacijske sheme potrebno odrediti svojstvene vrijednosti  $p_i(j)$ . Pomoću formule (16), iz matrice  $P$  lako dobijemo i matricu  $Q$  koja sadrži dualne svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme. Za Johnsonovu shemu možemo izračunati svojstvene vrijednosti pomoću matrica  $C_i$  i  $W_{i,k}$ , koje smo definirali u drugom poglavlju.

**Teorem 5.2.** *Za Johnsonovu shemu  $J(v, k)$  vrijedi:*

$$p_i(j) = \sum_{r=0}^i (-1)^{i-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{v-k+r-j}{r} \binom{k-j}{r}.$$

*Dokaz.* Najprije trebamo odrediti svojstvene potprostore Johnsonove sheme da bismo dobili matricu svojstvenih vrijednosti Johnsonove sheme. Sa  $U_i$  označimo prostor razapet stupcima matrice  $W_{i,k}^T$ . Retci matrice  $W_{i,k}$  su linearno nezavisni, pa se  $U_i$  podudara s prostorom razapetim stupcima matrice  $C_i$ . Iz propozicije 2.19 znamo da je

$$W_{i,j} W_{j,k} = \binom{k-i}{j-i} W_{i,k},$$

iz čega slijedi da je  $U_{i-1}$  potprostor od  $U_i$ . S  $T_i$  označimo ortogonalni komplement od  $U_{i-1}$  u  $U_i$ . Dimenzija prostora  $T_i$  je  $\binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$ . Tvrđimo da su  $T_i$  svojstveni potprostori Johnsonove sheme  $J(v, k)$ . Iz teorema 2.20 znamo da vrijedi

$$C_i C_j = \sum_{r \leq i,j} \binom{v-i-j}{v-k-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{k-r}{j-r} C_r. \quad (20)$$

Iz toga slijedi da je  $U_j$   $C_i$ -invarijantan, za svaki  $j$ . S obzirom na to da su  $C_i$  simetrične matrice, slijedi da je prostor  $T_j$   $C_i$ -invarijantan. Neka matrica  $E_j$  predstavlja

ortogonalnu projekciju na  $T_j$ . Onda je  $C_r E_j = 0$ , za  $r < j$ . Stoga, ako pretpostavimo da je  $i \geq j$  te obe strane jednadžbe (20) pomnožimo s  $E_j$  zdesna, dobijemo:

$$C_i C_j E_j = \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j} C_j E_j.$$

Prostor razapet stupcima matrice  $C_j E_j$  je svojstveni potprostor od  $C_i$  te kako je prostor razapet stupcima matrice  $C_j E_j$  jednak  $T_j$ , zaključujemo da su  $\binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j}$  svojstvene vrijednosti od  $C_i$  geometrijske kratnosti  $\binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$ , za  $j = 0, \dots, i$ . Budući da  $C_i$  ima rang  $\binom{v}{k}$ , vidimo da je i 0 svojstvena vrijednost s geometrijskom kratnošću  $\binom{v}{k} - \binom{v}{i}$ . Suma geometrijskih kratnosti svojstvenih vrijednosti koje smo našli je  $\binom{v}{k}$  pa zaključujemo da smo pronašli sve svojstvene vrijednosti od  $C_i$  s odgovarajućim svojstvenim potprostorima. Sad kada imamo svojstvene vrijednosti od  $C_i$ , koristeći korolar 2.16 lako možemo dobiti matricu svojstvenih vrijednosti za  $J(v, k)$ . Dakle, imamo

$$p_{k-i}(j) = \sum_{r=i}^k (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \binom{v-r-j}{v-k-j} \binom{k-j}{r-j},$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

**Primjer 5.3.** *Presječne brojeve neke Johnsonove sheme možemo izračunati direktno iz definicije Johnsonove sheme. Tako za Johnsonovu shemu  $J(4, 2)$ , čije smo grafove uz pripadne matrice susjedstva prikazali u primjeru 2.8, dobijemo sljedeće matrice presječnih brojeva:*

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U matrici  $M_k$  na mjestu  $(i, j)$  nalazi se presječni broj  $p_{i,j}^k$ . S obzirom da vrijedi da je  $p_{i,j}^k = p_{j,i}^k$ , onda to možemo zapisati i u sažetom obliku u tablici:

$k$	$p_{0,0}^k$	$p_{0,1}^k$	$p_{0,2}^k$	$p_{1,1}^k$	$p_{1,2}^k$	$p_{2,2}^k$
0	1	0	0	4	0	1
1	0	1	0	2	1	0
2	0	0	1	4	0	0

