

# Granični teoremi za Galton-Watsonove procese

---

**Domjanić, Dario**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:591028>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dario Domjanić

**GRANIČNI TEOREMI ZA**  
**GALTON–WATSONOVE PROCESSE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Zoran Vondraček

Zagreb, prosinac, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|                                                       |            |
|-------------------------------------------------------|------------|
| <b>Sadržaj</b>                                        | <b>iii</b> |
| <b>Uvod</b>                                           | <b>2</b>   |
| <b>1 Galton–Watsonovi procesi</b>                     | <b>3</b>   |
| 1.1 Osnovni pojmovi i rezultati . . . . .             | 3          |
| 1.2 Izumiranje i rast . . . . .                       | 6          |
| <b>2 Stabla pridružena procesima grananja</b>         | <b>10</b>  |
| 2.1 Galton–Watson stabla . . . . .                    | 10         |
| 2.2 Stabla pristrana po veličini . . . . .            | 15         |
| <b>3 Granično ponašanje Galton–Watsonovih procesa</b> | <b>19</b>  |
| 3.1 Osvrt na uvjetno očekivanje . . . . .             | 19         |
| 3.2 Superkritični procesi: brzina rasta . . . . .     | 22         |
| 3.3 Subkritični procesi: brzina izumiranja . . . . .  | 31         |
| 3.4 Kritični procesi: brzina izumiranja . . . . .     | 35         |
| <b>Bibliografija</b>                                  | <b>42</b>  |

# Uvod

Krajem 19. stoljeća britanski znanstvenik F. Galton, koji je između ostalog izučavao ljudsku evoluciju, pitao se koja je vjerojatnost izumiranja plemićkih prezimena u Ujedinjenom Kraljevstvu. Njegovo pitanje je bilo sljedeće.

*Ako muškarac s određenim prezimenom ima 0, 1, 2, ... muških potomaka s vjerojatnostima  $p_0, p_1, p_2, \dots$ , kolika je vjerojatnost da će prezime izumrijeti nakon  $r$  generacija i koja je vjerojatnost svakog broja muških potomaka nakon  $r$  generacija.*

Galton se za pomoć obratio britanskom matematičaru H.W. Watsonu te su zajedno formulirali matematički model koji danas nazivamo *Galton–Watsonov proces* (ili proces grananja). Model opisuje populaciju koja kreće s jednom jedinkom. Svaka jedinka se razmnožava nezavisno od ostalih i ima jednaku distribuciju potomaka. Zanimljivo je pitanje što možemo reći o graničnom ponašanju takvog procesa. Hoće li populacija izumrijeti, sve više rasti ili se možda stabilizirati u nekakvom ekvilibriju? Koji uvjeti uopće određuju dugoročno ponašanje procesa? Vidjet ćemo da ovakvi procesi imaju svojevrsnu dualnost, ili izumiru ili veličina populacije sve više raste. Pokazat ćemo da očekivani broj potomaka po generaciji radi distinkciju. Neka je  $m$  očekivani broj potomaka svake jedinke u sljedećoj generaciji. Tada ćemo govoriti o subkritičnim ( $m < 1$ ), kritičnim ( $m = 1$ ) i superkritičnim ( $m > 1$ ) Galton–Watsonovim procesima.

Rad je strukturiran u tri poglavlja. U prvom poglavlju formalno ćemo definirati Galton–Watsonove procese i proučiti neka njihova svojstva. Pokazat ćemo da subkritični i kritični procesi izumiru gotovo sigurno, dok superkritični preživljavaju s pozitivnom vjerojatnošću. U slučaju preživljavanja superkritičnih procesa diskutirat ćemo brzinu rasta.

Svakom Galton–Watsonovom procesu prirodno možemo pridružiti stablo. U drugom poglavlju ćemo proučiti prostor takvih struktura i pokazati vezu između procesa i njegovog stabla. Konstruirat ćemo vjerojatnosnu mjeru na tom prostoru i odrediti zakon razdiobe stabala koja nastaju Galton–Watsonovim procesom. Uz intuiciju o distribucijama pristranih po veličini, opisat ćemo stabla pristrana po veličini i odrediti zakon razdiobe takvih stabala. Pokazat ćemo da se takva stabla mogu lagano dovesti u vezu s Galton–Watsonovim

procesima s imigracijom. To su procesi kod kojih u svakoj generaciji osim jedinki nastalih razmnožavanjem imamo jedinke koje su stigle u proces imigracijom izvana.

U trećem poglavlju bavit ćemo se graničnim ponašanjem Galton–Watsonovih procesa. Odgovorit ćemo na pitanja kolika je brzina rasta superkritičnih procesa ako ne izumru te koliko brzo pada vjerojatnost preživljavanja kod subkritičnih i kritičnih procesa. Dokazi će biti bazirani na vezi distribucija Galton–Watsonovih stabala i stabala pristranih po veličini. Vidjet ćemo da će se u igru umiješati i procesi s imigracijom.

# Poglavlje 1

## Galton–Watsonovi procesi

### 1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $L$  slučajna varijabla s vrijednostima u  $\mathbb{Z}^+$  i neka je  $(L_i^n : i, n \geq 1)$  familija nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  distribuiranih kao  $L$ . Galton–Watsonov proces grananja  $(Z_n : n \geq 0)$  definiran je na sljedeći način

$$Z_0 = 1, \\ Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} L_i^n.$$

Ovaj proces opisuje razvoj populacije koja kreće od jedne jedinke.  $Z_n$  predstavlja broj jedinki u  $n$ -toj generaciji. Svaka jedinka koja je bila živa u  $n$ -toj generaciji umire u sljedećoj generaciji i nezavisno od ostalih ima slučajan broj djece koji je distribuiran kao  $L$ .  $L_i^n$  je broj potomaka  $i$ -te jedinke iz generacije  $n - 1$  (primijetimo da je  $1 \leq i \leq Z_{n-1}$ ). Primjer je dan na slici 1.1.

Neka je

$$p_k := P(L = k).$$

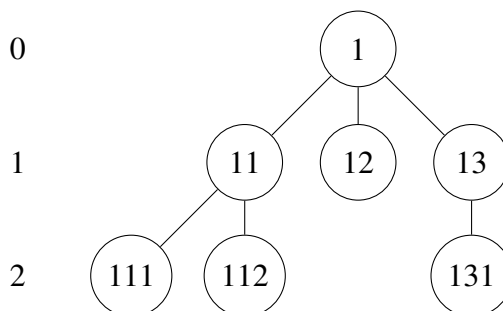
Tada je vjerojatnost da će neka jedinka u sljedećoj generaciji imati  $k$  djece upravo  $p_k$  pa ćemo ( $p_k : k \geq 0$ ) zvati *distribucijom potomstva*.  $L$  je diskretna slučajna varijabla pa joj možemo pridružiti funkciju izvodnicu vjerojatnosti

$$f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

gdje je  $s \in \mathbb{R}$  proizvoljan tako da je gornji red dobro definiran (znamo da je red dobro definiran za  $0 \leq s \leq 1$ ). Neka je  $f_n$  funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable  $Z_n$ ,

$$f_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}].$$

Slika 1.1: Prve 3 generacije nekog GW procesa



Proces kreće s jednom jedinkom (čvor 1),  $Z_0 = 1$ . Ta jedinka ima troje djece (11, 12, 13) pa je  $L_1^1 = 3$  i  $Z_1 = L_1^1 = 3$ . Čvor 11 ima dvoje djece (111, 112) pa je  $L_1^2 = 2$ , čvor 12 nema djece pa je  $L_2^2 = 0$  i čvor 13 ima jedno dijete (131) pa je  $L_3^2 = 1$ . Stoga je  $Z_2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 2 + 0 + 1 = 3$ .

Tada vrijedi sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.1.2.**  $f_n(s) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(s)$  za  $0 \leq s \leq 1$ .

*Dokaz.* Računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s^{Z_n}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} L_i^n} \mid Z_{n-1}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_{n-1}} s^{L_i^n} \mid Z_{n-1}\right]\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_{n-1}} \mathbb{E}[s^{L_i^n}]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^L]^{Z_{n-1}}] = \mathbb{E}[f(s)^{Z_{n-1}}]. \end{aligned}$$

Četvrta jednakost vrijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli  $L_i^n$ ,  $1 \leq i \leq Z_{n-1}$  i nezavisnosti tih varijabli od  $Z_{n-1}$ . Sada imamo  $f_n(s) = f_{n-1}(f(s))$  pa iteriranjem dobivamo  $f_n(s) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(s)$ .

□

Ukoliko je  $Z_n = 0$  tada je  $Z_k = 0$  za sve  $k \geq n$ . Stoga, populacija će izumrijeti ako postoji  $n$  takav da je  $Z_n = 0$ . Događaj  $\{\exists n : Z_n = 0\}$ , odnosno  $\bigcup_{n \geq 1} (Z_n = 0)$  ćemo zvati izumiranje. Neka je  $q$  vjerojatnost tog događaja. Tada jer je  $(Z_n = 0)_n$  neopadajući niz događaja i zbog neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće događaje vrijedi

$$q = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0). \quad (1.1)$$

Vjerojatnost izumiranja možemo interpretirati i preko funkcije izvodnice.

**Korolar 1.1.3.** Vjerojatnost izumiranja je  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$ .

*Dokaz.* Uz dogovor  $0^0 = 1$  vrijedi  $P(Z_n = 0) = f_n(0)$  pa iz (1.1) slijedi tvrdnja.  $\square$

Da bismo predvidjeli broj jedinki u sljedećoj generaciji dovoljno je znati broj jedinki u trenutnoj generaciji i distribuciju potomstva (nije važno koliko je jedinki bilo u prethodnim generacijama). To jest, ponašanje procesa u sljedećem trenutku uvjetno na sadašnjost i prošlost je jednako ponašanju procesa uvjetno samo na sadašnjost. Stoga je jasno da je ovako definiran proces Markovljev lanac. Provjerimo i formalno da Galton–Watsonov proces zadovoljava Markovljevo svojstvo. Imamo

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = 1) &= \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{i_n} L_i^{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = 1\right) = \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{i_n} L_i^{n+1} = i_{n+1}\right) = P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n), \end{aligned}$$

gdje smo koristili da su slučajne varijable  $L_1^{n+1}, L_2^{n+1}, \dots, L_{i_n}^{n+1}$  nezavisne od slučajnih varijabli  $Z_0, \dots, Z_n$  jer je familija  $(L_i^n : i, n \geq 1)$  nezavisna, a  $Z_k \in \sigma(L_i^l : l \leq k)$ . Stoga je Galton–Watsonov proces grananja Markovljev lanac. Koristeći ovu činjenicu pokažimo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 1.1.4.** Pretpostavimo  $p_1 \neq 1$ . Tada na događaju neizumiranja  $Z_n \rightarrow \infty$  g.s.

*Dokaz.* Pokažimo najprije da je 0 jedino povratno stanje Markovljevog lanca  $(Z_n)_n$ . Jasno je da je 0 povratno stanje jer ako je  $Z_n = 0$  onda je  $Z_{n+1} = 0$ . Ako je  $p_0 = 0$ , onda je  $Z_{n+1} \geq Z_n$  g.s. za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Stoga, ako je  $Z_{n+k} = Z_n$  za neki  $k$ , onda je  $Z_n = Z_{n+1} = \dots = Z_{n+k}$  pa za  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \neq 0$ , vrijedi  $P(Z_{n+k} = l \text{ za neki } k \mid Z_n = l) \leq P(Z_{n+1} = l \mid Z_n = l) < 1$  jer  $p_1 \neq 1$ . Time smo pokazali da  $l$  različit od 0 ne može biti povratno stanje. Ako je  $p_0 > 0$  i ako se stanje  $l$ ,  $l \neq 0$  ponovilo, to znači da ako je  $Z_n = l$ , onda je  $Z_{n+1} \neq 0$  pa  $P(Z_n = l \text{ za neki } n \mid Z_0 = l) \leq P(Z_1 \neq 0) = 1 - p_0^l < 1$  jer je  $p_0 > 0$ . Dakle, stanje  $l$  je prolazno.

Ostaje pokazati da  $Z_n \rightarrow \infty$  g.s. Kako su sva stanja osim 0 prolazna, vjerojatnost da je stanje različito od 0 posjećeno konačno mnogo puta je jednaka 1. Stoga je vjerojatnost da su sva stanja osim 0 posjećena konačno mnogo puta također 1 (presjek prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti 1 ima vjerojatnost 1). Na tom događaju tada vrijedi  $Z_n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Ova propozicija nam kaže da ako znamo da populacija nije izumrla, možemo očekivati da će populacija u novim generacijama biti sve veća (osim u slučaju da svaka jedinka ima točno jedno dijete). To jest, ukoliko proces ne izumre veličina populacije će eksplodirati.

## 1.2 Izumiranje i rast

Prošli odjeljak smo završili propozicijom koja kaže da Galton–Watsonovi procesi ili izumru ili eksplodiraju. Prvo ćemo se pozabaviti pitanjem izumiranja, točnije vjerojatnošću tog događaja.

**Teorem 1.2.1.** *Neka je  $m := \mathbb{E}[L]$ .*

- i) Vjerojatnost izumiranja  $q$  je najmanje rješenje jednadžbe  $f(s) = s$ , za  $s \in [0, 1]$  gdje je  $f$  funkcija izvodnica pridružena slučajnoj varijabli  $L$ .*
- ii) Ako je  $m \leq 1$  onda je  $q = 1$  (osim kada je  $p_1 = 1$ ).  
Ako je  $m > 1$  onda je  $q < 1$ .*

*Dokaz.* Iz Korolara 1.1.3 imamo  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$ . Neka je  $q_n := f_n(0)$ . Kako je  $f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$ , uz  $s = 0$  imamo  $q_{n+1} = f(q_n)$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Zbog neprekidnosti funkcije  $f$  na  $[-1, 1]$  vrijedi

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_{n-1}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n-1}) = f(q).$$

Pretpostavimo da za  $r \in [0, 1]$  vrijedi  $f(r) = r$ . Deriviranjem  $f$  dobivamo

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}, \quad \forall s \in (-1, 1).$$

Ta derivacija je nenegativna za  $s \in [0, 1)$  pa je  $f$  neopadajuća na tom intervalu. Imamo

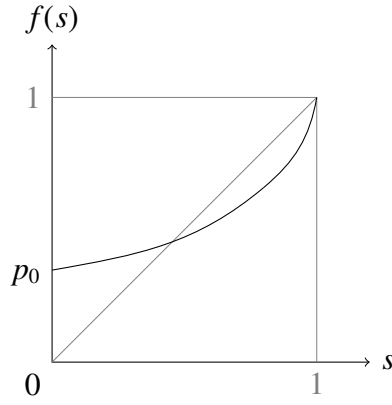
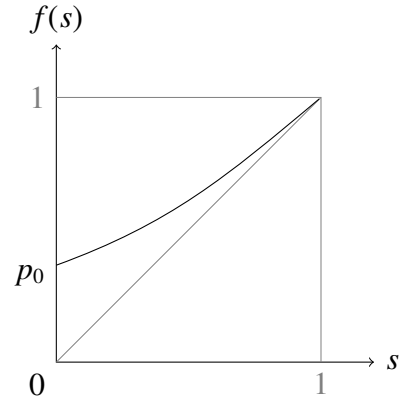
$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(0) = f(0) \leq f(r) = r \\ q_2 &= f(q_1) \leq f(r) = r \\ &\vdots \\ q_n &= f(q_{n-1}) \leq f(r) = r \end{aligned}$$

gdje svaka nejednakost slijedi iz prethodne. Stoga je i  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \leq r$ . Ovime smo pokazali i).

Promotrimo funkciju  $f$  na intervalu  $[0, 1]$ . Pretpostavimo da postoji  $n \geq 2$  t.d.  $p_n = P(L = n) > 0$ . Tada je

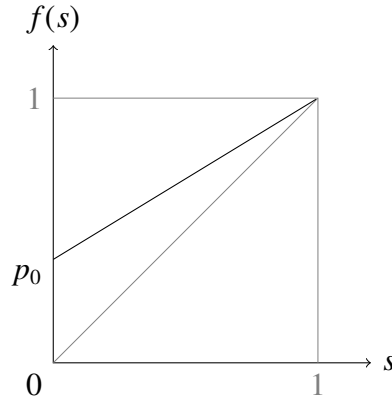
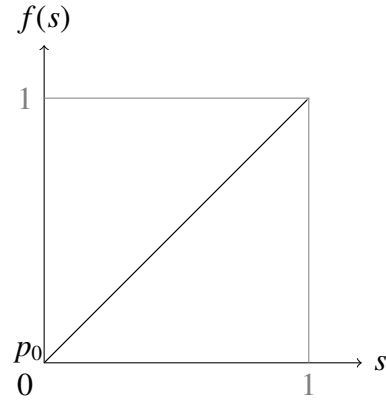
$$f''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n s^{n-2},$$

što je veće od 0 za  $s > 0$  pa je  $f$  strogo konveksna na  $[0, 1]$ . Analogno zaključujemo da je funkcija strogo rastuća na tom intervalu. Funkcija je i neprekidna na tom intervalu te vrijedi  $f(0) = p_0 \in [0, 1)$  i  $f(1) = 1$ . Stoga su moguća dva slučaja (prisjetimo se da je  $m = f'(1-)$ ).

