Neke strategije rješavanja matematičkih problema

Gunjina, Mia

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mia Gunjina

NEKE STRATEGIJE RJEŠAVANJA MATEMATIČKIH PROBLEMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, studeni, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici koja mi je predložila ovu temu i svojim idejama upotpunila ovaj rad. Hvala na ugodnoj suradnji i potpori tijekom pisanja diplomskog rada.

Veliko hvala mojim roditeljima koji su mi omogućili školovanje te bili velika podrška tijekom cijelog studija.

Zahvaljujem svojim sestrama na motivaciji i svakodnevnoj podršci svo vrijeme moga studiranja.

Sadržaj

Uvod

Matematički problem je vrsta matematičkog zadatka kojemu nije unaprijed poznat način rješavanja, odnosno, kojeg ne možemo riješiti samo primjenom određenih algoritama, to jest, unaprijed propisanih koraka. Zato je za rješavanje matematičkog problema potrebno više umnog napora i razmišljanja, te su takvi zadatci teži za rješavanje.

Za učenike je to jedan od najzahtjevnijih procesa, ali upravo zato su i koristi rješavanja takvih zadataka u razumijevanju matematike iznimno velike. Jedini način da postanemo bolji u rješavanju matematičkih problema je da ih rješavamo. S obzirom na kompleksnost zadaće rješavanja matematičkog problema, dobro je ovladati strategijama, odnosno tehnikama za njihovo rješavanje. U prvom dijelu ovog rada opisat ćemo vrste matematičkih zadataka, te nastavnih sustava koji pripremaju učenike za rješavanje matematičkog problema. Navest ćemo i korake rješavanja matematičkog problema prema poznatom matematičaru i metodičaru Georgeu Pólyi. Nadalje, opisat ćemo i dvije strategije za rješavanje matematičkih problema: prva je Dirichletov princip, a druga bojanje ili popločavanje. Osim njih postoje i razne druge strategije, na primjer, matematička indukcija, metoda invarijanti, simetrija, generalizacije, nejednakosti i tako dalje. Ove dvije strategije odabrali smo zbog raznovrsnosti zadataka i mogućnosti primjene već u osnovnoj školi, i to u obliku koji će zainteresirati učenike za njihovo rješavanje. Osim toga, ove dvije metode se često pojavljuju na natjecanjima u osnovnoj i srednjoj školi.

Poglavlje 1

Rješavanje problema

1.1 Matematički zadatak

Veliki dio nastave matematike čini rješavanje zadataka. Kroz njihov primjeren odabir i rješavanje, učenici usvajaju nova matematička znanja i tehnike te razvijaju svoje matematičke sposobnosti.

Prema Kurniku ([6], str. 1. i 2.), *zadatak je složeni matematički objekt i njegov sastav nije uvijek jednostavno analizirati*. No, on izdvaja pet njegovih sastavnica ([6]):

- **Uvjeti.** U uvjete ubrajamo sve glavne dijelove nekog zadatka. To su poznate ili zadane veličine, nepoznate ili tražene veličine te objekti i uvjeti koji opisuju veze među tim veličinama. Vrlo je bitno poznavati uvjete da bismo mogli razumjeti zadatak.

- **Cilj.** Cilj zadatka nije teško odrediti. To može biti određivanje nepoznatih veličina, svojstava i veza među njima ili izvođenje zaključaka i opravdavanje postavljenih tvrdnji.

- **Teorijska osnova.** Kako bismo znali odrediti postupak rješavanja nekog zadatka potrebno je imati matematička znanja i poznavati matematičke vještine koje su usko povezane s uvjetima i ciljem tog zadatka.

- **Rješavanje.** Rješavanje zadatka je provođenje postupka koji će nas dovesti do cilja zadatka.

- **Osvrt.** Osvrt uključuje provjeravanje ispravnosti dobivenog rješenja, ispitivanje provedenog postupka rješenja, razmišljanje o drugim načinima rješavanja zadatka, i sl.

Prema složenosti i težini, zadatci se dijele u sljedeće dvije velike skupine: standardni zadatci i nestandardni zadatci ([6], str. 3.).

Pod standardnim zadatcima podrazumijevamo sve one zadatke kod kojih su sve gore navedene sastavnice poznate. Dakle, učeniku je način njihova rješavanja poznat i rješavanje ide glatko. Takvi zadatci služe usvajanju i razmijevanju matematičkih sadržaja, no ne pridonose razvoju kreativnosti učenika ([6]).

Kod nestandardnih zadataka, postoji barem jedna sastavnica koja nije poznata. Ukoliko nisu poznate barem dvije sastavnice, onda se ti zadatci nazivaju problemskim zadatcima ([6]). Ovi zadatci razvijaju učenikovo logičko mišljenje, stvaralaštvo i samostalnost.

Problemski zadatci sastavni su dio natjecanja iz matematike. Karakteristika velikog broja problemskih zadataka jest rješavanje na nekoliko načina. Rješavanje zadatka na nekoliko načina zahtijeva više učenikovog znanja, pomaže mu stvoriti širu sliku te povećava njegovu motivaciju ([6]).

Navedimo jedan vrlo jednostavan standardni zadatak i nabrojimo sve njegove sastavnice.

Riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 24 \\ x + 2 &= y \end{cases} \tag{1.1}$$

- **Uvjeti.** Zadane su dvije linearne jednadžbe koje opisuju veze između veličina x i y. Dakle, $2x + 2y = 24$ i $y = x + 2$. Nepoznate veličine su x i y.

- **Cilj.** Cilj zadatka je odrediti nepoznate veličine x i y.

- **Teorijska osnova.** Za rješavanje zadatka, trebamo poznavati metode rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. To su metoda supstitucije, metoda suprotnih koeficijenata ili metoda komparacije.

- **Rješavanje.** Odaberemo metodu kojom ćemo rješavati sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Neka je to metoda supstitucije. Dakle, uvrštavanjem druge jednadžbe $y = x + 2$ u prvu jednadžbu dobivamo

  $$2x + 2y = 2x + 2(x + 2) = 4x + 4 = 24$$

  iz čega slijedi $x = 5$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je $y = x + 2 = 7$. Time smo dobili rješenje sustava (1.1), $x = 5$ i $y = 7$.

- **Osvrt.** Provjerimo ispravnost rješenja uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u početni sustav:

  $$2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24 \qquad \text{i} \qquad 5 + 2 = 7.$$

  Odavde zaključujemo da smo točno riješili zadatak.

Pretvorimo sada gornji zadatak u nestandardni oblik.

Markov vrt je pravokutnog oblika. Duljina jedne stranice tog pravokutnika je za 2 *m veća od duljine druge stranice. Za ograđivanje vrta Marku je bilo potrebno* 24 *m ograde. Kolika je površina Markovog vrta?*

U ovome zadatku postupak rješavanja ne znamo unaprijed. Ovaj nestandardni zadatak svest ćemo na rješavanje dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Duljine stranica Markovog vrta bit će veličine x i y, a površinu ćemo dobiti kao njihov umnožak, tj. $xy = 5 \cdot 7 = 35$. Time smo dobili da površina Markovog vrta iznosi 35 m^2.

1.2 Problemska nastava

Za razliku od tradicionalnog, suvremeni pristup nastavi matematike u poučavanju naglasak stavlja na usmjeravanje učenika razvoju logičkog zaključivanja i mišljenja, samostalnom rješavanju matematičkih problema i razvoju kreativnosti. Nastavni sustav koji osposobljava učenike za rješavanje problema je problemska nastava.