Sada je lako vidjeti da je primjerice  $A_1 \cdot A_2 = p_{1,2}^0 A_0 + p_{1,2}^1 A_1 + p_{1,2}^2 A_2 = A_1$ . Pokažimo da presječne brojeve možemo izračunati i pomoću teorema 5.2. Za to će nam biti potrebna veza presječnih brojeva sa svojstvenim vrijednostima, koju smo spomenuli u prethodnom poglavlju:

$$p_{i,j}^k \text{sum} A_k = \sum_{r=0}^d p_i(r) p_j(r) p_k(r) m_r.$$

Za izračun kratnosti imamo zgodnu formulu  $\sum_{k=0}^d \frac{(p_k(i))^2}{n_k} = \frac{n}{m_i}$ , gdje je u našem slučaju  $n = \binom{4}{2} = 6$ . Brojevi  $n_i$  redom predstavljaju stupnjeve grafova  $G_i$  pa je  $n_0 = 1$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 1$ . Broj  $\text{sum} A_k$  jednak je sumi elemenata matrice  $A_k$ . Sad kada imamo sve potrebne formule, izračunajmo presječni broj  $p_{1,1}^0$ . Imamo:

$$\begin{aligned} p_{1,1}^0 \text{sum} A_0 &= \sum_{r=0}^2 p_1(r) p_1(r) p_0(r) m_r \\ &= \sum_{r=0}^2 (p_1(r))^2 m_r \\ &= (p_1(0))^2 m_0 + (p_1(1))^2 m_1 + (p_1(2))^2 m_2. \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo činjenicu da je  $p_0(j) = 1$ , za svaki  $j$ . Naglasimo još da je  $p_i(0)$  broj nenul elemenata u bilo kojem retku matrice  $A_i$  pa ujedno i stupanj grafa  $G_i$ , tj.  $n_i$ . Dakle,  $p_1(0) = n_1 = 4$ . Sada možemo pomoću teorema 5.2 izračunati svojstvene vrijednosti koje nam trebaju.

$$\begin{aligned} p_1(1) &= \sum_{r=0}^1 (-1)^{1-r} \binom{2-r}{1-r} \binom{4-2+r-1}{r} \binom{2-1}{r} = -2 + 2 = 0 \\ p_1(2) &= \sum_{r=0}^1 (-1)^{1-r} \binom{2-r}{1-r} \binom{2+r-2}{r} \binom{2-2}{r} = -2 \\ p_2(2) &= \sum_{r=0}^2 (-1)^{2-r} \binom{2-r}{2-r} \binom{2+r-2}{r} \binom{2-2}{r} = 1 \end{aligned}$$



Osim svojstvenih vrijednosti, još moramo odrediti kratnosti  $m_i$ .

$$\begin{aligned}\frac{6}{m_0} &= \sum_{k=0}^2 \frac{(p_k(0))^2}{n_k} = \frac{(p_0(0))^2}{n_0} + \frac{(p_1(0))^2}{n_1} + \frac{(p_2(0))^2}{n_2} \\ \frac{6}{m_1} &= \sum_{k=0}^2 \frac{(p_k(1))^2}{n_k} = \frac{(p_0(1))^2}{n_0} + \frac{(p_1(1))^2}{n_1} + \frac{(p_2(1))^2}{n_2} \\ \frac{6}{m_2} &= \sum_{k=0}^2 \frac{(p_k(2))^2}{n_k} = \frac{(p_0(2))^2}{n_0} + \frac{(p_1(2))^2}{n_1} + \frac{(p_2(2))^2}{n_2}\end{aligned}$$

Odatle slijedi da je  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 3$  te  $m_2 = 2$ . Sada se vratimo na izračun presječnog broja  $p_{1,1}^0$ . Kada uvrstimo izračunate vrijednosti, dobijemo:

$$p_{1,1}^0 = \frac{4^2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-2)^2 \cdot 2}{6} = \frac{24}{6} = 4.$$

Usporedimo li dobiveni presječni broj s onim iz tablice, vidimo da smo uistinu dobili istu vrijednost. Analogno bismo računali i preostale presječne brojeve. Za Kreinove parametre sheme  $J(4, 2)$  koristili bismo formulu (19) te na sličan način došli do odgovarajućih vrijednosti.

Iz primjera 5.3 vidimo da ukoliko imamo zadanu matricu svojstvenih vrijednosti  $P$ , lako dobijemo i presječne brojeve i Kreinove parametre sheme. Iz propozicije 5.1 je  $p_{1,1}^1 = \binom{2-1}{0} \binom{1}{2-1-0} \binom{1}{2-1-0} + \binom{2-1}{1} \binom{1}{2-1-1} \binom{1}{2-1-1} = 2$ , što je jednako prethodno izračunatoj vrijednosti u tablici.

Osim jednog od načina za izračun svojstvenih vrijednosti Johnsonove sheme, teorem 5.2 donio nam je važno znanje o svojstvenim potprostorima Johnsonove sheme te je njegova posljedica Delsarteov teorem.