(a)  $m > 1$ (b)  $m \leq 1$ 

Ako je  $m \leq 1$  jednačba  $f(s) = s$  ima samo jedno rješenje na  $[0, 1]$  i to je 1 pa je zbog i)  $q = 1$ . Ako je  $m > 1$  jednačba  $f(s) = s$  ima 2 rješenja na  $[0, 1]$  pa je  $q \in [0, 1)$ .

U dokazu tvrdnje ii) pretpostavili smo da postoji  $n \geq 2$  t.d.  $p_n = P(L = n) > 0$ . Ukoliko nije tako, odnosno ako je  $p_n = 0$  za  $n \geq 2$  (to znači da je  $p_0 + p_1 = 1$ ) imamo  $f(s) = p_0 + p_1 s$ ,  $f'(s) = p_1 \geq 0$ . Ovisno o  $p_1$  imamo dva slučaja.

(a)  $p_1 < 1$ (b)  $p_1 = 1$ 

Ako je  $p_1 < 1$  onda opet imamo  $m = p_1 < 1$  i  $q = 1$ , dok ako je  $p_1 = 1$  imamo  $q = 0$ . □

Kao posljedicu ovog teorema imamo sljedeći korolar.

**Korolar 1.2.2.** *Ako je  $p_1 \neq 1$  tada vrijedi  $q = 1$  ako i samo ako  $m \leq 1$ .*

*Dokaz.* Slijedi direktno iz Teorema 1.2.1, ii). □

Ovisno o  $m$ , GW procese dijelimo na *subkritične* ( $m < 1$ ), *kritične* ( $m = 1$ ) i *superkritične* ( $m > 1$ ). U teoremu 1.2.1 vidjeli smo da subkritični i kritični procesi izumiru s vjerojatnosti 1, dok superkritični proces preživljava s pozitivnom vjerojatnošću. Štoviše iz prethodnog korolara znamo da GW proces izumire g.s. ako i samo ako je  $m \leq 1$  (osim u trivijalnom slučaju kad je  $p_1 = 1$ ).

Na događaju neizumiranja vrijedi  $Z_n \rightarrow \infty$  g.s. (Propozicija 1.1.4). Možemo se pitati kolika je brzina te konvergencije, odnosno kolika je brzina rasta populacije. Prirodno je pretpostaviti da  $Z_n$  raste kao  $m^n$ . Stoga, uz pretpostavku da je  $m < \infty$  promotrimo slučajni proces  $W = (W_n : n \geq 0)$ , gdje je  $W_n := Z_n/m^n$ ,  $n \geq 0$ .

**Lema 1.2.3.** *Slučajni proces  $W$  je  $(\mathbb{F}, P)$  martingal, gdje je  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(L_i^m : 1 \leq m \leq n, i \geq 1)$ .*

*Dokaz.* Jasno je da je  $Z_n \mathcal{F}_n$ -izmjeriva pa kako je  $m < \infty$  to je i  $W_n \mathcal{F}_n$ -izmjeriva, to jest  $W$  je adaptiran s obzirom na filtraciju  $\mathbb{F}$ . Kako su sve slučajne varijable nenegativne, očekivanje i uvjetno očekivanje su dobro definirani<sup>1</sup>. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(L_1^{n+1} + \cdots + L_{Z_n}^{n+1}) \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mathbb{E}[L_1^{n+1} + \cdots + L_k^{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mathbb{E}[L_1^{n+1} + \cdots + L_k^{n+1}] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)} km, \end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost vrijedi jer su  $L_i^{n+1}$  nezavisne od  $\mathcal{F}_n$ . Iz uvjetnog teorema o monotonij konvergenciji dalje imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} Z_{n+1} \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mathbf{1}_{(Z_n=k)} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(Z_n=k)} km \\ &= mZ_n. \end{aligned}$$

Sada napokon imamo

$$\mathbb{E}[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}/m^{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Z_n/m^n = W_n. \quad (1.2)$$

□

---

<sup>1</sup>Uvjetno očekivanje je inače definirano samo za integrabilne slučajne varijable. Međutim, pokazat ćemo malo kasnije da uvjetno očekivanje možemo definirati za pozitivne slučajne varijable koje nemaju konačno očekivanje (pogledajte odjeljak 3.1) pa je račun opravdan.

Iz dane leme jednostavno slijedi rezultat koji smo i očekivali.

**Korolar 1.2.4.** *Za  $n \geq 1$  vrijedi  $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ .*

*Dokaz.* Ako u jednadžbi (1.2) računamo očekivanje dobivamo  $\mathbb{E}[W_n] = \dots = \mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$ . Stoga su slučajne varijable  $W_n$  integrabilne. Vrijedi  $\mathbb{E}[Z_n] = m^n \mathbb{E}[W_n] = m^n$ .  $\square$

Kako je  $W$  nenegativan martingal postoji  $W_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$  g.s. (dokaz možete pronaći u [8, str. 30]). Štoviše, znamo da je  $W_\infty \geq 0$  i  $\mathbb{E}[W_\infty] \leq \mathbb{E}[W_0] = 1$ .

Ako proces izumre, jasno je da je tada i  $W_\infty = 0$ . Iz Teorema 1.2.1 znamo da to vrijedi ako je  $m \leq 1$ . Pitanje je što možemo reći ako je  $m > 1$ . Ako je  $W_\infty > 0$ , onda  $Z_n$  raste kao  $m^n$ , dok ako je  $W_\infty = 0$ , a proces nije izumro, rast je sporiji.

Vidimo da je za analizu rasta važan događaj  $\{W_\infty > 0\}$ . Navedimo stoga još jedan rezultat koji govori o vjerojatnosti tog događaja.

**Propozicija 1.2.5.** *Ako je  $0 < m < \infty$ , onda je  $P(W_\infty = 0) \in \{q, 1\}$ .*

*Dokaz.* Ako je  $m \leq 1$ , onda znamo da je  $W_\infty = 0$ . Neka je dalje  $1 < m < \infty$ . Zbog nezavisnosti familije  $(L_i^n : i, n \geq 1)$ , nakon prvog koraka imamo  $Z_1$  novih GW procesa koji imaju jednaku distribuciju potomka. Zato vrijedi  $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_n^i$  gdje su  $Z_n^i$  kopije od  $Z_n$ , međusobno nezavisne i nezavisne od  $Z_1$ . Dijeljenjem s  $m^n$  dane jednakosti slijedi

$$\frac{mZ_{n+1}}{m^{n+1}} = \sum_{i=1}^{Z_1} \frac{Z_n^i}{m^n}.$$

Puštanjem  $n \rightarrow \infty$  dobivamo

$$mW_\infty = \sum_{i=1}^{Z_1} W_\infty^i,$$

gdje su  $W_\infty^i$  nezavisne kopije slučajne varijable  $W_\infty$  i nezavisne od  $Z_1$ . Stoga vrijedi  $P(W_\infty = 0) = P(W_\infty^1 + \dots + W_\infty^{Z_1} = 0) = P(W_\infty^1 = 0, \dots, W_\infty^{Z_1} = 0) = \mathbb{E}[P(W_\infty = 0)^{Z_1}] = f(P(W_\infty = 0))$  pa je  $P(W_\infty = 0)$  korijen od  $f(s) = s$ ,  $s \in [0, 1]$ . Dakle,  $P(W_\infty = 0) \in \{q, 1\}$ .  $\square$

Drugim riječima, ova propozicija kaže da je ili  $W_\infty = 0$  g.s. ili je  $W_\infty > 0$  g.s. u slučaju neizumiranja. Detaljniju analizu rasta superkritičnih procesa provest ćemo u 3. poglavlju.

## Poglavlje 2

# Stabla pridružena procesima grananja

### 2.1 Galton–Watson stabla

Već smo ranije vidjeli da je GW proces prirodno vizualizirati kao stablo (slika 1.1). Pokazat će se od koristi upravo promatrati stabla nastala GW procesom kao posebne strukture. U nastavku ovog dijela ćemo definirati prostor stabala, a sa stablima ćemo raditi kao slučajnim elementima tog prostora. Neka je

$$\mathcal{U} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N})^n$$

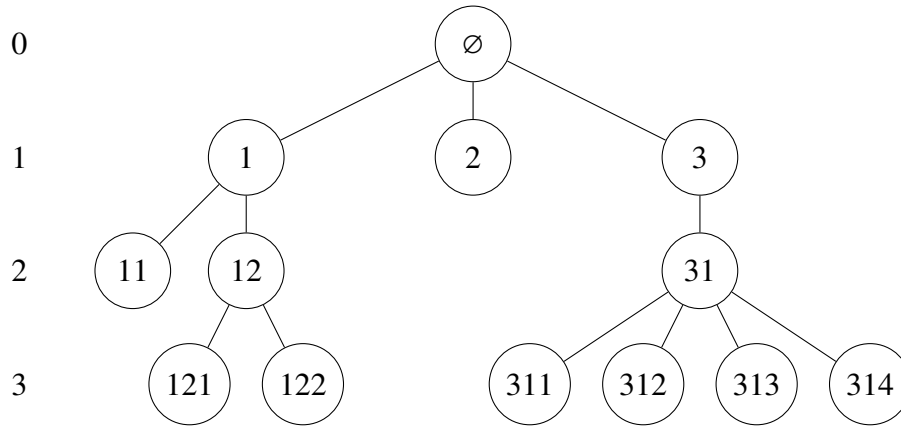
skup konačnih nizova prirodnih brojeva. Ako su  $u, v \in \mathcal{U}$  sa  $uv$  ćemo označavati spoj dva niza, gdje je  $\emptyset u = u$ ,  $u\emptyset = u$ . Na  $\mathcal{U}$  definiramo parcijalni uređaj,  $u \leq v$  ako postoji  $z \in \mathcal{U}$  tako da  $v = uz$ . Pisat ćemo  $u < v$  ako je  $u \leq v$  i  $u \neq v$ , tada kažemo da je  $u$  predak od  $v$ . Skup svih predaka od  $v$  označavamo  $A_v = \{u \in \mathcal{U} : u < v\}$ .

**Definicija 2.1.1.**  $\omega \subset \mathcal{U}$  zovemo *stablo* ako vrijedi:

- i)  $\emptyset \in \omega$ ,
- ii) ako je  $u \in \omega$  onda je  $A_u \subset \omega$ ,
- iii) ako je  $u \in \omega$ , onda je  $uj \in \omega$  ako i samo ako  $1 \leq j \leq k_u(\omega)$  za neki nenegativni  $k_u(\omega)$ .

Korijen stabla je prazan niz  $\emptyset$ . Čvor  $i_1 \dots i_{n-1} i_n$  je  $i_n$ -to dijete od čvora  $i_1 \dots i_{n-1}$ . Broj  $k_u(\omega)$  predstavlja broj djece čvora  $u$  u stablu  $\omega$ . Ako je duljina niza  $u$  jednaka  $|u| = n$ , onda se čvor  $u$  nalazi na visini  $n$ . Visina stabla je supremum duljina nizova koji se nalaze u stablu. Primjer konačnog stabla visine 3 dan je na slici 2.1.

Slika 2.1: Konačno stablo visine 3



Pogledajmo na ovom primjeru zahtjeve iz Definicije 2.1.1. Korijen stabla je  $\emptyset$ . Čvor 122 se nalazi u stablu pa znamo da su nizovi 12 i 1 dio stabla. Broj djece čvora 31 je  $k_{31} = 4$ . Zato se u stablu nalaze nizovi 311, 312, 313, 314, ali ne i 315.

Neka je  $\Omega$  skup svih stabala definiranih kao u 2.1.1. Za  $n \in \mathbb{N}$  i  $\omega \in \Omega$  označimo sa  $r_n(\omega)$  restrikciju stabla  $\omega$  na prvih  $n$  razina:

$$r_n(\omega) = \{u \in \omega : |u| \leq n\}.$$

Prostor stabala visine manje ili jednake  $n$  označavat ćemo s  $\Omega^{(n)}$ . Na  $\Omega$  možemo definirati udaljenost

$$d(\omega, \omega') = \frac{1}{1 + \sup\{n \in \mathbb{N} : r_n(\omega) = r_n(\omega')\}}.$$

Da bismo se uvjerali da je ova metrika provjerimo da vrijedi nejednakost trokuta, ostala svojstva trivijalno vrijede. Neka su  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$  tri proizvoljna stabla, uvedimo oznaku  $l_{ij} = \sup\{n \in \mathbb{N} : r_n(\omega_i) = r_n(\omega_j)\}$ . Ako je  $l_{13} \leq l_{12}$  tada je  $1/(1 + l_{12}) \leq 1/(1 + l_{13}) \leq 1/(1 + l_{13}) + 1/(1 + l_{23})$ , odnosno  $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega_3) + d(\omega_3, \omega_2)$ . U slučaju da je  $l_{13} > l_{12}$ , onda mora vrijediti  $l_{23} = l_{12}$  pa imamo  $1/(1 + l_{12}) = 1/(1 + l_{23}) \leq 1/(1 + l_{13}) + 1/(1 + l_{23})$ , to jest  $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega_3) + d(\omega_3, \omega_2)$ .

Sada kada imamo metrički prostor  $(\Omega, d)$  možemo promatrati konvergenciju na tom prostoru. Niz  $(\omega_n)_n$  konvergira prema  $\omega$  s obzirom na  $d$  ako i samo ako za svaki  $h \in \mathbb{N}$  vrijedi  $r_h(\omega_n) = r_h(\omega)$  za dovoljno veliki  $n$ . S obzirom da je  $d(r_h(\omega), r_h(\omega')) \leq d(\omega, \omega')$  funkcija  $r_h: \Omega \rightarrow \Omega^{(h)}$  je neprekidna (pa i izmjeriva). Ovako definirani metrički prostor zadovoljava sljedeća lijepa svojstva.

**Lema 2.1.2.** *Metrički prostor  $(\Omega, d)$  je separabilan i potpun.*

*Dokaz.* Označimo skup svih konačnih stabala sa  $\Omega_0$  (stabla kojima je visina konačna). Taj skup je prebrojiv. Za  $\omega \in \Omega$  niz  $(r_n(\omega))_n$  je niz u  $\Omega_0$ , a iz diskusije prije ove leme lagano je vidjeti da taj niz konvergira prema  $\omega$  pa je  $\Omega_0$  gust u  $\Omega$ . Stoga je  $\Omega$  separabilan.

Neka je  $(\omega_n)_n$  Cauchyev niz u  $\Omega$ . Tada je za svaki  $h \in \mathbb{N}$  niz  $(r_h(\omega_n))_n$  Cauchyev niz u  $\Omega^{(h)}$ . Za  $\omega, \omega' \in \Omega^{(h)}$  ako je  $d(\omega, \omega') \leq 1/(1+h)$  onda je  $\omega = \omega'$ . Stoga je niz  $(r_h(\omega_n))_n$  konstantan od nekog člana, jednak  $\omega^h$ . Kako je funkcija  $r_h: \Omega \rightarrow \Omega^{(h)}$  neprekidna, za  $h' > h$  vrijedi  $r_h(\omega^{h'}) = r_h(\lim_{n \rightarrow \infty} r_{h'}(\omega_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_h(r_{h'}(\omega_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_h(\omega_n) = \omega^h$ . Zato je  $\omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} \omega^h \in \Omega$  i  $\omega_n$  konvergira prema  $\omega$ . Zaključujemo da je  $(\Omega, d)$  potpun.  $\square$

Rekli smo da želimo stabla promatrati kao slučajne elemente prostora  $\Omega$ . Stoga želimo konstruirati  $\sigma$ -algebru i vjerojatnostnu mjeru na tom prostoru. Neka je  $u \in \mathcal{U}$  proizvoljan, definirajmo

$$\Omega_u := \{\omega : u \in \omega\}.$$

To je skup svih stabala u  $\Omega$  koji sadrže  $u$  kao čvor ( $\Omega_{\emptyset} = \Omega$ ). Na  $\Omega$  definiramo  $\sigma$ -algebru na sljedeći način

$$\mathcal{F} := \sigma(\Omega_u : u \in \mathcal{U}).$$

Tada na prostoru  $\Omega_u$  imamo  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F} \cap \Omega_u$ . Ranije uvedena veličina  $k_u$  je preslikavanje  $k_u: \Omega_u \rightarrow \mathbb{N}$ . S obzirom da je

$$\{k_u \geq j\} \cap \Omega_u = \Omega_{uj}$$

te  $\Omega_{uj} \subset \Omega_u$  i  $\Omega_{uj} \subset \mathcal{F}$ , vrijedi  $\{k_u \geq j\} \cap \Omega_u \subset \Omega_u \cap \mathcal{F}$  pa je  $k_u$  izmjeriva.

Neka je  $z_n(\omega) := \omega \cap \mathbb{N}^n$  (to su svi čvorovi stabla  $\omega$  na visini  $n$ ) i neka je  $Z_n(\omega)$  kardinalitet od  $z_n(\omega)$ . Imamo preslikavanja

$$z_n: \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$$

$$Z_n: \Omega \rightarrow \mathbb{N}.$$

Pokažimo da su ta preslikavanja izmjeriva u odgovarajućem paru  $\sigma$ -algebri. Na  $\mathbb{N}$  i  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$  ćemo za  $\sigma$ -algebre uzeti partitivne skupove. Skup  $W_S := \{\omega : z_n(\omega) = S\}$ ,  $S \subset \mathbb{N}^n$  možemo zapisati kao  $\bigcap_{u \in S} \Omega_u \setminus \bigcup_{v \in \mathbb{N}^n \setminus S} \Omega_v$ . Kako su ova unija i presjek prebrojivi  $W_S \in \mathcal{F}$  pa je  $z_n$  izmjerivo. Za  $k \in \mathbb{N}$  događaj  $\{\omega : Z_n(\omega) = k\}$  zapišemo kao  $\bigcup_{S \subset \mathbb{N}^n, |S|=k} W_S$ . Imamo prebrojivu uniju skupova iz  $\mathcal{F}$  pa je ovaj događaj također u  $\mathcal{F}$ . Stoga je i  $Z_n$  izmjerivo preslikavanje.