U ovom obliku nastave učenik je u središtu nastavnog procesa. Nastavnikova je uloga nešto manja. On postavljanjem problemske situacije primjerene učenikovom uzrastu i znanju ima zadatak probuditi interes učenika za rješavanje problema. Uz nastavnika, učenikova je uloga da spozna i iskoristi svoje misaone sposobnosti i želju za njihovim razvijanjem ([7]). Nakon što učenik osvijesti da vlastitim trudom i sposobnostima može pronaći i otkriti rješenje problema, to će u učeniku probuditi osjećaje zadovoljstva i ispunjenosti ([12]). Ovi osjećaji motivirat će učenika za daljnje istraživanje i rješavanje različitih problema. Nastavnik pravilnim odabirom pitanja usmjerava učenike u njihovom radu, ali učenici samostalno rješavaju postavljeni problem. Ovaj dio najteži je dio cijelog procesa. Učenici u skladu sa svojim predznanjima i mogućnostima stvaraju strategije za rješavanje problema.

Upravo zbog nepoznavanja velikog broja strategija rješavanja određenih problema, čak i najbolji učenici ne postižu dobre rezultate pri rješavanju složenijih matematičkih problema na matematičkim natjecanjima ([6]). Zato je vrlo bitno upoznati učenike s različitim strategijama rješavanja problema kako bi zadatke klasificirali u određene kategorije s obzirom na to kojom će ih metodom riješiti ([6]). Što više metoda poznaju, to je veća vjerojatnost da će znati riješiti problem. Vrlo često se već iz pročitanog teksta zadatka može zaključiti koju strategiju će biti potrebno primijeniti. To uvelike olakšava i ubrzava proces rješavanja problema.

Nabrojat ćemo neke metode rješavanja problema:

- Dirichletov princip
- dokazi bojanjem

- princip matematičke indukcije
- metoda supstitucije
- metoda razlikovanja slučajeva
- konstruktivne metode
- metoda invarijanti

Nastavnici se, unatoč njezinim pozitivnim učincima, zbog zahtjevnosti i težine provedbe, rjeđe odlučuju za problemsku nastavu.

Prema Kurniku ([7]), u metodici nastave matematike postoji shema za provedbu nastavnoga sata u sustavu problemske nastave:

1. Stvaranje problemske sitacije
2. Postavljanje problema koji niče iz dane problemske situacije
3. Postavljanje uvjeta
4. Rješavanje postavljenog problema
5. Razmatranje dobivenog rješenja i iskazivanje novog znanja
6. Proučavanje dobivenog rješenja i traženje drugih načina rješavanja
7. Proučavanje mogućih proširenja i poopćenja postavljenog problema
8. Zaključci izvršenog rada

Ova shema može služiti nastavnicima kao okvir za provođenje ovog oblika nastave. Budući da svaki problem zahtijeva drukčiji pristup, niti ovaj proces neće uvijek biti isti ([7]).

1.3 Pólyini koraci

Najčešća zadaća učenika u nastavi matematike jest riješiti matematički zadatak. Učenici se pri rješavanju susreću s nizom poteškoća. U svojoj knjizi *Kako ću riješiti matematički zadatak?*, američki matematičar i metodičar George Pólya navodi četiri faze rješavanja matematičkog zadatka. Sve četiri faze imaju svoju ulogu pri rješavanju problema. U provođenju tih koraka moramo mijenjati gledište s kojeg promatramo zadatak ([12]). Prilikom mijenjanja pogleda na zadatak, dolazimo do novih informacija koje upotpunjuju našu sliku o zadatku.

Prema Pólyi, faze rješavanja matematičkog zadatka su ([12]):

1. Razumijevanje zadatka
2. Stvaranje plana
3. Izvršavanje plana
4. Osvrt

Opisat ćemo svaku od ovih faza.

Pod razumijevanjem zadatka jasno je da se od učenika očekuje da prije svega razumije zadatak koji treba riješiti. Dakle, učenik treba shvatiti što tekst zadatka govori. On treba razdvojiti zadatak na dijelove, raspoznati što je u zadatku zadano, što je u zadatku nepoznato (što se traži) te koji su uvjeti u zadatku postavljeni. Nakon što je sam sebi odgovorio na ta pitanja, učenik crta sliku ukoliko je to potrebno, označava na njoj zadane podatke, uvodi oznake, ispituje je li moguće ispuniti uvjet zadatka ([12]).

U drugoj fazi rješavanja zadatka učenik stvara svoj plan. Ovaj dio zahtijeva mnogo pokušaja i vremena dok se ne razvije ideja za rješavanje zadatka. Učenik mora koristiti svoja prethodna znanja i vještine u rješavanju novog problema. Poželjno je da se prisjeti je li se sa sličnim zadatkom susreo ranije, na koji ga je način rješavao, može li taj način iskoristiti u ovoj situaciji. Dakle, ovaj korak zasniva se na učenikovu znanju i iskustvu. Nastavnik pomaže učeniku postavljanjem primjerenih pitanja koja ga vode prema cilju. Ukoliko mu to pomaže, učenik može smisliti ili riješiti neki srodan zadatak koji otprije poznaje. Poznate metode koje u ovom koraku pokazuju korisnima su analogija (pokušaj riješiti sličan zadatak), generalizacija (pokušaj riješiti općenitiji zadatak) i specijalizacija (pokušaj riješiti poseban slučaj). Učenik treba analizirati sve informacije iz zadatka, pokušati zamijeniti zadane informacije jednostavnijima kako bi lakše došao do određivanja nepoznatog dijela zadatka ([12]).

Treća faza rješavanja zadatka jest provođenje plana. Ovaj korak puno je lakši od prethodnoga. Ukoliko je učenik samostalno izveo plan i svjestan je pojedinosti koje taj plan zahtijeva, njegovo provođenje neće biti teško. Primjenom naučenoga, tj. tehnika i vještina koje je učenik savladao ranije, učenik će provesti svoj plan u djelo. Ovdje je bitno da učenik zna raspoznati je li pojedini korak ispravan. Svaki provedeni korak u izvršavanju plana učeniku treba biti sasvim jasan. Dakle, bitno je da učenik kontrolira svaki svoj korak ([12]).

Završna faza rješavanja problema jest osvrt, tj. provjeravanje i preispitivanje rješenja. Učenik provjerava svaki korak rješavanja zadatka, uočava svaki detalj i pronalazi pogreške. Ovaj korak vrlo je bitan, jer učvršćuje učenikovo znanje i razumijevanje problema. Učenik se u ovom koraku pita može li rješenje zadatka primijeniti na nekom drugom zadatku ili na konkretnom primjeru ([12]).

1.4 Heuristika

U drugoj fazi rješavanja zadatka navedenog u prethodnom poglavlju, učenik osmišlja plan rješavanja zadatka, odnosno uz pomoć različitih heuristika pokušava pronaći metodu kojom će moći riješiti postavljeni problem. Heuristika je postupak koji vodi prema rješavanju zadatka. Sam naziv potječe od uzvika "Heureka!" (našao sam), koji je uzviknuo grčki matematičar Arhimed kada je otkrio zakon o uzgonu tijela u tekućini ([4]). Dakle, heuristika ne osigurava da će učenika dovesti do ispravnog načina rješavanja zadatka, ali vodi ga prema njegovom otkrivanju. Neke od heuristika smo već i spomenuli, no u ovom ćemo ih dijelu pobliže opisati.