**Teorem 5.4** (Delsarte). *Neka je  $\Omega$  skup svih  $k$ -članih podskupova  $v$ -članog skupa  $V$  te neka je  $f$  karakteristična funkcija dizajna  $\mathcal{D}$ , kojeg promatramo kao podskup od  $\Omega$ . Tada dizajn  $\mathcal{D}$  ima snagu barem  $t$  ako i samo ako  $E_i f = 0$ , za  $i = 1, \dots, t$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da  $f$  ima snagu barem  $t$ . Tada je

$$W_{t,k} f = \lambda_t \mathbf{1}$$

za neki  $\lambda_t$ . Dakle, ako su  $u$  i  $v$  neka dva retka matrice  $W_{t,k}$ , tada vrijedi jednakost

$$\langle u - v, f \rangle = 0,$$

pa je  $f$  ortogonalna na prostor razapet razlikama redaka matrice  $W_{t,k}$ . Taj prostor je ortogonalni komplement od  $\mathbf{1}$ , tj. projekcija od  $f$  na  $T_i$  je jednaka nula za  $1 \leq i \leq t$  pa je naš uvjet nužan. Lako se vidi da vrijedi i obrat.  $\square$

## Literatura

- [1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.
- [2] K. Conrad, *The minimal polynomial and some applications*, dostupno na: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/minpolyandappns.pdf> (kolovoz 2021.).
- [3] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.
- [4] C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.
- [5] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.
- [6] Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, *Combinatorics of Symmetric Designs*, Cambridge University Press, 2006.
- [7] V. Krčadinac, *Kombinatorika*, predavanja, Sveučilište u Zagrebu, 2021., dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/komb/komb-skripta.pdf> (srpanj 2021.).
- [8] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2017., dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf> (lipanj 2021.).
- [9] G. Medina, *How might I typeset the Fano plane in LaTeX?*, Stack Exchange, dostupno na: <https://tex.stackexchange.com/questions/208894/how-might-i-typeset-the-fano-plane-in-latex> (lipanj 2021.).
- [10] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2012., dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf> (svibanj 2021.).
- [11] B. M. Scott, *Prove inversion formula involving binomial coefficients*, Stack Exchange, dostupno na: <https://math.stackexchange.com/questions/3834828/prove-inversion-formula-involving-binomial-coefficients> (svibanj 2021.).

- [12] M. Spivey, *Beautiful identity*, *Stack Exchange*, dostupno na:  
<https://math.stackexchange.com/questions/4175/beautiful-identity-sum-k-mn-1k-m-binomkm-binomnk-delta> (svibanj 2021.).
- [13] R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics*, Springer, 2018.
- [14] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2013., dostupno na:  
<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf> (svibanj 2021.).
- [15] D. H. Wagner, *Proof of Schur's theorem*, dostupno na:  
[https://www.math.uh.edu/~wagner/2331/Schurs\\_theorem.pdf](https://www.math.uh.edu/~wagner/2331/Schurs_theorem.pdf) (kolovoz 2021.).
- [16] egreg, *Prove that a self adjoint and idempotent matrix is a orthogonal projection matrix*, dostupno na:  
<https://math.stackexchange.com/questions/2580848/prove-that-a-self-adjoint-and-idempotent-matrix-is-a-orthogonal-projection-matrix> (kolovoz 2021.).

## Sažetak

Neka je  $V$  skup od  $v$  elemenata i  $\Omega = \binom{V}{k}$  familija svih  $k$ -članih podskupova od  $V$ . Johnsonov graf  $J(v, k, i)$  ima  $\Omega$  kao skup vrhova, a dva vrha su susjedna ako se sijeku u  $k - i$  elemenata. Johnsonovi grafovi imaju zanimljiva svojstva koja ih čine asocijacijskom shemom. Skup koji sadrži grafove  $G_i = J(v, k, i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  nazivamo Johnsonovom shemom i označavamo s  $J(v, k)$ . U ovom radu promatramo vezu između Johnsonovih grafova i dizajna, uz pomoć koje dokazujemo Ray-Chaudhurijev i Wilsonov teorem. Na kraju izvodimo parametre Johnsonove sheme i dokazujemo Delsarteov teorem koji povezuje dizajne sa svojstvenim potprostorima Johnsonove sheme.

## Summary

Let  $V$  be a set of  $v$  points and let  $\Omega$  denote the set of all  $k$ -subsets of  $V$ . The Johnson graph  $J(v, k, i)$  has  $\Omega$  as vertex set and two vertices are adjacent if they intersect in exactly  $k - i$  points. Johnson graphs have interesting properties that make them an association scheme. The set consisting of  $G_i = J(v, k, i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  is called Johnson scheme and denoted by  $J(v, k)$ . In this thesis we explore the relationship between Johnson graphs and designs, with the help of which we prove Ray-Chaudhuri and Wilson's theorem. In the end, we determine parameters of the Johnson scheme and prove Delsarte's theorem, connecting designs with eigenspaces of the Johnson scheme.

## Životopis

Katarina Šupe rođena je u Šibeniku 3. srpnja 1995. godine. Završila je Osnovnu školu Juraj Dalmatinac te opći smjer Gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku. U Zagreb se preselila 2013. godine te je upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Nakon što je 2019. godine završila preddiplomski studij, upisala je diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika.