Funkcijske jednadžbe i ortogonalnost

Boro, Rahela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Rahela Boro

FUNKCIJSKE JEDNADŽBE I ORTOGONALNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, studeni 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najveće hvala mojoj obitelji koja je uvijek bila uz mene, poticala me i pružala mi najveću podršku.
Hvala mentorici prof. dr. sc. Dijani Ilišević na pomoći i razumijevanju pri pisanju ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. U ovom radu pokazat ćemo kako se različite vrste ortogonalnosti pojavljuju u teoriji funkcijskih jednadžbi.

U prvom poglavlju razmatrat ćemo pojam ortogonalnosti. U unitarnim prostorima dva vektora su ortogonalna ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak nuli. Situacija se mijenja u normiranim prostorima gdje se pojavljuje više različitih vrsta ortogonalnosti, a u ovom radu definirat ćemo ih pet: Birkhoff–Jamesovu, jednakokračnu, Robertsovu, Pitagorinu i poluskalarnu ortogonalnost. Ispitat ćemo koja svojstva standardne ortogonalnosti (ortogonalnosti obzirom na skalarni produkt) ove ortogonalnosti zadovoljavaju. Uvest ćemo apstraktni pojam ortogonalnog prostora te ispitati je li normirani prostor ortogonalan obzirom na svaku od ovih vrsta ortogonalnosti. Prvo poglavlje zaključit ćemo navodeći različite karakterizacije unitarnih prostora pomoću navedenih tipova ortogonalnosti.

U drugom poglavlju ćemo proučavati četiri funkcijske jednadžbe postavljene samo za ortogonalne vektore. To su, redom, ortogonalno aditivna funkcijska jednadžba, ortogonalna Jensenova funkcijska jednadžba, ortogonalna kvadratna funkcijska jednadžba te d'Alembertova funkcijska jednadžba. Ispitat ćemo koje uvjete neka funkcija mora ispunjavati kako bi bila rješenje neke od ovih ortogonalnih funkcijskih jednadžbi te ćemo ta rješenja i prikazati u ovisnosti o prostoru u kojem ona postoje. Posebno ćemo navesti kojeg su oblika ortogonalno aditivne funkcije definirane na normiranom prostoru s jednakokračnom i Pitagorinom ortogonalnosti. Na kraju ćemo proučiti i problem očuvanja različitih vrsta ortogonalnosti.

Poglavlje 1

Ortogonalnost

1.1 Normirani, unitarni i ortogonalni prostori

Za razliku od unitarnih prostora u kojima je ortogonalnost jasno definirana, u normiranim prostorima i općenitijim strukturama situacija je potpuno drukčija. Naime, u njima postoji više različitih definicija ortogonalnosti. Neke od njih navodimo u ovom poglavlju.

Za početak, definirajmo unitaran prostor i ortogonalnost vektora unitarnog prostora, a zatim i normirani prostor.

Definicija 1.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $s\colon V \times V \to \mathbb{F}$ koje svakom uređenom paru vektora pridružuje skalar $s(x, y) = \langle x \,|\, y \rangle \in \mathbb{F}$ naziva se* ***skalarno množenje*** *na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

(1) (pozitivna definitnost) $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$ za sve $x \in V$, pri čemu je $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0_V$,

(2) (hermitska simetričnost) $\langle x \,|\, y \rangle = \overline{\langle y \,|\, x \rangle}$ za sve $x, y \in V$,

(3) (homogenost u prvoj varijabli) $\langle \lambda x \,|\, y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle$ za sve $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$,

(4) (aditivnost u prvoj varijabli) $\langle x + y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, z \rangle + \langle y \,|\, z \rangle$ za sve $x, y, z \in V$.

Skalar $\langle x \,|\, y \rangle$ zove se ***skalarni produkt*** *ili* ***skalarni umnožak vektora*** *x i y, a uređeni par $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$* ***unitarni prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$.*

Lema 1.1.2. *Za sve $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi*

$$\langle x \,|\, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y \,|\, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y \,|\, x \rangle} = \overline{\lambda}\, \overline{\langle y \,|\, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x \,|\, y \rangle$$

pa je skalarno množenje antihomogeno u drugoj varijabli. Nadalje, za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\langle x \,|\, y + z \rangle = \overline{\langle y + z \,|\, x \rangle} = \overline{\langle y \,|\, x \rangle + \langle z \,|\, x \rangle} = \overline{\langle y \,|\, x \rangle} + \overline{\langle z \,|\, x \rangle} = \langle x \,|\, y \rangle + \langle x \,|\, z \rangle\,,$$

pa je skalarno množenje aditivno i u drugoj varijabli.

Definicija 1.1.3. *Neka su x i y vektori unitarnog prostora V. Kažemo da je vektor x ortogonalan na vektor y i pišemo $x \perp y$ ako vrijedi $\langle x \,|\, y\rangle = 0$.*

Napomena 1.1.4. *Neka je X unitaran prostor. Relacija ortogonalnosti $\perp$ definirana skalarnim produktom na X zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Simetričnost: $x \perp y \;=\; y \perp x$.*
2. *Homogenost: $x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*
3. *Aditivnost:*

   (i) $(x \perp y$ i $x \perp z) \Rightarrow x \perp (y + z)$,

   (ii) $(x \perp z$ i $y \perp z) \Rightarrow (x + y) \perp z$.

Navedena svojstva se mogu lako dokazati primjenom svojstava skalarnog produkta:

1. Simetričnost: $\langle x \,|\, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle y \,|\, x\rangle = \overline{\langle x \,|\, y\rangle} = 0$.
2. Homogenost: $\langle x \,|\, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha x \,|\, \beta y\rangle = \alpha\overline{\beta}\,\langle x \,|\, y\rangle = \alpha\overline{\beta} \cdot 0 = 0$.
3. Aditivnost:

   (i) $\langle x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, z\rangle = 0 \Rightarrow \langle x \,|\, y + z\rangle = \langle x \,|\, y\rangle + \langle x \,|\, z\rangle = 0 + 0 = 0$,

   (ii) $\langle x \,|\, z\rangle = \langle y \,|\, z\rangle = 0 \Rightarrow \langle x + y \,|\, z\rangle = \langle x \,|\, z\rangle + \langle y \,|\, z\rangle = 0 + 0 = 0$.

Definicija 1.1.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ koje svakom vektoru $x \in V$ pridružuje realan broj $\|x\|$ sa svojstvima:*

(1) $\|x\| \geq 0$, pri čemu je $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0_V$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

za sve $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$, naziva se ***norma*** *na prostoru V. Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zove se* ***normirani prostor***.

Definicija 1.1.6. *Normirani prostor X je potpun ili* ***Banachov prostor*** *ako svaki Cauchyjev niz elemenata iz X konvergira u X. Potpun unitaran prostor naziva se* ***Hilbertov prostor***.

Propozicija 1.1.7. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Funkcija $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna.*

Dokaz. Za $x, y \in V$ imamo $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$ iz čega slijedi $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$. Zamjena x i y daje $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$. Dakle, $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$ za sve $x, y \in V$. Sada je jasno da za zadani $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = \varepsilon$ i vrijedi $(\|x-y\| < \delta) \Rightarrow (|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| < \varepsilon)$. □

Nakon definiranja unitarnog i normiranog prostora, postavlja se pitanje postoji li veza između njih. U nastavku ćemo vidjeti kako ta veza postoji, štoviše, svaki unitaran prostor ujedno je i normiran. Za početak, iskažimo nejednakost koja vrijedi u svim unitarnim prostorima.

Propozicija 1.1.8. *(Nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitaran prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Vrijedi*

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 \leq \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle, \quad x, y \in V. \tag{1.1}$$

Jednakost u (1.1) vrijedi ako i samo ako su x i y linearno ovisni.

Dokaz. Za $x = 0_V$ ili $y = 0_V$ jednakost (1.1) očito vrijedi. Neka su $x, y \in V \setminus \{0_V\}$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

$$0 \leq \langle x - \lambda y \mid x - \lambda y \rangle = \langle x \mid x \rangle - \lambda \langle y \mid x \rangle - \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle y \mid y \rangle.$$

Kako prethodna nejednakost vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, onda će vrijediti i posebno za $\lambda = \frac{\langle x \mid y \rangle}{\langle y \mid y \rangle}$. Uočimo da je $\overline{\lambda} = \frac{\langle y \mid x \rangle}{\langle y \mid y \rangle}$ pa stoga dobivamo

$$0 \leq \langle x \mid x \rangle - \frac{\langle x \mid y \rangle}{\langle y \mid y \rangle} \langle y \mid x \rangle - \frac{\langle y \mid x \rangle}{\langle y \mid y \rangle} \langle x \mid y \rangle + \frac{\langle x \mid y \rangle \langle y \mid x \rangle}{\langle y \mid y \rangle^2} \langle y \mid y \rangle = \langle x \mid x \rangle - \frac{\langle y \mid x \rangle}{\langle y \mid y \rangle} \langle x \mid y \rangle.$$

Množenjem prethodne nejednakosti sa $\langle y \mid y \rangle > 0$ i sređivanjem slijedi

$$\langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle \geq \langle x \mid y \rangle \langle y \mid x \rangle = \langle x \mid y \rangle \overline{\langle x \mid y \rangle} = |\langle x \mid y \rangle|^2.$$

Jednakost u (1.1) očito vrijedi ako je bar jedan od vektora x i y jednak 0_V. Pretpostavimo da su oba različita od 0_V. Ako su x i y linearno ovisni, postoji $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je $x = \lambda y$. Tada vrijedi

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 = |\langle \lambda y \mid y \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle y \mid y \rangle^2 = \lambda\overline{\lambda} \langle y \mid y \rangle^2 = \langle \lambda y \mid \lambda y \rangle \langle y \mid y \rangle = \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle.$$

Ako su x i y linearno neovisni, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi $x - \lambda y \neq 0$ što povlači strogu nejednakost $0 < \langle x - \lambda y \mid x - \lambda y \rangle$. Posebno, to vrijedi i za $\lambda = \frac{\langle x \mid y \rangle}{\langle y \mid y \rangle}$ pa prethodno provedeni račun pokazuje da tada vrijedi stroga nejednakost u (1.1). □

Nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog primjenjuje se u dokazu sljedeće propozicije.

Propozicija 1.1.9. *Neka je $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ unitaran prostor. Preslikavanje*

$$x \to \sqrt{\langle x|x \rangle}$$

s prostora V u polje $\mathbb{R}$ je norma na prostoru V.

Dokaz. Za $x \in V$ označimo $\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$. Provjerimo da preslikavanje $\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}$ zadovoljava sva tri svojstva iz definicije 1.1.5.

Svojstvo (1) slijedi izravno iz pozitivne definitnosti skalarnog produkta. Dokažimo svojstvo (2). Koristeći homogenost skalarnog produkta u prvoj varijabli i antihomogenost u drugoj dobivamo

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \,|\, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x \,|\, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x \,|\, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|,$$

za sve $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Za provjeru svojstva (3) koristimo svojstva hermitske simetričnosti i aditivnosti skalarnog produkta. Vrijedi

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y \,|\, x + y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle + \langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, x \rangle + \langle y \,|\, y \rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re} \, \langle x \,|\, y \rangle + \|y\|^2.$$

Kako je $\mathrm{Re} \, \langle x \,|\, y \rangle \leq |\, \mathrm{Re} \, \langle x \,|\, y \rangle \,| \leq |\, \langle x \,|\, y \rangle \,|$, a nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog možemo pisati u obliku

$$|\, \langle x \,|\, y \rangle \,| \leq \|x\| \, \|y\|,$$

slijedi

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Sada zaključujemo da je svaki unitaran prostor i normiran. Još kažemo da je norma oblika $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$ inducirana skalarnim produktom. Prirodno je pitati se vrijedi li obrat, odnosno može li se u normiranom prostoru uvesti skalarni produkt koji inducira upravo početnu normu.

Pretpostavimo da je $(X, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ unitaran prostor. Za $x, y \in X$ imamo

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y \,|\, x + y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle + \langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, x \rangle + \langle y \,|\, y \rangle \,,$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y \,|\, x - y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle - \langle x \,|\, y \rangle - \langle y \,|\, x \rangle + \langle y \,|\, y \rangle \,.$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo tzv. jednakost paralelograma:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in X. \tag{1.2}$$

Lako se provjeri da vrijedi i

$$\langle x \,|\, y \rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2, \tag{1.3}$$

ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, odnosno

$$\langle x \,|\, y \rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2 + \tfrac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \tfrac{i}{4}\|x-iy\|^2, \tag{1.4}$$

ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Prethodne dvije jednakosti pokazuju da u svakom unitarnom prostoru skalarni produkt možemo rekonstruirati iz navedene norme. No, u normirani prostor možemo uvesti skalarni produkt, koji inducira početnu normu, samo ako norma zadovoljava jednakost paralelograma (1.2) što dokazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 1.1.10 (Jordan – von Neumann)**.** *Ako norma $\|\cdot\|$ na prostoru X zadovoljava jednakost paralelograma (1.2), onda je sa*

$$\langle x \,|\, y \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \tag{1.5}$$

dan skalarni produkt na X, u slučaju da je X realan prostor, odnosno sa

$$\langle x \,|\, y \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \tfrac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right), \tag{1.6}$$

u slučaju da je X kompleksan prostor. U svakom od ta dva slučaja je

$$\|x\|^2 = \langle x \,|\, x \rangle\,. \tag{1.7}$$

Prvo ćemo dokazati lemu koju ćemo koristiti u dokazu teorema.

Lema 1.1.11. *Ako funkcija $f\colon X \to \mathbb{F}$ ima svojstvo da je*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \quad x, y \in X, \tag{1.8}$$

onda je funkcija

$$S(x,y) = f(x+y) - f(x-y) \tag{1.9}$$

biaditivna, odnosno aditivna u svakom argumentu.

Napomena 1.1.12. *Funkcije koje zadovoljavaju jednadžbu (1.8) nazivaju se* ***kvadratne funkcije****, a jednadžba (1.8) naziva se* ***kvadratna funkcijska jednadžba****. Primijetimo da funkcija koju uobičajeno nazivamo kvadratnom funkcijom, tj. funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, zadovoljava (1.8) ako i samo ako je $c = 0$.*

Dokaz. Iz (1.8) za $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$, a za $x = 0$ dobivamo $f(-y) = f(y)$, pa zaključujemo da je f parna funkcija. Za $x, y, u \in X$ imamo:

$$\begin{aligned} S(x+y, 2u) &= f(x+y+2u) - f(x+y-2u) \\ &= f[(x+u)+(y+u)] + f[(x+u)-(y+u)] \\ &\quad - f[(x-u)+(y-u)] - f[(x-u)-(y-u)] \\ &= [2f(x+u)+2f(y+u)] - [2f(x-u)+2f(y-u)] \\ &= 2S(x,u) + 2S(y,u). \end{aligned}$$

Odavde za $y = 0$ i $x = z$ dobivamo $S(z, 2u) = 2S(z, u)$, što za $z = x + y$ povlači

$$S(x+y, u) = S(x,u) + S(y,u).$$

Na isti način dobiva se i aditivnost funkcije $y \mapsto S(x, y)$. □

Dokažimo sada Jordan – von Neumannov teorem.

Dokaz. Funkcija

$$S(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \tag{1.10}$$

je aditivna u prvoj varijabli jer funkcija $f(x) = \frac{1}{4}\|x\|^2$ zadovoljava uvjete leme 1.1.11, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 + \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) \\ &= 2\cdot\tfrac{1}{4}\|x\|^2 + 2\cdot\tfrac{1}{4}\|y\|^2 \\ &= 2f(x) + 2f(y). \end{aligned}$$

Primijetimo da je $S(x, y) = S(y, x)$ za sve $x, y \in X$ te da je $S(x, x) = \|x\|^2 \geq 0$ za sve $x \in X$ i $S(x, x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. Preostaje dokazati homogenost za što nam je potrebna sljedeća lema:

Lema 1.1.13. *Svaka aditivna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, gdje je X realan vektorski prostor, je racionalno homogena funkcija. Ako je f i neprekidna, tada je ona (realno) homogena funkcija.*

Dokaz. Ako je f aditivna funkcija, matematičkom indukcijom se lako dokaže da je $f(nx) = nf(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Isto tako, $f(0) = 0$ jer je

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Sada imamo

$$f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0,$$

pa je $f(-x) = -f(x)$, iz čega slijedi $f(-nx) = -nf(x)$, odnosno $f(mx) = mf(x)$ za sve $m \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li $\frac{x}{m}$ umjesto x, dobivamo

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}f(x),$$

i konačno

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x),$$

iz čega slijedi racionalna homogenost funkcije f.

Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ postoji niz $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ sa svojstvom $\lim_n q_n = \lambda$. Ako je f neprekidna, tada je

$$f(\lambda x) = f(\lim_n q_n x) = \lim_n f(q_n x) = \lim_n q_n f(x) = \lambda f(x),$$

pa je f homogena funkcija. □

Prema lemi 1.1.13, svaka neprekidna aditivna funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, gdje je X realan vektorski prostor, je linearan operator. Ako je X kompleksni prostor, tada vrijedi $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ za sve $x \in X$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$, ali ne nužno i za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. Na primjer, funkcija $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana sa $f(z) = \overline{z}$ je aditivna i neprekidna, ali iako je realno linearna, nije kompleksno linearna. Međutim, $f(\lambda z) = \overline{\lambda} f(z)$ za sve $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Ako su X i Y kompleksni vektorski prostori, tada za $C\colon X \to Y$ kažemo da je konjugirano linearan operator ako je aditivan i $C(\lambda x) = \overline{\lambda} C(x)$ za sve $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

Funkcija $x \mapsto S(x, y)$ je aditivna, a zbog neprekidnosti norme je i neprekidna. Lema 1.1.13 sada povlači $S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y)$ za sve $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako je X realan prostor, dokazali smo da je $S : X \times X \to \mathbb{R}$ skalarni produkt na X.

Ako je X kompleksan prostor, najprije uočimo da je

$$\begin{aligned}
S(x, iy) &= \frac{1}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\| - ix + y\|^2 - \| - ix - y\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2\right) \\
&= -S(ix, y),
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in X$. Promatrat ćemo funkciju $B \colon X \times X \to \mathbb{C}$ definiranu sa

$$B(x, y) = S(x, y) + iS(x, iy).$$

Kako je S aditivna u prvoj varijabli, to je i B aditivna u prvoj varijabli. Nadalje,

$$\overline{B(x, y)} = S(x, y) - iS(x, iy) = S(x, y) + iS(ix, y) = S(y, x) + iS(y, ix) = B(y, x),$$

za sve $x, y \in X$. Primijetimo da iz $S(x, iy) = -S(ix, y)$ slijedi $S(x, ix) = -S(ix, x)$, a kako je S simetrična, to je $S(x, ix) = S(ix, x)$ pa zaključujemo $S(x, ix) = 0$. Zato je $B(x, x) = S(x, x) = \|x\|^2 \geq 0$ za sve $x \in X$ i $B(x, x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. Za svaki $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} S(\lambda x, y) &= S(\mu x + i\nu x, y) = S(\mu x, y) + S(i\nu x, y) \\ &= \mu S(x, y) + \nu S(ix, y) = \mu S(x, y) - \nu S(x, iy), \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} B(\lambda x, y) &= S(\lambda x, y) + iS(\lambda x, iy) \\ &= \mu S(x, y) - \nu S(x, iy) + i\mu S(x, iy) + i\nu S(x, y) \\ &= \mu B(x, y) + i\nu B(x, y) \\ &= \lambda B(x, y). \end{aligned}$$

Dakle, $B \colon X \times X \to \mathbb{C}$ je skalarni produkt na X. □

Navest ćemo nekoliko primjera prostora koji su normirani, ali nisu unitarni.

Primjer 1.1.14. *Normirani prostori koji nisu unitarni:*

(1) $(R^n, \|\cdot\|_\infty)$*, gdje je* $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

(2) $(R^n, \|\cdot\|_1)$*, gdje je* $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Prije definiranja različitih tipova ortogonalnosti u normiranim prostorima, uvest ćemo apstraktnu ortogonalnost kao binarnu relaciju na vektorskom prostoru.

Definicija 1.1.15. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $\perp$ binarna relacija na V koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $x \perp 0_V$, $0_V \perp x$ za svaki $x \in V$,

(2) ako za $x, y \in V \setminus \{0_V\}$ vrijedi $x \perp y$, tada su x i y linearno neovisni,

(3) ako za $x, y \in V$ vrijedi $x \perp y$, tada je $\alpha x \perp \beta y$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(4) *ako je P dvodimenzionalni potprostor od V, $x \in P, \lambda \in \mathbb{R}^+$, tada postoji $y \in P$ takav da je $x \perp y$ i $x + y \perp \lambda x - y$.*

Prostor $(V, \perp)$ *nazivamo* ***ortogonalni prostor***.

Propozicija 1.1.16. *Svaki unitaran prostor* $(X, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ *nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *je ortogonalan obzirom na standardnu ortogonalnost.*

Dokaz. Provjerimo da preslikavanje $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ zadovoljava sva četiri svojstva definicije ortogonalnog prostora.

Neka je $x \in X$ te neka je $\langle x \,|\, 0_X \rangle = \alpha \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\alpha = \langle x \,|\, 0_X \rangle = \langle x \,|\, 0_X + 0_X \rangle = \langle x \,|\, 0_X \rangle + \langle x \,|\, 0_X \rangle = \alpha + \alpha,$$

pa je nužno $\alpha = 0$. Očito isto vrijedi i za $\langle 0_X \,|\, x \rangle = 0$. Dakle, $x \perp 0_X$ i $0_X \perp x$.

Neka su $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ takvi da je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$. Pretpostavimo da je $x = \mu y$ za neki $\mu \in \mathbb{F}$, $\mu \neq 0$. Tada je $0 = \langle \mu y \,|\, y \rangle = \mu \langle y \,|\, y \rangle$ pa je $y = 0_X$ ili $\mu = 0$ što je suprotno pretpostavci. Dakle, x i y su linearno neovisni.

Svojstvo (3) slijedi izravno iz svojstva homogenosti standardne ortogonalnosti.

Dokažimo svojstvo (4). Neka je P dvodimenzionalan potprostor od X, $x \in P$ i $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Kako je $\dim P = 2$, to postoji $e \in P$ takav da je P razapet sa x i e. Definirajmo vektore $z = e - \langle x \,|\, e \rangle \frac{x}{\|x\|^2}$ i $y = \sqrt{\lambda}\, \|x\| \frac{z}{\|z\|}$. Tada je

$$\langle x \,|\, z \rangle = \left\langle x \,\middle|\, e - \langle x \,|\, e \rangle \tfrac{x}{\|x\|^2} \right\rangle = \langle x \,|\, e \rangle - \langle x \,|\, e \rangle \frac{\langle x \,|\, x \rangle}{\|x\|^2} = \langle x \,|\, e \rangle - \langle x \,|\, e \rangle = 0$$

pa je i $\langle x \,|\, y \rangle = \left\langle x \,\middle|\, \sqrt{\lambda}\, \|x\| \tfrac{z}{\|z\|} \right\rangle = \sqrt{\lambda}\, \|x\| \frac{\langle x \,|\, z \rangle}{\|z\|} = 0$. Kako je $\langle y \,|\, y \rangle = \lambda \|x\|^2$, to je i

$$\langle x + y \,|\, \lambda x - y \rangle = \lambda \langle x \,|\, x \rangle - \langle x \,|\, y \rangle + \lambda \langle y \,|\, x \rangle - \langle y \,|\, y \rangle = \lambda \|x\|^2 - \lambda \|x\|^2 = 0.$$

□

1.2 Birkhoff–Jamesova ortogonalnost

Definicija 1.2.1. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normirani prostor nad poljem* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Kažemo da je vektor* $x \in X$ *ortogonalan na vektor* $y \in X$ *u Birkhoff–Jamesovom smislu i pišemo* $x \perp_{BJ} y$ *ako za svaki* $\lambda \in \mathbb{F}$ *vrijedi* $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Ako je X unitarni prostor, tada je Birkhoff–Jamesova ortogonalnost $\perp_{BJ}$ ekvivalentna standardnoj ortogonalnosti u unitarnom prostoru. Dokažimo tu tvrdnju.

Propozicija 1.2.2. *Neka je* $(X, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ *unitaran prostor nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Tada za sve* $x, y \in X$ *vrijedi*

$$\langle x \,|\, y \rangle = 0 \iff x \perp_{BJ} y.$$

Dokaz. Neka je $\|\cdot\|$ norma na X inducirana skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Tada je, za sve $x, y \in X$ i svaki $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y \,|\, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x \,|\, x \rangle + \lambda \langle y \,|\, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x \,|\, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y \,|\, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \lambda \langle y \,|\, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x \,|\, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Ako je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$, tada prethodna jednakost postaje

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

pa je $x \perp_{BJ} y$.

Obratno, ako je $x \perp_{BJ} y$, tada za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

što je ekvivalentno sa

$$\lambda \langle y \,|\, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x \,|\, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq 0, \tag{1.11}$$

za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo $y \neq 0$ i uzmimo

$$\lambda = -\frac{\langle x \,|\, y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Tada nejednakost (1.11) postaje

$$-\frac{|\langle x \,|\, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

odakle zaključujemo da je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$. □

Lema 1.2.3. *Za Birkhoff–Jamesovu ortogonalnost vrijedi svojstvo homogenosti:*

$$x \perp_{BJ} y \;\Rightarrow\; \alpha x \perp_{BJ} \beta y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Dokaz. Neka je $x \perp_{BJ} y$, odnosno $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, za sve $\lambda \in \mathbb{F}$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $\alpha \neq 0$. Tada vrijedi

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \leq |\alpha| \cdot \|x + \lambda y\| = \|\alpha x + \lambda \alpha y\|, \quad \lambda \in \mathbb{F}. \tag{1.12}$$

Neka je $\mu \in \mathbb{F}$ proizvoljan. Uvrštavanjem $\lambda = \frac{\mu\beta}{\alpha}$ u (1.12) dobivamo $\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \mu \beta y\|$, za sve $\mu \in \mathbb{F}$. Slijedi $\alpha x \perp_{BJ} \beta y$. □

Svojstvo simetričnosti Birkhoff–Jamesove ortogonalnosti općenito ne vrijedi. Uzmimo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Neka je $x = (1,1), y = (1,0)$ te $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\|x + \lambda y\| = \|(1,1) + \lambda(1,0)\| = \|(1+\lambda, 1)\| = \max\{|1+\lambda|, 1\} \geq 1 = \|x\|.$$

Dakle, $x \perp_{BJ} y$, ali $y \not\perp_{BJ} x$ jer je

$$\|y - \tfrac{1}{2}x\| = \|(1,0) - \tfrac{1}{2}(1,1)\| = \|(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\| = \tfrac{1}{2} < 1 = \|y\|.$$

Aditivnost Birkhoff–Jamesove ortogonalnosti nije općenito zadovoljena što ćemo također pokazati primjerom. Promotrimo normirani prostor $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ i neka su $x = (1,1), y = (-1,0)$ i $z = (0,-1)$. Lako se provjeri da je $x \perp_{BJ} y$ i $x \perp_{BJ} z$, ali $x \not\perp_{BJ} y + z$. Naime, $x \perp_{BJ} y$ jer za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\|x + \lambda y\| = \|(1,1) + \lambda(-1,0)\| = \|(1-\lambda, 1)\| = \max\{|1-\lambda|, 1\} \geq 1 = \|x\|.$$

Također, $x \perp_{BJ} z$ jer za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\|x + \lambda z\| = \|(1,1) + \lambda(0,-1)\| = \|(1, 1-\lambda)\| = \max\{1, |1-\lambda|\} \geq 1 = \|x\|.$$

Međutim, $x \not\perp_{BJ} y + z$ jer je

$$\|x + \tfrac{1}{2}(y+z)\| = \|(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,-1)\| = \|(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\| = \tfrac{1}{2} < 1 = \|x\|.$$

Propozicija 1.2.4. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi $x \perp_{BJ} 0_X$ i $0_X \perp_{BJ} x$.*

Dokaz. Kako za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\|x + \lambda 0_X\| = \|x\| \geq \|x\|,$$

$$\|0_X + \lambda x\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \geq 0 = \|0_X\|,$$

to je $x \perp_{BJ} 0_X$ i $0_X \perp_{BJ} x$. □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ako za $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ vrijedi $x \perp_{BJ} y$, tada su x i y linearno neovisni.*

Dokaz. Neka je $x \perp_{BJ} y$. Pretpostavimo li da je $x = \mu y$ za neki $\mu \in \mathbb{F}$, $\mu \neq 0$, tada je

$$0 = \|\mu y - \mu y\| = \|x - \mu y\| \geq \|x\|,$$

pa je $x = 0_X$, suprotno pretpostavci. Dakle, x i y su linearno neovisni. □

Lema 1.2.6. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\dim X \geq 2$. Tada za svaki $x \in X$ postoji nenul $y \in X$ takav da je $x \perp y$.*

Dokaz. Neka je $z \in X$ linearno neovisan sa x. Prema Hahn-Banachovom teoremu postoji neprekidan linearan funkcional f na X takav da je $f(x) = \|x\|$ i $\|f\| \leq 1$. Ako je $f(z) = 0$ neka je $y = z$, inače stavimo $y = \frac{\|x\|}{f(z)}z - x$, pa je $f(y) = \|x\| - f(x) = 0$. Za svaki $\mu \in \mathbb{F}$ imamo $\|x\| = f(x) = f(x + \mu y) \leq \|x + \mu y\|$ pa je $x \perp y$. Uočimo da bi pretpostavka $y = 0_X$ dovela do linearne ovisnosti vektora x i z, suprotno pretpostavci. $\square$

Napomena 1.2.7. *Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je y dobiven u prethodnoj lemi norme 1 ako zamijenimo y sa $\frac{y}{\|y\|}$ i uzmemo u obzir homogenost Birkhoff-Jamesove ortogonalnosti.*

Propozicija 1.2.8. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ako je P dvodimenzinalni potprostor od X, $x \in P$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tada postoji $y \in P$ takav da je $x \perp_{BJ} y$ i $x + y \perp_{BJ} \lambda x - y$.*

Dokaz. Ako je $\lambda x = 0_X$, tada $y = 0_X$ zadovoljava uvjete propozicije. Neka je $\lambda x \neq 0_X$. Kako je $\dim P = 2$, prema prethodnoj lemi postoji $v \in P$ takav da je $\|v\| = 1$ i $x \perp_{BJ} v$. Definirajmo vektor $u = \frac{x}{\|x\|}$. Tada je $\|u\| = 1$ i $u \perp_{BJ} v$.

Neka je $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^2$ linearna bijekcija koja preslikava u i v redom u $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Sa $|\varphi(z)| = \|z\|$, $z \in P$ definirana je norma na $\mathbb{R}^2$ i φ je izometrija. Skup $L = \{(1, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ je potporni pravac jedinične kugle T na prostoru $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, odnosno za točku $y_0 \in T$ vrijedi $y_0 \in L$ i T se nalazi u zatvaraču jedne od dviju otvorenih poluravnina na koje pravac L dijeli ravninu. Definiramo

$$\Gamma = \left\{(\alpha, m) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : m \text{ je koeficijent smjera potpornog pravca od T na } \frac{(1,\alpha)}{\|(1,\alpha)\|}\right\}.$$

Skup Γ je povezan skup i neprekidno preslikavanje $\psi(\alpha, m) = \alpha + \lambda m$, $\lambda > 0$ uzima pozitivne i negativne vrijednosti na skupu Γ. Zato mora uzeti i vrijednost 0, pa postoji $(\overline{\alpha}, m) \in \Gamma$ takav da je $\overline{\alpha} + \lambda m = 0$, odakle slijedi $m = -\frac{\overline{\alpha}}{\lambda}$. Drugim riječima, postoji $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ takav da su potporni pravac na $\frac{(1,\overline{\alpha})}{\|(1,\overline{\alpha})\|}$ i pravac kroz $(0, 0)$ i $(\lambda, -\overline{\alpha})$ paralelni pa je $(1, \overline{\alpha}) \perp (\lambda, -\overline{\alpha})$, $(1, 0) + (0, \overline{\alpha}) \perp (\lambda, 0) + (0, -\overline{\alpha})$. Vraćanjem natrag u P, tj. nakon djelovanja sa φ^{-1} zaključujemo $u + \overline{\alpha}v \perp \lambda u - \overline{\alpha}v$ pa za $y = \overline{\alpha}\|x\|v$ imamo $x \perp y$ i $x + y \perp \lambda x - y$. $\square$

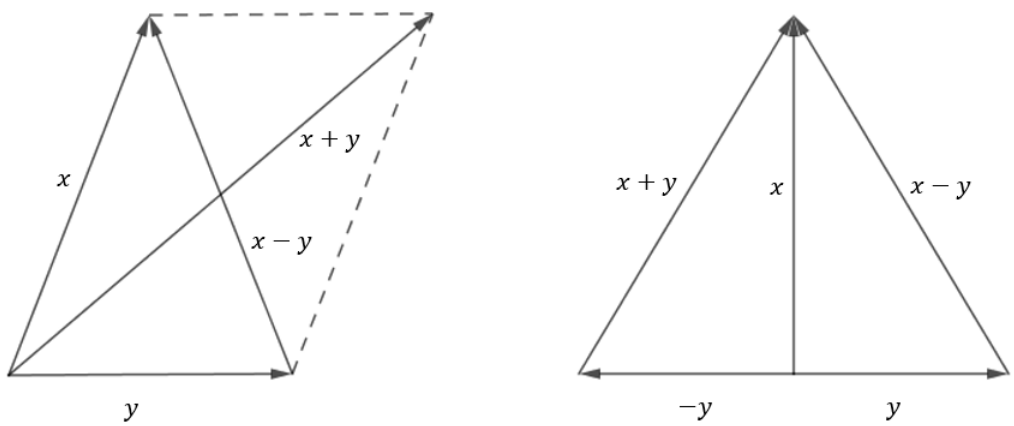
Prethodnim propozicijama dokazali smo da Birkhoff–Jamesova ortogonalnost zadovoljava svojstva (1), (2) i (4) ortogonalnog prostora iz definicije 1.1.15. Svojstvo (3) slijedi izravno iz svojstva homogenosti Birkhoff–Jamesove ortogonalnosti pa je time dokazan sljedeći teorem.

Teorem 1.2.9. *Svaki normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ je ortogonalan obzirom na Birkhoff–Jamesovu ortogonalnost.*

1.3 Jednakokračna ortogonalnost

Definicija 1.3.1. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normirani prostor nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Za vektor* $x \in X$ *kažemo da je jednakokračno ortogonalan na vektor* $y \in X$ *i pišemo* $x \perp_J y$ *ako je* $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Jednakokračna ortogonalnost naziva se još i Jamesova ortogonalnost. Navedena definicija proizlazi iz promatranja vektora u euklidskoj ravnini gdje njihovu ortogonalnost možemo ispitati promatrajući paralelogram kojeg oni razapinju. Naime, ako su dijagonale paralelograma, kojeg razapinju vektori x i y, jednakih duljina, tada su vektori x i y okomiti (vidite sliku). Možemo uočiti kako zbroj i razlika ta dva vektora čine krakove jednakokračnog trokuta pa upravo zbog toga ova ortogonalnost nosi naziv „jednakokračna".



Sljedeća propozicija pokazuje da se u unitarnim prostorima Jamesova i standardna ortogonalnost podudaraju.

Propozicija 1.3.2. *Neka je* $(X, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *unitaran prostor nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Tada za sve* $x, y \in X$ *iz* $\langle x \mid y \rangle = 0$ *slijedi* $x \perp_J y$. *Ako je* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *tada vrijedi i obratna implikacija.*

Dokaz. Za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y \mid x+y \rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2},$$

$$\|x-y\| = \sqrt{\langle x-y \mid x-y \rangle} = \sqrt{\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2}.$$

Zato $\langle x \mid y \rangle = 0$ povlači $\|x+y\| = \|x-y\|$, tj. $x \perp_J y$.

Obratno, ako je $x \perp_J y$, tada je $\|x+y\| = \|x-y\|$, pa je $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle = 0$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, odatle slijedi $\langle x \mid y \rangle = 0$. □

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, obratna implikacija prethodne propozicije ne vrijedi. Pokazat ćemo to sljedećim primjerom. Promotrimo vektorski prostor $M_2(\mathbb{C})$ svih kompleksnih matrica drugog reda, opskrbljen skalarnim produktom $\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$ za sve $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, gdje tr označava trag matrice, tj. zbroj svih elemenata na njenoj dijagonali. Neka je $\|\cdot\|$ norma inducirana tim skalarnim produktom, tj. $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$ za svaku matricu $A \in M_2(\mathbb{C})$. Neka je $A = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Tada je

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4+3i \\ 4+3i & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4+3i \\ -4+3i & 0 \end{pmatrix}$$

pa je $(A+B)^*(A+B) = 25I$ i $(A-B)^*(A-B) = 25I$ odakle slijedi $\|A+B\| = 5\sqrt{2} = \|A-B\|$. Dakle, $A \perp_J B$. Međutim, $A^*B = -12iI$ povlači $\langle A \mid B\rangle = -24i \neq 0$. Dakle, obratna implikacija ne vrijedi.

Jednakokračna ili Jamesova ortogonalnost zadovoljava svojstvo simetričnosti koje slijedi direktno iz definicije.