Nabrojimo i opišimo neke poznate heuristike ([12]):

1. **Crtanje slike.** Bio zadatak geometrijski ili ne, kad god je to u zadatku moguće, poželjno je nacrtati sliku. Geometrijska slika, graf ili dijagram omogućuju nam da brže i lakše uočimo veze između zadanih podataka i dođemo do rješenja problema.

2. **Traženje uzorka.** U zadatku ispitujemo postoji li uzorak koji se pojavljuje. Ukoliko se neki uzorak često pojavljuje, vrlo je vjerojatno da će se opet ponoviti. Zahtjevan dio ove heuristike može biti pronalaženje uzorka. Jednom kad je uzorak nađen, rješenje nije teško pronaći.

3. **Rješavanje unatrag.** Prvo trebamo uočiti koji je cilj zadatka, odnosno što trebamo dobiti. Krećemo od konačnog cilja zadatka prema unatrag dok ne dođemo do uvjeta koji su nam zadani. Pri vraćanju unatrag, trebamo u svakom koraku znati što bi tom koraku trebalo prethoditi. Nakon rješavanja unatrag, provjeravamo rješenje problema tako da krenemo od početka prema kraju.

4. **Rastav na slučajeve.** Rješavanje složenog problema olakšat će nam raščlanjivanje tog problema na manje, jednostavnije probleme.

5. **Generalizacija.** U nekim zadatcima pomoći će nam rješavanje općenitijeg problema. No, nije uvijek jednostavno otkriti taj drugi, općenitiji problem. Taj dio je glavni dio ove heuristike. Rješenje općenitijeg problema primijenit ćemo na specijalni slučaj, tj. početni problem.

6. **Rješavanje ekvivalentnog problema.** Ponekad će nam rješavanje drugog, ekvivalentnog problema pomoći u rješavanju početnog problema. Vrlo je bitno osmisliti problem koji je ekvivalentan početnom.

7. **Analiza i sinteza.** Prvo je potrebno zadatak shvatiti kao cjelinu. Nakon toga, promatraju se glavne sastavnice zadatka, a zatim i detalji zadatka. Nakon rastavljanja zadatka na manje dijelove, proučavamo zasebno dijelove zadatka te ih spajamo u sličan

zadatak koji znamo riješiti. Rješavanje tog zadatka pomoći će nam u rješavanju početnog problema.

8. **Specijalizacija.** U nekim je zadatcima jednostavnije promatrati lakši, specijalniji zadatak od početnog zadatka. Rješavanje specijalnog zadatka olakšava nam rješavanje početnog, općenitijeg i težeg zadatka.

9. **Metoda pokušaja i pogreške.** Ovo je metoda kojom se često koristimo u rješavanju matematičkih problema. Pretpostavljamo smisleno rješenje problema te provjeravamo zadovoljava li to rješenje uvjete zadatka. Proces ponavljamo sve dok ne dobijemo ispravno rješenje.

1.5 Heuristička nastava

U školi je uz problemsku, prisutna još i heuristička nastava. To je blaži oblik problemske nastave, jer u njoj učenik ima nešto manju ulogu. Temeljne zadaće nastavnika su da navodi učenike na samostalno otkrivanje matematičkih tvrdnji, potiče kreativnost učenika, usmjerava učenike rješavanju problema, vodi kvalitetan razgovor s učenicima ([4]).

Heuristička nastava je iznikla iz potrebe da se uvođenjem samostalnog rada učenika prevlada predavačka nastava i poboljša nastavni proces. Njezin početak nalazimo u prvom desetljeću 20. stoljeća. Ona se tijekom vremena razvijala i usavršavala ([4]). Prema Kurniku ([4]), osnovne smjernice za provedbu heurističke nastave su:

- Zadržati prividnost igre. Uvažavati slobodu učenika. Podržavati privid njegovoga vlastitog otkrivanja matematičke istine. Izbjegavati zamorne vježbe pamćenja u početnom obrazovanju učenika, jer to potiskuje njegove urođene osobine. Poučavati oslanjajući se na interes prema matematičkom sadržaju koji se proučava.

- Ne izlagati određeni dio matematike u potpuno gotovom obliku. Takvim se postupanjem dolazi u raskorak s osnovnim načelima nastave. Razvijati umni rad, a ne zahtijevati učenje napamet. Pridržavati se načela primjerenih teškoća.

- Razvijanje stvaralačkih sposobnosti učenika glavni je zadatak nastave matematike.

- Heuristička metoda je takva nastavna metoda u kojoj nastavnik ne priopćuje učenicima gotove činjenice i istine, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih tvrdnji i pravila.

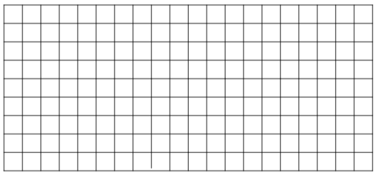
- Heuristička metoda sastoji se u tome da nastavnik pred razred postavlja problem, a onda pomoću odgovarajućih prikladnih pitanja vodi učenike do rješenja.

1.6 Provođenje Pólyinih koraka

Opišimo Pólyine korake na primjeru jednog zadatka kojeg ćemo riješiti u trećem poglavlju.

Od devet sukladnih pravokutnika čije su dužine i širine prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9*. Kojih sve dimenzija mogu biti početni pravokutnici?*

Razumijevanje zadatka. Učenik si postavlja pitanja: Što je zadano? Kolika je površina zadanog pravokutnika? Kolika je površina manjih pravokutnika? Učenik crta sliku.



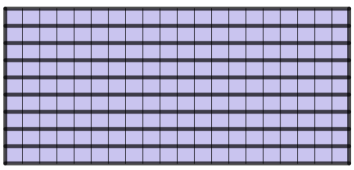
Slika 1.1: Učenik crta pravokutnik 20×9

Učenik zaključuje da može izračunati površinu velikog pravokutnika i da ona iznosi $20 \cdot 9 = 180$, a površina svakog manjeg pravokutnika je $180 : 9 = 20$. Zaključuje da umnožak dimenzija manjih pravokutnika mora biti jednak 20.

1. **Stvaranje plana.** Učenik rastavlja problem na slučajeve, traži prirodne brojeve koji u umnošku daju 20. Dolazi do brojeva 1 i 20, 2 i 10, 4 i 5. Dakle, razmatra sljedeće mogućnosti za dimenzije manjih pravokutnika: 1×20, 2×10 i 4×5.

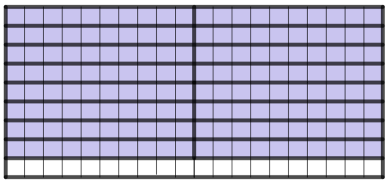
2. **Izvršavanje plana.** Učenik promatra svaki od slučajeva iz prethodnog koraka, provodi konstrukciju te dokazuje svaki od slučajeva.

   1. slučaj: Popločavanje s 9 pravokutnika dimenzija 1×20. Učenik provodi konstrukciju za popločavanje pravokutnika 20×9 pravokutnicima 1×20.



Slika 1.2: Konstrukcija za popločavanje pravokutnicima 1×20

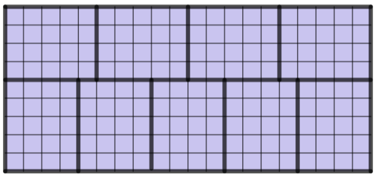
2. slučaj: Popločavanje s 9 pravokutnika dimenzija 2×10. Učenik provodi konstrukciju za popločavanje pravokutnika 20×9 pravokutnicima dimenzija 2×10.