Definirat ćemo

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\Omega_u : |u| \leq n).$$

Jasno je da je  $\mathcal{F}$  najmanja  $\sigma$ -algebra koja sadrži svaki  $\mathcal{F}_n$ . Primijetimo da za  $u \in \mathbb{N}^n$  vrijedi  $\Omega_u = \{\omega : u \in z_n(\omega)\}$ . Zato je  $\mathcal{F}_n = \sigma(z_m : 0 \leq m \leq n)$ .

Za  $u \in \mathcal{U}$  definiramo preslikavanje  $T_u: \Omega_u \rightarrow \Omega$

$$T_u(\omega) := \{v : v \in \mathcal{U}, uv \in \omega\}.$$

Skup na desnoj strani dan je kao podskup od  $\mathcal{U}$ , no iz Definicije 2.1.1 lagano se uvjeriti da se radi o stablu. To stablo možemo zamisliti kao podstablo stabla  $\omega$  s korijenom  $u$  (nije stvarno podstablo jer vrhovi nisu jednaki). Primijetimo da je  $k_u = k_\emptyset \circ T_u$  na  $\Omega_u$ . Nadalje za  $\omega \in \Omega$ ,  $u, v \in \mathcal{U}$  vrijedi  $uv \in \omega$  ako i samo ako  $u \in \omega$  i  $v \in T_u(\omega)$ . Koristeći ovu ekvivalenciju pokažimo sada da je preslikavanje  $T_u$  izmjerivo u odgovarajućem paru  $\sigma$ -algebri. Za  $u, v \in \mathcal{U}$  imamo  $T_u^{-1}(\Omega_v) \cap \Omega_u = \Omega_{uv}$ , a ovaj događaj se nalazi u  $\mathcal{F}$ . Ako je  $|u| = n$  i  $|v| = k$  ovu ekvivalenciju možemo izreći preko  $z_n$  i  $Z_n$ :

$$uv \in z_{n+k}(\omega) \Leftrightarrow u \in z_n(\omega) \quad \text{ i } \quad v \in z_k(T_u(\omega)) \quad (2.1)$$

$$Z_{n+k}(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} Z_k \circ T_u(\omega). \quad (2.2)$$

Sada smo napokon spremni konstruirati vjerojatnosnu mjeru na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  i uspostaviti vezu između GW procesa i stabala. Da bismo povezali niz  $(Z_n)_n$  s GW procesom konstruirat ćemo takvu vjerojatnosnu mjeru da su slučajne varijable  $k_u$  nezavisne i jednako distribuirane. Te varijable međutim nemaju istu domenu stoga ćemo morati biti malo oprezniji (tu će nam pomoći slučajne varijable  $T_u$ ).

**Teorem 2.1.3.** *Neka je  $q = (q(j) : j \in \mathbb{N})$  neka vjerojatnosna mjera na  $\mathbb{N}$ . Tada vrijedi sljedeće.*

- i) *Postoji jedinstvena mjera  $P_q$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  takva da  $k_\emptyset$  ima distribuciju  $q$  i uvjetno na  $\{k_\emptyset = j\}$  varijable  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq j$  su nezavisne u odnosu na vjerojatnosnu mjeru  $P_q$ .*
- ii) *Za  $n \in \mathbb{N}$  uvjetno na  $\mathcal{F}_n$  varijable  $T_u$  ( $u \in z_n$ ) su nezavisne i imaju zakon razdiobe  $P_q$ .*
- iii) *Niz slučajnih varijabli  $(Z_n)_n$  definiran na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P_q)$  čine GW proces sa distribucijom potomstva  $q$  i  $Z_0 = 1$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\Omega^* := \mathbb{N}^{\mathcal{U}} = \prod_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{N}_u$  gdje je  $\mathbb{N}_u = \mathbb{N}$ . Označimo projekciju na  $u$ -tu koordinatu sa  $k_u^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{N}$  i sa  $k_{u_1, \dots, u_n}^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{N}^n$  projekciju na koordinate  $u_1, \dots, u_n$ . Prostoru  $\Omega^*$  možemo pridružiti  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}^*$  generiranu cilindrima. Tada po teoremu Kolmogorova znamo da možemo prostoru  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$  pridružiti vjerojatnosnu mjeru  $P_q^* = q^{\mathcal{U}} = \bigotimes_{u \in \mathcal{U}} q_u$ , gdje je  $q_u = q$ . Definirajmo preslikavanje  $\psi: \Omega^* \rightarrow \Omega$  sa

$$\psi(\omega^*) := \{u = j_1 \dots j_p : p \in \mathbb{N}, j_{k+1} \leq k_{j_1 \dots j_k}^*(\omega^*) \text{ za } 0 \leq k \leq p\}.$$

Broj  $k_{j_1 \dots j_k}^*(\omega^*)$  možemo shvatiti kao broj djece čvora  $j_1 \dots j_k$  (prostor  $\Omega^*$  na svakoj  $u$ -toj koordinati sadrži informaciju koliko čvor  $u$  treba imati djece). To ne znači da svaki  $\omega^*$

određuje jedno stablo. Na primjer ako je  $k_{123}^*(\omega^*) = 4$ , a  $k_1^*(\omega^*) = 0$ , ne možemo sastaviti takvo stablo. Preslikavanje  $\psi$  je definirano tako da ne uključuje čvorove poput 123 iz prošlog primjera u stablo. Zbog toga je jasno da to preslikavanje nije injektivno (npr. za bilo koju vrijednost  $k_{123}^*(\omega^*)$  dobivamo isto stablo). Pokažimo sada da je  $\psi$  izmjerivo preslikavanje. Neka je  $u = j_1 \dots j_p$ , tada vrijedi

$$\psi^{-1}(\Omega_u) = \{\omega^* : k_{j_1 \dots j_k}^*(\omega^*) \geq j_{k+1} \text{ za } 0 \leq k < p\},$$

a taj skup se nalazi u  $\mathcal{F}^*$  zbog izmjerivosti projekcija  $k_v^*$ ,  $v \in \mathcal{U}$ . Sada vjerojatnost na  $\Omega$  možemo definirati kao

$$P_q = P_q^* \circ \psi^{-1}.$$

Neka je  $T_u^* : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$  definirano tako da vrijedi  $k_v^* \circ T_u^* = k_{uv}^*$ . Tada su  $T_u$  i  $T_u^*$  povezani relacijom

$$T_u \circ \psi = \psi \circ T_u^* \quad \text{za } u \in \mathcal{U} \text{ na } \psi^{-1}(\Omega_u).$$

Izmjerivost preslikavanja  $T_u^*$  opet slijedi iz izmjerivosti projekcija. Za fiksni  $n \in \mathbb{N}$  promotrimo varijable  $(T_u^*)_{|u|=n}$ . Lagano se pokaže da je familija  $\{\sigma(k_u^*), u \in \mathcal{U}\}$  nezavisna pa su nezavisne  $\sigma$ -algebre nastale iz neke njezine particije. Odavde slijedi nezavisnost familije  $(T_u^*)_{|u|=n}$ . Pokažimo da  $T_u$  ima zakon razdiobe  $P_q^*$ . Za to je dovoljno pokazati da za svaki Borelov pravokutnik  $A = k_{u_1, \dots, u_k}^{*-1}(M)$  gdje je  $M = M_1 \times \dots \times M_k$  vrijedi  $P_q^*(T_u^* \in A) = P_q^*(A)$ . Imamo  $P_q^*(A) = \prod_{i=1}^k \sum_{m \in \mathbb{N}, m \in M_i} q_{u_i}(m) = \prod_{i=1}^k \sum_{m \in \mathbb{N}, m \in M_i} q_{uu_i}(m) = P_q^*(T_u^* \in A)$ .

Neka je  $A \in \mathcal{F}$  i  $u \in \mathcal{U}$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} P_q(T_u \in A) &= P_q(T_u^{-1}(A)) = P_q^*(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A))) = P_q^*(T_u \circ \psi \in A) = \\ &= P_q^*(\psi \circ T_u^* \in A) = P_q^*(\psi \in A) = P_q^*(\psi^{-1}(A)) = P_q(A) \end{aligned}$$

pa slučajne varijable  $T_u$  imaju zakon razdiobe  $P_q$ . Uvjetno na  $\sigma(z_m : 0 \leq m \leq n) = \mathcal{F}_n$  (primijetimo da to samo znači fiksiranje svih  $z_n$ ), za  $u, v \in \mathbb{N}^n$  i  $A, B \in \mathcal{F}$  imamo

$$\begin{aligned} P_q(T_u \in A)P_q(T_v \in B) &= P_q^*(\psi \circ T_u^* \in A)P_q^*(\psi \circ T_v^* \in B) \\ &= P_q^*(\psi \circ T_u^* \in A, \psi \circ T_v^* \in B) \\ &= P_q^*(T_u \circ \psi \in A, T_v \circ \psi \in B) \\ &= P_q^*(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A)) \cap \psi^{-1}(T_v^{-1}(B))) \\ &= P_q^*(\psi^{-1}(T_u^{-1}(A) \cap T_v^{-1}(B))) \\ &= P_q(T_u^{-1}(A) \cap T_v^{-1}(B)) \\ &= P_q(T_u \in A, T_v \in B). \end{aligned}$$

Stoga su uvjetno na  $\mathcal{F}_n$  varijable  $(T_u^*)_{|u|=n}$  nezavisne.

Ostaje još pokazati da slučajne varijable  $(Z_n)_n$  čine GW proces sa distribucijom potomstva  $q$ . Za svaki  $\omega \in \Omega$  je  $z_0(\omega) = \{\emptyset\}$  pa je  $Z_0 = 1$ . Koristeći relaciju (2.2) uz  $k = 1$  imamo

$$Z_{n+1}(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} Z_1 \circ T_u(\omega).$$

Uvjetno na  $\mathcal{F}_n$  slučajne varijable  $L_u := Z_1 \circ T_u$  su nezavisne i jednako distribuirane. Događaj  $\{Z_1 = k\}$  je jednak događaju  $\{k_\emptyset = k\}$ . Zakon razdiobe od  $L_u$  dan je sa  $P_q(L_u = k) = P_q(Z_1 \circ T_u = k) = P_q(Z_1 = k) = P_q(k_\emptyset = k) = P_q^*(k_\emptyset^* = k) = q(k)$  pa je  $(Z_n)_n$  GW proces po definiciji.  $\square$

Na temelju ovog teorema GW stabla možemo definirati na sljedeći način.

**Definicija 2.1.4.** Slučajna varijabla  $\tau$  koja poprima vrijednosti u prostoru stabala  $\Omega$  je GW stablo s distribucijom potomaka  $q$  ako su za  $n \in \mathbb{N}$  uvjetno na  $\{k_\emptyset(\tau) = n\}$  "podstabla"  $T_1(\tau), \dots, T_n(\tau)$  nezavisna i distribuirana kao  $\tau$  te je distribucija od  $k_\emptyset(\tau)$  jednaka  $q$ .

Pretpostavljamo da krećemo od nekog GW procesa sa zadanom distribucijom  $p$ . Ako u Definiciji 1.1.1 promatramo prostor stabala  $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ , tada stablo  $\omega$  možemo shvatiti kao realizaciju GW procesa određenog sa  $(L_i^n(\omega) : 1 \leq i \leq Z_{n-1}(\omega), n \geq 1)$ . Stoga ćemo u nastavku mjeru  $P_p$  označavati sa **GW**. Slučajna varijabla  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ , koja je identiteta ima zakon razdiobe **GW**. Po Definiciji 2.1.4  $T$  je GW stablo. Iz Teorema 2.1.3 lagano slijedi da za  $\omega_n \in \Omega^{(n)}$  vrijedi

$$\mathbf{GW}(r_n(T) = \omega_n) = \prod_{u \in \omega_n, |u| < n} p(k_u(\omega_n)).$$

pa se **GW** ponaša očekivano na stablima konačne visine.

## 2.2 Stabla pristrana po veličini

U prethodnom odjeljku smo pokazali kako s GW procesom možemo formirati slučajno stablo. Zakon razdiobe tog stabla bio je **GW**. U ovom odjeljku ćemo promotriti drugi način formiranja slučajnog stabla koji ćemo zvati *GW proces pristran po veličini*. Stablo nastalo takvim procesom će imati drugi zakon razdiobe koji ćemo označavati sa  $\widehat{\mathbf{GW}}$ . Važnu ulogu u ovoj konstrukciji čine distribucije pristrane po veličini.

**Definicija 2.2.1.** Neka je  $X$  nenegativna slučajna varijabla sa konačnim očekivanjem. Slučajna varijabla  $\widehat{X}$  ima distribuciju pristranu po veličini ako je

$$\mathbb{E}[g(\widehat{X})] = \frac{\mathbb{E}[Xg(X)]}{\mathbb{E}[X]}$$

za svaku pozitivnu Borelovu funkciju  $g$ .

*Napomena 2.2.2.* Ako je  $X$  nenegativna slučajna varijabla na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  s konačnim očekivanjem, onda je dobro definirana vjerojatnosna mjera takva da za  $A \in \mathcal{F}$  vrijedi  $\widehat{P}(A) = \int_A \frac{X}{\mathbb{E}[X]} dP$ . Iz prethodne definicije vrijedi  $P(\widehat{X} \in A) = \widehat{P}(A)$  pa  $\widehat{X}$  ima distribuciju  $\widehat{P}$ .

Neka je  $L$  diskretna slučajna varijabla s distribucijom  $p$  i očekivanjem  $m$ . Tada  $\widehat{L}$  ima distribuciju  $P(\widehat{L} = k) = kp_k/m$ . Distribuciju pristranu po veličini možemo interpretirati na sljedeći način. Pretpostavimo da imamo kutiju s kuglicama numeriranim  $1, 2, 3, \dots$  i da je vjerojatnost odabira kuglice  $k$  jednaka  $p_k$ . Ako za svaki  $k$ , kuglicu numeriranu  $k$  zamijenimo sa  $k$  kuglica numeriranih  $k$ , tada je vjerojatnost da ćemo izvući kuglicu  $k$  jednaka  $kp_k/m$ . Budući da je  $P(\widehat{L} = 0) = 0$ , vrijedi  $\widehat{L} \geq 1$  g.s.

Neka je  $(\widehat{L}_n)_n$  niz nezavisnih slučajnih varijabli distribuiranih kao  $\widehat{L}$ . GW stablo pristrano po veličini konstruirat ćemo na sljedeći način. Krećemo sa čvorom  $v_0$  koji ima  $\widehat{L}_1$  djece. Odaberemo slučajno jedno dijete  $v_1$ . To dijete će imati  $\widehat{L}_2$  djece. Ostala djeca čvora  $v_0$  će imati distribuciju potomaka  $\widehat{p}$ . Tako nastavljamo dalje, biramo slučajno jedno dijete  $v_2$  od čvora  $v_1$  i pridružujemo mu  $\widehat{L}_3$  djece, ostala djeca imaju distribuciju potomaka  $\widehat{p}$ . . . . Ovaj postupak beskonačno ponavljamo. Stablo konstruirano ovakvim procesom prikazano je na slici 2.2.

Za  $u \in \mathcal{U}$ , označimo sa  $U_u$  slučajnu varijablu koja ima uniformnu distribuciju na  $\{1, \dots, k_u\}$ . Ona će nam služiti da opišemo događaj biranja koje dijete od čvora  $v_i$  ćemo proglasiti  $v_{i+1}$ . Tada gore opisano stablo možemo napisati kao presjek prebrojivo mnogo događaja oblika  $\{\widehat{L}_i = k\}$ ,  $\{k_u = l\}$  za  $u \notin \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ ,  $\{U_{v_i} \circ k_{v_i} = j\}$  gdje su  $k, l, j \in \mathbb{N}_0$ . Kako su pripadne funkcije izmjerive ovi događaji se nalaze u  $\mathcal{F}$ . Stoga ovakvim postupkom možemo konstruirati slučajnu varijablu  $\widehat{T}: \Omega \rightarrow \Omega$ .

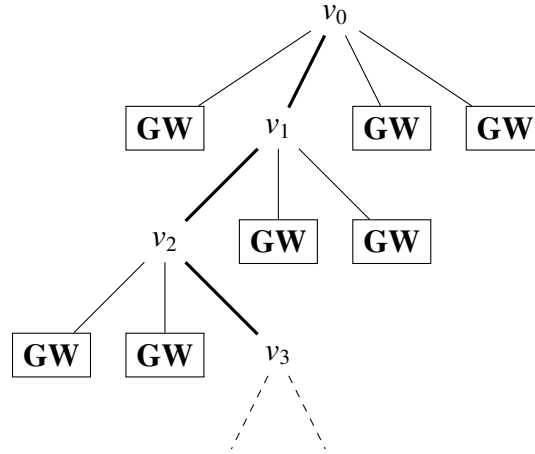
Neka je  $\widehat{\mathbf{GW}}_*$  zajednička distribucija slučajne varijable  $\widehat{T}$  i niza  $(v_0, v_1, \dots)$  i neka je  $\widehat{\mathbf{GW}}$  marginalna distribucija na prostoru  $\Omega$ . Niz  $(v_0, v_1, \dots)$  označava koji čvorovi u danom stablu imaju "specijalnu" distribuciju potomstva.