Svojstvo homogenosti općenito nije zadovoljeno ni u prvoj ni u drugoj varijabli. Pogledajmo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Uzmimo vektore $x = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ i $y = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Jasno je da vrijedi $x \perp_J y$ jer je:

$$\|x+y\| = \|\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) + \left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|(2,0)\| = \max\{|2|, |0|\} = 2,$$

$$\|x-y\| = \|\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) - \left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|(1,2)\| = \max\{|1|, |2|\} = 2.$$

Međutim, $2x \not\perp_J y$ zbog $\|2x+y\| \neq \|2x-y\|$:

$$\|2x+y\| = \|2\cdot\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) + \left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|\left(\tfrac{7}{2}, 1\right)\| = \max\{|\tfrac{7}{2}|, |1|\} = \tfrac{7}{2},$$

$$\|2x-y\| = \|2\cdot\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) - \left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|\left(\tfrac{5}{2}, 3\right)\| = \max\{|\tfrac{5}{2}|, |3|\} = 3.$$

Također, $x \not\perp_J 2y$ jer $\|x+2y\| \neq \|x-2y\|$:

$$\|x+2y\| = \|\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|\left(\tfrac{5}{2}, -1\right)\| = \max\{|\tfrac{5}{2}|, |-1|\} = \tfrac{5}{2},$$

$$\|x-2y\| = \|\left(\tfrac{3}{2}, 1\right) - 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}, -1\right)\| = \|\left(\tfrac{1}{2}, 3\right)\| = \max\{|\tfrac{1}{2}|, |3|\} = 3.$$

Aditivnost jednakokračne ortogonalnosti ne vrijedi općenito što ćemo također pokazati primjerom. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normirani prostor. Neka su $x = (1,2), y = (1,0), z = (-2,1) \in \mathbb{R}^2$. Lako se provjeri da je $x \perp_J y$ i $x \perp_J z$, ali $x \not\perp_J y+z$. Naime, $x \perp_J y$ jer je $\|x+y\| = \|x-y\|$:

$$\|x+y\| = \|(1,2) + (1,0)\| = \|(2,2)\| = \max\{|2|, |2|\} = 2,$$

$$\|x-y\| = \|(1,2)-(1,0)\| = \|(0,2)\| = \max\{|0|,|2|\} = 2.$$

Također, $x \perp_J z$ jer je $\|x+z\| = \|x-z\|$:

$$\|x+z\| = \|(1,2)+(-2,1)\| = \|(-1,3)\| = \max\{|-1|,|3|\} = 3,$$

$$\|x-z\| = \|(1,2)-(-2,1)\| = \|(3,1)\| = \max\{|3|,|1|\} = 3.$$

Međutim, $x \not\perp_J y+z$ jer uvjet $\|x+(y+z)\| = \|x-(y+z)\|$ nije zadovoljen:

$$\|x+(y+z)\| = \|(1,2)+(-1,1)\| = \|(0,3)\| = \max\{|0|,|3|\} = 3,$$

$$\|x-(y+z)\| = \|(1,2)-(-1,1)\| = \|(2,1)\| = \max\{|2|,|1|\} = 2.$$

Propozicija 1.3.3. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi $x \perp_J 0_X$ i $0_X \perp_J x$.*

Dokaz. Kako je

$$\|x+0_X\| = \|x-0_X\| = \|x\| \quad i \quad \|0_X+x\| = \|0_X-x\| = \|x\|,$$

to je $x \perp_J 0_X$ i $0_X \perp_J x$. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor. Ako za $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ vrijedi $x \perp_J y$, tada su x i y linearno neovisni.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $\mu \in \mathbb{F}$, $\mu \neq 0$, takav da je $x = \mu y$. Tada iz $\|x+y\| = \|x-y\|$ slijedi $\|(\mu+1)y\| = \|(\mu-1)y\|$, pa zbog $y \neq 0_X$ zaključujemo $|\mu+1| = |\mu-1|$. Odavde slijedi $\mu = 0$, suprotno pretpostavci. □

Napomena 1.3.5. *Ako je normirani prostor kompleksan, tada postoje linearno ovisni x i y takvi da je $x \perp_J y$. Dovoljno je uzeti $y = ix$ i uočiti $\|x \pm y\| = \|x \pm ix\| = \|x\|\sqrt{2}$. Dakle, tvrdnja prethodne propozicije ne vrijedi u kompleksnom slučaju.*

1.4 Robertsova ortogonalnost

Definicija 1.4.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Kažemo da je vektor $x \in X$ ortogonalan na vektor $y \in X$ u Robertsovom smislu i pišemo $x \perp_R y$ ako vrijedi $\|x+ty\| = \|x-ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$.*

Iz definicije je jasno da $x \perp_R y$ povlači $x \perp_J y$. Usporedimo sada Robertsovu ortogonalnost s Birkhoff–Jamesovom. Ako su neki vektori $x, y \in X$ ortogonalni u Robertsovom smislu, tj. $x \perp_R y$, tada za svaki $t \in \mathbb{F}$ imamo

$$2\|x\| = \|(x+ty)+(x-ty)\| \leq \|x+ty\| + \|x-ty\| = 2\|x+ty\|,$$

pa vrijedi $x \perp_{BJ} y$, odnosno Robertsova ortogonalnost „jača” je od Birkhoff–Jamesove.

Kao i prethodno navedene ortogonalnosti i ova ortogonalnost poopćenje je ortogonalnosti u unitarnim prostorima. To ćemo pokazati sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $(X, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za sve $x, y \in X$ vrijedi*

$$\langle x \mid y \rangle = 0 \iff \|x + ty\| = \|x - ty\|, \quad t \in \mathbb{F}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\langle x \mid y \rangle = 0$. Tada za $t \in \mathbb{F}$ imamo

$$\|x \pm ty\|^2 = \langle x \pm ty | x \pm ty \rangle = \langle x|x \rangle + |t|^2 \langle y|y \rangle = \|x\|^2 + |t|^2 \|y\|^2,$$

pa slijedi da je $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$.

Obratno, neka je $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$. Dokazali smo ranije da je tada $x \perp_{BJ} y$, a kako je Birkhoff–Jamesova ortogonalnost ekvivalentna standardnoj u unitarnom prostoru, imamo da je $\langle x \mid y \rangle = 0$. □

Robertsova ortogonalnost zadovoljava svojstvo homogenosti. Neka je $x \perp_R y$, odnosno $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $\alpha \neq 0$. Množenjem prethodne jednakosti sa $|\alpha|$ dobivamo

$$\|\alpha x + t\alpha y\| = \|\alpha x - t\alpha y\|, \quad t \in \mathbb{F}. \tag{1.13}$$

Neka je $\mu \in \mathbb{F}$ proizvoljan. Uvrštavanjem $t = \frac{\mu\beta}{\alpha}$ u (1.13) dobivamo $\|\alpha x + \mu\beta y\| = \|\alpha x - \mu\beta y\|$. Dakle, vrijedi $\alpha x \perp_R \beta y$.

Zadovoljeno je i svojstvo simetričnosti koje ćemo također dokazati. Neka je $x \perp_R y$, odnosno $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$. Tada za proizvoljni $t \in \mathbb{F}$, $t \neq 0$, imamo

$$\|tx + y\| = |t| \, \|x + \tfrac{1}{t} y\| = |t| \, \|x - \tfrac{1}{t} y\| = \|tx - y\|.$$

Za $t = 0$ je ova jednakost trivijalno ispunjena. Slijedi da je $y \perp_R x$.

Aditivnost Robertsove ortogonalnosti ne vrijedi općenito što ćemo pokazati primjerom. Neka je $X = (M_2(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ normirani prostor pri čemu je $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|$ za svaku matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$. Neka su

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice iz prostora $M_2(\mathbb{R})$. Lako se provjeri da je $A \perp_R B$ i $A \perp_R C$, ali $A \not\perp_R B + C$. Naime, $A \perp_R B$ jer je $\|A + tB\| = \|A - tB\|$:

$$\|A + tB\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 + 2t \end{pmatrix}\| = \max\{1 + |2t|, |1 + 2t|\} = 1 + |2t|,$$

$$\|A - tB\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1-2t \end{pmatrix}\| = \max\{1 + |-2t|, |1-2t|\} = 1 + |2t|.$$

Također, $A \perp_R C$ jer je $\|A + tC\| = \|A - tC\|$:

$$\|A+tC\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\| = \max\{1+|-2t|, 1\} = \max\{1+|2t|, 1\} = 1+|2t|,$$

$$\|A - tC\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\| = \max\{1 + |2t|, 1\} = 1 + |2t|.$$

Međutim, $A \not\perp_R B + C$ jer uvjet $\|A + t(B + C)\| = \|A - t(B + C)\|$ nije zadovoljen za svaki $t \in \mathbb{R}$:

$$\|A + 2(B + C)\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\| = \max\{1, 5\} = 5,$$

$$\|A - 2(B + C)\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\| = \max\{1, |-3|\} = 3.$$

Propozicija 1.4.3. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi $x \perp_R 0_X$ i $0_X \perp_R x$.*

Dokaz. Kako je

$$\|x + t0_X\| = \|x\| = \|x - t0_X\|,$$

$$\|0_X + tx\| = |t|\,\|x\| = \|0_X - tx\|,$$

to je $x \perp_R 0_X$ i $0_X \perp_R x$. □

Propozicija 1.4.4. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ako za $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ vrijedi $x \perp_R y$, tada su x i y linearno neovisni.*

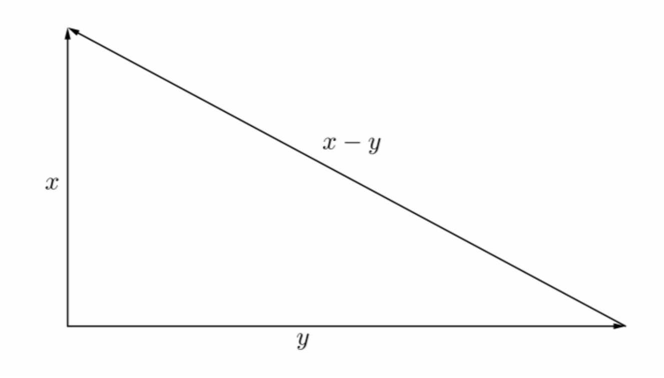
Dokaz. Pretpostavimo da je $x = \mu y$ za neki $\mu \in \mathbb{F}$, $\mu \neq 0$. Kako je $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ za svaki $t \in \mathbb{F}$, posebno imamo $\|x + \mu y\| = \|x - \mu y\| = 0$, odakle slijedi $x = -\mu y = -x$, pa je $x = 0_X$, suprotno pretpostavci. Dakle, x i y su linearno neovisni. □

Prethodnim dvijema propozicijama dokazali smo da Robertsova ortogonalnost zadovoljava svojstva (1) i (2) ortogonalnog prostora iz definicije 1.1.15.

1.5 Pitagorina ortogonalnost

Definicija 1.5.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Za vektor $x \in X$ kažemo da je ortogonalan na vektor $y \in X$ u Pitagorinom smislu i pišemo $x \perp_P y$ ako je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Pitagorina ortogonalnost, kao i prethodno definirana jednakokračna ortogonalnost, proizlazi iz euklidske geometrije. U Pitagorinom teoremu odnos duljina stranica u pravokutnom trokutu dan je jednakošću $a^2 + b^2 = c^2$, pri čemu su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze. Upravo to možemo vidjeti na slici gdje vektori x i y koji su ortogonalni u vektorskom smislu razapinju pravokutni trokut kojemu je vektor $x - y$ hipotenuza.



Često se koristi i sljedeća varijacija Pitagorine ortogonalnosti:

$$x \perp_P y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Sljedećom propozicijom dokazat ćemo da je u unitarnim prostorima Pitagorina ortogonalnost ekvivalentna standardnoj ortogonalnosti, a zatim ćemo provjeriti njezina svojstva.

Propozicija 1.5.2. *Neka je $(X, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitaran prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za sve $x, y \in X$ iz $\langle x \mid y \rangle = 0$ slijedi $x \perp_P y$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada vrijedi i obratna implikacija.*

Dokaz. Za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2.$$

Zato $\langle x \mid y \rangle = 0$ povlači $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, tj. $x \perp_P y$.

Obratno, ako je $x \perp_P y$, tada je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, pa je $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle = 0$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, odatle slijedi $\langle x \mid y \rangle = 0$. □

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, obratna implikacija prethodne propozicije ne vrijedi što ćemo pokazati primjerom iz potpoglavlja 1.3 u unitarnom prostoru $(M_2(\mathbb{C}), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ gdje je $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^* B)$ za sve $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, opet za matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A^* A = 9I, \quad B^* B = 16I, \quad (A - B)^*(A - B) = 25I,$$

pa je

$$\|A - B\|^2 = 50 = 18 + 32 = \|A\|^2 + \|B\|^2$$

odakle slijedi $A \perp_P B$, iako je $\langle A \,|\, B\rangle = -24i \neq 0$.

Svojstvo simetričnosti Pitagorine ortogonalnosti slijedi direktno iz definicije. No, svojstvo homogenosti ne vrijedi općenito. Na primjer, pogledajmo prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, vektore $x = (1, 2 - \sqrt{3}), y = (0, -\sqrt{3})$ i skalar $\lambda = -1$. Vidimo da vrijedi $x \perp_P y$ jer je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$:

$$\|x - y\|^2 = \|(1, 2 - \sqrt{3}) - (0, -\sqrt{3})\|^2 = \|(1, 2)\|^2 = \max\{|1|, |2|\}^2 = 4,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|(1, 2 - \sqrt{3})\|^2 + \|(0, -\sqrt{3})\|^2 = \max\{|1|, |2 - \sqrt{3}|\}^2 + \max\{|0|, |-\sqrt{3}|\}^2 = 1 + 3 = 4.$$

Međutim, $(-x) \not\perp_P y$ jer $\|-x - y\|^2 \neq \|-x\|^2 + \|y\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|-x - y\|^2 &= \|-1 \cdot (1, 2 - \sqrt{3}) - (0, -\sqrt{3})\|^2 \\
&= \|(-1, -2 + 2\sqrt{3})\|^2 \\
&= \max\{|-1|, |-2 + 2\sqrt{3}|\}^2 \\
&= (-2 + 2\sqrt{3})^2 \neq 4 = \|-x\|^2 + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Također, $x \not\perp_P (-y)$ jer $\|x - (-y)\|^2 \neq \|x\|^2 + \|-y\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|x - (-y)\|^2 &= \|(1, 2 - \sqrt{3}) - (-1) \cdot (0, -\sqrt{3})\|^2 \\
&= \|(1, 2 - 2\sqrt{3})\|^2 \\
&= \max\{|1|, |2 - 2\sqrt{3}|\}^2 \\
&= (2 - 2\sqrt{3})^2 \neq 4 = \|x\|^2 + \|-y\|^2.
\end{aligned}$$

Aditivnost Pitagorine ortogonalnosti ne vrijedi općenito što ćemo također pokazati primjerom. Neka je $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normirani prostor. Neka su $x = (1, 2 - \sqrt{3}), y = (0, -\sqrt{3}), z = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$. Već smo provjerili da je $x \perp_P y$. Također, $x \perp_P z$ jer je $\|x - z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$:

$$\|x - z\|^2 = \|(1, 2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{3}, -\sqrt{3})\|^2 = \|(1 - \sqrt{3}, 2)\|^2 = \max\{|1 - \sqrt{3}|, |2|\}^2 = 4,$$

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 + \|z\|^2 &= \|(1, 2 - \sqrt{3})\|^2 + \|(\sqrt{3}, -\sqrt{3})\|^2 \\
&= \max\{|1|, |2 - \sqrt{3}|\}^2 + \max\{|\sqrt{3}|, |-\sqrt{3}|\}^2 = 1 + 3 = 4.
\end{aligned}$$

Međutim, $x \not\perp_P y + z$ jer uvjet $\|x - (y + z)\|^2 = \|x\|^2 + \|y + z\|^2$ nije zadovoljen:

$$\begin{aligned}\|x - (y + z)\|^2 &= \|(1, 2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{3}, -2\sqrt{3})\|^2 = \|(1 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})\|^2 \\ &= \max\{|1 - \sqrt{3}|, |2 + \sqrt{3}|\}^2 = (2 + \sqrt{3})^2,\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}\|x\|^2 + \|y + z\|^2 &= \|(1, 2 - \sqrt{3})\|^2 + \|(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})\|^2 \\ &= \max\{|1|, |2 - \sqrt{3}|\}^2 + \max\{|\sqrt{3}|, |-2\sqrt{3}|\}^2 = 1 + 12 = 13.\end{aligned}$$

Propozicija 1.5.3. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi $x \perp_P 0_X$ i $0_X \perp_P x$.*

Dokaz. Kako je

$$\|x - 0_X\|^2 = \|x\|^2 = \|x\|^2 + \|0_X\|^2,$$

to je $x \perp_R 0_X$. Zbog simetričnosti je i $0_X \perp_R x$. □

Propozicija 1.5.4. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor. Ako za $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ vrijedi $x \perp_P y$, tada su x i y linearno neovisni.*

Dokaz. Ako je $y = \mu x$ za neki $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, tada iz $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ slijedi $(1 - \mu)^2\|x\|^2 = (1 + \mu^2)\|x\|^2$ što nije moguće zbog $\mu \neq 0$ i $x \neq 0_X$. □

Napomena 1.5.5. *Prethodna propozicija ne vrijedi za kompleksne normirane prostore. Na primjer, za $y = ix$ vrijedi $\|x - y\|^2 = \|x - ix\|^2 = 2\|x\|^2 = \|x\|^2 + \|ix\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

1.6 Poluskalarna ortogonalnost

Prije definiranja poluskalarne ortogonalnosti, potrebno je definirati poluskalarni produkt.

Definicija 1.6.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $[\cdot|\cdot] \colon X \times X \to \mathbb{F}$ naziva se* ***poluskalarno množenje*** *ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

(1) $[\lambda x + \mu y \,|\, z] = \lambda[x \,|\, z] + \mu[y \,|\, z]$ *za sve $x, y, z \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{F}$;*

(2) $[x \,|\, \lambda y] = \overline{\lambda}[x \,|\, y]$ *za sve $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$;*

(3) $[x \,|\, x] = \|x\|^2$ *za sve $x \in X$;*

(4) $|[x \,|\, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *za sve $x, y \in X$.*

Skalar $[\cdot|\cdot]$ se naziva ***poluskalarni produkt*** *ili* ***poluskalarni umnožak*** *vektora x i y.*

Za ovako definiran poluskalarni produkt, sada možemo definirati poluskalarnu ortogonalnost.

Definicija 1.6.2. *Neka je* $(X, [\cdot|\cdot])$ *normirani vektorski prostor. Za vektor* $x \in X$ *kažemo da je poluskalarno ortogonalan na vektor* $y \in X$ *i pišemo* $x \perp_S y$ *ako je* $[y \,|\, x] = 0$.

Poluskalarni produkt razlikuje se od skalarnog produkta po tome što općenito nije hermitski simetričan, $[x \,|\, y] \neq \overline{[y \,|\, x]}$, pa ni poluskalarna ortogonalnost ne zadovoljava svojstvo simetričnosti.

Svojstvo homogenosti poluskalarne ortogonalnosti je zadovoljeno u drugoj varijabli: $x \perp_S y \Rightarrow x \perp_S \lambda y$, za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$. Dokaz slijedi primjenom svojstava poluskalarnog produkta:

$$[\lambda y \,|\, x] = \lambda[y \,|\, x] = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Poluskalarna ortogonalnost zadovoljava i svojstvo aditivnosti u drugoj varijabli:

$$x \perp_S y \quad i \quad x \perp_S z \Rightarrow x \perp_S (y + z).$$

Dokaz slijedi primjenom svojstava poluskalarnog produkta:

$$[y + z \,|\, x] = [y \,|\, x] + [z \,|\, x] = 0 + 0 = 0.$$

Uočimo da $x \perp_S y$ povlači $x \perp_{BJ} y$: ako je $[y \,|\, x] = 0$, tada je

$$\|x\|^2 = [x \,|\, x] = |[x + \lambda y \,|\, x]| \leq \|x + \lambda y\| \cdot \|x\|,$$

odakle slijedi $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$, za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$. Dakle, poluskalarna ortogonalnost je „jača" od Birkhoff-Jamesove.

Propozicija 1.6.3. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normirani prostor nad poljem* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Tada za svaki* $x \in X$ *vrijedi* $x \perp_S 0_X$ *i* $0_X \perp_S x$.