Slika 1.3: Konstrukcija za popločavanje pravokutnicima 2×10

Učenik zaključuje da ne može pokriti pravokutnik 20×9 pravokutnicima 2×10 jer će ostati pravokutnik 20×1 kojeg ne možemo pokriti pravokutnikom 2×10.

3. slučaj: Popločavanje s 9 pravokutnika dimenzija 4×5. Učenik provodi konstrukciju za popločavanje pravokutnika 20×9 pravokutnicima 4×5.



Slika 1.4: Konstrukcija za popločavanje pravokutnicima 4×5

3. **Osvrt.** Učenik prolazi kroz glavne korake dokaza: promatra konstrukcije popločavanja za svaki od slučajeva. Provjerava ispravnost njihovog provođenja. Pita se postoje li još neke dimenzije pravokutnika koje nije uočio u drugome koraku. Razmišlja kako bi primijenio rješenje ovog zadatka na sličan zadatak, npr. kako bi s 8 sukladnih pravokutnika sastavio pravokutnu ploču 30×8 .

Poglavlje 2

Dirichletov princip

2.1 Iskaz teorema

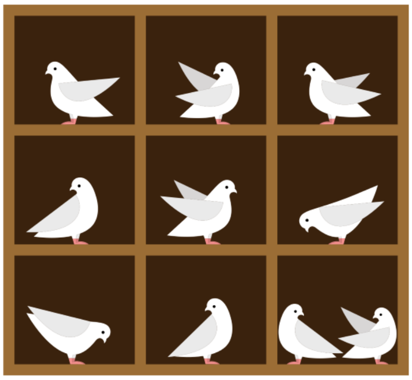
Dirichletov princip jedan je jednostavan, ali efikasan kombinatorni princip koji nam pomaže u rješavanju mnogih matematičkih zadataka ([10]). Matematičar koji ga je među prvima iskazao i koristio jest njemački matematičar Peter Gustav Lejeune Dirichlet, po kojemu je princip i dobio ime. Ovaj princip, u suštini govori da ukoliko se veći broj golubova želi smjestiti u manji broj golubinjaka, onda će se barem u jednom golubinjaku smjestiti barem dva goluba ([10]). Odatle i potječe još jedan od naziva ovog principa, princip golubinjaka. Koriste se i drugi nazivi, npr. princip kutija, princip zečeva i kaveza, itd. No, ovaj princip nije prvi otkrio Dirichlet. Čak dva stoljeća prije, u jednoj svojoj knjizi, francuski isusovac Jean Leurechon kratko spominje iskaz ovog principa, ne u istom obliku. On piše kako je nužno da dvije osobe imaju jednak broj dlaka na kosi ili zlatnika jer sigurno na svijetu postoji više ljudi nego što je broj dlaka na kosi najdlakavijeg ili broj zlatnika najbogatijeg čovjeka na svijetu ([13]). Dakle, Dirichletov princip nije neko veliko matematičko otkriće, već jednostavna i korisna tvrdnja do koje lako dolazimo logičkim zaključivanjem.

Nekoliko je iskaza Dirichletovog principa. Najjednostavniji iskaz je sljedeći, a daje nam slabu formu Dirichletova principa:

Teorem 2.1.1. *Ako $n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje je vrlo jednostavan. Pretpostavimo da se u svakoj kutiji nalazi najviše jedan predmet. Budući da imamo n kutija, onda je i predmeta najviše n, a njih je $n + 1$. Time smo došli do kontradikcije. $\square$

Dirichletov princip možemo zapisati i koristeći pojam konačnog skupa. *Neka su A i B konačni skupovi. Ako je broj elemenata skupa A veći od broja elemenata skupa B, onda* *ne postoji injekcija iz A u B.* Dakle, u kontekstu predmeta i kutija to znači da ako je broj predmeta veći od broja kutija, onda ne postoji injekcija između broja predmeta i broja kutija jer će očigledno različiti predmeti ići u istu kutiju.



Slika 2.1: Vizualna reprezentacija Dirichletovog principa s 10 golubova i 9 pretinaca (Izvor slike: stranica The Pigeonhole principle)

Općenitija verzija, Dirichletov princip se može iskazati ovako:

Teorem 2.1.2. *Ako $nk+1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $k+1$ predmeta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da se u svakoj kutiji nalazi najviše k predmeta. S obzirom na to da je n kutija, predmeta je najviše nk, a njih je $nk+1$, što je kontradikcija. □

Ovaj teorem možemo zapisati i koristeći funkciju najveće cijelo. Taj iskaz daje nam strogi oblik Dirichletovog principa.

Teorem 2.1.3. *Ako $m = nk + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.*

Dokaz. Pretpostavimo da se u svakoj kutiji nalazi najviše $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ predmeta. Budući da imamo n kutija, onda bi predmeta bilo najviše $n \cdot \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m - 1 < m$, a njih je točno m. Time smo došli do kontradikcije. □

Najveći problem pri rješavanju zadataka ovim principom predstavlja prepoznavanje ”kutija” i ”predmeta”. U ovom ćemo poglavlju riješiti nekoliko zadataka u kojima se primjenjuje upravo Dirichletov princip. Istražit ćemo i riješiti neke od zadataka koji su se pojavili na matematičkim natjecanjima prethodnih godina.

2.2 Zadatci iz stvarnog života

Započet ćemo s nekoliko vrlo jednostavnih primjera u kojima je primjena Dirichletovog principa očita.

Zadatak 2.2.1. *Među svake tri osobe, postoje dvije osobe istoga spola.*

Rješenje. Dokaz ove tvrdnje skoro pa i nije potreban. Odmah možemo vidjeti da trebamo povezati osobe i spol. Osobe predstavljaju predmete, a spol kutije. Budući da imamo dva spola (kutije) i tri osobe (predmeta), primjenom Dirichletovog principa zaključujemo da su barem dvije osobe istoga spola. □

Zadatak 2.2.2. *Nitko nema više od* 300000 *dlaka na glavi. Glavni grad Sikinije ima* 300001 *stanovnika. Možete li sa sigurnošću tvrditi da postoje dvije osobe s istim brojem dlaka na glavi?*

Rješenje. Svaka osoba može imati $0, 1, 2, \dots, 300000$ dlaka na glavi. Ljudi će nam predstavljati predmete, a mogućnosti kutije. Dakle, imamo 300001 mogućnosti (kutija) za svaku osobu (predmet). Budući da imamo 300001 ljudi (predmeta), a 300001 mogućnost (kutiju), ne možemo sa sigurnošću tvrditi da postoje dvije osobe s istim brojem dlaka na glavi. □

Zadatak 2.2.3. *Koliko osoba nam je potrebno da bismo sa sigurnošću mogli reći da 2 osobe imaju rođendan isti dan?*

Rješenje. U ovom primjeru treba povezati osobe i dane pri čemu osobe predstavljaju predmete, a dani kutije. S obzirom na to da je 365 dana u godini (računajući da nije prijestupna godina), prema Dirichletovom principu lako možemo zaključiti da nam je potrebno 366 osoba da bismo sa sigurnošću mogli tvrditi da dvije osobe imaju rođendan isti dan. □

Zadatak 2.2.4. *U prostoriji se sastaje n osoba. Svi se međusobno rukuju. Dokažite da uvijek postoje dvije osobe koje su se tijekom ceremonije rukovale s istim brojem ljudi.*

Rješenje. Razlikujemo dva slučaja:

Prvi slučaj: Postoji osoba koja se nije rukovala ni s kim. Dakle, svaka osoba u prostoriji može se rukovati s $0, 1, \dots, n-2$ osoba (osoba se ne može rukovati sa samom sobom). S obzirom na to da imamo n osoba i $n-1$ mogućih broja rukovanja, slijedi da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

Drugi slučaj: Postoji osoba koja se rukovala sa svima, tj. s $n-1$ osoba. Dakle, svaka osoba u prostoriji može se rukovati s $1, 2, \dots, n-1$ osoba. Dakle, imamo n osoba i $n-1$ mogućih broja rukovanja. Na isti način zaključujemo da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi. □

Sljedeći zadatak pokazuje jednu zanimljivu primjenu Dirichletovog principa u situaciji iz stvarnog života. Primjenu Dirichletovog principa ne možemo lako uočiti kao u prethodnim primjerima, ali nakon zapisivanja zadanih podataka u malo drukčijem obliku lakše ćemo ju uočiti.