Za  $t \in \Omega$  neka je  $[t]_n$  skup svih stabala  $\omega \in \Omega$  takvih da je  $r_n(\omega) = r_n(t)$  (ako je visina od  $t$  manja od  $n$ , onda je  $[t]_n = \{t\}$ ). Za čvor  $v$  koji se nalazi na  $n$ -toj razini stabla  $t$  neka  $[t; v]_n$  označava skup stabala  $\omega \in \Omega$  takvih da je  $\omega \in [t]_n$  i  $\omega$  ima istaknuti put od korijena koji prolazi kroz  $v$  (kako su u stablu dva vrha povezana samo jednim putem, početak puta od korijena do  $v$  je jedinstven).

Uzmimo stablo  $t$  visine barem  $n + 1$  takvo da korijen ima  $k$  djece. Podstabla djece označimo sa  $t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$ . Čvor  $v$  koji se nalazi na razini  $n + 1$  nalazi se u jednom od ovih podstabala, recimo  $t^{(i)}$ . Za mjeru  $\mathbf{GW}$  vrijedi

$$\mathbf{GW}([t]_{n+1}) = p_k \prod_{j=1}^k \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n) = kp_k \cdot \frac{1}{k} \cdot \mathbf{GW}([t^{(i)}]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n). \quad (2.3)$$

Slika 2.2: GW stablo pristrano po veličini



Kako je  $\widehat{L} \geq 1$  g.s. stabla nastala ovakvim procesom će imati beskonačan niz  $(v_0, v_1, \dots)$ , zato će biti beskonačne visine pa nema izumiranja. Taj niz čini "kralježnicu" stabla, ostali čvorovi imaju jednaku distribuciju potomstva  $p$  pa su njihova podstabla međusobno nezavisne kopije GW stabala (takva stabla su na slici označena pravokutnicima).

Slično za mjeru  $\widehat{\mathbf{GW}}_*$  imamo

$$\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_{n+1}) = \frac{kp_k}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \widehat{\mathbf{GW}}_*([t^{(i)}; v]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n). \quad (2.4)$$

Pokažimo indukcijom da vrijedi

$$\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n) = \frac{1}{m^n} \mathbf{GW}([t]_n). \quad (2.5)$$

Jednakost očito vrijedi za  $n = 0$  jer se sva stabla podudaraju u čvoru pa su vjerojatnosti na obje strane jednake 1. Pretpostavimo sada da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi (2.5). Tada uvrštavanjem u (2.4) dobivamo  $\widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_{n+1}) = \frac{kp_k}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m^n} \mathbf{GW}([t^{(i)}]_n) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbf{GW}([t^{(j)}]_n)$ , a iz (2.3) to je jednako  $\frac{1}{m^{n+1}} \mathbf{GW}([t]_{n+1})$ . Iz ove jednakosti jednostavno slijedi pomalo neočekivan zaključak. Ako je dano prvih  $n$  razina stabla  $\widehat{T}$ , čvor  $v_n$  u nizu  $(v_0, v_1, \dots)$  je uniformno distribuiran na  $n$ -toj razini u odnosu na  $\widehat{\mathbf{GW}}_*$ .

Kako jednakost (2.5) vrijedi za svaki  $n$  i  $v \in z_n(t)$ , jednostavno možemo odrediti marginalnu distribuciju na  $\Omega$ ,  $\widehat{\mathbf{GW}}([t]_n) = \sum_{v \in z_n(t)} \widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n) = Z_n(t) \cdot \widehat{\mathbf{GW}}_*([t; v]_n)$ . Kao ranije

definiramo slučajnu varijablu  $W_n(t) := Z_n(t)/m^n$ . Tada imamo

$$\widehat{\mathbf{GW}}([t]_n) = W_n(t) \cdot \mathbf{GW}([t]_n). \quad (2.6)$$

Zbog ove jednakosti kažemo da je distribucija  $\widehat{\mathbf{GW}}$  pristrana po veličini. Štoviše, pristranost distribucije po veličini se očituje u sljedećem rezultatu.

**Lema 2.2.3.** *Za  $k \in \mathbb{N}$  proizvoljan vrijedi  $\widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) = \mathbf{GW}(\widehat{Z}_n = k)$ .*

*Dokaz.* Skup  $\{[t]_n : t \in \Omega\}$  čini particiju od  $\Omega$ . Lagano se vidi da je relacija  $\omega_1 \sim \omega_2$  ako  $r_n(\omega_1) = r_n(\omega_2)$  relacija ekvivalencije. Kako je prostor konačnih stabala prebrojiv, postoji niz  $(t_i)_i$  predstavnika klasa ekvivalencije,  $[t_i]_n = \{\omega \in \Omega : \omega \sim t_i\}$ . Tada je

$$\{Z_n = k\} = \bigcup_i \{\omega \in [t_i]_n : Z_n(\omega) = k\}.$$

Neka je  $(t_{i_j})_j$  podniz od  $(t_i)_i$  takav da  $Z_n(t_{i_j}) = k$ . Gornji događaj tada možemo zapisati kao

$$\{Z_n = k\} = \bigcup_j [t_{i_j}]_n.$$

Dalje računamo:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) &= \sum_j \widehat{\mathbf{GW}}([t_{i_j}]_n) = \sum_j W_n(t_{i_j}) \mathbf{GW}([t_{i_j}]_n) \\ &= \sum_j \frac{k}{m^n} \mathbf{GW}([t_{i_j}]_n) = \frac{k}{m^n} \mathbf{GW}(Z_n = k) \\ &= \mathbf{GW}(\widehat{Z}_n = k). \end{aligned}$$

□

GW stablo pristrano po veličini možemo povezati s *GW procesom s imigracijom*. Taj proces definiran je na sljedeći način. Proces kreće s 0 jedinki, a karakteriziraju ga dvije distribucije: ranije spomenuta distribucija potomstva i distribucija imigracije. U  $n$ -toj generaciji ( $n \geq 1$ )  $Y_n$  novih jedinki dolazi u proces, gdje su  $Y_n$  nezavisne i sve imaju jednaku distribuciju imigracije. Sve jedinke razmnožavaju se nezavisno po zakonu distribucije potomstva. Stoga ako  $(v_0, v_1, \dots)$  izoliramo iz stabla pristranog po veličini i potomke tih čvorova zamislimo kao imigraciju, očito vrijedi da je  $(Z_n - 1)_n$  uz zakon razdiobe  $\widehat{\mathbf{GW}}$  proces s imigracijom gdje je  $Y_n = \widehat{L}_n - 1$ .

## Poglavlje 3

# Granično ponašanje Galton–Watsonovih procesa

### 3.1 Osvrt na uvjetno očekivanje

Prije nego što krenemo s graničnim teoremima treba prodiskutirati jednu tehničku stvar. Prisjetimo se da pri definiranju uvjetnog očekivanja slučajne varijable s obzirom na neku  $\sigma$ -algebru zahtijevamo integrabilnost te slučajne varijable. U nastavku ćemo promatrati nizove pozitivnih slučajnih varijabli čiji limesi nemaju nužno konačno očekivanje. Htjet ćemo računati uvjetna očekivanja i takvih varijabli. Stoga treba proširiti definiciju uvjetnog očekivanja, ali tako da se dobro ponaša ukoliko postoji očekivanje, to jest da se podudara sa starom definicijom.

Neka je  $X$  nenegativna slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , takva da je  $\mathbb{E}[X] = \infty$ . Za  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  želimo naći  $\mathcal{G}$ -izmjerivu slučajnu varijablu  $Y$ ,  $0 \leq Y \leq \infty$ , tako da za svaki  $G \in \mathcal{G}$  vrijedi

$$\int_G X \, dP = \int_G Y \, dP.$$

Promotrimo slučajne varijable  $X_M := \min(X, M)$ ,  $M \in \mathbb{N}$ . One su integrabilne pa je dobro definirano  $Y_M := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ . Dakle,

$$\int_G X_M \, dP = \int_G Y_M \, dP \text{ za sve } G \in \mathcal{G}.$$

Kako je  $X_M \geq 0$  i  $X_M \nearrow X$ , po teoremu o monotonij konvergenciji vrijedi

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_G X_M \, dP = \int_G X \, dP.$$

S druge strane  $X_M \nearrow X$  povlači da je  $(Y_M)_M$  rastući niz pa postoji  $Y$  takav da  $Y_M \nearrow Y$  ( $Y$  može biti i beskonačno). Budući da je  $X_M \geq 0$ , slijedi da je i  $Y_M \geq 0$  g.s. Sada opet

primjenjujući teorem o monotonij konvergenciji dobivamo

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_G Y_M dP = \int_G Y dP.$$

Stoga na koncu imamo

$$\int_G X dP = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_G X_M dP = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_G Y_M dP = \int_G Y dP.$$

Kako su  $(Y_M)_M$   $\mathcal{G}$ -izmjerive i  $Y$  je  $\mathcal{G}$ -izmjeriva. Sada možemo definirati

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] := Y.$$

Jednako kao i u slučaju standardnog uvjetnog očekivanja se pokazuje da je  $Y$  g.s. jedinstvena. Rezultat koji ćemo često koristiti je sljedeći.

**Lema 3.1.1.** *Neka je  $X \geq 0$ . Ako je  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] < \infty$  g.s., onda je  $X < \infty$  g.s.*

*Dokaz.* Označimo kao ranije  $Y = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ .  $X$  možemo zapisati kao  $X\mathbf{1}_{(X < \infty)} + X\mathbf{1}_{(X = \infty)}$ . Stavimo  $Z := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X < \infty)} | \mathcal{G}]$  i  $W := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X = \infty)} | \mathcal{G}]$ . Tada za  $G \in \mathcal{G}$  vrijedi

$$\int_G Y dP = \int_G X dP = \int_G X\mathbf{1}_{(X < \infty)} dP + \int_G X\mathbf{1}_{(X = \infty)} dP = \int_G (Z + W) dP.$$

Zbog jedinstvenosti g.s. uvjetnog očekivanja zaključujemo da je  $Y = W + Z$  g.s.  $W$  možemo zapisati kao  $\infty \cdot P(X = \infty | \mathcal{G})$ . Sada ukoliko je  $Y < \infty$  g.s., onda je  $P(X = \infty | \mathcal{G}) = 0$  g.s. pa je

$$P(X = \infty) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(X = \infty)} | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[P(X = \infty | \mathcal{G})] = 0.$$

□

Također ćemo koristiti sljedeće verzije već poznatih rezultata.

**Propozicija 3.1.2.** *Neka je  $(X_n)_{n \geq 1}$  niz nenegativnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  i  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ .*

i) *(uvjetni teorem o monotonij konvergenciji) Ako je  $X_n \leq X_{n+1}$  g.s. za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i  $X_n \nearrow X$  ( $X$  može biti beskonačno), onda*

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \nearrow \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \text{ g.s.}$$

ii) *(uvjetna Fatouova lema)  $\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} | \mathcal{G}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}]$*

*Dokaz.* Pokažimo prvo *i*). Zbog monotonosti niza  $(X_n)_n$  imamo  $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \nearrow Y$  ( $Y$  može biti beskonačno). Za  $G \in \mathcal{G}$  koristeći obični teorem o monotonij konvergenciji dva puta dobivamo

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_G Y] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_G \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}]] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X_n] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X].$$

Dokažimo sada *ii*). Neka je  $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$  i  $Y := \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Tada  $Y_n \nearrow Y$ . Zbog monotonosti vrijedi  $\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_k | \mathcal{G}]$  za  $k \geq n$  pa je

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{G}] \leq \inf_{k \geq n} \mathbb{E}[X_k | \mathcal{G}].$$

Upravo pokazana tvrdnja *i*) sada povlači

$$\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{G}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}].$$

□

*Napomena 3.1.3.* Razlika klasičnih uvjetnih teorema o monotonij konvergenciji i Fatouove leme u odnosu na prošlu propoziciju je zahtjev da su slučajne varijable  $X$  i  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$  integrabilne.

Navedimo još jedan teorem koji će nam trebati za dokaz Kesten–Stigum teorema. Teorem govori o konvergenciji submartingala koji imaju g.s. ograničena uvjetna očekivanja s obzirom na neku  $\sigma$ -algebru. Teorem se dokazuje slično kao klasični teorem o konvergenciji submartingala, uz ocjenu koja se često naziva nejednakost prelazaka. Kako teorem nije standardan, dat ćemo dokaz koji će biti sličan dokazu navedenog klasičnog teorema. Stoga ćemo neke tvrdnje koje su u dokazima slične navoditi bez argumentacije. Za detalje pogledajte [8, poglavlje 1.4.]

**Teorem 3.1.4.** *Neka je  $(X_n)_{n \geq 0}$  nenegativan submartingal s obzirom na filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Ako je  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_0] < \infty$  g.s. onda  $(X_n)_n$  konvergira g.s. prema konačnoj slučajnoj varijabli  $X_\infty$ .*

*Dokaz.* Neka su  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a < b$ . Definiramo  $T_0 = -1$  i za  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_{2k-1} &:= \min\{m > T_{2k-2} : X_m \leq a\} \\ T_{2k} &:= \min\{m > T_{2k-1} : X_m \geq b\}. \end{aligned}$$

Neka je  $U_n = U_n([a, b]) := \max\{k : T_{2k} \leq n\}$  i  $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n := \sup\{k : T_{2k} < \infty\}$  za  $n \in \mathbb{N}$ . Stavimo  $Y_m := (X_m - a)^+$  i za  $m \geq 1$

$$H_m := \begin{cases} 1, & \text{ako je } m \in \langle T_{2k-1}, T_{2k} \rangle \text{ za neki } k \geq 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Proces  $(H_m)_{m \geq 0}$  je predvidiv. Kako je  $(X_n)$  submartingal i  $(Y_n)_n$  je submartingal, a kako je  $H_n$  nenegativna, ograničena slučajna varijabla i martingalna transformacija  $(H \cdot Y)_n$  je submartingal. Lagano se pokazuje da vrijedi

$$(H \cdot Y)_n \geq (b - a)U_n$$

pa zaključujemo da je  $(b - a)\mathbb{E}[U_n | \mathcal{F}_0] \leq \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n | \mathcal{F}_0]$  g.s. Uz  $K_m := 1 - H_m$ ,  $m \geq 1$  vrijedi  $Y_n - Y_0 = (H \cdot Y)_n + (K \cdot Y)_n$ . Proces  $(K \cdot Y)_n$  je također submartingal pa imamo

$$\mathbb{E}[(K \cdot Y)_n | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(K \cdot Y)_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[(K \cdot Y)_{n-1} | \mathcal{F}_0] \geq \dots \geq (K \cdot Y)_0 = 0 \text{ g.s.}$$

Odavde slijedi

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[Y_0 | \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n | \mathcal{F}_0] \geq (b - a)\mathbb{E}[U_n | \mathcal{F}_0]$$

Zbog  $X_n \geq 0$  vrijedi  $(X_n - a)^+ \leq X_n + |a|$  pa je  $\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_0] \leq |a| + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_0]$ . Kako je  $\mathbb{E}[Y_0 | \mathcal{F}_0] \geq 0$  g.s. koristeći gornju nejednakost dobivamo

$$\mathbb{E}[U_n | \mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{b - a}(|a| + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_0]) \leq \frac{1}{b - a}(|a| + \sup_m \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_0]) < \infty \text{ g.s.}$$

Po uvjetnom teoremu o monotonij konvergenciji  $\mathbb{E}[U | \mathcal{F}_0] = \lim_n \mathbb{E}[U_n | \mathcal{F}_0] < \infty$  g.s. Stoga je  $U < \infty$  g.s. Prebrojiva unija skupova vjerojatnosti 0 opet ima vjerojatnost 0 pa je

$$P(U[a, b] < \infty \text{ za sve } a, b \in \mathbb{Q}, a < b) = 1.$$

Odavde slijedi da je  $\limsup_n X_n = \liminf_n X_n$  g.s. Na događaju na kojem vrijedi jednakost definiramo  $X_\infty = \limsup_n X_n$ , a  $X_\infty = 0$  inače. Tada je  $X_\infty = \lim_n X_n$  g.s. Po uvjetnoj Fatuovoj lemi imamo

$$\mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_0] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_0] \leq \sup_n \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_0] < \infty \text{ g.s.}$$

pa je  $X_\infty < \infty$  g.s. □

## 3.2 Superkritični procesi: brzina rasta

### Rast kao $m^n$

Ranije smo vidjeli da je  $m^n$  brzina rasta superkritičnog procesa ako je  $W_\infty > 0$ . Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete na taj zahtjev.