Dokaz. Kako je

$$|[0_X \,|\, x]| \leq \|0_X\| \cdot \|x\| = 0 \quad i \quad |[x \,|\, 0_X]| \leq \|x\| \cdot \|0_X\| = 0,$$

to je $x \perp_S 0_X$ i $0_X \perp_S x$. □

Propozicija 1.6.4. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normirani prostor nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Ako za* $x, y \in X \setminus \{0_X\}$ *vrijedi* $x \perp_S y$, *tada su* x *i* y *linearno neovisni.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $y = \mu x$ za neki $\mu \in \mathbb{F}$, $\mu \neq 0$. Kako je $[y \,|\, x] = 0$, posebno imamo $[\mu x \,|\, x] = \mu[x \,|\, x] = \mu\|x\|^2 = 0$ pa je $x = 0_X$ ili $\mu = 0$ što je suprotno pretpostavci. Dakle, x i y su linearno neovisni. □

1.7 Karakterizacije unitarnih prostora pomoću različitih tipova ortogonalnosti

Standardna ortogonalnost u unitarnim prostorima zadovoljava svojstva simetričnosti, homogenosti i aditivnosti što smo dokazali na početku rada. Za Birkhoff-Jamesovu, jednakokračnu, Pitagorinu, Robertsovu i poluskalarnu ortogonalnost to općenito nije slučaj. U tablici možemo vidjeti koja od tih svojstava su zadovoljena, a koja nisu za svaki od pet tipova ortogonalnosti.

	$\perp_{BJ}$	$\perp_J$	$\perp_P$	$\perp_R$	$\perp_S$
simetričnost	-	+	+	+	-
homogenost	+	-	-	+	$\pm$
aditivnost	-	-	-	-	$\pm$

Svojstvo homogenosti i aditivnosti poluskalarne ortogonalnosti vrijedi samo u drugoj varijabli što je u tablici označeno sa $\pm$.

Ako svojstva koja nisu zadovoljena općenito vrijede, onda prostor mora biti unitaran. U nastavku, bez dokaza, navodimo tvrdnje koje o tome govore.

Propozicija 1.7.1. *Ako je u normiranom vektorskom prostoru X, dimenzije veće ili jednake 3, Birkhoffova ortogonalnost simetrična, tada je X unitaran prostor.*

Propozicija 1.7.2. *Ako je u normiranom vektorskom prostoru X, dimenzije veće ili jednake 3, Birkhoffova ortogonalnost aditivna s lijeva* ($x \perp_B z, y \perp_B z \Rightarrow x + y \perp_B z$)*, tada je X unitaran prostor.*

Propozicija 1.7.3. *Neka je X normirani prostor. Ako je jednakokračna ortogonalnost homogena u X, onda je X unitaran prostor.*

Propozicija 1.7.4. *Neka je X normirani prostor. Ako je jednakokračna ortogonalnost aditivna u X, onda je X unitaran prostor.*

Propozicija 1.7.5. *Neka je X realan normirani prostor. Ako je Pitagorina ortogonalnost homogena u X, onda je X unitaran prostor.*

Propozicija 1.7.6. *Neka je X realan normirani prostor. Ako je Pitagorina ortogonalnost aditivna u X, onda je X unitaran prostor.*

Poglavlje 2

Funkcijske jednadžbe

2.1 Ortogonalno aditivne funkcije

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor i* G *Abelova grupa. Za funkciju* $f\colon V \to G$ *kažemo da je* ***ortogonalno aditivna*** *ako vrijedi*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in V, \quad x \perp y. \tag{2.1}$$

Primjer 2.1.2. *Neka je* $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *unitaran prostor te neka je* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $f(x) = \langle x \mid x \rangle$. *Tada je* f *ortogonalno aditivna jer* $\langle x \mid y \rangle = 0$ *povlači*

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \langle x + y \mid x + y \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle \\ &= f(x) + f(y), \end{aligned}$$

ali nije aditivna jer je

$$f(2x) = \langle 2x \mid 2x \rangle = 4\,\langle x \mid x \rangle \neq 2\,\langle x \mid x \rangle = 2f(x).$$

Lema 2.1.3. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor i* G *Abelova grupa. Ako je* $f\colon V \to G$ *ortogonalno aditivna funkcija, tada je* $f(0_V) = 0$.

Dokaz. Prema svojstvu (1) iz definicije 1.1.15 ortogonalnog prostora, za svaki $x \in V$ je $x \perp 0_V$, pa je $f(x) = f(x + 0_V) = f(x) + f(0_V)$, odakle slijedi $f(0_V) = 0$. □

Sljedećim teoremima dokazat ćemo da je svako neparno ortogonalno aditivno preslikavanje aditivno te da je svako parno ortogonalno aditivno preslikavanje kvadratno.

Teorem 2.1.4. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Ako je ortogonalno aditivno preslikavanje $f\colon V \to G$ neparno, tada je ono aditivno.*

Dokaz. Neka je f neparno ortogonalno aditivno preslikavanje. Dokaz ćemo provesti kroz dva koraka.

(i) $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(x + \lambda x) = f(x) + f(\lambda x)$.

Neka je P dvodimenzionalni potprostor od V. Prema svojstvu (4) iz definicije ortogonalnog prostora postoji $y \in P$ takav da vrijedi $x \perp y$, $x + y \perp \lambda x - y$. Primjenom svojstva homogenosti relacije ortogonalnosti $\perp$ vrijedi i $\lambda x \perp (-y)$ te slijedi:

$$\begin{aligned} f(x + \lambda x) &= f(x + y + \lambda x - y) = f(x + y) + f(\lambda x - y) \\ &= f(x) + f(y) + f(\lambda x) + f(-y) \\ &= f(x) + f(\lambda x). \end{aligned}$$

(ii) $x, y \in V$ linearno ovisni $\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Za $x = 0_V$ tvrdnja je očita. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti $x \neq 0_V$. Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $y = \mu x$.

(a) $\mu \geq 0$. Primjenom koraka (i) slijedi

$$f(x + y) = f(x + \mu x) = f(x) + f(\mu x) = f(x) + f(y).$$

(b) $-1 < \mu < 0$. Uzmimo $z = (1 + \mu)x$, $\lambda = -\frac{\mu}{\mu+1} > 0$, slijedi $\lambda z = -\mu x$. Primjenom koraka (i) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1 + \mu)x - \mu x) = f(z + \lambda z) = f(z) + f(\lambda z) \\ &= f((1 + \mu)x) + f(-\mu x) = f(x + y) - f(y). \end{aligned}$$

(c) $\mu \leq -1$. Uzmimo $\lambda = -1 - \mu \geq 0$, $z = -x$, slijedi $\lambda z = (1 + \mu)x = x + y$. Primjenom koraka (i) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(-x + x + y) = f(-x) + f(x + y) = f(z) + f(\lambda z) \\ &= f(-x) + f(x + y) = -f(x) + f(x + y). \end{aligned}$$

Neka su sada $x, y \in V$ proizvoljni i neka je P dvodimenzionalni potprostor od V koji sadrži x i y. Tada postoje $u, v \in P$ takvi da je $u \perp v$ pa su prema svojstvu (2) iz definicije ortogonalnog prostora u i v linearno neovisni, dakle razapinju P. Prema koraku (ii) f je aditivno na linearnoj ljusci od u i na linearnoj ljusci od v pa je aditivno i na P. Imamo $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Dakle, preslikavanje f je aditivno. □

Napomena 2.1.5. *Ako je V realan unitaran prostor, a $f\colon V \to \mathbb{R}$ ortogonalno aditivno preslikavanje, tada je prema teoremu 2.1.4 i lemi 1.1.13 preslikavanje f linearno.*

Teorem 2.1.6. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor i* G *Abelova grupa. Ako je ortogonalno aditivno preslikavanje* $g\colon V \to G$ *parno, tada je ono kvadratno.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti kroz četiri koraka.

(i) $u, v \in V$; $u + v \perp u - v \Rightarrow g(u) = g(v)$.

Prema svojstvu homogenosti relacije ortogonalnosti $\perp$ vrijedi $\frac{1}{2}(u+v) \perp \pm\frac{1}{2}(u-v)$ pa slijedi

$$\begin{aligned} g(u) &= g\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) = g\left(\frac{u+v}{2}\right) + g\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{u+v}{2}\right) + g\left(\frac{v-u}{2}\right) = g\left(\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2}\right) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

(ii) $u \in V \Rightarrow g(2u) = 4g(u)$.

Za $u \in V$ prema svojstvu (4) iz definicije ortogonalnog prostora postoji $v \in V$, $u \perp v$ takav da je $u + v \perp u - v$. Stoga, po svojstvu homogenosti vrijedi $u \perp -v$. Primjenjujući korak (i) dobivamo:

$$\begin{aligned} g(2u) &= g(u + v + u - v) = g(u + v) + g(u - v) \\ &= g(u) + g(v) + g(u) + g(-v) \\ &= 2g(u) + 2g(v) = 4g(u). \end{aligned}$$

(iii) $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow g(x + \lambda x) + g(x - \lambda x) = 2g(x) + 2g(\lambda x)$.

Prema svojstvu (4) iz definicije ortogonalnog prostora postoji $y \in V$ takav da vrijedi $x \perp y, x + y \perp \lambda x - y$. Primjenom svojstva homogenosti relacije ortogonalnosti $\perp$ te koraka (ii) slijedi:

$$\begin{aligned} g(x + \lambda x) + g(x - \lambda x) + g(2y) &= g(x + y + \lambda x - y) + g(x - \lambda x) + g(2y) \\ &= g(x + y + \lambda x - y) + g(x - \lambda x + 2y) \\ &= g(x + y + \lambda x - y) + g(x + y - \lambda x + y) \\ &= g(x + y) + g(\lambda x - y) + g(x + y) + g(-\lambda x + y) \\ &= 2g(x + y) + 2g(\lambda x - y) = 2g(x) + 2g(y) + 2g(\lambda x) + 2g(-y) \\ &= 2g(x) + 2g(\lambda x) + 4g(y) = 2g(x) + 2g(\lambda x) + g(2y). \end{aligned}$$

(iv) $x \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow g(\alpha x + \beta x) + g(\alpha x - \beta x) = 2g(\alpha x) + 2g(\beta x)$.

Za $\alpha = 0$ tvrdnja je očita jer iz koraka (ii) za $u = 0_V$ dobivamo $g(u) = 0$. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti $\alpha \neq 0$. Definirajmo $\lambda = |\frac{\beta}{\alpha}|$ i $z = \alpha x$. Za slučaj $\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$ imamo $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \lambda z = \beta x$, a za slučaj $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ imamo $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}, \lambda z = -\beta x$. U oba slučaja primjenom koraka (iii) dobivamo:

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta x) + g(\alpha x - \beta x) &= g(z + \lambda z) + g(z - \lambda z) \\ &= 2g(z) + 2g(\lambda z) = 2g(\alpha x) + 2g(\beta x). \end{aligned}$$

Neka su sada $x, y \in V$ proizvoljni. Pretpostavimo da je $x \neq 0_V$. Neka je P dvodimenzionalni potprostor od V koji sadrži x i y. Tada postoji $z \in P$ sa svojstvom $x \perp z$, pa su prema svojstvu (2) iz definicije ortogonalnog prostora x i z linearno neovisni i razapinju P. Slijedi $y = \alpha x + \beta z$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prema svojstvu homogenosti vrijedi $(1+\alpha)x \perp \beta z, (1-\alpha)x \perp (-\beta z)$ i $\alpha x \perp \beta z$. Primjenom koraka (iv) dobivamo:

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x-y) &= g\left[(1+\alpha)x + \beta z\right] + g\left[(1-\alpha)x - \beta z\right] \\ &= g\left[(1+\alpha)x\right] + g(\beta z) + g\left[(1-\alpha)x\right] + g(-\beta z) \\ &= g(x+\alpha x) + g(x - \alpha x) + 2g(\beta z) \\ &= 2g(x) + 2g(\alpha x) + 2g(\beta z) = 2g(x) + 2g(y). \end{aligned}$$

Primijetimo da je zbog parnosti funkcije g i $g(0_V) = 0$ prethodna jednakost istinita i za $x = 0_V$. □

Propozicija 2.1.7. *Neka je V realan unitaran prostor,* $\dim V \geq 2$, *a $f\colon V \to \mathbb{R}$ parno ortogonalno aditivno preslikavanje. Tada je $f(x) = g(\|x\|^2)$, $x \in V$, gdje je $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija.*

Dokaz. Ako su $x, y \in V$ takvi da je $\|x\| = \|y\|$, neka je $z = \frac{x+y}{2}$ i $w = \frac{x-y}{2}$. Tada je

$$\langle z \,|\, w\rangle = \left\langle \tfrac{x+y}{2} \,|\, \tfrac{x-y}{2}\right\rangle = \tfrac{1}{4}\left[\langle x+y \,|\, x-y\rangle\right] = \tfrac{1}{4}\left(\|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \tfrac{1}{4}\left(\|x\|^2 - \|x\|^2\right) = 0$$

pa je $f(x) = f(z+w) = f(z) + f(w)$ i $f(y) = f(z-w) = f(z) + f(-w)$. Kako je f parna, to je $f(x) = f(y)$. Dakle, f je neka funkcija norme, tj. postoji $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = g(\|x\|^2)$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}_+$. Tada postoji $x \in V$ takav da je $a = \|x\|^2$. Kako je $\dim V \geq 2$, postoji $u \in V$ takav da je $\{x, u\}$ linearno neovisan skup vektora. Neka je $v = u - \langle u \,|\, x\rangle \frac{x}{\|x\|^2}$. Tada je $\langle x \,|\, v\rangle = \langle x \,|\, u\rangle - \langle x \,|\, u\rangle = 0$. Neka je $y = \sqrt{b}\frac{v}{\|v\|}$. Tada je $\|y\|^2 = b$, $\langle x \,|\, y\rangle = 0$ i $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = a + b$. Slijedi

$$g(a+b) = g(\|x+y\|^2) = f(x+y) = f(x) + f(y) = g(\|x\|^2) + g(\|y\|^2) = g(a) + g(b),$$

pa je g aditivno preslikavanje. □

Napomena 2.1.8. *Primijetimo da je $f = 0$ jedina funkcija koja je istovremeno i aditivna i kvadratna. Za sve $x, y \in V$ vrijedi $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)$. Uočimo da iz uvjeta aditivnosti za $x = y = 0_V$ dobivamo $f(0_V) = 0$. Imamo*

$$2f(x) + 2f(y) = f(x+y) + f(x-y) = f(x) + f(y) + f(x) + f(-y),$$

pa je $f(y) = f(-y)$ odnosno f je parna funkcija. Kako je uz to i $f(0_V) = 0$, imamo

$$0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 2f(x), \quad x \in V.$$

Slijedi $f(x) = 0$ za svaki $x \in V$.

U nastavku poglavlja dokazat ćemo da svaka ortogonalno aditivna funkcija $f\colon V \to G$ ima oblik

$$f(x) = a(x) + q(x), \quad x \in V,$$

pri čemu je a aditivna, a q kvadratna funkcija. Najprije ćemo dokazati da je takav rastav ortogonalno aditivne funkcije na aditivni i kvadratni dio jedinstven.

Lema 2.1.9. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Neka je $f\colon V \to G$ funkcija oblika $f(x) = a(x) + q(x)$, $x \in V$, pri čemu je a aditivna i q kvadratna funkcija te $f(0_V) = 0$. Tada su funkcije a i q jedinstveno određene sa*

$$a(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) - f\left(-\tfrac{x}{2}\right),$$

$$q(x) = 2\left[f\left(\tfrac{x}{2}\right) + f\left(-\tfrac{x}{2}\right)\right],$$

za svaki $x \in V$.

Dokaz. Kako je $f(0_V) = a(0_V) = 0$, iz $f(x) = a(x) + q(x)$ dobivamo da je i $q(0_V) = 0$. Uvrštavanjem $x = 0_V$ u kvadratnu funkcijsku jednadžbu

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y), \quad x, y \in V \tag{2.2}$$

zaključujemo

$$q(-y) = q(y),$$

odnosno funkcija q je parna funkcija. Obzirom da je a aditivno preslikavanje, za svaki $x \in V$ vrijedi $0 = a(x + (-x)) = a(x) + a(-x)$, pa je $a(-x) = -a(x)$ odnosno preslikavanje a je neparno pa stoga dobivamo

$$f(-x) = -a(x) + q(x), \quad x \in V. \tag{2.3}$$

Oduzimanjem (2.3) od $f(x) = a(x) + q(x)$ dobivamo $f(x) - f(-x) = 2a(x)$. Zamjenom x sa $\frac{x}{2}$ i primjenom aditivnosti funkcije a dobivamo $a(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$ za svaki $x \in V$.