Zadatak 2.2.5. *Šahist ima* 77 *dana da se pripremi za turnir. On želi igrati barem jednu igru dnevno, no ne više od* 132 *igre. Dokažite da postoji niz uzastopnih dana u kojima će odigrati ukupno* 21 *igru.*

Rješenje. Označimo s a_i broj igara koje šahist odigra do i-tog dana, uključujući i taj dan. Budući da on igra barem jednu igru dnevno, ali ne ukupno više od 132 igre, to možemo zapisati ovako:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \leq 132.$$

Iz toga slijedi da je

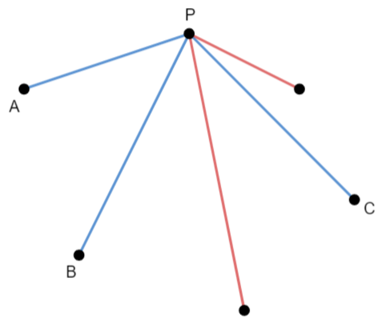
$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \ldots < a_{77} + 21 \leq 153.$$

Sada imamo dva niza $a_1, a_2, \ldots, a_{77}$ i $a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$ koji zajedno imaju 154 člana. Dakle, imamo 154 broja pri čemu je najveći od njih $a_{77} + 21 \leq 153$ pa zaključujemo da među njima postoje barem dva člana koja su jednaka. Nizovi su strogo rastući pa ta dva člana ne mogu biti iz istoga niza. Zaključujemo da su jednaki članovi iz različitih nizova, odnosno postoje i i j takvi da je $a_i = a_j + 21$, $i > j$. Iz toga dobivamo da vrijedi $a_i - a_j = 21$. Dakle, postoji niz dana $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_i$ u kojima je šahist odigrao točno 21 igru. □

U zadatku koji slijedi primjena Dirichletovog principa nije baš očita. Zato ćemo si pomoći crtanjem slike. Iz slikovnog prikaza ćemo lakše uočiti što bismo u zadatku možda mogli napraviti.

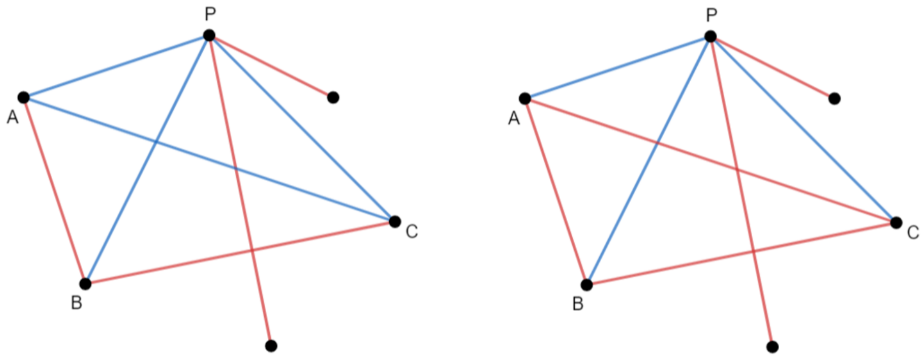
Zadatak 2.2.6. *Među šest osoba, uvijek postoje tri koje se međusobno poznaju i tri koje su potpuni stranci.*

Rješenje. Nacrtat ćemo šest točaka u ravnini (od kojih nikoje tri nisu kolinearne) koje će predstavljati šest osoba. Spajanjem tih točaka dobit ćemo dužine koje ćemo obojati plavom bojom ukoliko se dvije osobe međusobno poznaju, odnosno crvenom bojom ukoliko se te dvije osobe ne poznaju. Odabrat ćemo jednu od tih šest točaka, i označit je s P. Njezinim spajanjem s ostalih pet točaka, dobit ćemo pet dužina. S obzirom na to da imamo dvije boje i pet dužina, tj. dvije kutije i pet predmeta, prema Dirichletovom principu je $n = 2$ i $nk + 1 = 5$. Iz toga slijedi da je $k = 2$. Zaključujemo da će barem $k + 1 = 3$ dužine biti obojane istom bojom, plavom ili crvenom. Bez smanjenja općenitosti, neka su te tri dužine obojane plavom bojom. Krajnje točke tih dužina označit ćemo s A, B, C.



Slika 2.2: Slikovni prikaz šest osoba kao šest točaka u ravnini

Promotrimo sad dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Ukoliko je barem jedna od tih dužina plave boje, dobili smo jednobojan trokut kao lijevo na slici 2.3 (trokut PAC). Ukoliko niti jedna od tih dužina nije plave boje, to znači da su sve tri crvene boje, odnosno opet imamo jednobojan trokut kao desno na slici 2.3 (trokut ABC). Time smo dobili ili tri osobe koje se međusobno poznaju (plavi trokut) ili tri osobe koje su potpuni stranci (crveni trokut).



Slika 2.3: Slikovni prikaz međusobnih poznanstava pomoću dužina u ravnini

□

2.3 Zadatci iz teorije brojeva

U ovom ćemo dijelu pokazati na koji način nam Dirichletov princip može poslužiti u mnogim zadatcima iz teorije brojeva. Vrlo je zanimljivo i korisno primjenjivati poznate metode u različitim dijelovima matematike. Riješit ćemo nekoliko zadataka.

Zadatak 2.3.1. *Dokažite da od* 12 *dvoznamenkastih brojeva, možemo izabrati dva čija je dvoznamenkasta razlika oblika* $\overline{aa}$.

Rješenje. Promotrimo ostatke pri dijeljenju broja s 11. Mogući ostatci su $0, 1, 2, \ldots, 10$. Njih je ukupno 11. Budući da imamo 12 dvoznamenkastih brojeva, prema Dirichletovom principu postoje barem dva koja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 11. Neka su to brojevi n i m. Oni su oblika $n = 11p + r$ i $m = 11q + r$. Njihova je razlika

$$n - m = 11p + r - (11q + r) = 11p + r - 11q - r = 11p - 11q = 11(p - q)$$

očito djeljiva brojem 11. Svaki dvoznamenkasti broj djeljiv brojem 11 je oblika $\overline{aa}$. Time smo dokazali tvrdnju zadatka. □

Zadatak 2.3.2. *Dokažite da je jedan od* $(n + 1)$ *brojeva iz skupa* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *djeljiv drugim.*