**Teorem 3.2.1 (Kesten–Stigum).** *Neka je  $1 < m < \infty$ . Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

$$i) P(W_\infty = 0) = q;$$

$$ii) \mathbb{E}[W_\infty] = 1;$$

$$iii) \mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$$

Znamo da je kod superkritičnih procesa  $q < 1$  pa je  $1 - q > 0$ . Stoga je uvjet *i*) po Propoziciji 1.2.5 ekvivalentan tome da je

$$P(W_\infty > 0 \mid \text{neizumiranje}) = \frac{P(W_\infty > 0, \text{neizumiranje})}{P(\text{neizumiranje})} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1.$$

Uvjet *iii*) iz teorema se čini dosta tehnički, ali koristeći slučajne varijable pristrane po veličini, možemo ga zapisati malo drugačije. Neka je  $\widehat{L}$  slučajna varijabla pristrana po veličini u odnosu na  $L$ . Tada po definiciji vrijedi

$$\mathbb{E}[\log \widehat{L}] = \frac{\mathbb{E}[L \log^+ L]}{\mathbb{E}[L]} = \frac{1}{m} \mathbb{E}[L \log^+ L] \quad (3.1)$$

pa je uvjet *iii*) ekvivalentan  $\mathbb{E}[\log \widehat{L}] < \infty$ . Vjerojatnosna interpretacija ovog uvjeta dolazi iz sljedeće leme.

**Lema 3.2.2.** *Neka su  $X, X_1, X_2, \dots$  nenegativne nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable. Tada g.s. vrijedi*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \mathbb{E}[X] < \infty, \\ \infty, & \text{ako je } \mathbb{E}[X] = \infty. \end{cases}$$

*Dokaz.* Pokažimo prvo slučaj kada je  $\mathbb{E}[X] < \infty$ . Neka je  $\varepsilon > 0$ . Zbog  $\mathbb{E}[X] < \infty$  i  $\mathbb{E}[X/\varepsilon] < \infty$ . Kako je  $X$  nenegativna imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n/n \geq \varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n \geq n\varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X/\varepsilon \geq n\}) = \mathbb{E}[X/\varepsilon] < \infty.$$

Po Borell–Cantellijevoj lemi vrijedi  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n/n \geq \varepsilon\}) = 0$ . Stoga za gotovo svaki  $\omega \in \Omega$  vrijedi  $X_n(\omega)/n \geq \varepsilon$  za samo konačno  $n \in \mathbb{N}$  pa je  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n < \varepsilon) = 1$ . Kako je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan i zbog neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće događaje vrijedi

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n = 0\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n < 1/k\right\}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n < 1/k\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

Neka je sada  $\mathbb{E}[X] = \infty$ , uzmimo  $M \geq 1$ . Jer je  $\mathbb{E}[X] = \infty$  i  $\mathbb{E}[X/M] = \infty$ . Kako je  $X \geq 0$  vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X_n/n \geq M\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq nM\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X/M \geq n\}) = \mathbb{E}[X/M] = \infty.$$

Jer su  $X_1, X_2, \dots$  nezavisne, po drugoj Borel–Cantellijevoj lemi  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq nM\}) = 1$  pa je i  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n \geq M) = 1$ . Zbog neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće događaje i jer je  $M \geq 1$  proizvoljan vrijedi

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n = \infty\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n \geq k\right\}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n/n \geq k\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Kao direktnu posljedicu ove leme imamo sljedeći korolar.

**Korolar 3.2.3.** *Uz iste oznake kao u Lemi 3.2.2, za  $c \in \langle 0, 1 \rangle$  proizvoljan imamo*

i)  $\sum_n e^{X_n} c^n < \infty$  g.s. ako je  $\mathbb{E}[X] < \infty$ ;

ii)  $\sum_n e^{X_n} c^n = \infty$  g.s. ako je  $\mathbb{E}[X] = \infty$ .

*Dokaz.* Ako je  $\mathbb{E}[X] < \infty$  onda iz Leme 3.2.2 vrijedi  $\limsup X_n/n = 0$  g.s. To znači da za gotovo svaki  $\omega \in \Omega$  i  $\varepsilon > 0$  je  $X_n(\omega)/n < \varepsilon$  za sve osim konačno mnogo indeksa. Kako je  $c \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $1/c > 1$ . Uzmimo sada  $\varepsilon < \log(1/c)$  i neka je  $C(\omega) := \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) < n\varepsilon\}$ . Tada imamo

$$\sum_{n \in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n \leq \sum_{n \in C(\omega)} e^{n\varepsilon} c^n = \sum_{n \in C(\omega)} (e^\varepsilon c)^n < \infty.$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je izraz u zagradi manji od 1. Kako je  $\mathbb{N} \setminus C(\omega)$  konačan vrijedi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{X_n(\omega)} c^n = \sum_{n \in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n < \infty$$

pa vrijedi tvrdnja i). S druge strane ako je  $\mathbb{E}[X] = \infty$  onda iz prethodne leme imamo  $\limsup X_n/n = \infty$  g.s., a to znači da za gotovo svaki  $\omega \in \Omega$  i svaki  $M > 0$  je  $X_n(\omega)/n > M$  za beskonačno mnogo indeksa. Neka je  $C(\omega) := \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega)/n > \log(1/c)\}$ . Taj skup je beskonačan pa vrijedi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{X_n(\omega)} c^n \geq \sum_{n \in C(\omega)} e^{X_n(\omega)} c^n \geq \sum_{n \in C(\omega)} e^{n \log(1/c)} c^n \geq \sum_{n \in C(\omega)} 1^n = \infty$$

čime je dokazana tvrdnja ii).

□

Lemu 3.2.2 ćemo primijeniti na slučajnu varijablu  $\log \widehat{L}$  u sljedećem teoremu koji govori o GW procesima s imigracijom. Teorem 3.2.1 će biti direktna posljedica tog teorema uz još jedan vjerojatnosni rezultat.

**Teorem 3.2.4 (Seneta).** *Neka je  $I_n$  veličina  $n$ -te generacije GW procesa s imigracijom  $Y_n$ . Neka je  $m = \mathbb{E}[L] \in \langle 1, \infty \rangle$  i neka je  $Y$  slučajna varijabla koja ima distribuciju jednaku kao  $Y_n$ . Ako je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$ , onda  $\lim_n I_n/m^n$  postoji i konačan je g.s., a ako je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$ , tada je  $\limsup_n I_n/c^n = \infty$  g.s. za svaki  $c > 0$ .*

*Dokaz.* Uzmimo prvo da je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$ . Tada je iz Leme 3.2.2,  $\limsup_n (\log^+ Y_n/n) = \infty$  g.s. Ako je  $(a_n)_n$  niz realnih brojeva takav da je  $\limsup_n a_n = \infty$  i  $f$  je neprekidna funkcija takva da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , tada je  $\limsup_n f(a_n) = \infty$ . Uzmemo li funkciju  $f(x) = e^x$  i niz  $(\log^+ Y_n(\omega)/n)_n$ , dobivamo  $\limsup_n \sqrt[n]{Y_n} = \infty$  g.s. Stoga za  $c > 0$  proizvoljan vrijedi  $\limsup_n \sqrt[n]{Y_n}/c = \infty$  g.s. Analogno, uzimanjem  $g(x) = x^n$  zaključujemo da je  $\limsup Y_n/c^n = \infty$  g.s. Kako je  $I_n \geq Y_n$ , slijedi  $\limsup_n I_n/c^n = \infty$  g.s.

Sada neka je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$ . Neka je  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra generirana sa  $(Y_k)_{k \geq 1}$ . Označimo sa  $I_{n,k}$  broj potomaka na razini  $n$  od jedinki koje su imigrirale u proces na razini  $k$ . Tada je  $I_n = \sum_{k=1}^n I_{n,k}$  pa dobivamo

$$\mathbb{E} \left[ \frac{I_n}{m^n} \middle| \mathcal{G} \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m^n} \sum_{k=1}^n I_{n,k} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m^k} \mathbb{E} \left[ \frac{I_{n,k}}{m^{n-k}} \middle| \mathcal{G} \right].$$

Za  $k \leq n$  slučajna varijabla  $I_{n,k}$  je veličina generacije  $n - k$  običnog GW procesa koji kreće sa  $Y_k$  jedinki. To je isto kao da imamo  $Y_k$  nezavisnih procesa koji kreću s jednom jedinkom pa vrijedi  $\mathbb{E}[I_{n,k} | \mathcal{G}] = Y_k \cdot m^{n-k}$ . Stoga je

$$\mathbb{E} \left[ \frac{I_n}{m^n} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{m^k}.$$

Puštanjem limesa kada  $n \rightarrow \infty$ , na desnoj strani dobivamo red koji po Korolaru 3.2.3 konvergira g.s. Zato je

$$\sup_n \mathbb{E} \left[ \frac{I_n}{m^n} \middle| \mathcal{G} \right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{m^k} < \infty \text{ g.s.} \quad (3.2)$$

Stavimo  $\mathcal{F}_n = \sigma((Y_k)_{k \geq 1}, I_0, \dots, I_n)$ , tada je  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}$ . Niz  $\sigma$ -algebri  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  čini filtraciju i  $(I_n)_n$  je adaptiran s obzirom na tu filtraciju. Nadalje,

$$\mathbb{E} \left[ \frac{I_{n+1}}{m^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \frac{Y_{n+1}}{m^{n+1}} + \frac{1}{m^{n+1}} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{I_n} L_i^{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \frac{Y_{n+1}}{m^{n+1}} + \frac{I_n}{m^n} \geq \frac{I_n}{m^n} \text{ g.s.}$$

Druga jednakost vrijedi jer su slučajne varijable  $L_i^{n+1}$  nezavisne od  $\mathcal{F}_n$ . Dakle,  $I_n/m^n$  je nenegativan submartingal s obzirom na  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Uz nejednakost (3.2) zadovoljeni su uvjeti Teorema 3.1.4 pa  $\lim_n I_n/m^n$  postoji i konačan je g.s.  $\square$

Prije samog dokaza Kesten–Stigum teorema potreban nam je još jedan rezultat.

**Propozicija 3.2.5.** *Neka je  $\mu$  konačna mjera i  $\nu$  vjerojatnosna mjera na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Neka je  $(\mathcal{F}_n)_n$  nepadajući niz  $\sigma$ -algebri takvih da je  $\mathcal{F} = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$  te neka su  $\mu_n := \mu \upharpoonright \mathcal{F}_n$  i  $\nu_n := \nu \upharpoonright \mathcal{F}_n$  restrikcije  $\mu$  i  $\nu$  na  $\mathcal{F}_n$  takve da je  $\mu_n \ll \nu_n$  za svaki  $n$ . Neka je  $X_n := d\mu_n / d\nu_n$  i  $X = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Tada vrijedi*

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow X < \infty \quad \mu\text{-g.s.} \Leftrightarrow \int X d\nu = \int d\mu, \quad (3.3)$$

$$\mu \perp \nu \Leftrightarrow X = \infty \quad \mu\text{-g.s.} \Leftrightarrow \int X d\nu = 0. \quad (3.4)$$

*Dokaz.* Prvo ćemo pokazati da za  $A \in \mathcal{F}$  vrijedi

$$\mu(A) = \int_A X d\nu + \mu(A \cap \{X = \infty\}) \quad (3.5)$$

Štoviše, pokazat ćemo da ako vrijedi gornja jednakost, onda je to Lebesgueova dekompozicija mjere  $\mu$  u odnosu na  $\nu$ .

Pokažimo da je  $(X_n)_n$  martingal s obzirom na  $(\mathcal{F}_n)_n$  i mjeru  $\nu$ . Za  $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$  vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mathbf{1}_A] = \int_A X_{n+1} d\nu = \int_A X_{n+1} d\nu_{n+1} = \mu_{n+1}(A) = \mu(A).$$

S druge strane

$$\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] = \int_A X_n d\nu = \int_A X_n d\nu_n = \mu_n(A) = \mu(A)$$

pa je  $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ . Kako je  $(X_n)_n$  nenegativan martingal, konvergira prema  $X$   $\nu$ -g.s. i  $X < \infty$   $\nu$ -g.s.

Definirajmo vjerojatnosnu mjeru  $\rho := (\mu + \nu)/C$  gdje je  $C := \int d(\mu + \nu)$ . Neka je  $\rho_n$  restrikcija te mjere na  $\mathcal{F}_n$ . Tada možemo definirati  $U_n := d\mu_n / d\rho_n$  i  $V_n := d\nu_n / d\rho_n$ . Opet kao gore zaključujemo da su  $(U_n)_n$  i  $(V_n)_n$  nenegativni martingali s obzirom na  $\mathcal{F}_n$  i mjeru  $\rho$ . Neka su  $U := \limsup U_n$  i  $V := \limsup V_n$ . Kako je  $U_n + V_n = C$   $\rho$ -g.s. za svaki  $n$ , ti martingali su ograničeni  $\rho$ -g.s. Za  $A \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$  vrijedi

$$\mu(A) = \mu_n(A) = \int_A U_n d\rho_n = \int_A U_n d\rho.$$

Puštanjem  $n \rightarrow \infty$  iz teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A U_n d\rho = \int_A U d\rho.$$

Ova jednakost vrijedi za  $A \in \cup_m \mathcal{F}_m$ , a kako je to  $\pi$  sustav koji generira  $\mathcal{F}$ , jednakost vrijedi na  $\mathcal{F}$ . Stoga je  $U = d\mu/d\rho$  i  $V = dv/d\rho$ . Kako je  $U_n + V_n = C$  g.s.,  $\rho(U = 0, V = 0) = 0$  pa jer je  $X_n = U_n/V_n$  vrijedi

$$\frac{U}{V} = \frac{\lim_n U_n}{\lim_n V_n} = \lim_n \frac{U_n}{V_n} = \lim_n X_n = X \quad \rho\text{-g.s.}$$

Neka je  $Y := (1/V) \cdot \mathbf{1}_{(V>0)}$ , tada je  $1 = YV + \mathbf{1}_{(V=0)}$  pa vrijedi

$$\mu(A) = \int_A U d\rho = \int_A UYV d\rho + \int_A \mathbf{1}_{(V=0)} U d\rho. \quad (3.6)$$

Kako je  $\nu(V = 0) = \int V \mathbf{1}_{(V=0)} d\rho = 0$ ,  $UY = X \mathbf{1}_{(V>0)} = X$   $\nu$ -g.s. pa uz  $dv = V d\rho$  imamo

$$\int_A UYV d\rho = \int_A X dv. \quad (3.7)$$

S druge strane kako je  $U < \infty$   $\mu$ -g.s.,  $\{V = 0\} = \{X = \infty\}$   $\mu$ -g.s. Koristeći  $d\mu = U d\rho$  dobivamo

$$\int_A \mathbf{1}_{(V=0)} U d\rho = \int_A \mathbf{1}_{(X=\infty)} d\mu. \quad (3.8)$$

Iz (3.6), (3.7) i (3.8) slijedi (3.5). Jasno je da je mjera  $\mu_r(A) := \int_A X dv$  apsolutno neprekidna u odnosu na  $\nu$ , a kako je  $\nu(X = \infty) = 0$  mjere  $\mu_s(A) := \mu(A \cap \{X = \infty\})$  i  $\nu$  su singularne pa je (3.5) Lebesgueov rastav mjere  $\mu$  s obzirom na  $\nu$ . Koristeći tu činjenicu ekvivalencije (3.3) i (3.4) sada lagano slijede.

Ako je  $\mu \ll \nu$  onda je  $X < \infty$   $\mu$ -g.s.; ako je  $X < \infty$   $\mu$ -g.s. onda je  $\int X dv = \int d\mu$ ; konačno ako je  $\int X dv = \int d\mu$  onda je  $X < \infty$   $\mu$ -g.s. i  $\mu \ll \nu$ .

Ako je  $\mu \perp \nu$  onda je  $\mu = \mu_s$  pa je  $X = \infty$   $\mu$ -g.s.; ako je  $X = \infty$   $\mu$ -g.s. onda je  $\int X dv = 0$ ; na kraju ako je  $\int X dv = 0$  tada je  $X = \infty$   $\mu$ -g.s. pa je  $\mu \perp \nu$ .  $\square$

**Dokaz Kesten–Stigum teorema.** Neka su  $\mathbf{GW}_n$  i  $\widehat{\mathbf{GW}}_n$  restrikcije vjerojatnosnih mjera  $\mathbf{GW}$  i  $\widehat{\mathbf{GW}}$  na  $\mathcal{F}_n$ . Tada iz relacije (2.6) vrijedi

$$\frac{d\widehat{\mathbf{GW}}_n}{d\mathbf{GW}_n}(t) = W_n(t).$$

Iz prethodne propozicije imajući na umu da baratamo s dvije vjerojatnosne mjere dobivamo

$$\widehat{\mathbf{GW}} \ll \mathbf{GW} \Leftrightarrow W_\infty < \infty \quad \widehat{\mathbf{GW}}\text{-g.s.} \Leftrightarrow \int W_\infty d\mathbf{GW} = 1, \quad (3.9)$$

$$\widehat{\mathbf{GW}} \perp \mathbf{GW} \Leftrightarrow W_\infty = \infty \quad \widehat{\mathbf{GW}}\text{-g.s.} \Leftrightarrow W_\infty = 0 \quad \mathbf{GW}\text{-g.s.} \quad (3.10)$$

Sada umjesto ponašanja  $W_\infty$  s obzirom na  $\mathbf{GW}$ , možemo promatrati ponašanje  $W_\infty$  s obzirom na  $\widehat{\mathbf{GW}}$ , a to znamo iz Teorema 3.2.4. Prisjetimo se diskusije s kraja prošlog poglavlja. Uz  $Y_n = \widehat{L} - 1$ ,  $(Z_n - 1)_n$  sa zakonom razdiobe  $\widehat{\mathbf{GW}}$  čini proces s imigracijom  $I_n$ .