Sada zbrajanjem jednadžbe (2.3) sa $f(x) = a(x) + q(x)$ dobivamo $f(x) + f(-x) = 2q(x)$ što množenjem s 2 daje $4q(x) = 2\left(f(x) + f(-x)\right)$. Uvrštavanjem $y = x$ u kvadratnu funkcijsku jednadžbu (2.2), obzirom da je $q(0_V) = 0$, dobivamo:

$$q(2x) = 4q(x),$$

pa je $q(2x) = 2\left(f(x) + f(-x)\right)$. Zamjenom x sa $\frac{x}{2}$ dobivamo $q(x) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$ za svaki $x \in V$. $\square$

Definicija 2.1.10. *Neka su G i H Abelove grupe. Preslikavanje $B\colon G \times G \to H$ naziva se* ***biaditivno*** *ako je*

$$B(x_1 + x_2, x_3) = B(x_1, x_3) + B(x_2, x_3),$$
$$B(x_1, x_2 + x_3) = B(x_1, x_2) + B(x_1, x_3),$$

za sve $x_1, x_2, x_3 \in G$. Ako je $B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1)$, onda kažemo da je B ***simetrično*** *preslikavanje.*

Lema 2.1.11. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Funkcija $f\colon V \to G$ za koju vrijedi $f(0_V) = 0$ rješenje je kvadratne funkcijske jednadžbe ako i samo ako je $f(x) = b(x, x)$, $x \in V$, za neku biaditivnu, simetričnu funkciju $b\colon V \times V \to G$. Funkcija b je jedinstveno određena funkcijom f:*

$$b(x, y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad x, y \in V. \tag{2.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji simetrično biaditivno preslikavanje $b\colon V \times V \to G$ takvo da je $f(x) = b(x, x)$ za svaki $x \in V$. Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{x-y}{2}\right) &= b\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) - b\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) \\ &= 4b\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = b(x, y). \end{aligned}$$

Obratno, neka je $f\colon V \to G$ rješenje kvadratne funkcijske jednadžbe takvo da je $f(0_V) = 0$. Tada je f parna funkcija. Definirajmo funkciju $b\colon V \times V \to G$ sa

$$b(x, y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad x, y \in V.$$

Zamijenimo li uloge x i y i primijenimo li parnost funkcije f, zaključujemo da je funkcija b simetrična. Dokažimo da je b i biaditivna funkcija. Iz kvadratne funkcijske jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} b(z_1 + z_2, y) + b(z_1 - z_2, y) &= f\left(\frac{(z_1+z_2)+y}{2}\right) - f\left(\frac{(z_1+z_2)-y}{2}\right) + f\left(\frac{(z_1-z_2)+y}{2}\right) - f\left(\frac{(z_1-z_2)-y}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{z_1+y}{2} + \frac{z_2}{2}\right) + f\left(\frac{z_1+y}{2} - \frac{z_2}{2}\right) - \left(f\left(\frac{z_1-y}{2} + \frac{z_2}{2}\right) + f\left(\frac{z_1-y}{2} - \frac{z_2}{2}\right)\right) \\ &= 2f\left(\frac{z_1+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{z_2}{2}\right) - 2f\left(\frac{z_1-y}{2}\right) - 2f\left(\frac{z_2}{2}\right) \\ &= 2\left(f\left(\frac{z_1+y}{2}\right) - f\left(\frac{z_1-y}{2}\right)\right) \\ &= 2b(z_1, y), \end{aligned}$$

odakle za $z_2 = z_1$ dobivamo $b(2z_1, y) = 2b(z_1, y)$. Stavimo li $z_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ i $z_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$, zaključujemo

$$b(x_1, y) + b(x_2, y) = b(x_1 + x_2, y).$$

Ovime smo dokazali aditivnost funkcije b u prvoj varijabli. Simetričnost povlači aditivnost i u drugoj varijabli. □

Lema 2.1.12. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor i* G *Abelova grupa te neka je* $f\colon V \to G$ *ortogonalno aditivno preslikavanje takvo da je* $2f = 0$*. Tada je* $f = 0$*.*

Dokaz. Iz leme 2.1.3 slijedi $f(0_V) = 0$. Definirajmo neparnu funkciju $g\colon V \to G$ sa

$$g(x) = f(x) - f(-x), \quad x \in V.$$

Prema svojstvu ortogonalnog prostora $(V, \perp)$ da za sve $x, y \in V$, $x \perp y$ vrijedi $-x \perp -y$ slijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - f(-x-y) \\ &= f(x) + f(y) - f(-x) - f(-y) \\ &= f(x) - f(-x) + f(y) - f(-y) \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

odnosno funkcija g je također ortogonalno aditivna pa je, prema teoremu 2.1.4, g aditivna funkcija. Posebno je

$$g(2x) = 2g(x) = 2f(x) - 2f(-x) = 0, \quad x \in V,$$

odakle slijedi $g = 0$. Dakle, f je parna funkcija, pa je prema teoremu 2.1.6, f kvadratna funkcija, tj. vrijedi $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$, $x, y \in V$. Uvrštavanjem $y = x$ u prethodnu jednadžbu dobivamo $f(2x) = 4f(x) = 0, x \in V$ odakle slijedi da je $f = 0$. □

Teorem 2.1.13. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor i* G *Abelova grupa. Funkcija* $f\colon V \to G$ *je ortogonalno aditivna ako i samo ako je*

$$f(x) = a(x) + q(x) = a(x) + b(x, x), \quad x \in V, \tag{2.5}$$

pri čemu je $a\colon V \to G$ *aditivna funkcija,* $q\colon V \to G$ *kvadratna funkcija te* $b\colon V \times V \to G$ *biaditivna i simetrična funkcija sa svojstvom* $b(x, y) = 0$ *za sve* $x, y \in V$*,* $x \perp y$*. Štoviše, u ovom slučaju funkcije* a*,* q *i* b *dane su sa:*

$$a(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right),$$

$$q(x) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(-\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$b(x, y) = 2\left[f\left(\frac{x+y}{4}\right) + f\left(\frac{-x-y}{4}\right) - f\left(\frac{x-y}{4}\right) - f\left(\frac{-x+y}{4}\right)\right],$$

za sve $x, y \in V$*.*

Dokaz. Neka je $a : V \to G$ aditivna funkcija, a $b : V \to G$ biaditivna i simetrična funkcija sa svojstvom $b(x, y) = 0$ za sve $x, y \in G$, $x \perp y$. Neka je funkcija $f : V \to G$ definirana sa (2.5). Tada za sve $x, y \in V$, $x \perp y$, vrijedi

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) + b(x+y, x+y) \\ &= a(x) + a(y) + b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) \\ &= a(x) + b(x,x) + a(y) + b(y,y) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Neka je sada f ortogonalno aditivna funkcija. Definirajmo funkcije $a, q_0 \colon V \to G$ sa

$$a(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) - f\left(-\tfrac{x}{2}\right), \quad q_0(x) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) + f\left(-\tfrac{x}{2}\right), \quad x \in V.$$

Očito je a neparna, a q_0 parna funkcija. Prema svojstvu ortogonalnog prostora $(V, \perp)$ za sve $x, y \in V$, $x \perp y$ vrijedi $-x \perp -y$, $\frac{x}{2} \perp \frac{y}{2}$ pa su obje funkcije ortogonalno aditivne. Tada prema teoremu 2.1.4 slijedi da je a aditivna funkcija, a prema teoremu 2.1.6 je q_0 kvadratna funkcija. Kako je f ortogonalno aditivna, to je i q_0 ortogonalno aditivna i prema lemi 2.1.3 vrijedi $q_0(0_V) = 0$. Lema 2.1.11 povlači postojanje biaditivne, simetrične funkcije $b_0 \colon V \times V \to G$ takve da je $q_0(x) = b_0(x, x), x \in V$. Budući da je q_0 ortogonalno aditivna funkcija, dobivamo $2b_0(x, y) = 0$, $x, y \in V$, $x \perp y$. Slijedi da je funkcija $b \colon V \times V \to G$ definirana sa $b(x, y) = 2b_0(x, y)$, $x, y \in V$, biaditivna i simetrična te zadovoljava $b(x, y) = 0$, $x, y \in V$, $x \perp y$. S druge strane je

$$2f(x) = a(2x) + q_0(2x) = 2(a(x) + 2q_0(x)), \quad x \in V,$$

pa ortogonalno aditivna funkcija $f_0 = f - a - 2q_0$ zadovoljava $2f_0 = 0$. Prema lemi 2.1.12 dobivamo da je $f_0 = 0$, stoga je

$$f(x) = a(x) + 2q_0(x) = a(x) + b(x, x), \quad x \in V.$$

Dakle, funkcija f ispunjava uvjete teorema. Iz leme 2.1.9 i 2.1.11 dobivamo jedinstvenost funkcija a, b i q kao i formule kojima su one izražene pomoću f. □

Do sada smo promatrali ortogonalnosti koje zadovoljavaju svojstvo homogenosti. U nastavku ćemo navesti kojeg su oblika ortogonalno aditivne funkcije definirane na normiranom prostoru s jednakokračnom i Pitagorinom ortogonalnosti.

Teorem 2.1.14. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realan normirani prostor,* $\dim X \geq 3$ *i $(Y, +)$ Abelova grupa. Ako je $f \colon X \to Y$ neparna ortogonalno aditivna funkcija s jednakokračnom ortogonalnosti, tada je f aditivna.*

Dokaz. Uočimo prvo da je $0_X \perp_J 0_X$ odakle je $f(0_X) = 0$. Štoviše, $f(2x) = 2f(x)$. Za sve $x, y \in X$ takve da je $\|x\| = \|y\|$ neka je $p = \frac{x+y}{2}$ i $q = \frac{x-y}{2}$. Slijedi $\|p+q\| = \|x\| = \|y\| = \|p-q\|$ pa je $p \perp_J \pm q$. Stoga je

$$f(x) = f(p+q) = f(p) + f(q) = f(p) + f(-q) = f(p-q) = f(y),$$

što znači da f ovisi samo o normi $\|x\|$. Kako je $x+y \perp_J x-y$ i $x \perp_J \pm y$, primijenom (2.1) i neparnosti funkcije f slijedi

$$\begin{aligned} f(2x) &= f((x+y) + (x-y)) = f(x+y) + f(x-y) \\ &= f(x) + f(y) + f(x) + f(-y) = 2f(x). \end{aligned}$$

Neka su $x, y \in X$ takvi da vrijedi $\|x\| = \|y\|$. Tada za $u = x+y$ i $v = x-y$ vrijedi $u \perp_J \pm v$ pa je

$$\begin{aligned} f(2x) + f(2y) &= f(u+v) + f(u-v) = (f(u) + f(v)) + (f(u) + f(-v)) \\ &= 2f(u) = f(2u) = f(2x+2y). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je aditivna. $\square$

Pitagorina ortogonalnost pokazala se kao najzahtjevnija za ovu vrstu istraživanja pa sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1.15. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realan normirani prostor,* $\dim X \geq 3$ *i $(Y, +)$ Abelova grupa. Ako je $f\colon X \to Y$ neparna ortogonalno aditivna funkcija s Pitagorinom ortogonalnosti, tada je f aditivna.*

Ponekad je od interesa promatrati grupe na kojima je definirana relacija ortogonalnosti.

Definicija 2.1.16. *Neka je $(G, +)$ Abelova grupa i neka je $\perp$ binarna relacija na G definirana sljedećim svojstvima:*

(a) ako su $x, y \in G$ takvi da je $x \perp y$, tada je $x \perp -y$, $-x \perp y$ i $2x \perp 2y$;

(b) za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $x \perp y$ i $x+y \perp x-y$.

Prisjetimo se da normirani prostor s jednakokračnom ortogonalnosti nije ortogonalni prostor jer jednakokračna ortogonalnost nije homogena. Međutim, normirani prostor s jednakokračnom ortogonalnosti zadovoljava uvjete definicije 2.1.16.

Neka je $(G, \|\cdot\|)$ normirani prostor i $x, y \in G$ takvi da je $x \perp_J y$, odnosno $\|x+y\| = \|x-y\|$. Tada je $x \perp_J -y$ jer je $\|x + (-y)\| = \|x-y\| = \|x+y\| = \|x-(-y)\|$. Isto tako, $-x \perp_J y$ jer je $\|-x+y\| = \|x-y\| = \|x+y\| = \|-x-y\|$. Također je $2x \perp_J 2y$ jer je

$$\|2x+2y\| = 2\|x+y\| = 2\|x-y\| = \|2x-2y\|.$$

Dakle, jednakokračna ortogonalnost zadovoljava uvjet (a). Za $x \in G$ stavimo $y = ix$. Tada je $\|x\| = \|y\|$. Vrijedi $\|x + y\| = |1 + i|\,\|x\| = |1 - i|\,\|x\| = \|x - y\|$, pa je $x \perp_J y$. Nadalje, $\|(x + y) + (x - y)\| = 2\|x\| = 2\|y\| = \|(x + y) - (x - y)\|$, pa je i $x + y \perp_J x - y$. Prema tome, jednakokračna ortogonalnost zadovoljava i uvjet (b).

Sljedećim primjerom dokazat ćemo kako normirani prostor s Pitagorinom ortogonalnosti ne zadovoljava uvjete definicije 2.1.16. Neka je $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normirani prostor i $x = (1, 2 - \sqrt{3}), y = (0, -\sqrt{3})$. Vidimo da vrijedi $x \perp_P y$ jer je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$:

$$\|x - y\|^2 = \|(1, 2 - \sqrt{3}) - (0, -\sqrt{3})\|^2 = \|(1, 2)\|^2 = \max\{|1|, |2|\}^2 = 4,$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|(1, 2 - \sqrt{3})\|^2 + \|(0, -\sqrt{3})\|^2 = \max\{|1|, |2 - \sqrt{3}|\}^2 + \max\{|0|, |-\sqrt{3}|\}^2 = 1 + 3 = 4.$$

Međutim, $-x \not\perp_P y$ jer $\|-x - y\|^2 \neq \|-x\|^2 + \|y\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|-x - y\|^2 &= \|-1 \cdot (1, 2 - \sqrt{3}) - (0, -\sqrt{3})\|^2 \\
&= \|(-1, -2 + 2\sqrt{3})\|^2 \\
&= \max\{|-1|, |-2 + 2\sqrt{3}|\}^2 \\
&= (-2 + 2\sqrt{3})^2 \neq 4 = \|-x\|^2 + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Analogno, $x \not\perp_P -y$ jer $\|x - (-y)\|^2 \neq \|x\|^2 + \|-y\|^2$. Dakle, svojstvo (a) nije zadovoljeno pa Pitagorina ortogonalnost ne zadovoljava uvjete definicije 2.1.16.

Svaki ortogonalni prostor zadovoljava uvjete definicije 2.1.16. Međutim, postoje i primjeri potpuno drugačije prirode.

Primjer 2.1.17. *Neka je $G = \mathbb{R}$ i $\perp_0$ definirana na sljedeći način:*

$$x \perp_0 y \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad ili \quad x \cdot y = 0.$$

Uvjet (a) je očito zadovoljen. Nadalje, primijetimo da je $x + y \perp_0 x - y$ ekvivalentno $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$. Fiksirajmo proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ i uočimo da je za $x = 0$ dovoljno uzeti $y = 0$. No, ako je $x \neq 0$, tada imamo dva slučaja. Ako je x^2 racionalan broj, tada za y možemo uzeti, na primjer, $y = \pi$. Ako x nije racionalan broj, onda je dovoljno uzeti $y = 0$ i uvjet (b) je u oba slučaja ispunjen.

Neka je G Abelova grupa opskrbljena binarnom relacijom $\perp$ koja zadovoljava svojstva (a) i (b) iz definicije 2.1.16. Neka je $f : G \to H$, gdje je H Abelova grupa, funkcija sa svojstvom $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in G$, $x \perp y$. Prema (b), za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $x \perp y$ i $x + y \perp x - y$. Tada je $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Prema (a), $x \perp -y$, pa je $f(x - y) = f(x) + f(-y)$. Zbrajanjem dobivamo

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y) + f(-y).$$

Ako je f neparna, tada je $f(2x) = 2f(x)$ za svaki $x \in G$. Ako je f parna, tada je $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$, a odatle zbog $x + y \perp x - y$ slijedi

$$f(2x) = 2f(x) + 2f(y). \tag{2.6}$$

Zamijenimo li uloge x i y, dobivamo $f(2y) = 2f(x)+2f(y)$. Dakle, $f(2x) = f(2y)$. Kako je $2x \perp 2y$, u (2.6) smijemo zamijeniti x sa $2x$ i y sa $2y$, pa dobivamo $f(4x) = 2f(2x)+2f(2y)$, odakle slijedi $f(4x) = 4f(2x)$. Definirajmo $g : G \to H$ sa $g(x) = f(x)+ f(-x)$ i $h : G \to H$ sa $h(x) = f(x)- f(-x)$. Tada su g i h ortogonalno aditivne funkcije, g je parna, a h neparna te vrijedi $2f(x) = g(x) + h(x)$. Slijedi

$$\begin{aligned} 2f(4x) &= g(4x) + h(4x) = 4g(2x) + 2h(2x) \\ &= 4f(2x) + 4f(-2x) + 2f(2x) - 2f(-2x) \\ &= 6f(2x) + 2f(-2x). \end{aligned}$$

Ako grupa H ima svojstvo da $2h = 0$, gdje je $h \in H$, povlači $h = 0$, tada je

$$f(4x) = 3f(2x) + f(-2x),$$

za svaki $x \in G$. Ako uz to grupa G ima svojstvo da za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $x = 2y$, tada je

$$f(x) = 3f\left(\tfrac{x}{2}\right) + f\left(-\tfrac{x}{2}\right),$$

za svaki $x \in G$.

2.2 Ortogonalna Jensenova funkcijska jednadžba

Definicija 2.2.1. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Za funkciju $f: V \to G$ kažemo da zadovoljava* ***ortogonalnu Jensenovu funkcijsku jednadžbu*** *ako vrijedi*

$$2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \quad x, y \in V,\ x \perp y. \tag{2.7}$$

Napomena 2.2.2. *Ako grupa G ima svojstvo da za svaki $g \in G$ postoji $h \in G$ takav da je $2h = g$ (takav h označavamo sa $\frac{g}{2}$), tada je (2.7) ekvivalentno sa*

$$f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) = \tfrac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Teorem 2.2.3. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Funkcija $f: V \to G$ koja zadovoljava jednadžbu (2.7) je oblika $f(x) = a(x) + c$ pri čemu je $a: V \to G$ aditivna funkcija, a $c \in G$ konstanta.*

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0_V$ u jednadžbu (2.7) dobivamo

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + c,$$

gdje je $f(0_V) = c$. Uvedemo li supstituciju $x = y + z$, dobivamo

$$2f\left(\frac{y+z}{2}\right) = f(y + z) + c.$$

Ako je $y \perp z$, iz (2.7) slijedi

$$2f\left(\frac{y+z}{2}\right) = f(y) + f(z).$$

Izjednačavanjem desnih strana prethodnih dviju jednadžbi dobivamo

$$f(y) + f(z) = f(y + z) + c,$$

što je ekvivalentno sa

$$f(y + z) = f(y) + f(z) - c,$$

$y, z \in V,\ y \perp z$. Definirajmo funkciju $g\colon V \to G$ sa $g(x) = f(x) - c$. Za sve $x, y \in V,\ x \perp y$, vrijedi

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) - c \\ &= f(x) + f(y) - c - c \\ &= f(x) - c + f(y) - c \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na ortogonalno aditivnu funkcijsku jednadžbu čije je rješenje funkcija $g(x) = a(x) + q(x)$, pri čemu je a aditivna, a q kvadratna funkcija. Slijedi da je $a(x) + q(x) = f(x) - c$, odnosno rješenje ortogonalne Jensenove funkcijske jednadžbe je funkcija $f(x) = a(x) + q(x) + c,\ c \in G$.

Najprije uočimo da funkcija $g(x) = a(x) + c$ zadovoljava (2.7) jer je

$$\begin{aligned} 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2a\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2c \\ &= a(x + y) + 2c \\ &= a(x) + a(y) + 2c \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

za sve $x, y \in V$, pa onda i funkcija $q(x) = f(x) - (a(x) + c)$ zadovoljava (2.7). Ako su $x, y \in V,\ x \perp y$, tada je

$$2q\left(\frac{x+y}{2}\right) = q(x) + q(y).$$

Kako je tada i $x \perp -y$, to je i

$$2q\left(\tfrac{x-y}{2}\right) = q(x) + q(-y).$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$2q\left(\tfrac{x+y}{2}\right) + 2q\left(\tfrac{x-y}{2}\right) = 2q(x) + q(y) + q(-y).$$

Kako je funkcija q kvadratna, lijeva strana ove jednakosti je jednaka $q(x) + q(y)$, pa imamo $q(x) + q(y) = 2q(x) + q(y) + q(-y)$ odakle slijedi $q(x) + q(-y) = 0,\ x, y \in V,\ x \perp y$. Kako je $x \perp 0_V$ za svaki $x \in V$, stavimo li $y = 0_V$, zbog $q(0_V) = 0$ odavde slijedi $q(x) = 0$ za svaki $x \in V$. Dakle, $f(x) = a(x) + c$, gdje je $a\colon V \to G$ aditivna funkcija, a $c \in G$ konstanta. □

Napomena 2.2.4. *Uočimo da je svako rješenje ortogonalne funkcijske jednadžbe ujedno i rješenje (bezuvjetne) Jensenove jednadžbe*

$$2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \quad x, y \in V.$$

Znamo da to nije slučaj s ortogonalno aditivnom funkcijskom jednadžbom, tj. ako je f rješenje ortogonalne aditivne funkcijske jednadžbe, tada f ne mora biti rješenje i aditivne funkcijske jednadžbe (primjer 2.1.2).

2.3 Ortogonalna kvadratna funkcijska jednadžba

Kvadratna funkcijska jednadžba definirana je u 1.1 (vidite napomenu 1.1.12). Sada ćemo proučavati funkcijsku jednadžbu istog oblika, ali uz uvjet ortogonalnosti.