Rješenje. Odaberemo proizvoljan $(n + 1)$-člani podskup S skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Budući da su elementi skupa S prirodni brojevi, svakog od njih možemo zapisati kao $2^{k_i} \cdot a_i$, pri čemu je $k_i \geq 0$ i a_i neparan broj. Sada možemo uočiti da imamo $(n + 1)$ neparnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ koji poprimaju vrijednosti iz skupa $\{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$. U tom je skupu n neparnih brojeva, dok skup S sadrži $n + 1$ elemenata. Dakle, postoje dva elementa j i l tog skupa za koje vrijedi da je $a_j = a_l$. Sada možemo zapisati brojeve u obliku $2^{k_j} \cdot a_j$ i $2^{k_l} \cdot a_j$. Ako je $k_j \leq k_l$, onda je drugi broj djeljiv prvim; ako je $k_j > k_l$, onda je prvi broj djeljiv drugim. □

Zadatak 2.3.3. *Dano je dvadeset različitih pozitivnih cijelih brojeva manjih od* 70. *Dokažite da među pozitivnim razlikama dvaju brojeva postoje četiri jednake.*

Rješenje. Označimo zadane brojeve s $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$, pri čemu vrijedi $0 < a_1 < \ldots < a_{20}$. Trebamo pokazati da među razlikama $a_i - a_j$, $i > j$, postoje četiri jednake. Mi ćemo pokazati da među razlikama $a_{i+1} - a_i$, $i = 1, \ldots, 19$ postoje četiri jednake. S obzirom na to da vrijedi $0 < a_1 < \ldots < a_{20}$, možemo primijetiti da je

$$0 < (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{20} - a_{19}) = a_{20} - a_1 \leq 68.$$

Sada ćemo pretpostaviti suprotno, tj. da su među razlikama najviše tri jednake. Zbog te pretpostavke, brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ kod razlika $a_{i+1} - a_i$ pojavljuju se najviše tri puta. To možemo zapisati ovako

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{20} - a_{19}) \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 7 = 70.$$

Time smo dobili da je $a_{20} - a_1 \leq 68$ i $a_{20} - a_1 \geq 70$, što je očito kontradikcija. Time smo dokazali tvrdnju zadatka. □

Zadatak 2.3.4. *Među danih n cijelih brojeva,* $a_1, a_2, \dots, a_n$*, ne nužno različitih, postoje cijeli brojevi k i l,* $0 \le k < l \le n$ *takvi da je suma* $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ *višekratnik broja n.*

Rješenje. Promotrimo sljedećih n suma:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Podijelimo li gornje sume s n, dobivamo da je $a_1 + a_2 + \dots + a_i = q_i n + r_i$, pri čemu je $0 \le r_i \le n-1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ako je za neku od suma ostatak pri dijeljenju s n jednak 0, onda je ta suma djeljiva s n i time smo gotovi. No, ako niti jedan od ostataka r_i, $i = 1, \dots, n$ nije 0, onda imamo ukupno $n-1$ mogućih ostataka za r_i. Budući da imamo n suma i $n-1$ mogućih ostataka, sigurno postoje barem dvije sume koje imaju isti ostatak pri dijeljenju s n. Tada je njihova razlika, koja je oblika $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ za neke $k, l, k < l$, djeljiva s n, što smo i trebali dokazati. □

Zadatak 2.3.5. *Neka je zadan broj a koji je relativno prost s* 2 *i* 5*. Dokažite da za bilo koji n postoji potencija od a koja završava s* $\underbrace{000\dots01}_{n}$.

Rješenje. Promotrimo niz potencija broja a: $a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n}$ i ostatke pri dijeljenju članova niza brojem 10^n. Iz uvjeta zadatka znamo da broj a nije djeljiv brojevima 2 i 5 pa zato nije djeljiv niti brojem 10, što znači da 0 ne može biti ostatak pri dijeljenju potencija broja a brojem 10^n. Stoga su mogući ostatci: $1, 2, \dots, 10^n - 1$. Vidimo da ostataka ima $10^n - 1$, a članova niza 10^n. Prema Dirichletovom principu, zaključujemo da postoje dva člana promatranog niza koja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 10^n. Neka su to članovi a^i i a^k, pri čemu je $i < k$. Tada ih možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$a^i = 10^n \cdot x + r \qquad \text{i} \qquad a^k = 10^n \cdot y + r.$$

Sada je

$$a^k - a^i = (10^n \cdot x + r) - (10^n \cdot y + r) = 10^n \cdot x - 10^n \cdot y = 10^n \cdot (x - y),$$

tj. njihova je razlika djeljiva brojem 10^n. S druge strane je $a^k - a^i = a^i(a^{k-i} - 1)$. Dakle, 10^n dijeli umnožak $a^i(a^{k-i} - 1)$. Budući da su a^i i 10 relativno prosti, slijedi da 10^n dijeli $a^{k-i} - 1$, tj. postoji q takav da je $a^{k-i} - 1 = 10^n \cdot q$. Iz toga slijedi da je $a^{k-i} = 10^n \cdot q + 1$. To zapravo znači da broj a^{k-i} završava s $\underbrace{000\dots01}_{n}$. □

U sljedećem zadatku iskazat ćemo posebni oblik Kineskog teorema o ostatcima koji govori o rješenju sustava dviju linearnih jednadžbi. Pokazat ćemo kako se Dirichletov princip primjenjuje u dokazu spomenutog teorema.

Zadatak 2.3.6. *Neka su m i n relativno prosti cijeli brojevi. Tada sustav*

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

ima rješenje. Štoviše, postoji jedinstveno rješenje u skupu $\{0, 1, \ldots, mn - 1\}$.

Rješenje. Pretpostavimo da je $0 \leq a < m$ i $0 \leq b < n$. Pogledajmo sljedećih n brojeva:

$$a, m + a, 2m + a, \ldots, (n - 1)m + a$$

koji pri dijeljenju s m imaju ostatak a. Prema Dirichletovom principu sada možemo pretpostaviti da među njima postoje dva koja imaju isti ostatak r pri dijeljenju s n. Uzmimo da su to brojevi $im + a$ i $jm + a$, pri čemu je $0 \leq i < j \leq n - 1$. Tada postoje cijeli brojevi q_i i q_j takvi da je

$$im + a = q_i n + r \qquad \text{i} \qquad jm + a = q_j n + r.$$

Ako od druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo da je $(j-i)m = (q_j-q_i)n$. Budući da su m i n relativno prosti, odnosno najveći zajednički djelitelj im je 1, slijedi da mora vrijediti da $n|(j-i)$. No, isto tako je $0 < j-i \leq n-1$ čime dolazimo do kontradikcije s tvrdnjom da $n|(j-i)$. Iz toga zaključujemo da brojevi $a, m + a, 2m + a, \ldots, (n - 1)m + a$ imaju različite ostatke pri dijeljenju s n. Dakle, svi brojevi iz skupa $S = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ se pojavljuju kao ostatci pri dijeljenju s n. Stoga, pojavljuje se i broj $b \in S$ kao jedan od ostataka. Neka je p cijeli broj, $0 \leq p \leq n - 1$ takav da broj $x = pm + a$ ima ostatak b pri dijeljenju s n. Za neki q sada vrijedi $x = qn + b$. Dakle, dobivamo jednakost $x = pm + a = qn + b$ iz koje zaključujemo $m|(x - a)$ i $n|(x - b)$, što zadovoljava sustav (2.1). Time smo dokazali da rješenje sustava postoji.