Ako je  $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$ , tada je  $\mathbb{E}[\log \widehat{L}] < \infty$  pa je i  $\mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] < \infty$ . Po prošlom teoremu  $\lim_n I_n/n$  postoji i konačan je  $\mathbf{GW}$ -g.s. Kako su distribucije od  $I_n/m^n$  uz  $\mathbf{GW}$  i  $W_n - m^{-n}$  uz  $\widehat{\mathbf{GW}}$  jednake i kako je  $\lim_n m^{-n} = 0$  vrijedi

$$\widehat{\mathbf{GW}}(W_\infty < \infty) = \widehat{\mathbf{GW}}(\limsup_{n \rightarrow \infty} (W_n - m^{-n}) < \infty) = \mathbf{GW}(\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n/n < \infty) = 1$$

pa je po (3.9)  $\mathbb{E}_{\mathbf{GW}}[W_\infty] = \int W_\infty d\mathbf{GW} = 1$ . To dokazuje  $iii) \implies ii)$ .

Ako je  $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$ , onda je  $\mathbf{GW}(W_\infty = 0) < 1$  pa je  $\mathbf{GW}(W_\infty = 0) = q$  po Propoziciji 1.2.5, što dokazuje  $ii) \implies i)$ .

Ako je  $\mathbb{E}[L \log^+ L] = \infty$ , onda je  $\mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] = \infty$  pa je  $\limsup_n I_n/n = \infty$   $\mathbf{GW}$ -g.s. Opet kao ranije zaključujemo

$$\widehat{\mathbf{GW}}(W_\infty = \infty) = \widehat{\mathbf{GW}}(\limsup_{n \rightarrow \infty} (W_n - m^{-n}) = \infty) = \mathbf{GW}(\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n/n = \infty) = 1.$$

Sada iz (3.10) vrijedi  $W_\infty = 0$   $\mathbf{GW}$ -g.s. pa uz Propoziciju 1.2.5 obratom po kontrapoziciji vrijedi  $i) \implies iii)$ .  $\square$

### Rast sporiji od $m^n$

Ukoliko proces nije izumro, a  $W_\infty = 0$  onda proces raste sporije od  $m^n$ . Možemo međutim reći i nešto malo više od toga.

**Teorem 3.2.6 (Seneta–Heyde).** *Ako je  $1 < m < \infty$ , tada postoji niz konstanti  $(c_n)_n$  takav da vrijedi*

$$i) \lim_n Z_n/c_n \text{ postoji g.s. u } [0, \infty),$$

$$ii) P(\lim_n Z_n/c_n = 0) = q,$$

$$iii) c_{n+1}/c_n \rightarrow m.$$

Slično kao kod Kesten–Stigum teorema, uvjet  $ii)$  je ekvivalentan

$$P(\lim_n Z_n/c_n > 0 \mid \text{neizumiranje}) = \frac{P(\lim_n Z_n/c_n > 0, \text{neizumiranje})}{P(\text{neizumiranje})} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1.$$

To znači da ako proces nije izumro, brzina rasta je dana sa  $c_n$ . Kako  $c_{n+1}/c_n \rightarrow m$ , u tom slučaju brzina rasta nije puno manja od  $m^n$ .

**Definicija 3.2.7.** Familija slučajnih varijabli  $X$  je *uniformno integrabilna* ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $K \geq 0$  tako da je

$$\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{(X > K)}] < \varepsilon \text{ za svaki } X \in \mathcal{X}.$$

**Teorem 3.2.8 (Vitali).** Neka je  $(X_n)_n$  niz slučajnih varijabli takav da je  $\mathbb{E}[X_n] < \infty$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Ako  $X_n \rightarrow X$  po vjerojatnosti, tada je ekvivalentno:

i) Niz  $(X_n)_n$  je uniformno integrabilan.

ii)  $X_n \rightarrow X$  u  $L^1$ .

iii)  $\mathbb{E}[|X_n|] \rightarrow \mathbb{E}[|X|] < \infty$ .

*Dokaz.* Pogledajte [4, teorem 4.6.3]. □

Prije dokaza Teorema 3.2.6 navodimo još jedan pomoćni rezultat. Reći ćemo da stablo ima *nasljedno svojstvo* ukoliko svako konačno stablo ima to svojstvo te ako neko stablo ima to svojstvo, onda ga imaju i sva stabla koja su potomci tog stabla. U nastavku ćemo radi jednostavnosti nasljedna svojstva opisivati kao događaje. Reći ćemo da je neki skup nasljedno svojstvo ako za svako stablo u tom skupu je svako njegovo podstablo u tom skupu i sva konačna stabla su u tom skupu.

**Propozicija 3.2.9.** Neka je  $A$  neko nasljedno svojstvo. Tada je  $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$ .

*Dokaz.* Ako je stablo  $\omega \in A$ , onda su po definiciji nasljednog svojstva  $T_1(\omega), \dots, T_{Z_1(\omega)}(\omega)$  također u  $A$ . Tada vrijedi

$$\mathbf{GW}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{GW}(A \mid Z_1)] \leq \mathbb{E}[\mathbf{GW}(T_1 \in A, \dots, T_{Z_1} \in A \mid Z_1)] = \mathbb{E}[\mathbf{GW}(A)^{Z_1}].$$

Zadnja jednakost vrijedi jer su  $T_1, \dots, T_{Z_1}$  nezavisne i jednako distribuirane uz  $Z_1$ . Neka je  $f$  funkcija izvodnica slučajne varijable  $Z_1$ . Izraz na desnoj strani je tada upravo  $f(\mathbf{GW}(A))$ . Stoga imamo  $\mathbf{GW}(A) \leq f(\mathbf{GW}(A))$ . S druge strane, skup svih konačnih stabala je jednak  $\bigcup_{n \geq 1} (Z_n = 0)$  pa kako se svako konačno stablo po definiciji nalazi u  $A$  je  $\mathbf{GW}(A) \geq q$ . Iz dokaza Teorema 1.2.1 znamo da je jedino moguće da je  $\mathbf{GW}(A) \in \{q, 1\}$ . Kako se sva konačna stabla nalaze u  $A$  vrijedi  $\mathbf{GW}(A \mid \text{izumiranje}) = 1$ . Sada vjerojatnost  $\mathbf{GW}(A)$  možemo zapisati kao

$$\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \cdot \underbrace{\mathbf{GW}(\text{neizumiranje})}_{1-q} + \underbrace{\mathbf{GW}(A \mid \text{izumiranje})}_1 \cdot \underbrace{\mathbf{GW}(\text{izumiranje})}_q.$$

Iz  $\mathbf{GW}(A) \in \{q, 1\}$  slijedi  $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$ . □

**Dokaz Teorema 3.2.6.** Neka je  $f$  funkcija izvodnica vjerojatnosti od  $L$ . Tada je  $f'(s) > 0$  za  $s \in \langle 0, 1 \rangle$ . Također je na tom intervalu  $p_0 < f(s) < 1$ . Kako je  $f(0) = p_0$  i  $f(1) = 1$ ,  $f$  je strogo rastuća na  $[0, 1]$ . Kako je  $f$  neprekidna na  $[0, 1]$ ,  $f([0, 1]) = [p_0, 1]$ . Stoga je  $f^{-1}$  dobro definirana na  $[p_0, 1]$ .

Uzmimo  $s_0 \in \langle q, 1 \rangle$ . Definiramo niz  $s_{n+1} := f^{-1}(s_n)$  (primijetimo da je  $s_n \in \langle q, 1 \rangle$  za svaki  $n$ ). Kako je  $f(s) < s$  za  $s \in \langle q, 1 \rangle$ , imamo  $s_{n+1} = f^{-1}(s_n) > s_n$ . Stoga je niz  $(s_n)_n$  rastući, a kako je i omeđen s 1 vrijedi  $s_n \nearrow \sup_n s_n$ . Pretpostavimo da je  $M := \sup_n s_n < 1$ . Neka je  $\varepsilon = f^{-1}(M) - M > 0$ . Funkcija  $f^{-1}$  je neprekidna na  $\langle q, 1 \rangle$  pa za  $\varepsilon/2$  postoji  $\delta > 0$  tako da  $(|M - x| < \delta) \implies (|f^{-1}(M) - f^{-1}(x)| < \varepsilon/2)$ . Po definiciji supremuma postoji  $s_m$  takav da je  $M - s_m < \delta$ . Stoga je  $f^{-1}(s_m) - M > \varepsilon/2$ , no to onda znači da je  $s_{m+1} = f^{-1}(s_m) > M$ , što je kontradikcija. Stoga  $s_n \nearrow 1$ .

Slično kao što smo pokazali Propoziciju 1.1.2 možemo pokazati da je  $\mathbb{E}[s_n^{Z_n} | \mathcal{F}_{n-1}] = f(s_n)^{Z_{n-1}} = s_{n-1}^{Z_{n-1}}$ , gdje je  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ . Stoga je  $(s_n^{Z_n})_n$  pozitivan martingal pa konvergira g.s. prema nekoj slučajnoj varijabli  $Y \in [0, 1]$ . Nadalje, ovaj martingal je omeđen po točkama s 1 pa je zato i uniformno integrabilan. Kako je  $\mathbb{E}[s_n^{Z_n}] = \dots = s_0 < \infty$ , po Teoremu 3.2.8 imamo konvergenciju prema  $Y$  i u  $L^1$  te je  $\mathbb{E}[Y] = \lim_n \mathbb{E}[s_n^{Z_n}] = s_0 \in \langle q, 1 \rangle$ .

Stavimo  $c_n = -1/\log s_n$ . Tada je  $s_n^{Z_n} = e^{-Z_n/c_n}$  pa  $\lim_n Z_n/c_n$  postoji g.s. u  $[0, \infty]$ . Po L'Hospitalovom pravilu vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f(s_{n+1})}{\log s_{n+1}} = \lim_{s \nearrow 1} \frac{\log f(s)}{\log s} = \lim_{s \nearrow 1} \frac{f'(s)s}{f(s)} = m.$$

Stavimo  $A := \{\lim_n Z_n/c_n = 0\}$ . Neka je  $\omega \in A$  i neka je  $Z_1(\omega) = k$ . Označimo  $a_j = \lim_n Z_n(T_j(\omega))/c_n$ , gdje je  $1 \leq j \leq k$ . Tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^k a_j = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^k Z_n(T_j(\omega))}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_{n+1}} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_n \frac{Z_{n+1}(\omega)}{c_{n+1}} \cdot m = 0.$$

Kako je  $a_j \geq 0$ , slijedi da je  $a_j = 0$  za svaki  $j$ . Stoga je događaj  $A$  nasljedno svojstvo pa je  $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$ . Pretpostavimo da je  $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) = 1$ . Kako je događaj  $A$  trivijalno zadovoljen ukoliko proces izumire, slijedi  $\mathbf{GW}(A) = 1$ , to jest  $\lim_n Z_n/c_n = 0$  g.s. To znači da je  $\lim_n s_n^{Z_n} = 1$  g.s. Odavde je  $\mathbb{E}[Y] = 1$ , no znamo da je  $\mathbb{E}[Y] < 1$ . Dakle,  $\mathbf{GW}(A \mid \text{neizumiranje}) = 0$ , drugim riječima  $A = \{\text{izumiranje}\}$  g.s. pa slijedi ii).

Sada promatramo događaj  $B = \{\lim_n Z_n/c_n < \infty\}$ . Analognim računom kao ranije se pokaže da je  $B$  nasljedno svojstvo pa je  $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) \in \{0, 1\}$ . Ukoliko je  $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) = 0$ , tada na događaju neizumiranja vrijedi  $Y = 0$  g.s. pa je  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\text{izumiranje}}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\text{izumiranje}}] = q$ . To je kontradikcija sa  $\mathbb{E}[Y] > q$  pa mora vrijediti  $\mathbf{GW}(B \mid \text{neizumiranje}) = 1$ . Stoga je  $\mathbf{GW}(B) = 1$ , što pokazuje i).  $\square$

### 3.3 Subkritični procesi: brzina izumiranja

Vidjeli smo ranije da subkritični procesi izumiru g.s. Možemo se pitati kolika je brzina izumiranja. Da bismo odgovorili na to pitanje promatrat ćemo koliko brzo  $P(Z_n > 0)$  opada. Prirodno se nameće gruba ocjena

$$P(Z_n > 0) \leq \mathbb{E}[Z_n] = m^n.$$

Pokazat ćemo kada je  $m^n$  prikladna brzina izumiranja, a kada proces izumire još brže. Odgovor je dan sljedećim teoremom.

**Teorem 3.3.1 (Heathcote, Seneta i Vere–Jones).** *Neka je  $0 < m < \infty$ . Tada je niz  $(P(Z_n > 0)/m^n)_n$  padajući. Ukoliko je  $m < 1$  onda su ekvivalentne sljedeće tvrdnje:*

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0)/m^n > 0$ ;
- ii)  $\sup_n \mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] < \infty$ ;
- iii)  $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$ .

Opet kao u prošlom odjeljku, teorem će biti posljedica teorema koji govori o procesima s imigracijom. Za taj teorem će nam trebati sljedeća lema.

**Lema 3.3.2.** *Neka je  $(k_n)_n$  niz nenegativnih cijelih brojeva,  $(A_{n,k})_{n,k \geq 1}$  familija nezavisnih događaja i  $B_n := \cup_{k=1}^{k_n} A_{n,k}$  (ako je  $k_n = 0$  onda je  $B_n = \emptyset$ ). Tada vrijedi*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k}) < \infty. \quad (3.11)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno da je  $\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k}) = \infty$ , tada

$$\begin{aligned} P(\liminf B_n^c) &= P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{j \geq n} B_j^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j \geq n} \bigcap_{k=1}^{k_j} A_{j,k}^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j \geq n} \prod_{k=1}^{k_j} P(A_{j,k}^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j \geq n} \prod_{k=1}^{k_j} (1 - P(A_{j,k})) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j \geq n} \prod_{k=1}^{k_j} \exp(-P(A_{j,k})) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{j \geq n} \sum_{k=1}^{k_j} P(A_{j,k})\right) = 0. \end{aligned}$$

Stoga je  $P(\limsup B_n) = 1$  pa obratom po kontrapoziciji vrijedi tvrdnja.  $\square$

**Teorem 3.3.3 (Heathcote).** *Neka je  $I_n$  veličina  $n$ -te generacije GW procesa s imigracijom  $Y_n$ . Neka je  $m = \mathbb{E}[L] < 1$  i neka je  $Y$  slučajna varijabla distribuirana kao  $Y_n$ . Ako je  $\mathbb{E}[\log^+ L] < \infty$ , tada  $I_n$  konvergira po distribuciji slučajnoj varijabli koja je konačna g.s., a ako je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$ , onda  $I_n$  konvergira po vjerojatnosti prema  $\infty$ , to jest  $\lim_n P(I_n > t) = 1$  za svaki  $t > 0$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra generirana s  $(Y_k)_{k \geq 1}$ . Označimo sa  $I_{n,k}$  broj potomaka na razini  $n$  od jedinki koje su imigrirale u proces na razini  $k$ . Tada je  $I_n = \sum_{k=1}^n I_{n,k}$ . Kako distribucija od  $I_{n,k}$  ovisi samo o  $n - k$  ( $I_{k,l}$  je distribuirana kao  $I_{j+k-l,j}$  za  $j, k, l \in \mathbb{N}$ ),  $I_n$  je distribuirana kao  $I'_n := \sum_{k=1}^n I_{2k-1,k}$ . Ova suma raste prema nekom limesu  $I_\infty$ . Taj limes je po Kolmogorovljevom zakonu 0-1 g.s. konačan ili g.s. beskonačan.  $I_{n,k}$  možemo napisati na sljedeći način

$$I_{n,k} = \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{n-k}(k, j) \quad (3.12)$$

gdje je  $Z_n(k, j)$  GW proces koji kreće iz  $j$ -te jedinke u  $k$ -toj generaciji. Stoga vrijedi  $I_{2k-1,k} = \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k, j)$  pa je

$$I_\infty = \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k, j). \quad (3.13)$$

Neka je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$ . Koristeći uvjetni teorem o monotonij konvergenciji i činjenicu da su  $Z_{k-1}(k, j)$  nezavisne od  $\mathcal{G}$  dobivamo

$$\mathbb{E}[I_\infty | \mathcal{G}] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k, j) \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k \geq 1} Y_k m^{k-1} \text{ g.s.}$$

Kako je  $m < 1$ , po korolaru 3.2.3 je  $\mathbb{E}[I_\infty | \mathcal{G}] < \infty$  g.s. pa je  $I_\infty < \infty$  g.s. i  $I_n \xrightarrow{d} I_\infty$ .