Definicija 2.3.1. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor i G Abelova grupa. Za funkciju $f\colon V \to G$ kažemo da je* ***ortogonalno kvadratna*** *ako vrijedi*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \quad x, y \in V,\ x \perp y. \tag{2.8}$$

Propozicija 2.3.2. *Neka je $(X, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitaran prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\dim X \geq 3$ te neka neprekidan funkcional $f\colon X \to \mathbb{C}$ zadovoljava (2.2). Tada postoje neprekidni funkcionali $A, B, C\colon X \to \mathbb{C}$ sa svojstvom (2.2) za koje vrijedi $f = A + B + C$ te*

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= |\lambda|^2 A(x), \\ B(\lambda x) &= \lambda^2 B(x), \\ C(\lambda x) &= \overline{\lambda^2} C(x), \end{aligned}$$

za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki $x \in X$.

Napomena 2.3.3. *Ako je* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$*, tada u propoziciji 2.3.2 zaključujemo da je* $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Za $x = y = 0_X$ dobivamo $f(0_X) = 0$, a tada za $x = 0_X$ dobivamo $f(-y) = f(y)$ za svaki $y \in X$, pa je f parna funkcija. Uzmimo $x, y \in X$ takve da je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ i $\|x\| = \|y\|$. Tada su vektori $nx + y$ i $x - ny$, $n \in \mathbb{N}$ u parovima ortogonalni. Zato je

$$f((nx + y) + (x - ny)) + f((nx + y) - (x - ny)) = 2f(nx + y) + 2f(x - ny)$$

odnosno

$$f((n + 1)x - (n - 1)y) + f((n - 1)x + (n + 1)y) = 2f(nx + y) + 2f(x - ny). \tag{2.9}$$

Također je

$$f((n + 1)y - (n - 1)x) + f((n - 1)y + (n + 1)x) = 2f(ny + x) + 2f(y - nx). \tag{2.10}$$

Zbrajanjem (2.9) i (2.10) te uzimajući u obzir da je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$, dobiva se

$$f((n+1)x)+f((n-1)y)+f((n+1)y)+f((n-1)x) = 2f(x)+2f(nx)+2f(y)+2f(ny). \tag{2.11}$$

Pretpostavimo sada da za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi $f(kx) + f(ky) = k^2(f(x) + f(y))$. Tada iz (2.11) slijedi $f((n + 1)x) + f((n + 1)y) = (n + 1)^2(f(x) + f(y))$. Slijedom toga, prema principu matematičke indukcije, kada je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ i $\|x\| = \|y\|$, jednakost

$$f(nx) + f(ny) = n^2(f(x) + f(y)) \tag{2.12}$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a zbog parnosti funkcije f i za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Neka je $z \in X$ takav da vrijedi $\langle x \,|\, z \rangle = \langle y \,|\, z \rangle = 0$ i $\|x\| = \|y\| = \|z\|$. Zbog (2.12) je tada

$$\begin{aligned} f(nx) + f(nz) &= n^2(f(x) + f(z)), \\ f(ny) + f(nz) &= n^2(f(y) + f(z)), \end{aligned}$$

odakle oduzimanjem dobivamo

$$f(nx) - f(ny) = n^2(f(x) - f(y)). \tag{2.13}$$

Iz (2.12) i (2.13) slijedi

$$f(nx) = n^2 f(x) \tag{2.14}$$

za svaki $x \in X$ i $n \in \mathbb{Z}$. Budući da je f neprekidan, iz (2.14) slijedi

$$f(rx) = r^2 f(x) \tag{2.15}$$

za svaki $x \in X$ i za svaki $r \in \mathbb{R}$. Neka je sada

$$2A(x) = f(ix) + f(x). \tag{2.16}$$

Funkcional A je neprekidan, zadovoljava uvjete (2.2) i (2.15), a također vrijedi i

$$A(ix) = A(x). \tag{2.17}$$

Uzmimo $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Za $e_1 = \frac{x+y}{2}$, $e_2 = \frac{x-y}{2i}$, $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ i $\|x\| = \|y\|$ slijedi

$$\begin{aligned}
A(\lambda x) &= A((\alpha e_1 - \beta e_2) + i(\beta e_1 + \alpha e_2)),\\
A(\overline{\lambda} y) &= A((\alpha e_1 - \beta e_2) - i(\beta e_1 + \alpha e_2)),\\
A(\overline{\lambda} x) &= A((\alpha e_1 + \beta e_2) - i(\beta e_1 - \alpha e_2)),\\
A(\lambda y) &= A((\alpha e_1 + \beta e_2) + i(\beta e_1 - \alpha e_2)).
\end{aligned}$$

Budući da A zadovoljava uvjete (2.2) i (2.15), zbrajanjem gornjih jednakosti, zbog $\langle e_1 \,|\, e_2 \rangle = 0$, $\|e_1\| = \|e_2\|$, $x = e_1 + ie_2$, $y = e_1 - ie_2$, slijedi

$$A(\lambda x) + A(\lambda y) + A(\overline{\lambda} x) + A(\overline{\lambda} y) = 2|\lambda|^2(A(x) + A(y)).$$

Stoga, kao i ranije za $z \perp x, z \perp y$ i $\|z\| = \|x\| = \|y\|$ imamo

$$A(\lambda x) + A(\overline{\lambda} x) = 2|\lambda|^2 A(x). \tag{2.18}$$

Ako λ zamijenimo sa $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, a x sa $e^{i\varphi}x$, dobivamo

$$A(e^{2i\varphi}x) + A(x) = 2A(e^{i\varphi}x).$$

Također je $A(e^{-2i\varphi}x) + A(x) = 2A(e^{-i\varphi}x)$ pa vrijedi

$$A(e^{2i\varphi}x) - A(e^{-2i\varphi}x) = 2(A(e^{i\varphi}x) - A(e^{-i\varphi}x)). \tag{2.19}$$

Za fiksni $x \in X$ definirajmo preslikavanje I na jediničnoj kružnici sa

$$I(\alpha) = A(\alpha x) - A(\overline{\alpha} x).$$

Tada (2.19) ima oblik

$$I(\alpha^2) = 2I(\alpha). \tag{2.20}$$

Konkretno za $\alpha = e^{\frac{k}{2^n-1}2\pi i}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ imamo $\alpha^{2^n-1} = 1$, tj. $\alpha^{2^n} = \alpha$, a jednakost (2.20) tada povlači $I(\alpha) = i(\alpha^{2^n}) = 2^n I(\alpha)$, odnosno $I(\alpha) = 0$ za svaki $\alpha = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Zbog toga je $A(\overline{\lambda} x) = A(\lambda x)$, a iz toga, zbog (2.18), slijedi

$$A(\lambda x) = A(x), \quad x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1.$$

Zamijenimo li λ sa $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ i uzmemo li u obzir da A zadovoljava (2.15), dobivamo

$$A(\lambda x) = |\lambda|^2 A(x), \quad x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Neka je sada $2S(x) = f(ix) - f(x)$. Funkcional S je neprekidan, zadovoljava uvjete (2.2) i (2.15), a također vrijedi i $S(ix) = -S(x)$, $x \in X$. Na isti način na koji smo dobili (2.18) sada možemo dobiti $S(\lambda x) + S(\overline{\lambda} x) = (\lambda^2 + \overline{\lambda^2})S(x)$. Ako stavimo da je $\lambda = \alpha$, $|\alpha| = 1$, $\alpha^{4n} \neq 1, n \in \mathbb{N}$ i zamijenimo x sa αx, dobivamo $S(\alpha^2 x) + S(x) = (\alpha^2 + \overline{\alpha^2})S(\alpha x)$ odnosno

$$\begin{aligned}
S(\alpha^2 x) + S(x) &= \left(\alpha^2 + \tfrac{1}{\alpha^2}\right) S(\alpha x),\\
\alpha^4 S(\alpha^2 x) + \alpha^4 S(x) &= (\alpha^6 + \alpha^2) S(\alpha x),\\
\alpha^4 S(\alpha^2 x) - \alpha^4 \overline{\alpha^4} S(x) &= \alpha^6 S(\alpha x) - \alpha^4 S(x) + \alpha^2 S(\alpha x) - \alpha^2 \overline{\alpha^2} S(x),\\
\alpha^4 (S(\alpha^2 x) - \overline{\alpha^4} S(x)) &= (\alpha^6 + \alpha^2) S(\alpha x) - (\alpha^6 + \alpha^2)\overline{\alpha^2} S(x),\\
\alpha^4 (S(\alpha^2 x) - \overline{\alpha^4} S(x)) &= \alpha^2 (\alpha^4 + 1)(S(\alpha x) - \overline{\alpha^2} S(x)),\\
\tfrac{\alpha^4}{\alpha^8 - 1}(S(\alpha^2 x) - \overline{\alpha^4} S(x)) &= \tfrac{\alpha^2}{\alpha^4 - 1}(S(\alpha x) - \overline{\alpha^2} S(x)).
\end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom dokaže se da je

$$\tfrac{\alpha^{2n}}{\alpha^{4n} - 1}(S(\alpha^n x) - \overline{\alpha^{2n}} S(x)) = \tfrac{\alpha^2}{\alpha^4 - 1}(S(\alpha x) - \overline{\alpha^2} S(x)).$$

Sada je, za svaki $x \in X$,

$$\frac{S(\beta x) - \overline{\beta^2} S(x)}{\beta^2 - \overline{\beta^2}} = \frac{S(\alpha x) - \overline{\alpha^2} S(x)}{\alpha^2 - \overline{\alpha^2}},$$

pri čemu su α i β takvi da je $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha^4 \neq 1$ i $\beta^4 \neq 1$. Nadalje, zbog činjenice da S zadovoljava uvjet (2.15), imamo

$$\frac{S(\lambda x) - \overline{\lambda^2} S(x)}{\lambda^2 - \overline{\lambda^2}} = \frac{S(\lambda_1 x) - \overline{\lambda_1^2} S(x)}{\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}}, \tag{2.22}$$

gdje je $x \in X$ proizvoljan, a λ i λ_1 kompleksni skalari za koje vrijedi $\lambda^2 \neq \overline{\lambda^2}$ i $\lambda_1^2 \neq \overline{\lambda_1^2}$. Fiksirajmo sada λ_1 i definirajmo

$$B(x) = \frac{\overline{\lambda_1^2} S(x) - S(\lambda_1 x)}{\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}}. \tag{2.23}$$

Tada je

$$B(\lambda x) = \frac{\overline{\lambda_1^2} S(\lambda x) - S(\lambda_1 \lambda x)}{\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}}, \quad \lambda_1^2 \neq \overline{\lambda_1^2}. \tag{2.24}$$

Budući da su, zbog (2.22), desne strane jednakosti (2.23) i (2.24) neovisne o λ_1, možemo staviti $\lambda_1 = \lambda$ u (2.23) i $\lambda_1 = \overline{\lambda}$ u (2.24). Rezultat toga je $B(\lambda x) = \lambda^2 B(x)$ za svaki $x \in X$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako je $C(x) = -S(x) - B(x) = \frac{S(\lambda_1 x) - \lambda_1^2 S(x)}{\lambda_1^2 - \overline{\lambda_1^2}}$, onda slično dobivamo $C(\lambda x) = \overline{\lambda^2} C(x)$, $x \in X$, $\lambda \in C$. Zbog $f(x) = A(x) - S(x)$ i $-S(x) = B(x) + C(x)$ je $f(x) = A(x) + B(x) + C(x)$. Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 2.3.4. *Neka je $(X, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ realni unitarni prostor,* $\dim X \geq 3$ *te neka neprekidan funkcional $f \colon X \to \mathbb{R}$ zadovoljava (2.2). Ako je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki $x \in X$*

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x), \tag{2.25}$$

tada je funkcional f kvadratni, tj. $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$ za sve $x, y \in X$.

Dokaz. Za $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$, a tada za $x = 0$ dobivamo $f(-y) = f(y)$ za svaki $y \in X$, pa je f parna funkcija. Uzmimo $x, y \in X$ takve da je $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ i $\|x\| = \|y\|$. Tada je $\langle x + y \,|\, x - y \rangle = 0$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} f((x + y) + (x - y)) + f((x + y) - (x - y)) &= 2f(x + y) + 2f(x - y), \\ f(2x) + f(2y) &= 2f(x + y) + 2f(x - y), \\ 4f(x) + 4f(y) &= 2f(x + y) + 2f(x - y), \\ 2f(x) + 2f(y) &= f(x + y) + f(x - y). \end{aligned}$$

Neka je $\langle x + y \,|\, x - y \rangle \neq 0$. Ako je $\langle z \,|\, x \rangle = 0$, tada je $f(x + z) + f(x - z) = 2f(x) + 2f(z)$, a iz (2.25) slijedi $f(x + iz) + f(x - iz) = 2f(x) + 2f(iz) = 2f(x) - 2f(z)$. To daje

$$4f(x) = f(x + z) + f(x - z) + f(x + iz) + f(x - iz). \tag{2.26}$$

Uzmimo sada $z \in X$ takav da je $\langle z \,|\, x \rangle = 0$, $\langle z \,|\, y \rangle = 0$ te da je $\|z\|^2 = \langle x + y \,|\, x - y \rangle$. Tada je

$$\begin{aligned} \langle x + y + z \,|\, x - y + z \rangle &= 0, \\ \langle x + y - z \,|\, x - y - z \rangle &= 0, \\ \langle x + y + iz \,|\, x - y + iz \rangle &= 0, \\ \langle x + y - iz \,|\, x - y - iz \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Prema (2.26) je

$$4f(x + y) = f(x + y + z) + f(x + y - z) + f(x + y + iz) + f(x + y - iz),$$

$$4f(x - y) = f(x - y + z) + f(x - y - z) + f(x - y + iz) + f(x - y - iz).$$

Zbrajanjem prethodne dvije jednakosti i primjenom (2.2) i (2.27) za dobivamo

$$\begin{aligned}4(f(x+y)+f(x-y)) &= \tfrac{1}{2}(2f(x+y+z)+2f(x-y+z)+2f(x+y-z)\\ &\quad+2f(x-y-z)+2f(x+y+iz)+2f(x-y+iz)\\ &\quad+2f(x+y-iz)+2f(x-y-iz))\\ &= \tfrac{1}{2}(f(2x+2z)+f(2y)+f(2x-2z)+f(2y)\\ &\quad+f(2x+2iz)+f(2y)+f(2x-2iz)+f(2y)),\end{aligned}$$

a zbog (2.26) je $4\,(f(x+y)+f(x-y)) = \frac{1}{2}\,(4f(2x)+4f(2y))$, odnosno

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y).$$

□

Problem određivanja općeg rješenja ortogonalne kvadratne funkcionalne jednadžbe (2.8) na proizvoljnom ortogonalnom prostoru ili u normiranom prostoru s Birkhoff–Jamesovom, jednakokračnom ili Pitagorinom ortogonalnosti i dalje je otvoren. Međutim, poznato je opće rješenje jednadžbe oblika:

$$f(x+y)+f(x-y) = 2g(x)+2h(y), \quad x,y\in V,\ x\perp y. \tag{2.28}$$

Lema 2.3.5. *Neka je $(V,\perp)$ ortogonalan prostor, a G Abelova grupa sa svojstvom $2x=0$ $(x\in G)$ povlači $x=0_V$. Ako za $f\colon V\to G$ vrijedi $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$ za sve $x,y\in V$ takve da je $x\perp y$ i ako je relacija $\perp$ simetrična, tada je preslikavanje $x\mapsto f(x)-f(0_V)$ ortogonalno aditivno.*

Dokaz. Za $x=0_V$ imamo $-f(y)=f(-y)-2f(0_V)$, $y\in V$. Neka je $x\perp y$. Tada je $y\perp x$ pa je $f(y-x)=-f(y+x)+2f(y)$ odakle prvo slijedi

$$\begin{aligned}f(x+y) &= -f(x-y)+2f(x) = (f(y-x)-2f(0_V))+2f(x)\\ &= (-f(y+x)+2f(y))-2f(0_V)+2f(x),\end{aligned}$$

a zatim $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0_V)$. Prema tome je $f(x+y)-f(0_V)=(f(x)-f(0_V))+(f(y)-f(0_V))$ pa je preslikavanje $x\mapsto f(x)-f(0_V)$ ortogonalno aditivno. □

Teorem 2.3.6. *Neka je $(V,\perp)$ ortogonalni prostor, a G Abelova grupa sa svojstvom $2x=0$ $(x\in G)$ povlači $x=0_V$. Opće rješenje $f,g,h\colon V\to G$ funkcijske jednadžbe (2.28) dano je sa*

$$\begin{aligned}f(x) &= A(x)+Q(x)+f(0_V),\\ g(x) &= A(x)+Q(x)+g(0_V),\\ h(x) &= Q(x)+h(0_V),\end{aligned}$$

za svaki $x\in V$, pri čemu je $A\colon V\to\mathbb{R}$ aditivna funkcija, a $Q\colon V\to\mathbb{R}$ ortogonalno kvadratna funkcija.

Dokaz. Promatrajmo prvo f kao neparnu funkciju. Uvrštavanjem $x = 0_V$ i $y = 0_V$ u (2.28) i primjenom neparnosti funkcije f, odakle slijedi $f(0_V) = 0$, dobivamo

$$g(0_V) + h(0_V) = 0. \tag{2.29}$$

Sada, uvrštavajući $(x, 0_V)$ umjesto (x, y) u (2.28) slijedi $f(x) = g(x) + h(0_V)$, a zatim uvrštavajući $(0_V, x)$ umjesto (x, y) dobivamo $g(0_V) + h(x) = 0$, za sve $x \in V$. Prva jednadžba, uz (2.29), daje

$$g(x) = f(x) + g(0_V),$$

dok druga jednadžba, uz (2.29), daje

$$h(x) = h(0_V).$$

Jednadžbu (2.28) sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= 2g(x) + 2h(y) \\ &= 2f(x) + 2g(0_V) + 2h(0_V) \\ &= 2f(x) + 2(g(0_V) + h(0_V)) \\ &= 2f(x), \end{aligned}$$

za sve $x \perp y$. Stoga, prema lemi 2.3.5, imamo $f(x) - f(0_V) = A(x)$, gdje je $A\colon V \to G$ ortogonalno aditivna funkcija. Kako je $f(0_V) = 0$, to prema teoremu 2.1.4 zaključujemo da je A aditivna funkcija.