Dokažimo da je rješenje sustava jedinstveno. Pretpostavimo da postoje različita rješenja x, y sustava (2.1), $0 \leq x, y < mn$. Dakle, vrijedi $m|(x - a)$ i $m|(y - a)$. Iz ovoga slijedi da $m|(x - y)$. Isto tako, vrijedi $n|(x - b)$ i $n|(y - b)$ iz čega slijedi da $n|(x - y)$. Budući da $m|(x-y)$ i $n|(x-y)$ te da su m i n relativno prosti, mora vrijediti da $mn|(x-y)$. S obzirom na to da je $0 \leq x, y < mn$, jedina mogućnost je $x - y = 0$. Iz toga dobivamo da je $x = y$. Time smo pokazali je rješenje sustava (2.1) jedinstveno.

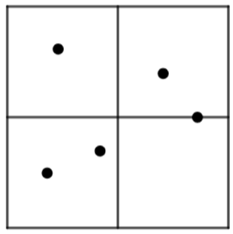
□

2.4 Zadatci iz geometrije

Vidjeli smo da se Dirichletov princip primjenjuje u mnogim područjima matematike. U ovom dijelu pokazat ćemo kako se on koristi u geometriji. U geometrijskim zadatcima, vrlo često trebamo podijeliti zadani oblik na manje dijelove kako bismo primijenili Dirichletovo pravilo.

Zadatak 2.4.1. *Promotrimo bilo kojih pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 koje se nalaze u unutrašnjosti kvadrata S stranice duljine 1. Označimo s d_{ij} udaljenost između točaka P_i i P_j. Dokažite da je barem jedna od udaljenosti d_{ij} manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Rješenje. Podijelimo kvadrat S na četiri sukladna kvadrata stranice duljine $\frac{1}{2}$ kao na slici 2.4.



Slika 2.4: Podjela kvadrata na 4 sukladna kvadrata

Budući da sada imamo pet točaka i četiri kvadrata, prema Dirichletovom principu slijedi da su barem dvije točke smještene unutar jednog od četiriju manjih kvadrata. Sada moramo pokazati da je udaljenost tih dviju točaka manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Najveća udaljenost dviju točaka unutar kvadrata je udaljenost dijagonale pa je udaljenost tih dviju točaka sigurno manja od duljine dijagonale manjeg kvadrata čija je duljina $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Time smo dokazali traženu tvrdnju, tj. da su barem dvije točke udaljene za manje od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

U geometrijskom zadatku koji slijedi ne možemo primijeniti postupak koji smo u prethodnim zadatcima koristili, a to je dijeljenje lika na manje dijelove. Među geometrijskim zadatcima koji se rješavaju Dirichletovim principom tipični su još i zadatci u kojima su točke ravnine obojane na zadani način te se dokazuje postojanost točaka na zadanoj udaljenosti i slično.

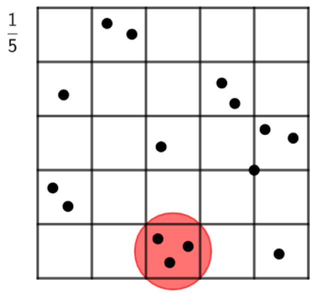
Zadatak 2.4.2. *Točke ravnine obojene su jednom od dviju boja: crvenom ili plavom. Dokažite da, za zadanu udaljenost d, uvijek postoje dvije točke iste boje na međusobnoj udaljenosti d.*

Rješenje. Ako su sve točke ravnine obojene istom bojom, neka je to plava, onda sigurno postoje dvije točke plave boje koje su na međusobnoj udaljenosti d.

Pretpostavimo sada da postoji postoji barem jedna crvena točka, označimo ju s A. Neka je ona vrh jednakostraničnog trokuta ABC stranice duljine d. Budući da trokut ABC ima tri vrha, a mi imamo dvije boje za bojanje točaka ravnine, prema Dirichletovom principu zaključujemo da su barem dva vrha tog trokuta iste boje. Dakle, postoje dvije točke iste boje koje su na međusobnoj udaljenosti d. □

Zadatak 2.4.3. *Pedeset i jedan kukac smješten je u kvadrat stranice duljine* 1*. Dokažite da u svakom trenutku postoje barem tri kukca koje možemo pokriti krugom radijusa* $\frac{1}{7}$*.*

Rješenje. U ovakvim zadatcima najčešće dijelimo kvadrat na manje sukladne kvadrate koji će nam predstavljati kutije. Kukci će nam u ovom slučaju biti predmeti. Budući da želimo pokriti tri kukca, tj. tri predmeta trebaju biti smještena u jednoj kutiji, iz Dirichletovog principa slijedi da je $k + 1 = 3$. Ukupno imamo 51 kukca pa broj 51 možemo zapisati kao $51 = 25 \cdot 2 + 1$. Iz toga slijedi da je $n = 25$ i $k = 2$. Zato ćemo kvadrat podijeliti na 25 sukladnih kvadrata kao na slici 2.5. Stranica manjeg kvadrata će biti duljine $\dfrac{1}{5}$. Sada prema Dirichletovom principu zaključujemo da se barem tri kukca nalaze unutar jednog manjeg kvadrata.



Slika 2.5: Podjela kvadrata na 25 sukladnih kvadrata

Jasno da ova tri kukca pripadaju opisanom krugu ovog kvadrata čiji je polumjer jednak polovini duljine dijagonale kvadrata, tj.

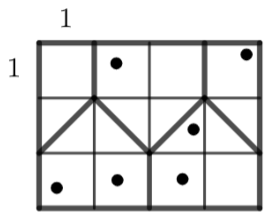
$$r = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Budući da je $\dfrac{\sqrt{2}}{10} < \dfrac{1}{7}$, očito je da se ovaj kvadrat može smjestiti u krug polumjera $\dfrac{1}{7}$ i u njemu će biti tri kukca. □

U sljedećem zadatku nije odmah jasno na kakve ćemo dijelove dijeliti zadani pravokutnik. No, nakon što nacrtamo sliku i odredimo na koliko dijelova trebamo podijeliti pravokutnik, bit će nam jasnije.

Zadatak 2.4.4. *Dvije od šest točaka smještenih u pravokutnik sa stranicama duljina* 3 *i* 4 *imat će udaljenost manju ili jednaku* $\sqrt{5}$.

Rješenje. Prvo trebamo podijeliti pravokutnik na manje dijelove takve da, ako se dvije točke nalaze unutar istog manjeg dijela, njihova udaljenost je najviše $\sqrt{5}$. U ovom slučaju, točke su predmeti, a jednaki dijelovi predstavljaju kutije. Odredimo na koliko dijelova trebamo podijeliti pravokutnik. S obzirom na to da moramo imati barem dvije točke (predmeta) unutar jednoga dijela, primjenom Dirichletovog principa slijedi da je $k + 1 = 2$. Ukupno imamo šest točaka (predmeta), a broj 6 možemo napisati kao $6 = 5 \cdot 1 + 1$. Iz toga slijedi da je $n = 5$ i $k = 1$. Dakle, pravokutnik trebamo podijeliti na pet dijelova. Podijelit ćemo pravokutnik kao na slici 2.6. Sada imamo tri sukladna peterokuta, a preostala dva lika su polovine tih peterokuta.