Pretpostavimo sada da je  $I_\infty < \infty$  g.s. Tada iz (3.13) slijedi da je g.s. za samo konačno indeksa  $k$  izraz  $\sum_{j=1}^{Y_k} Z_{k-1}(k, j)$  veći ili jednak 1. Neka je  $A_n := \{\sum_{j=1}^{Y_n} Z_{n-1}(n, j) \geq 1\}$  i  $A := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Tada je

$$\mathbf{GW}(A) = 0 \quad \text{pa je} \quad \mathbf{GW}(A | \mathcal{G}) = 0 \text{ g.s.}$$

Neka je  $P_Y$  slika mjere  $\mathbf{GW}$  u odnosu na  $(Y_k)_k$ . Za niz  $y = (y_k)_k$  nenegativnih cijelih brojeva neka je  $G_y = \{Y_k = y_k, k \geq 1\} \in \mathcal{G}$ . Ako vrijedi  $P_Y(y) > 0$  i  $\mathbf{GW}(A | G_y) = \mathbf{GW}(A \cap G_y)/P_Y(y) > 0$  onda je  $\mathbf{GW}(A \cap G_y) > 0$ . To znači da je  $\int_{G_y} \mathbf{1}_A d\mathbf{GW} > 0$ , a to je u kontradikciji s tim da je  $\mathbf{GW}(A | \mathcal{G}) = 0$  g.s. Stoga za  $P_Y$  gotovo svaki niz  $y$  vrijedi

$$\mathbf{GW}(A | G_y) = \mathbf{GW} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{y_n} Z_{n-1}(n, j) \geq 1 \right\} \right) = 0.$$

Za neki takav  $y$  stavimo  $A_{n,k} := \{Z_{n-1}(n, k) \geq 1\}$  i  $B_n = \cup_{k=1}^{y_n} A_{n,k}$ . Iz Leme 3.3.2 imamo

$$\sum_{n \geq 1} y_n \mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{y_n} \mathbf{GW}(Z_{n-1}(n, k) \geq 1) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{y_n} \mathbf{GW}(A_{n,k}) < \infty.$$

Kako ovo vrijedi za  $P_Y$  gotovo svaki  $y$  slijedi

$$\sum_{n \geq 1} Y_n \mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) < \infty \text{ g.s.}$$

S obzirom da je  $\mathbf{GW}(Z_{n-1} \geq 1) \geq P(L > 0)^{k-1}$  iz Korolara 3.2.3 dobivamo da je  $\mathbb{E}[\log^+ Y] < \infty$ . Obratom po kontrapoziciji,  $\mathbb{E}[\log^+ Y] = \infty$  povlači da je  $I_\infty = \infty$  g.s. pa na koncu imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(I_n > t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(I'_n > t) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{I'_n > t\}) = P(I_\infty > t) = 1$$

za sve  $t > 0$ . □

Prije dokaza Teorema 3.3.1 treba nam još jedna lema.

**Lema 3.3.4.** *Neka je  $(X_n)_n$  niz diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u  $\mathbb{Z}^+$ , s distribucijama  $(v_n)_n$  i očekivanjima  $a_n$ . Neka je  $\hat{v}_n$  distribucija od  $\widehat{X}_n$ . Ako je  $(\hat{v}_n)_n$  napet niz mjera, onda je  $\sup a_n < \infty$ , dok ako  $\widehat{X}_n \rightarrow \infty$  po vjerojatnosti, onda  $a_n \rightarrow \infty$ .*

*Dokaz.* Ako je  $(\hat{v}_n)_n$  napet, onda za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$  kompaktan takav da je  $\hat{v}_n(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ . Za  $\varepsilon = 1/2$  postoji  $N \in \mathbb{N}$  takav da je  $K_\varepsilon \subset [-N, N]$  pa za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\hat{v}_n(\{0, 1, \dots, N\}) = \sum_{k=1}^N \hat{v}_n(\{k\}) = \sum_{k=1}^N \frac{kv_n(\{k\})}{a_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$\inf_n \sum_{k=1}^N \frac{kv_n(\{k\})}{a_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Odavde dobivamo

$$\sup_n \frac{a_n}{\sum_{k=1}^N kv_n(\{k\})} \leq 2,$$

a kako je  $\sum_{k=1}^N kv_n(\{k\}) \leq \sum_{k=1}^N Nv_n(\{k\}) \leq N$  imamo  $\sup_n a_n/N \leq 2$ , odnosno  $\sup_n a_n \leq 2N$ .

Pretpostavimo sada da  $\widehat{X}_n \xrightarrow{P} \infty$ , ali da niz  $(a_n)_n$  ne ide prema beskonačno. Tada postoji  $M = \sup_n a_n < \infty$  pa je

$$\lim_n \sum_{k=1}^N kv_n(\{k\}) \leq \lim_n \frac{M}{a_n} \sum_{k=1}^N kv_n(\{k\}) = M \lim_n P(\widehat{X}_n \leq N) = 0$$

za svaki  $N \in \mathbb{N}$ . Slijedi

$$\lim_n P(X_n \leq N) \leq \lim_n \sum_{k=1}^N k \nu_n(\{k\}) = 0.$$

Stoga za  $\varepsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za  $n \geq n_0$  vrijedi  $P(X_n \leq N) < \varepsilon$ , odnosno  $P(X_n > N) \geq 1 - \varepsilon$ . Po Markovljevoj nejednakosti  $P(X_n > N) \leq P(X_n \geq N) \leq a_n/N$  pa vrijedi  $\sup_n a_n \geq N(1 - \varepsilon)$ . Kako ovo vrijedi za  $N \in \mathbb{N}$  proizvoljan dobivamo  $\sup_n a_n = \infty$  što je kontradikcija.  $\square$

**Dokaz Teorema 3.3.1.** Neka je  $\mu_n$  zakon razdiobe od  $Z_n$  uvjetno na  $Z_n > 0$ . Za stablo  $\omega \in \Omega$  neka je  $\xi(\omega)$  dijete korijena s najmanjom oznakom tako da ima bar jednog potomka u generaciji  $n$ . Ako je  $Z_n(\omega) > 0$ , neka  $H_n(\omega)$  označava broj potomaka tog čvora u  $n$ -toj generaciji i  $Z_n^{(u)}(\omega)$  broj potomaka čvora  $u$  u  $n$ -toj generaciji. Tada je  $H_n(\omega) = Z_{n-1}^{(\xi(\omega))} \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}$ . Računamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{GW}(H_n = k) &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{GW}(\xi = i, H_n = k, Z_n > 0) \\ &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i, Z_{n-1}^{(j)} = 0 \text{ za } j < i, Z_{n-1}^{(i)} = k) \\ &= \mathbf{GW}(Z_{n-1} = k) \sum_{i \geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i) \cdot \mathbf{GW}(Z_{n-1} = 0)^{i-1}. \end{aligned}$$

S druge strane

$$\mathbf{GW}(Z_n > 0) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{GW}(H_n = k) = \mathbf{GW}(Z_{n-1} > 0) \sum_{i \geq 1} \mathbf{GW}(Z_1 \geq i) \cdot \mathbf{GW}(Z_{n-1} = 0)^{i-1}$$

pa naposljetku imamo

$$\mathbf{GW}(H_n = k \mid Z_n > 0) = \frac{\mathbf{GW}(H_n = k)}{\mathbf{GW}(Z_n > 0)} = \frac{\mathbf{GW}(Z_{n-1} = k)}{\mathbf{GW}(Z_{n-1} > 0)} = \mathbf{GW}(Z_{n-1} = k \mid Z_{n-1} > 0).$$

Kako je  $Z_n \geq H_n$ , dobivamo

$$\mu_n([k, \infty)) \geq \mathbf{GW}(H_n \geq k \mid Z_n > 0) = \mu_{n-1}([k, \infty))$$

pa je niz mjera  $(\mu_n)_n$  stohastički nepadajući. Odavde slijedi

$$\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0] = \sum_{k \geq 1} \mu_n([k, \infty)) \geq \sum_{k \geq 1} \mu_{n-1}([k, \infty)) = \mathbb{E}[Z_{n-1} \mid Z_{n-1} > 0].$$

Nadalje,

$$\frac{\mathbf{GW}(Z_n > 0)}{m^n} = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0]}.$$

Zato je niz  $(\mathbf{GW}(Z_n > 0)/m^n)_n$  padajući i  $i) \Leftrightarrow ii)$ .

Pokažimo sada da je  $\hat{\mu}_n$  zakon razdiobe od  $\widehat{Z}_n$ . Neka je  $U$  slučajna varijabla koja ima distribuciju  $\mu_n$ . Tada je  $\mathbb{E}[U] = \int U d\mu_n = \mathbb{E}[Z_n]/\mathbf{GW}(Z_n > 0)$ . Slijedi

$$\hat{\mu}_n(k) = k \frac{\mu_n(k)}{\mathbb{E}[U]} = k \frac{\mathbf{GW}(Z_n = k)}{\mathbb{E}[Z_n]} = \mathbf{GW}(\widehat{Z}_n = k).$$

Neka je  $I_n$  proces s imigracijom,  $Y_n = \widehat{L}_n - 1$ . Tada iz diskusije s kraja odjeljka 2.2 znamo da je

$$\mathbf{GW}(\widehat{Z}_n = k) = \widehat{\mathbf{GW}}(Z_n = k) = \widehat{\mathbf{GW}}(Z_n - 1 = k - 1) = \mathbf{GW}(I_n = k - 1) = \mathbf{GW}(I_n + 1 = k).$$

Ako je  $\sup_n \mathbb{E}[Z_n | Z_n > 0] < \infty$ , tada po prethodnoj lemi  $\widehat{Z}_n$  ne može po vjerojatnosti težiti k beskonačno, a onda ne može ni  $I_n$ . Po Teoremu 3.3.3 to znači da je

$$\mathbb{E}[\log^+ Y] = \mathbb{E}[\log^+(\widehat{L} - 1)] = \frac{1}{m} \mathbb{E}[L \log^+(L - 1)] < \infty$$

pa  $ii) \Rightarrow iii)$ .

Ako je  $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$  onda po Teoremu 3.3.3  $I_n$  konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli koja je g.s. konačna, a zato i  $\hat{\mu}_n$  slabo konvergira prema nekoj vjerojatnosnoj mjeri. To znači da je niz  $(\hat{\mu}_n)_n$  napet pa po prethodnoj lemi  $\sup_n \mathbb{E}[Z_n | Z_n > 0] < \infty$ , čime smo dobili da  $iii) \Rightarrow ii)$ .  $\square$

### 3.4 Kritični procesi: brzina izumiranja

Kod subkritičnih procesa dali smo grubu ocjenu  $P(Z_n > 0) \leq m^n$ . Glavno pitanje o brzini izumiranja je bilo kada je  $m^n$  prikladna brzina izumiranja. U slučaju kritičnih procesa to pitanje nema smisla. Brzina izumiranja dana je sljedećim teoremom.

**Teorem 3.4.1 (Kolmogorovljeva procjena).** *Neka je  $m = 1$  i  $\sigma^2 := \text{Var}(L) = \mathbb{E}[L^2] - 1$ . Tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$ .*

Vidimo da za brzinu izumiranja kritičnih procesa imamo precizniji rezultat nego što smo imali kod brzine rasta kritičnih i brzine izumiranja subkritičnih procesa. Prijašnji rezultati su nam davali odgovarajuće brzine do na neki slučajni faktor. Ovdje znamo koliki je taj faktor. Brzina izumiranja je dana s  $2/(\sigma^2 n)$ . Ako je  $\sigma^2 = \infty$ , onda  $P(Z_n > 0)$  pada brže od  $1/n$ . Pokažimo sada taj rezultat. Prije dokaza navodimo nekoliko rezultata koje ćemo koristiti.

**Lema 3.4.2.** *Neka je  $L$  diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u  $\mathbb{N}_0$ , takva da je  $0 < \mathbb{E}[L] < \infty$  i neka je  $\widehat{L}$  pripadna slučajna varijabla pristrana po veličini. Pretstavimo da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  imamo događaje  $H_1^{(n)}, \dots, H_L^{(n)}$  koji su uvjetno na  $L$  nezavisni, takvi da je vjerojatnost svakog događaja  $p_n > 0$  i  $p_n \rightarrow 0$ . Neka je  $Y_n := \sum_{i=1}^L \mathbf{1}_{H_i^{(n)}}$ . Tada vrijedi:*

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0) = 1;$
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(L = k \mid Y_n > 0) = P(\widehat{L} = k);$
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_i^{(n)} \mid Y_n > 0, L = k) = 1/k$  za  $1 \leq i \leq k$ .

*Dokaz.* Računamo:

$$P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0, L = k) = \frac{P(Y_n = 1 \mid L = k)}{P(Y_n > 0 \mid L = k)} = k \cdot \frac{p_n(1 - p_n)^{k-1}}{1 - (1 - p_n)^k}.$$

Po L'Hospitalovom pravilu dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - x)^{k-1}}{1 - (1 - x)^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - x)^{k-1} - x(k-1)(1 - x)^{k-2}}{k(1 - x)^{k-1}} = \frac{1}{k}.$$

Iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 1 \mid Y_n > 0, L = k)P(L = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(L = k) = 1.$$

Nadalje,

$$P(L = k \mid Y_n > 0) = \frac{P(Y_n > 0 \mid L = k)P(L = k)}{P(Y_n > 0)} = \frac{1 - (1 - p_n)^k}{P(Y_n > 0)} \cdot P(L = k).$$

Imamo

$$P(Y_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n > 0 \mid L = k)P(L = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (1 - p_n)^k)P(L = k) = \mathbb{E}[1 - (1 - p_n)^L].$$

Lagano je vidjeti da je  $d\mathbb{E}[(1 - (1 - x)^L)/dx] = \mathbb{E}[L(1 - x)^{L-1}]$  pa kako je  $L(1 - p_n)^{L-1} \leq L$  po teoremu o dominiranoj konvergenciji je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[L(1 - p_n)^{L-1}] = \mathbb{E}[L]$ . Koristeći L'Hospitalovo pravilo dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - p_n)^k}{\mathbb{E}[1 - (1 - p_n)^L]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(1 - p_n)^{k-1}}{\mathbb{E}[L(1 - p_n)^{L-1}]} = \frac{k}{\mathbb{E}[L]},$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(L = k \mid Y_n > 0) = \frac{k}{\mathbb{E}[L]} \cdot P(L = k) = P(\widehat{L} = k).$$

Na koncu imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_i^{(n)} \mid Y_n > 0, L = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(H_i^{(n)}, Y_n > 0 \mid L = k)}{P(Y_n > 0 \mid L = k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{1 - (1 - p_n)^k} = \frac{1}{k}.$$

□

**Lema 3.4.3.** *Neka je  $A$  slučajna varijabla nezavisna od  $B$  i  $C$ . Neka je funkcija  $x \mapsto P(C \leq x)/P(B \leq x)$  rastuća na skupu gdje je  $P(B \leq x) > 0$ . Ako je  $P(A \geq B) > 0$  i  $P(A \geq C) > 0$ , tada je zakon razdiobe od  $A$  uvjetno na  $A \geq B$  stohastički dominiran zakonom razdiobe od  $A$  uvjetno na  $A \geq C$ . Posebno, tvrdnja vrijedi ako su  $B$  i  $C$  geometrijske slučajne varijable takve da  $B$  ima veći parametar od  $C$ .*

*Dokaz.* Neka je  $F$  funkcija distribucije od  $A$ . Za  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\begin{aligned} P(A > x \mid A \geq B) &= \frac{P(A > x, A \geq B)}{P(A \geq B)} = \frac{\int_{y>x} P(B \leq y) dF(y)}{\int_{y \in \mathbb{R}} P(B \leq y) dF(y)} \\ &= \left( 1 + \frac{\int_{y \leq x} P(B \leq y) dF(y)}{\int_{y>x} P(B \leq y) dF(y)} \right)^{-1} \leq \left( 1 + \frac{\int_{y \leq x} P(C \leq y) \frac{P(B \leq x)}{P(C \leq x)} dF(y)}{\int_{y>x} P(C \leq y) \frac{P(B \leq x)}{P(C \leq x)} dF(y)} \right)^{-1} \\ &= \left( 1 + \frac{\int_{y \leq x} P(C \leq y) dF(y)}{\int_{y>x} P(C \leq y) dF(y)} \right)^{-1} = P(A > x \mid A \geq C). \end{aligned}$$

Neka je sada  $B \sim G(b)$ ,  $C \sim G(c)$  i  $b > c$ . Stavimo  $b_1 = 1 - b$  i  $c_1 = 1 - c$ . Tada je

$$\frac{P(C \leq k)}{P(B \leq k)} = \frac{1 - (1 - c)^k}{1 - (1 - b)^k} = \frac{1 - c_1^k}{1 - b_1^k}.$$

Dovoljno je pokazati da je  $(1 - c_1^{k+1})/(1 - b_1^{k+1}) \geq (1 - c_1^k)/(1 - b_1^k)$ , a to je ekvivalentno tome da funkcija  $x \mapsto (1 - x^{k+1})/(1 - x^k)$  rastuća. To je jasno jer je

$$\frac{1 - x^{k+1}}{1 - x^k} = \frac{1 - x^k + x^k(1 - x)}{1 - x^k} = 1 + \frac{x^k}{1 + x + \dots + x^{k-1}} = 1 + \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{x^i} \right)^{-1}.$$

□

**Teorem 3.4.4 (Skorokhodov teorem reprezentacije).** *Neka je  $(P_n)_n$  niz vjerojatnosnih mjera na metričkom prostoru  $S$ , takav da  $(P_n)_n$  slabo konvergira prema vjerojatnosnoj mjeri  $P$  na  $S$  i  $P$  ima separabilan nosač. Tada postoje slučajne varijable  $X, X_1, X_2, \dots$  definirane na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  koje poprimaju vrijednosti u  $S$ , takve da je  $P_n$  zakon razdiobe od  $X_n$ ,  $P$  je zakon razdiobe od  $X$  i  $X_n \rightarrow X$   $P$ -g.s.*

*Dokaz.* Pogledajte [3, teorem 6.7.]. □

*Napomena 3.4.5.* Pretpostavimo da imamo niz slučajnih varijabli  $(X_n)_n$  takvih da  $X_n \xrightarrow{D} X$ . Kako su zakoni razdiobe od  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  i  $X$  vjerojatnosne mjere na separabilnom metričkom prostoru  $(\mathbb{R}, d)$  uz standardnu euklidsku metriku, uvjeti prethodnog teorema su zadovoljeni. Stoga postoje slučajne varijable  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  na nekom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  takve da  $X_n \stackrel{D}{=} Y_n$ ,  $X \stackrel{D}{=} Y$  i  $Y_n \rightarrow Y$   $P$ -g.s.