Promatrajmo sada f kao parnu funkciju. Zamjenom (x, y) sa $(0_V, 0_V)$ u (2.28) dobivamo

$$g(0_V) + h(0_V) = f(0_V). \tag{2.30}$$

Sada, uvrštavajući prvo $(x, 0_V)$ pa $(0_V, y)$ umjesto (x, y) u (2.28) dobivamo redom

$$f(x) = g(x) + h(0_V), \tag{2.31}$$
$$f(y) = g(0_V) + h(y), \tag{2.32}$$

za sve $x, y \in V$. Jednadžbu (2.28) sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= 2g(x) + 2h(y) \\ &= 2f(x) - 2h(0_V) + 2f(y) - 2g(0_V) \\ &= 2f(x) + 2f(y) - 2(g(0_V) + h(0_V)) \\ &= 2f(x) + 2f(y) - 2f(0_V). \end{aligned}$$

Definirajmo $Q(x) = f(x) - f(0_V)$ za svaki $x \in V$. Slijedi

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y), \quad x \perp y,$$

odnosno Q je ortogonalno kvadratna funkcija. Kako je $f(x) = Q(x) + f(0_V)$, iz (2.31), primjenom (2.30), dobivamo

$$g(x) = Q(x) + f(0_V) - h(0_V) = Q(x) + g(0_V),$$

a iz (2.32), primijenom (2.30), dobivamo

$$h(x) = Q(x) + f(0_V) - g(0_V) = Q(x) + h(0_V).$$

Dokažimo još kako i parni i neparni dijelovi funkcija f, g, h zadovoljavaju jednadžbu (2.28). Parne dijelove označit ćemo sa f_p, g_p, h_p, a neparne sa f_n, g_n, h_n. Prema (2.28) imamo

$$f_p(x+y) + f_n(x+y) + f_p(x-y) + f_n(x-y) = 2g_p(x) + 2g_n(x) + 2h_p(y) + 2h_n(y), \quad x \perp y.$$

Zbog homogenosti relacije ortogonalnosti $\perp$ iz $x \perp y$ slijedi $-x \perp -y$ pa uvrštavanjem $-x$ i $-y$ u (2.28) dobivamo

$$f_p(x+y) - f_n(x+y) + f_p(x-y) - f_n(x-y) = 2g_p(x) - 2g_n(x) + 2h_p(y) - 2h_n(y), \quad x \perp y.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prethodnih dviju jednadžbi dobivamo (2.28) za trojke (f_p, g_p, h_p) i (f_n, g_n, h_n) umjesto (f, g, h). Konačno,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_p(x) + f_n(x) = Q(x) + f_p(0_V) + A(x) + f_n(0_V) = A(x) + Q(x) + f(0_V),\\
g(x) &= g_p(x) + g_n(x) = Q(x) + g_p(0_V) + f_n(x) + g_n(0_V) = A(x) + Q(x) + g(0_V),\\
h(x) &= h_p(x) + h_n(x) = Q(x) + h_p(0_V) + h_n(0_V) = Q(x) + h(0_V).
\end{aligned}$$

□

2.4 D'Alembertova funkcijska jednadžba

Definicija 2.4.1. *Neka je $(V, \perp)$ ortogonalni prostor. Za funkciju $f\colon V \to \mathbb{R}$ kažemo da zadovoljava* ***ortogonalnu d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu*** *ako vrijedi*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in V,\ x \perp y. \tag{2.33}$$

Ortogonalna d'Alembertova funkcijska jednadžba dobivena je postavljanjem uvjeta na d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{2.34}$$

u kojoj jednakost vrijedi za sve x i y.

Primjer 2.4.2. *Neka je* $(X, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *unitarni prostor te neka je* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$f(x) = e^{h(\|x\|^2)}$$

pri čemu je $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *proizvoljna neprekidna nenul aditivna funkcija. Tada* f *zadovoljava jednadžbu (2.33) jer* $\langle x \mid y \rangle = 0$ *povlači*

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= e^{h(\|x+y\|^2)} + e^{h(\|x-y\|^2)} \\ &= e^{h(\langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle)} + e^{h(\langle x \mid x \rangle - \langle x \mid y \rangle - \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle)} \\ &= e^{h(\langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle)} + e^{h(\langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle)} \\ &= 2e^{h(\|x\|^2)} \cdot e^{h(\|y\|^2)} \\ &= 2f(x)f(y), \end{aligned}$$

ali ne i jednadžbu (2.34). Uzmimo na primjer prostor $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$*. Neka je* $x = (1, 0)$ *i* $y = (1, 1)$ *pa vrijedi* $\langle x \mid y \rangle = 1 \neq 0$*. Tada je*

$$f(x+y) + f(x-y) = e^{h(\|x+y\|^2)} + e^{h(\|x-y\|^2)} = e^{h(5)} + e^{h(1)}$$

što je različito od

$$2f(x)f(y) = 2e^{h(\|x\|^2)} \cdot e^{h(\|y\|^2)} = 2e^{h(1)}e^{h(2)}.$$

Naime, stavimo li $t = e^{h(1)} > 0$*, tada zbog aditivnosti funkcije* h *izraz* $e^{h(5)} + e^{h(1)}$ *postaje* $t^5 + t$*, a izraz* $2e^{h(1)}e^{h(2)}$ *postaje* $2t \cdot t^2 = 2t^3$*. Jedino pozitivno rješenje jednadžbe* $t^5 + t = 2t^3$ *je* $t = 1$*. No, ako je* $e^{h(1)} = 1$*, tada je* $h(1) = 0$*. Kako je* h *homogena (lema 1.1.13), to za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $h(x) = xh(1) = 0$*, pa je* f *nul funkcija, suprotno pretpostavci.*

Dakle, klasa rješenja funkcijske jednadžbe (2.33) je pravi podskup klase rješenja funkcijske jednadžbe (2.34). Stoga, kako bismo u klasi rješenja od (2.33) okarakterizirali funkcije f koje zadovoljavaju (2.34), treba odrediti prikladan uvjet na f.

Lema 2.4.3. *Neka je* $(V, \perp)$ *ortogonalni prostor. Ako* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *zadovoljava (2.34), tada je*

$$f(2x) = 2f(x)^2 - 1, \quad x \in V. \tag{2.35}$$

Dokaz. Za $x = y = 0_V$ dobivamo $2f(0_V) = 2f(0_V)^2$, pa je $f(0_V) = 0$ ili 1. Pretpostavimo da je $f(0_V) = 0$. Tada za $y = x$ imamo $f(2x) = 0_V$ i to vrijedi za svaki $x \in V$ pa je f nul funkcija, suprotno pretpostavci. Dakle, $f(0_V) = 1$. Sada za $y = x$ dobivamo (2.35). □

U sljedećem teoremu ćemo dokazati da, u slučaju kada je ortogonalni prostor unitaran prostor, uvjet (2.35) karakterizira funkcije u klasi rješenja od (2.33) koje zadovoljavaju (2.34).

Teorem 2.4.4. *Neka je $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Nenul funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ rješenje je jednadžbe (2.34) ako i samo ako f zadovoljava (2.33) i*

$$f(2x) = 2f(x)^2 - 1, \quad x \in X. \tag{2.36}$$

Prvo ćemo dokazati lemu koju ćemo koristiti u dokazu teorema.

Lema 2.4.5. *Neka je $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Ako funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ zadovoljava (2.36) tada jednakost*

$$4f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 = f(x+y)f(x-y) + f(x+y) + f(x-y) + 1 \tag{2.37}$$

vrijedi za sve $x, y \in X$.

Dokaz. Lijevu stranu jednakosti (2.37) zapišimo na sljedeći način:

$$4f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 = \left(2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - 1\right)\left(2f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 - 1\right) + \left(2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - 1\right) + \left(2f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 - 1\right) + 1.$$

Primjenom uvjeta (2.36) dobivamo desnu stranu jednakosti (2.37):

$$\left(2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - 1\right)\left(2f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 - 1\right) + \left(2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - 1\right) + \left(2f\left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 - 1\right) + 1 =$$

$$= f(x+y)f(x-y) + f(x+y) + f(x-y) + 1.$$

□

Dokažimo sada teorem 2.4.4.

Dokaz. Nužnost smo dokazali u lemi 2.4.3. Pretpostavimo sada da f zadovoljava (2.33) i (2.36). Tada uvrštavanjem $x = y = 0_X$ u (2.33) analogno kao i ranije dobivamo $f(0_X) = 1$, pa za $x = 0_X$ iz (2.33) slijedi $f(y) = f(-y)$ za svaki $y \in X$. Sada trebamo dokazati da f zadovoljava jednadžbu (2.34). Neka su $x, y \in X$ proizvoljni vektori. Ako je $\langle x | y \rangle = 0$, tada jednadžba (2.34) slijedi iz prethodnih pretpostavki. Ako je $\langle x | y \rangle \neq 0$ razlikovat ćemo tri slučaja obzirom na vrijednost produkta $\langle x + y | x - y \rangle$.

(i) Pretpostavimo da je $\langle x | y \rangle \neq 0$ i $\langle x + y | x - y \rangle = 0$. Uvrštavanjem $x + y$ i $x - y$ u jednadžbu (2.33) dobivamo $f(2x) + f(2y) = 2f(x+y)f(x-y)$ pa jednadžba (2.36) daje

$$2f(x)^2 - 1 + 2f(y)^2 - 1 = 2f(x+y)f(x-y),$$

$$f(x)^2 + f(y)^2 = f(x+y)f(x-y) + 1. \tag{2.38}$$

Uvrstimo sada $\frac{x+y}{2}$ i $\frac{x-y}{2}$ u jednadžbu (2.33). Dobivamo $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$. Sada kvadriranjem ove jednakosti i primjenom (2.38) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x)^2 + f(y)^2 + 2f(x)f(y) &= 4f(\tfrac{x+y}{2})^2 f(\tfrac{x-y}{2})^2, \\ f(x+y)f(x-y) + 1 + 2f(x)f(y) &= 4f(\tfrac{x+y}{2})^2 f(\tfrac{x-y}{2})^2. \end{aligned}$$

Prema lemi 2.4.5 slijedi

$$f(x+y)f(x-y) + 1 + 2f(x)f(y) = f(x+y)f(x-y) + f(x+y) + f(x-y) + 1,$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

odnosno jednadžba (2.34) je zadovoljena.

(ii) Pretpostavimo da je $\langle x \,|\, y\rangle \neq 0$ i $\langle x+y \,|\, x-y\rangle < 0$. Kako je $\dim X \geq 3$, postoji $z \in X\backslash\{0_X\}$ takav da $\langle x \,|\, z\rangle = \langle y \,|\, z\rangle = 0$ i $\|z\|^2 = -\langle x+y \,|\, x-y\rangle$. Dokažimo ovu tvrdnju. Ako su x i y linearno ovisni, uzmimo $u \in X$ tako da su x i u linearno neovisni i definirajmo prvo $v = u - \frac{\langle x|u\rangle}{\langle x|x\rangle}x$, a zatim $z = (-\langle x+y \,|\, x-y\rangle)^{1/2}\frac{v}{\|v\|}$. Kako je $\langle x \,|\, v\rangle = 0$, to je i $\langle x \,|\, z\rangle = 0$, a onda i $\langle y \,|\, z\rangle = 0$. Vrijedi i $\|z\|^2 = -\langle x+y \,|\, x-y\rangle$. Ako su x i y linearno neovisni, neka je $t \in X$ takav da je $\{x, y, t\}$ linearno neovisan skup vektora. Definiramo li $p = y - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle x|x\rangle}x$ i $q = t - \frac{\langle x|t\rangle}{\langle x|x\rangle}x - \frac{\langle p|t\rangle}{\langle p|p\rangle}p$, tada je $\langle x \,|\, q\rangle = \langle y \,|\, q\rangle = 0$ pa preostaje definirati $z = (-\langle x+y \,|\, x-y\rangle)^{1/2}\frac{q}{\|q\|}$. Tada vrijede sljedeća svojstva:

$$\langle x \pm y \,|\, z\rangle = 0, \tag{2.39}$$

$$\begin{cases} \langle x+y+z \,|\, x-y+z\rangle = 0, \\ \langle x+y-z \,|\, x-y-z\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Uvrštavanjem $x \pm y$ i z u jednadžbu (2.33) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y+z) + f(x+y-z) &= 2f(x+y)f(z), \\ f(x-y+z) + f(x-y-z) &= 2f(x-y)f(z), \end{aligned}$$

a zbrajanjem prethodnih dviju jednadžbi slijedi

$$\begin{aligned} &f(x+y+z) + f(x+y-z) + f(x-y+z) + f(x-y-z) \\ &= 2f(z)\left(f(x+y) + f(x-y)\right). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Obzirom na (2.40), iz (2.33) dobivamo

$$f(2x+2z) + f(2y) = 2f(x+y+z)f(x-y+z), \tag{2.42}$$

$$f(2x-2z) + f(2y) = 2f(x+y-z)f(x-y-z). \tag{2.43}$$

Sada primjenom jednadžbe $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ slijedi

$$f(x+z)^2 + f(y)^2 = f(x+y+z)f(x-y+z) + 1, \tag{2.44}$$
$$f(x-z)^2 + f(y)^2 = f(x+y-z)f(x-y-z) + 1. \tag{2.45}$$

Ako u (2.42) i (2.43) redom zamijenimo x, y, z sa $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$, dobivamo

$$f(x+z) + f(y) = 2f\left(\tfrac{x+y+z}{2}\right) f\left(\tfrac{x-y+z}{2}\right), \tag{2.46}$$
$$f(x-z) + f(y) = 2f\left(\tfrac{x+y-z}{2}\right) f\left(\tfrac{x-y-z}{2}\right). \tag{2.47}$$

Kvadriranjem prethodne dvije jednadžbe i primjenom (2.44) i (2.45) dobivamo

$$f(x+y+z)f(x-y+z) + 1 + 2f(x+z)f(y) = 4f\left(\tfrac{x+y+z}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x-y+z}{2}\right)^2, \tag{2.48}$$
$$f(x+y-z)f(x-y-z) + 1 + 2f(x-z)f(y) = 4f\left(\tfrac{x+y-z}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x-y-z}{2}\right)^2. \tag{2.49}$$

Sada zamijenimo x sa $x + z$, odnosno $x - z$ u izrazu (2.37) iz leme 2.4.5 i dobivamo

$$4f\left(\tfrac{x+z+y}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x+z-y}{2}\right)^2 = f(x+z+y)f(x+z-y) + f(x+z+y) + f(x+z-y) + 1,$$

$$4f\left(\tfrac{x-z+y}{2}\right)^2 f\left(\tfrac{x-z-y}{2}\right)^2 = f(x-z+y)f(x-z-y) + f(x-z+y) + f(x-z-y) + 1,$$

pa uvrštavanje u (2.48) i (2.49) daje

$$f(x+y+z) + f(x-y+z) = 2f(x+z)f(y),$$
$$f(x+y-z) + f(x-y-z) = 2f(x-z)f(y).$$

Zbrajanjem prethodnih dviju jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y+z) + f(x-y+z) + f(x+y-z) + f(x-y-z) &= 2f(y)(f(x+z) + f(x-z)) \\ &= 4f(x)f(y)f(z), \end{aligned} \tag{2.50}$$

za $\langle x\,|\,z\rangle = 0$. Jednadžbe (2.41) i (2.50) daju

$$f(z)\,(f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)) = 0. \tag{2.51}$$

Kako $\langle x\,|\,z\rangle = 0$ povlači $\langle x\,|\,2z\rangle = 0$, smijemo zamijeniti z sa $2z$, pa primjenom (2.36) dobivamo

$$(2f(z)^2 - 1)(f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)) = 0. \tag{2.52}$$

Sada iz (2.51) i (2.52) slijedi $f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y) = 0$ za sve $x, y \in X$.

(iii) Pretpostavimo da je $\langle x\,|\,y\rangle \neq 0$ i $\langle x+y\,|\,x-y\rangle > 0$. Uzmimo $z \in X$ takav da je $\langle x\,|\,z\rangle = \langle y\,|\,z\rangle = 0$ i $\|z\|^2 = \langle x+y\,|\,x-y\rangle$. Analognom metodom dokaza kao u koraku (ii) slijedi tvrdnja. □

2.5 Očuvanje ortogonalnosti

Definicija 2.5.1. *Neka su $(V, \perp_V)$ i $(W, \perp_W)$ ortogonalni prostori. Funkcija $f\colon V \to W$ (točno) čuva ortogonalnost ako vrijedi*

$$x \perp_V y \Rightarrow f(x) \perp_W f(y), \quad x, y \in V. \tag{2.53}$$

Napomena 2.5.2. *Neka preslikavanja mogu biti vrlo nepravilna, odnosno ne biti linearna pa se iz tog razloga ograničavamo samo na linearna preslikavanja.*

Teorem 2.5.3. *Neka su $(X, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ i $(Y, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ unitarni prostori nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Za nenul linearno preslikavanje $f\colon X \to Y$ sljedeći uvjeti su ekvivalentni za neki $\gamma > 0$:*

(i) f čuva ortogonalnost;

(ii) $\|f(x)\| = \gamma\|x\|$ za svaki $x \in X$;

(iii) $\langle f(x)\,|\,f(y)\rangle = \gamma^2 \langle x\,|\,y\rangle$ za sve $x, y \in X$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ako je $\dim X = 1$ tada je očito svako netrivijalno linearno preslikavanje preslikavanje sličnosti, odnosno $\|f(x)\| = \gamma\|x\|$ za sve $x \in X$ i $\gamma > 0$. Neka je sada $\dim X \geq 2$ i neka su $x, y \in X \backslash \{0_X\}$. Neka je $\alpha = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ i $\beta = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$. Pretpostavimo da je $\alpha < \beta$. Lako se dokaže da vektori x i y moraju biti linearno neovisni. Ako je $\mu \in \mathbb{F}$ takav da je $y = \mu x$, tada je

$$\|f(y)\| = \|f(\mu x)\| = \alpha\|\mu x\| = \alpha|\mu|\,\|x\| = \alpha\|\mu x\| = \alpha\|y\|$$

pa je prema pretpostavci $\beta\|y\| = \alpha\|y\|$ što je u kontradikciji sa $\alpha < \beta$. Dakle, vektori su linearno neovisni. Štoviše, x i y ne mogu biti ortogonalni. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \perp y$ i definirajmo vektore $u = \frac{x}{\|x\|}$ i $v = \frac{y}{\|y\|}$. Imamo $u \perp v$ i $u + v \perp u - v$ odakle slijedi $f(u) \perp f(v)$ i $f(u+v) \perp f(u-v)$. S druge strane,

$$\langle f(u+v)\,|\,f(u-v)\rangle = \|f(u)^2\| - \|f(v)\|^2 = \alpha^2 - \beta^2 \neq 0,$$

što dovodi do kontradikcije. Dakle, $x \not\perp y$. Definirajmo vektore $z = x - \frac{y}{\langle y\,|\,x\rangle}\|x\|^2 \neq 0$ i $w = \frac{z}{\|z\|}$. Očito je $z \perp x$, $w \perp u$, $w + u \perp w - u$, odakle slijedi $f(z) \perp f(x)$, $f(w) \perp f(u)$ i $f(w+u) \perp f(w-u)$. Kako je $z \perp x$, to je $\|x - z\|^2 = \langle x - z\,|\,x - z\rangle = \|z\|^2 + \|x\|^2$, a kako je $f(z) \perp f(x)$, također je $\|f(x) - f(z)\|^2 = \|f(z)\|^2 + \|f(x)\|^2$. Sada možemo izračunati

$$\|z\|^2 = \frac{\|x\|^4\|y\|^2}{|\langle x\,|\,y\rangle|^2} - \|x\|^2$$

i

$$\|f(z)\|^2 = \frac{\|x\|^4\|f(y)\|^2}{|\langle x\,|\,y\rangle|^2} - \|f(x)\|^2 = \frac{\|x\|^4\beta^2\|y\|^2}{|\langle x\,|\,y\rangle|^2} - \alpha^2\|x\|^2 > \alpha^2\|z\|^2,$$

odakle slijedi $\frac{\|f(z)\|^2}{\|z\|^2} > \alpha^2$. Konačno, imamo

$$\langle f(w+u) \mid f(w-u) \rangle = \|f(w)\|^2 - \|f(u)\|^2 = \frac{\|f(z)\|^2}{\|z\|^2} - \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} > \alpha^2 - \alpha^2 = 0,$$

što dovodi do kontradikcije s pretpostavkom da je $f(w+u) \perp f(w-u)$. Dakle, zaključujemo da $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ ima konstantnu vrijednost za svaki (nenul) $x \in X$. Tu vrijednost označimo sa γ. Tada je $\|f(x)\| = \gamma\|x\|$ za svaki $x \in X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Implikacija slijedi iz polarizacijskih formula iz teorema 1.1.10. Naime, ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada imamo

$$\begin{aligned} \langle f(x) \mid f(y) \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\gamma^2\|x+y\|^2 - \gamma^2\|x-y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\gamma^2\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \gamma^2 \langle x \mid y \rangle . \end{aligned}$$

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tada imamo

$$\begin{aligned} \langle f(x) \mid f(y) \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2 - i\|f(x)+f(iy)\|^2 + i\|f(x)-f(iy)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\gamma^2\|x+y\|^2 - \gamma^2\|x-y\|^2 - i\gamma^2\|x+iy\|^2 + i\gamma^2\|x-iy\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\gamma^2\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right) \\ &= \gamma^2 \langle x \mid y \rangle . \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Implikacija je očita jer $\langle x \mid y \rangle = 0$ povlači $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \gamma^2 \cdot 0 = 0$. □

Teorem 2.5.4. *Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ normirani prostori nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $f : X \to Y$ linearni operator. Tada f čuva Birkhoff–Jamesovu ortogonalnost ako i samo ako je f preslikavanje sličnosti.*

Prije dokaza teorema navest ćemo definicije i rezultate na koje ćemo se pozivati u dokazu.

Kažemo da normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ima Gateaux diferencijabilnu normu u $x \in X \setminus \{0_X\}$ ako

$$\lim_{t \to 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

postoji za svaki $y \in X$. Nadalje, potporni funkcional ϕ_x u $x \in X$ je linearan funkcional na X koji je jedinične norme i takav da je $\phi_x(x) = \|x\|$. Kaže se da je X gladak u $x \in X \setminus \{0_X\}$ ako postoji jedinstveni potporni funkcional u x, a da je X gladak ako je gladak u svakoj svojoj točki. Poznato je da je Banachov prostor X gladak u x ako i samo ako je norma Gateaux diferencijabilna u x. Osim toga, u tom slučaju, realni dio $\operatorname{Re}\phi_x$ jedinstvenog potpornog funkcionala ϕ_x u x dan je sa

$$\operatorname{Re}\phi_x(y) = \lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}.$$

Ako je X gladak u x , tada je $x \perp y$ ako i samo ako je $y \in \ker\phi_x$. Nadalje, ako je X gladak, tada je sa $[x\,|\,y] := \|y\|\phi_y(x)$, gdje je ϕ_y potporni funkcional u y, definiran jedinstveni poluskalarni produkt na X. U tom slučaju je uvjet

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

ekvivalentan sa

$$y \in \ker\phi_x \Rightarrow f(y) \in \ker\phi_{f(x)}$$

odnosno

$$[x\,|\,y] = 0 \Rightarrow [f(x)\,|\,f(y)] = 0.$$

Dokažimo sada teorem 2.5.4.

Dokaz. Jasno je da preslikavanje sličnosti čuva ortogonalnost. Trebamo dokazati obrat. Možemo pretpostaviti $f \neq 0$. Uočimo da ako f čuva ortogonalnost i nije nul funkcija, tada ona mora biti injektivna. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $0_X \neq x \in \ker f$. Neka je y proizvoljan vektor u X takav da x nije ortogonalan na y. Promotrimo funkciju $t \mapsto \|x+ty\|$. Kako je ta funkcija neprekidna i teži u beskonačnost kada $|t|$ teži u beskonačnost, to postoji bar jedna točka, recimo α, takva da u α ova funkcija postiže svoj globalni minimum. Tada je

$$\min_{t\in\mathbb{F}} \|x+ty\| = \|x+\alpha y\|.$$

Uočimo da je zato

$$\|x+\alpha y+\mu y\| \geq \|x+\alpha y\|, \quad \mu \in \mathbb{F},$$

pa je $x+\alpha y \perp y$. Kako f čuva ortogonalnost, to je i $f(x+\alpha y) \perp f(y)$ odnosno $\alpha f(y) \perp f(y)$. Ako je $\alpha = 0$, tada je $\min_{t\in\mathbb{F}} \|x+ty\| = \|x\|$, odakle slijedi $\|x+\mu y\| \geq \|x\|$ za svaki $\mu \in \mathbb{F}$, pa je $x \perp y$ suprotno pretpostavci. Dakle, $\alpha \neq 0$, pa imamo $f(y) \perp f(y)$. Stoga je $f(y) = 0$. Neka je $z \in X\backslash\{0_X\}$ proizvoljan i definirajmo $y = 2\|z\|x + \|x\|z$. Pretpostavimo da je $x \perp y$. Tada je $\|x+\mu y\| \geq \|x\|$ za svaki $\mu \in \mathbb{F}$, odnosno $\|(1+2\mu\|z\|)x + \mu\|x\|z\| \geq \|x\|$ za svaki $\mu \in \mathbb{F}$. Za $\mu = -\frac{1}{2\|z\|}$ posebno dobivamo $\frac{1}{2\|z\|}\|\,\|x\|z\,\| \geq \|x\|$ odakle slijedi $\frac{1}{2} \geq 1$ što je kontradikcija. Dakle, x nije ortogonalan na y, pa prema dokazanom imamo $f(y) = 0$ odnosno $f(2\|z\|x + \|x\|z) = 0$, odakle slijedi $f(z) = 0$. No, kako je z bio proizvoljan, zaključujemo da je f nul funkcija suprotno pretpostavci. Prema tome, f je injekcija.

Sljedeće dokazujemo da postoji funkcija $A\colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ takva da je

$$\|f(x)\| = A(\|x\|), \quad x \in X.$$

Dovoljno je dokazati da

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|f(x)\| = \|f(y)\|, \quad x, y \in X. \tag{2.54}$$

Implikacija je trivijalna ako su x i y linearno ovisni jer tada $\|x\| = \|y\|$ povlači $y = \mu x$ za neki skalar μ, $|\mu| = 1$. Pretpostavimo stoga da su x i y linearno neovisni vektori. Neka je M linearna ljuska vektora x i y. Definirajmo normu na M sa $\|z\|_f = \|f(z)\|$, $z \in M$ i neka je Δ skup svih onih $z \in M$ za koje barem jedna od normi, $\|\cdot\|$ ili $\|\cdot\|_f$, nije Gateaux diferencijabilna. Budući da f čuva ortogonalnost, dobivamo da za svaki $z \in M\backslash\Delta$ i $\eta \in M$ vrijedi

$$\begin{aligned} \eta \in \ker T_z \Rightarrow f(\eta) &\in \ker T_{f(z)} \\ &\Leftrightarrow \eta \ker(T_{f(z)} \circ f) \\ &\Leftrightarrow \eta \ker G_{f(z)}, \end{aligned}$$

pri čemu su T_z i G_z potporni funkcionali za z, za norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_f$, na M, a $T_{f(z)}$ potporni funkcional za $f(z)$, za normu na $f(M)$. Dakle, imamo $\ker T_z \subseteq \ker G_z$, za svaki $z \in M\backslash\Delta$, ekvivalentno, postoji funkcija $\lambda\colon M\backslash\Delta \to \mathbb{C}$ takva da je $G_z = \lambda(z)T_z$, za svaki $z \in M\backslash\Delta$. Kako je

$$\|f(z)\| = G_z(z) = \lambda(z)T_z(z) = \lambda(z)\|z\|, \quad z \in M\backslash\Delta,$$

možemo uočiti da je λ realna pa zaključujemo da je

$$g_z = \lambda(z)t_z, \quad z \in M\backslash\Delta,$$

pri čemu su t_z i g_z Gateauxovi diferencijali za z na $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_f$. Neka je $L\colon \mathbb{C}^2 \to M$ i $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha x + \beta(y - x)$. Očito je L izomorfizam. Stavimo $D = L^{-1}(\Delta)$. Iz definicije skupa Δ je vidljivo da je D skup točaka $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ za koje barem jedna od funkcija, $(\alpha,\beta) \mapsto \|L(\alpha,\beta)\|$ ili $(\alpha,\beta) \mapsto \|L(\alpha,\beta)\|_f$, nije Gateaux diferencijabilna. Kako su obje funkcije norme u $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, D mora zadovoljavati $(\alpha,\beta) \in D \Leftrightarrow (\lambda\alpha, \lambda\beta) \in D$, $\lambda \in \mathbb{F}$ i $\nu^4(D) = 0$. Neka je $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{C}^2$ put. Tada je $\Gamma\colon [0,2] \to M$ definirana sa

$$\Gamma(r) = \tfrac{\|x\|}{\|L\gamma(r)\|}L\gamma(r), \quad r \in [0,2],$$

put od x do y takav da je $\nu\{r : \Gamma(r) \in \Delta\} = \nu\{r : \gamma(r) \in D\} = 0$. Kako su $r \mapsto \|L\gamma(r)\|$ i $r \mapsto \|L\gamma(r)\|_f$ neprekidne, slijedi da je i $\|\Gamma(r)\|_f = \frac{\|x\|}{\|L\gamma(r)\|}\|L\gamma(r)\|_f$ neprekidna i $\nu\{r : \Gamma'(r)\,\text{ne postoji}\} = \nu\{r : \|L\gamma(r)\|'\,\text{ne postoji}\} = 0$. Također, uočimo da je $r \mapsto \|\Gamma(r)\| = \|x\|$ neprekidna funkcija. Tada imamo

$$\begin{aligned} \|\Gamma(r)\|_f' &= g_{\Gamma(r)}(\Gamma'(r)) \\ &= \lambda(\Gamma(r)) f_{\Gamma(r)}(\Gamma'(r)) \\ &= \lambda(\Gamma(r))\, \|\Gamma(r)\|' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Stoga, $r \mapsto \|\Gamma(r)\|_f$ je neprekidna funkcija i imamo $\|x\|_f = \|\Gamma(0)\|_f = \|\Gamma(2)\|_f = \|y\|_f$, odakle slijedi (2.54) čime je teorem dokazan. $\square$

Definicija 2.5.5. *Neka su $(V, \perp_V)$ i $(W, \perp_W)$ ortogonalni prostori te neka je $\varepsilon \in [0,1\rangle$. Kažemo da su vektori u i v ε-ortogonalni ($u \perp^\varepsilon v$) kada je $|\langle u \,|\, v\rangle| \leq \varepsilon \|u\|\,\|v\|$. Za funkciju $f\colon V \to W$ kažemo da približno čuva ortogonalnost ako vrijedi*

$$x \perp_V y \Rightarrow f(x) \perp_W^\varepsilon f(y), \quad x, y \in V.$$

Definicija 2.5.6. *Približno očuvanje jednakokračne ortogonalnosti definira se sa*

$$x \perp_J^\varepsilon y \Leftrightarrow \tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x-y\| \leq \|x+y\| \leq \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x-y\|, \quad \varepsilon \in [0,1\rangle\,, x, y \in X.$$

Lema 2.5.7. *Neka je $\varepsilon \in [0,1\rangle$ i $f\colon X \to Y$ linearno preslikavanje za koje vrijedi*

$$x \perp_J y \Rightarrow f(x) \perp_J^\varepsilon f(y), \quad x, y \in X. \tag{2.55}$$

Tada je f injektivna, neprekidna i zadovoljava

$$\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\|\,\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|f\|\,\|x\|, \quad x \in X. \tag{2.56}$$

Dokaz. Zamijenimo li x i y sa $\frac{x+y}{2}$ i $\frac{x-y}{2}$, (2.55) možemo zapisati kao

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow |\,\|f(x)\| - \|f(y)\|\,| \leq \varepsilon\,(\|f(x)\| + \|f(y)\|)\,, \quad x, y \in X. \tag{2.57}$$

Fiksirajmo proizvoljni jedinični vektor $y \in X$ i neka je $\gamma = \|f(y)\|$. Iz (2.57) slijedi da je

$$|\,\|f(x)\| - \gamma| \leq \varepsilon\,(\|f(x)\| + \gamma)$$

što je ekvivalentno sa

$$\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\gamma \leq \|f(x)\| \leq \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\gamma$$

pa je γ pozitivna jer bi inače bilo $f = 0$. Također, iz (2.57) dobivamo

$$\|x\| = 1 \Rightarrow |\,\|f(x)\| - \gamma| \leq \varepsilon\,(\|f(x)\| + \gamma)\,,$$

odakle je

$$|\,\|f(\tfrac{x}{\|x\|})\| - \gamma| \leq \varepsilon\Big(\|f(\tfrac{x}{\|x\|})\| + \gamma\Big)\,, \quad x \in X \setminus \{0_X\}$$

i

$$|\,\|f(x)\| - \gamma\|x\|\,| \leq \varepsilon\,(\|f(x)\| + \gamma\|x\|\,)\,.$$

To je ekvivalentno sa

$$\tfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\gamma\,\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\gamma\,\|x\|, \quad x \in X$$

i implicira injektivnost i neprekidnost od f. Dok je $\gamma = \|f(y)\|$ proizvoljna, za $y \in X$ takav da je $\|y\| = 1$, slijedi (2.56). $\square$

Teorem 2.5.8. *Neka su* $(X, \|\cdot\|)$ *i* $(Y, \|\cdot\|)$ *normirani prostori nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *i* $f\colon X \to Y$ *linearni operator. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(i) *postoji* $\gamma > 0$ *takav da vrijedi* $\|f(x)\| = \gamma\|x\|$ *za svaki* $x \in X$*;*

(ii) $x \perp_J y \Rightarrow f(x) \perp_J f(y)$ *za sve* $x, y \in X$*.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Imamo

$$\|f(x) + f(y)\| = \|f(x+y)\| = \gamma\|x+y\| = \gamma\|x-y\| = \|f(x-y)\| = \|f(x) - f(y)\|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Za $\varepsilon = 0$ iz (2.56) dobivamo $\|f\|\,\|x\| \leq \|fx\| \leq \|f\|\,\|x\|$, odakle je $\|fx\| = \gamma\|x\|$, $x \in X$ za $\gamma = \|f\|$. Preslikavanje f je preslikavanje sličnosti. □

Teorem 2.5.9. *Neka su* $(X, \|\cdot\|)$ *i* $(Y, \|\cdot\|)$ *normirani prostori nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *i* $f\colon X \to Y$ *linearni operator. Tada je* f *preslikavanje sličnosti, odnosno za neki* $\gamma > 0$ *je* $\|f(x)\| = \gamma\|x\|$, $x \in X$ *ako i samo ako postoje poluskalarni produkti* $[\cdot\,|\,\cdot]_X$ *i* $[\cdot\,|\,\cdot]_Y$ *na* X *i* Y*, takvi da je*

$$[f(x)\,|\,f(y)]_Y = \gamma^2[x\,|\,y]_X, \quad x, y \in X. \tag{2.58}$$

Dokaz. Dovoljnost je očita. Pretpostavimo da su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ različiti normirani prostori s različitim normama. Odaberimo proizvoljan poluskalarni produkt $[\cdot\,|\,\cdot]_Y$ na Y. Tada je dovoljno definirati

$$[x\,|\,y]_X = \frac{1}{\gamma^2}[f(x)\,|\,f(y)]_Y, \quad x, y \in X$$

za dobivanje poluskalarnog produkta na X takvog da je (2.58) zadovoljeno. □

Bibliografija

[1] J. Alonso, C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties*, Extracta Math. 3 (1988), 1.– 15.

[2] J. Alonso, C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part II: relations between main orthogonalities*, Extracta Math. 4 (1989), 121. – 131.

[3] J. Alonso, H. Martini, S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequ. Math. 83 (2012), 153. – 189.

[4] K. Baron, P. Volkmann, *On orthogonally additive functions*, Publ. Math. Debrecen 52 (1998), 291. - 297.

[5] A. Blanco, A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 136 (2006), 709. – 716.

[6] J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005), 158. – 169.

[7] J. Chmieliński, *Remarks on orthogonality preserving mappings in normed spaces and some stability problems*, Banach J. Math. Anal. 1 (2007), 117. – 124.

[8] J. Chmieliński, P. Wójcik, *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 1445. – 1453.

[9] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.

[10] W. Fechner, J. Sikorska, *On the stability of orthogonal additivity*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 58 (2010) 23. – 30.

[11] M. Fochi, *D'Alembert's functional equation on restricted domains*, Aequ. Math. 52 (1996), 246. – 253.

[12] M. Fochi, *General solutions of two quadratic functional equations of Pexider type on orthogonal vectors*, Abstr. Appl. Anal. (2012) Art. ID 675810

[13] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[14] J. Ratz, *On orthogonally additive mappings*, Aequ. Math. 28 (1985), 35. – 49.

[15] J. Sikorska, *Orthogonalities and functional equations*, Aequ. Math. 89 (2015), 215. – 277.

[16] Gy. Szabó, *A conditional Cauchy-equation on normed spaces*, Publ. Math. Debrecen 42 (1993), 256. – 271.

[17] Gy. Szabó, *Isosceles orthogonally additive mappings and inner product spaces*, Publ. Math. Debrecen 46 (1995), 373. – 384.

[18] F. Vajzović, *Über das Funktional H mit der Eigenschaft:* $(x, y) = 0 \Rightarrow H(x + y) + H(x - y) = 2H(x) + 2H(y)$, Glasnik Mat. Ser. III 2 (1967), 73. - 81.

Sažetak

U ovom radu definirane su Birkhoff–Jamesova, jednakokračna, Robertsova, Pitagorina i poluskalarna ortogonalnost. Svaka od njih poopćenje je standardne ortogonalnosti u unitarnim prostorima. Proučavana su četiri tipa uvjetnih funkcijskih jednadžbi (tzv. ortogonalnih funkcijskih jednadžbi) dobivenih dodavanjem uvjeta ortogonalnosti poznatim funkcijskim jednadžbama:

(i) aditivna: $f(x+y) = f(x) + f(y),\ x \perp y$,

(ii) Jensenova: $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ x \perp y$,

(iii) kvadratna: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x \perp y$,

(iv) d'Alembertova: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ x \perp y$.

Opisano je i na koji način funkcija čuva standardnu ortogonalnost te koje uvjete mora zadovoljavati kako bi očuvala Birkhoff–Jamesovu, jednakokračnu i poluskalarnu ortogonalnost u normiranim prostorima.

Summary

In this thesis, Birkhoff–James, isosceles, Roberts, Pythagorean and semi–inner product orthogonality are defined. Each of them is a generalization of standard orthogonality in inner product spaces. Four types of conditional functional equations (so-called orthogonal functional equations) obtained by adding an orthogonality condition to known functional equations are studied:

(i) additive: $f(x+y) = f(x) + f(y),\ x \perp y$,

(ii) Jensen: $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ x \perp y$,

(iii) quadratic: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x \perp y$,

(iv) d'Alembert: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ x \perp y$.

It is also described how a function preserves standard orthogonality and which conditions it must satisfy in order to preserve Birkhoff–James, isosceles and semi–inner product orthogonality in normed spaces.

Životopis

Rođena sam 3. veljače 1995. godine u Požegi, gdje sam i odrasla. Školovanje sam započela u Osnovnoj školi Antuna Kanižlića Požega, nakon čega sam od 2010. godine pohađala Gimnaziju Požega, opći smjer. Prirodoslovno–matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2014. godine. Preddiplomski studij Matematike, smjer nastavnički završila sam 2018. godine, nakon čega sam upisala diplomski studij Matematike, smjer nastavnički.