Prethodni teorem nam u kombinaciji s Teoremom 3.2.8 daje sljedeći koristan rezultat.

**Propozicija 3.4.6.** *Neka niz nenegativnih slučajnih varijabli  $(X_n)_n$  konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli  $X$ . Tada vrijedi:*

i)  $\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n];$

ii) *Ako je niz  $(X_n)_n$  još uniformno integrabilan, onda  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$ .*

*Dokaz.* Po Skorokhodovom teoremu (Napomena 3.4.5) postoje slučajne varijable  $Y, (Y_n)_n$  takve da  $Y_n \stackrel{D}{=} X_n$ ,  $Y \stackrel{D}{=} X$  i  $Y_n \rightarrow Y$  g.s. Odatle imamo  $|Y_n| \rightarrow |Y|$  g.s. pa po Fatouovoj lemi vrijedi

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|].$$

Kako je  $|Y| \stackrel{D}{=} |X| = X$  i  $|Y_n| \stackrel{D}{=} |X_n| = X_n$ , slijedi da je  $\mathbb{E}[|Y|] = \mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X]$  i  $\mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n]$  pa dobivamo

$$\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Pretpostavimo da je niz  $(X_n)_n$  uniformno integrabilan, tada je i niz  $(Y_n)_n$  uniformno integrabilan. Po Teoremu 3.2.8 vrijedi  $\mathbb{E}[|Y_n|] \rightarrow \mathbb{E}[|Y|]$ , a to znači da i  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$ . □

Sada smo spremni dokazati Kolmogorovljevu procjenu.

**Dokaz Teorema 3.4.1.** Neka je  $Y_n$  broj čvorova u prvoj generaciji koji imaju potomka u  $n$ -toj generaciji. Tada je  $Y_n = \sum_{i=1}^L \mathbf{1}_{H_i^{(n)}}$ , gdje je  $H_i^{(n)}$  događaj da  $i$ -ti čvor iz prve generaciji ima

potomka u  $n$ -toj generaciji. Za  $n \geq 2$  je  $\{Y_n > 0\} = \{Z_n > 0\}$ . Kako  $p_n := P(Z_{n-1} > 0) \rightarrow 0$ , po Lemi 3.4.2 imamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 1 \mid Z_n > 0) &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(L = k \mid Z_n > 0) &= P(\widehat{L} = k), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(H_i^{(n)} \mid Z_n > 0, L = k) &= 1/k \text{ za } 1 \leq i \leq k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Događaj  $\{Z_n > 0\}$ , za  $n \geq 2$ , je jednak događaju da barem jedan čvor iz prve generacije ima potomka u  $n$ -toj generaciji. Svaki takav čvor ima potomka u  $n$ -toj generaciji s vjerojatnosti  $P(Z_{n-1} > 0)$  nezavisno od ostalih. Neka je  $D_n \sim G(P(Z_{n-1} > 0))$ , nezavisna od  $Z_1$ . Tada je  $\{Z_n > 0\} = \{D_n \leq Z_1\}$  pa je uvjetna distribucija od  $Z_1$  uz  $Z_n > 0$  jednaka uvjetnoj distribuciji od  $Z_1$  uz  $D_n \leq Z_1$ . Kako je  $P(Z_{n-1} > 0) > P(Z_n > 0)$ , geometrijska slučajna varijabla  $D_n$  ima veći parametar od  $D_{n+1}$ . Stoga je po Lemi 3.4.3

$$P(Z_1 > k \mid Z_1 \geq D_n) \leq P(Z_1 > k \mid Z_1 \geq D_{n+1}).$$

To znači da i uvjetna distribucija od  $Z_1$  uz  $Z_n > 0$  stohastički raste po  $n$ . Koristeći teorem o monotonij konvergenciji i (3.14) dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_1 \mid Z_n > 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 > k \mid Z_n > 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\widehat{L} > k) = \mathbb{E}[\widehat{L}],$$

a po definiciji je

$$\mathbb{E}[\widehat{L}] = \frac{\mathbb{E}[L^2]}{\mathbb{E}[L]} = \frac{\text{Var } L + \mathbb{E}[L]^2}{\mathbb{E}[L]} = \sigma^2 + 1.$$

Na događaju  $\{Z_n > 0\}$  neka je  $u_n^n$  skroz lijevi čvor u  $n$ -toj generaciji (onaj koji ima najmanju oznaku po leksikografskom uređaju od svih čvorova na  $n$ -toj razini) i neka je put tog čvora do korijena  $u_{n-1}^n, \dots, u_0^n$ , gdje je  $u_i^n$  predak u  $i$ -toj generaciji. Neka je  $X'_i$  broj potomaka čvora  $u_i^n$  u  $n$ -toj generaciji koji nisu potomci od  $u_{i+1}^n$  i neka je  $X_i$  broj djece od  $u_i^n$  koji se nalaze desno od  $u_{i+1}^n$ . Tada je  $Z_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} X'_i$  na događaju  $\{Z_n > 0\}$ . Primijetimo da kako je  $u_n^n$  skroz lijevi čvor u  $n$ -toj generaciji, niti jedno dijete čvora  $u_i^n$  koje se nalazi lijevo od  $u_{i+1}^n$  ne može imati potomka u  $n$ -toj generaciji. Stoga su potomci od  $u_i^n$  u  $n$ -toj generaciji koji nisu potomci od  $u_{i+1}^n$ , svi potomci od djece čvora  $u_i^n$  koja su desno od  $u_{i+1}^n$ . Zato imamo

$$X'_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)} = \sum_{j=1}^{X_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}} Z_{n-i-1} \circ T_{u_i^n j}.$$

Slučajne varijable  $K_j := Z_{n-i-1} \circ T_{u_i^n j}$  su nezavisne jednako distribuirane (neka je  $K$  slučajna varijabla takva da je  $K \stackrel{D}{=} K_j$  za svaki  $j$ ) i nezavisne od  $X_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}$ . Stoga je

$$\mathbb{E}[X'_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}] = \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}] \underbrace{\mathbb{E}[K]}_1 = \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{(Z_n > 0)}]$$

pa je  $\mathbb{E}[X'_i \mid Z_n > 0] = \mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0]$ . Odavde imamo

$$\frac{1}{nP(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{nP(Z_n > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z_n \mid Z_n > 0]}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0]. \quad (3.15)$$

Treba pokazati da desna strana teži prema  $\sigma^2/2$  kada  $n \rightarrow \infty$ . Označimo sa  $\xi_i$  broj prvog potomka od  $u_i^n$  po leksikografskom uređaju koji ima potomka u  $n$ -toj generaciji (znamo da je taj potomak zapravo  $u_{i+1}^n$ ). Tada uvjetovanjem na broj djece čvora  $u_i^n$  dobivamo

$$\begin{aligned} P(X_i = k \mid Z_n > 0) &= \sum_{l \geq k+1} P(X_i = k, L = l \mid Z_n > 0) \\ &= \sum_{l \geq k+1} P(\xi_i = l - k, L = l \mid Z_n > 0) \\ &= \sum_{l \geq k+1} P(\xi_i = l - k \mid Z_n > 0, L = l) P(L = l \mid Z_n > 0) \\ &= \sum_{l \geq k+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{l-k-1} (H_j^{(n-i-1)})^c \cap H_{l-k}^{(n-i-1)} \mid Z_{n-i-1} > 0, L = l\right) P(L = l \mid Z_n > 0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Slično kao u dokazu Leme 3.4.2 računamo

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{l-k-1} (H_j^{(n-i-1)})^c \cap H_{l-k}^{(n-i-1)} \mid Z_{n-i-1} > 0, L = l\right) = (1 - p_{n-i-1})^{l-k-1} \cdot \frac{p_{n-i-1}}{1 - (1 - p_{n-i-1})^l}$$

Puštanjem  $n \rightarrow \infty$ , desna strana ide prema  $1/l$ . Vratimo se u (3.16). Po teoremu o dominiranoj konvergenciji, uz (3.14) slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_i = k \mid Z_n > 0) &= \sum_{l \geq k+1} \frac{1}{l} P(\widehat{L} = l) \\ &= \sum_{l \geq k+1} P\left(\frac{k}{l} \leq U < \frac{k+1}{l}\right) P(\widehat{L} = l) \\ &= P(k \leq U\widehat{L} < k+1) \\ &= P(\lfloor U\widehat{L} \rfloor = k), \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdje je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $[0, 1]$ , nezavisna od  $\widehat{L}$ . Kako su  $U$  i  $\widehat{L}$  nezavisne, vrijedi  $P_{(U, \widehat{L})} = P_U \otimes P_{\widehat{L}}$  pa po Fubinijevom teoremu računamo

$$\mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] = \int_{[0,1] \times \mathbb{R}^+} \lfloor uk \rfloor dP_{(U, \widehat{L})}(u, k) = \int_0^\infty \int_0^1 \lfloor uk \rfloor du dP_{\widehat{L}}(x). \quad (3.18)$$

Izraz  $\lfloor uk \rfloor$  je jednak  $l \in \mathbb{N}_0$  ako je  $u \in \left[ \frac{l}{k}, \frac{l+1}{k} \right)$  za  $l < k$ . Stoga je

$$\int_0^1 \lfloor uk \rfloor du = \int_0^{1/k} 0 du + \int_{1/k}^{2/k} 1 du + \cdots + \int_{(k-1)/k}^1 (k-1) du = \frac{1}{k}(1 + \cdots + k-1) = \frac{k-1}{2}.$$

Uvrstimo li to sada natrag u (3.18) dobivamo  $\mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] = \mathbb{E}[\widehat{L} - 1]/2 = \sigma^2/2$ .

Pretpostavimo da je  $\sigma < \infty$ . Neka je  $Y'_n$  slučajna varijabla čija je distribucija jednaka uvjetnoj distribuciji od  $Z_1$  uz  $Z_n > 0$ . Kako je  $\mathbb{E}[\widehat{L}] = \sigma^2 + 1 < \infty$ , za  $\varepsilon > 0$  postoji  $K \in \mathbb{N}_0$  takav da je  $\sum_{l \geq K} P(\widehat{L} \geq l) < \varepsilon$ . Zato je po teoremu o monotonij konvergenciji (ranije smo pokazali da uvjetna distribucija o  $Z_1$  uz  $Z_n > 0$  stohastički raste sa  $n$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y'_n \mathbf{1}_{Y'_n \geq K}] &= \sum_{l \geq K} P(Y'_n \geq l) = \sum_{l \geq K} P(Z_1 \geq l \mid Z_n > 0) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \geq K} P(Z_1 \geq l \mid Z_n > 0) = \sum_{l \geq K} P(\widehat{L} \geq l) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je niz  $(Y'_n)_n$  uniformno integrabilan. Neka je  $Y_n$  slučajna varijabla čija je distribucija uvjetna distribucija od  $X_i$  uz  $Z_n > 0$ . Broj djece od  $u_i^n$  desno od  $u_{i+1}^n$  je manji od ukupnog broja djece od  $u_i^n$  pa vrijedi

$$P(Y_n \geq k) = P(X_i \geq k \mid Z_n > 0) \leq P(Z_1 \geq k \mid Z_{n-i-1} > 0) = P(Y'_{n-i-1} \geq k).$$

Stoga je

$$\mathbb{E}[Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq K}] = \sum_{l \geq K} P(Y_n \geq l) \leq \sum_{l \geq K} P(Y'_{n-i-1} \geq l) < \varepsilon,$$

što znači da je i niz  $(Y_n)_n$  uniformno integrabilan. Iz (3.17) slijedi da  $Y_n \xrightarrow{D} \lfloor U\widehat{L} \rfloor$ . Po Propoziciji 3.4.6 zato vrijedi  $\mathbb{E}[Y_n] \rightarrow \mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor]$ , to jest  $\mathbb{E}[X_i \mid Z_n > 0] \rightarrow \sigma^2/2$ . Iz (3.15) slijedi  $nP(Z_n > n) \rightarrow 2/\sigma^2$ .

Ako je pak  $\sigma = \infty$ , onda kako  $Y_n \xrightarrow{D} \lfloor U\widehat{L} \rfloor$ , po Propoziciji 3.4.6 je

$$\infty = \mathbb{E}[\lfloor U\widehat{L} \rfloor] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n].$$

Iz (3.15) slijedi  $nP(Z_n > n) \rightarrow 0$ . □

# Bibliografija

- [1] R. Abraham i J. F. Delmas, *An introduction to Galton-Watson trees and their local limits*, (2015), <https://arxiv.org/abs/1506.05571>.
- [2] G. Alsmeyer, *Spezielle Stochastische Prozesse*, University of Münster, <https://www.uni-muenster.de/Stochastik/lehre/WS1011/SpezielleStochastischeProzesse/>, posjećena 14.11.2021.
- [3] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, 2. izd., John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [4] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, 5. izd., Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
- [5] R. Lyons, R. Pemantle i Y. Peres, *Conceptual proofs of  $L \log L$  criteria for mean behavior of branching processes*, The Annals of Probability **23** (1995), br. 3, 1125–1138.
- [6] R. Lyons i Y. Peres, *Probability on trees and networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [7] J. Neveu, *Arbres et processus de Galton-Watson*, Annales de l'IHP Probabilités et statistiques **22** (1986), br. 2, 199–207.
- [8] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2010.

# Sažetak

U ovom radu promatramo granično ponašanje Galton–Watsonovih procesa. Ti procesi opisuju razvoj populacije koja kreće od jedne jedinke. Svaka jedinka se razmnožava nezavisno od ostalih i ima jednaku distribuciju potomaka. Pokazujemo da ovakvi procesi imaju svojevrsnu dualnost: populacija ili izumre ili sve više raste. Ovisno o očekivanom broju potomaka  $m$ , Galton–Watsonove procese dijelimo na subkritične ( $m < 1$ ), kritične ( $m = 1$ ) i superkritične ( $m > 1$ ). Subkritični i kritični procesi izumru g.s., dok superkritični preživljavaju s pozitivnom vjerojatnošću.

Postavlja se pitanje koliko brzo subkritični i kritični procesi izumiru te kolika je brzina rasta superkritičnih procesa u slučaju preživljavanja. Pokazujemo da je kod subkritičnih i superkritičnih procesa glavno pitanje kada je  $m^n$  prava brzina izumiranja, odnosno rasta. U oba slučaja ispada da je to ekvivalentno ” $L \log L$  uvjetu” koji glasi  $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$ , gdje je  $L$  slučajna varijabla koja predstavlja broj djece neke jedinke u sljedećoj generaciji. Ukoliko taj uvjet nije zadovoljen, subkritični procesi izumiru još brže od  $m^n$ , a kritični procesi rastu sporije od  $m^n$ . Štoviše, u tom slučaju rast superkritičnih procesa nije puno sporiji. Kod kritičnih procesa imamo malo drugačiju situaciju. Ovdje je brzina izumiranja dana s  $1/n$  ako je  $\text{Var}(L) < \infty$ , a brzina je još veća ako je  $\text{Var}(L) = \infty$ .

# Summary

In this thesis we have studied the limit behavior of Galton–Watson processes. Such processes describe the evolution of the population which starts with one individual. All individuals reproduce independently from each other and have the same offspring distribution. We show that these processes have a certain dichotomy: they either become extinct or population size explodes. Depending on mean of the offspring distribution  $m$ , Galton–Watson process is called subcritical if  $m < 1$ , critical if  $m = 1$ , and supercritical if  $m > 1$ . Subcritical and critical processes become extinct a.e., while supercritical processes survive with positive probability.

Finer question is how fast subcritical and critical processes become extinct and what is the growth rate of supercritical processes if they survive. We show that the main question concerning subcritical and supercritical processes is when does  $m^n$  give the right decay rate and the right growth rate respectively. In both cases, it turns out that this is equivalent to “ $L \log L$ ” criterion which states  $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$ , where  $L$  is a random variable denoting the number of children of some individual. If this condition isn’t true, subcritical processes die out faster than  $m^n$ , while the growth rate of supercritical processes is less than  $m^n$ . Moreover, in that instance supercritical processes grow just slightly slower than  $m^n$ . The behavior of critical processes is somewhat different. They die out with the rate of  $1/n$  if  $\text{Var}(L) < \infty$ , whereas the pace of extinction is even greater if  $\text{Var}(L) = \infty$ .

# Životopis

Rođen sam 19. lipnja 1997. u Zagrebu, gdje sam završio osnovnu školu Pavleka Miškine i XV. gimnaziju. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam na brojnim državnim i drugim matematičkim natjecanjima, gdje sam ostvarivao dobre rezultate.

Nakon završetka srednje škole 2016. godine, upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2019. godine upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Dobio sam nagrade Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh na preddiplomskom i diplomskom studiju. Za vrijeme fakulteta sam ostao uključen u srednjoškolska natjecanja kao član udruge *Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"*, gdje sam bio jedan od mentora u pripremi učenika za natjecanja iz matematike. Tijekom studija sam osvojio dvije brončane medalje na International Mathematical Competition-u u Blagoevgradu. Od 2018. godine primam Stipendiju Grada Zagreba za izvrsnost.