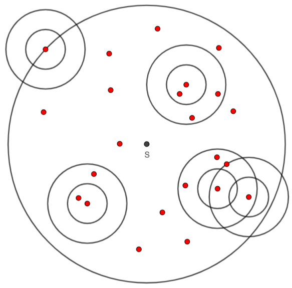


Slika 2.6: Podjela pravokutnika

Sada će barem jedan od dobivenih dijelova sadržavati barem dvije točke. Najveća udaljenost dviju točaka unutar peterokuta jednaka je duljini najveće dijagonale. Dakle, ta udaljenost iznosi $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Zaključujemo da tvrdnja zadatka vrijedi. □

Zadatak 2.4.5. *Unutar kruga polumjera* 16 *nalazi se* 650 *točaka. Dokažite da postoji kružni vijenac s unutarnjim polumjerom* 2 *i vanjskim polumjerom* 3 *koji pokriva barem* 10 *točaka.*

Rješenje. Primijetimo prvo da vrijedi sljedeća tvrdnja: točka P se nalazi unutar kružnog vijenca sa središtem u točki O ako i samo ako se točka O nalazi unutar sukladnog kružnog vijenca sa središtem u točki P. Nacrtamo li kružni vijenac s unutarnjim polumjerom 2 i vanjskim 3 sa središtem u svakoj od ovih 650 točaka kao na slici 2.7, bit će dovoljno dokazati da će barem jedna točka biti pokrivena s barem 10 takvih kružnih vijenaca.



Slika 2.7: Kružni vijenci

Nacrtani kružni vijenci nalazit će se unutar jednog velikog kruga radijusa $16 + 3 = 19$. Površina tog velikog kruga iznosit će $19^2\pi = 361\pi$, a svaki kružni vijenac je površine $3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi$. Točaka je 650 pa je i prstenova 650, što znači da zbroj površina svih nacrtanih prstenova zajedno iznosi $650 \cdot 5\pi = 3520\pi$. Kad bi svaka od ovih točaka bila pokrivena s najviše 9 kružnih vijenaca, onda bi ukupna površina bila najviše $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$. No, ukupna površina iznosi 3520π pa zaključujemo da je barem jedna točka pokrivena s barem 10 kružnih vijenaca. Time smo dokazali traženu tvrdnju, tj. da postoji kružni vijenac u kojemu se nalazi barem 10 točaka. □

2.5 Zadatci s natjecanja

Dirichletov princip je sadržaj koji se nerijetko pojavljuje među natjecateljskim zadatcima iz matematike. Odabran je kao dodatni sadržaj školske matematike s kojim napredniji učenici trebaju biti upoznati da bi bili što bolje spremni za matematička natjecanja. Već učenici viših razreda osnovnih škola rješavaju takve zadatke na natjecateljskoj razini.

Zadatak 2.5.1. *(Državno natjecanje, osnovna škola, 7. razred, 2021.)*
Nađi najmanji prirodan broj n takav da za svaki skup od n točaka s cjelobrojnim koordinatama, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu, postoji trokut s vrhovima iz tog skupa za kojeg vrijedi da polovišta njegovih stranica također imaju cjelobrojne koordinate.

Rješenje. Polovište dviju točaka $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ je točka s koordinatama $P = (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$. Ako su x_A, x_B, y_A, y_B cijeli brojevi, tada će koordinate polovišta biti cjelobrojne ako i samo ako su x_A i x_B, odnosno y_A i y_B iste parnosti. Zato ćemo promatrati sljedeće skupove:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) : x, y \text{ parni}\},\\
S_2 &= \{(x,y) : x \text{ paran}, y \text{ neparan}\},\\
S_3 &= \{(x,y) : x \text{ neparan}, y \text{ paran}\},\\
S_4 &= \{(x,y) : x, y \text{ neparni}\}.
\end{aligned}$$

Ako odaberemo 9 točaka s cjelobrojnim koordinatama, tada će prema Dircihletovom principu barem tri točke biti iz jednoga od ova četiri skupa. Vrhovi trokuta su upravo te tri točke (nikoje tri nisu kolinearne). □

Zadatak 2.5.2. *(Državno natjecanje, osnovna škola, 7. razred, 2013.)*
Dokaži da među bilo koja 502 *prirodna broja postoje dva čiji su ili zbroj ili razlika djeljivi s* 1000.

Rješenje. Neka je S skup koji sadrži danih 502 brojeva. Prirodan broj koji je djeljiv s 1000 ima troznamenkasti završetak 000. Zato ćemo elemente iz S podijeliti u disjunktne skupove s obzirom na to kakav je njihov troznamenkasti završetak.

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{x \in S : x \text{ završava s } 000\},\\
S_1 &= \{x \in S : x \text{ završava s } 001 \text{ ili } 999\},\\
S_2 &= \{x \in S : x \text{ završava s } 002 \text{ ili } 998\},\\
&\vdots\\
S_{499} &= \{x \in S : x \text{ završava s } 499 \text{ ili } 501\},\\
S_{500} &= \{x \in S : x \text{ završava s } 500\},
\end{aligned}$$

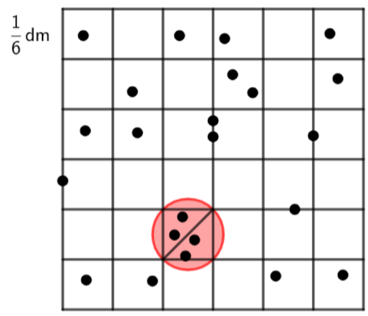
Sada je $S = S_0 \bigcup S_1 \bigcup \ldots \bigcup S_{500}$, tj. skup S je podijeljen na 501 disjunktnih podskupova. S obzirom na to da imamo 502 broja, neki skup S_k sadrži barem dva broja. Ako S_0 ili S_{500} sadrže dva broja, onda je zbroj (kao i razlika) ta dva broja djeljiv s 1000. Ako neki S_k za $k \in \{1, 2, \ldots, 499\}$ sadrži dva broja, tada ta dva broja ili imaju isti troznamenkasti završetak (pa im je razlika djeljiva s 1000) ili imaju završetke koji se nadopunjavaju do 1000 (pa im je zbroj djeljiv s 1000). □

Zadatak koji se pojavio na natjecanju u 8. razredu osnovne škole 2013. godine, vrlo je sličan zadatku 2.4.3 riješenom u prethodnom odjeljku ovog poglavlja.

Zadatak 2.5.3. *(Državno natjecanje, osnovna škola, 8. razred, 2013.)*
Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 *dm nalazi se* 110 *točaka. Dokaži da postoji krug polumjera* $\frac{1}{8}$ *dm unutar kojeg se nalaze barem* 4 *zadane točke.*

Rješenje. Podijelit ćemo kvadrat na manje sukladne kvadrate. Želimo krugom polumjera $\frac{1}{8}$ pokriti barem 4 zadane točke. Imamo ukupno 110 točaka pa ćemo broj 110 zapisati kao $110 = 36 \cdot 3 + 2$. Iz toga slijedi da je $n = 36$ i $k = 3$, tj. da ćemo kvadrat podijeliti na 36 manjih sukladnih kvadrata stranice duljine $\frac{1}{6}$ dm. Prema Dirichletovom principu možemo zaključiti da će barem jedan takav manji kvadrat sadržavati barem 4 točke. Polumjer opisane kružnice tog kvadratića jednak je polovini duljine dijagonale tog kvadrata, tj.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{1}{6}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{ dm.}$$



Slika 2.8: Podjela kvadrata na 36 sukladnih kvadrata

Još preostaje usporediti duljinu polumjera kružnice s $\frac{1}{8}$ dm. Ukoliko je duljina polumjera manja od $\frac{1}{8}$ dm, onda možemo zaključiti da postoji njemu koncentričan krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm koji sadrži barem 4 zadane točke. Zaista vrijedi $\frac{1}{8} > \frac{\sqrt{12}}{2}$ jer ako zapišemo razlomke na sljedeći način $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ i $\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{24}$ te ih kvadriramo, slijedi $\frac{9}{576} > \frac{8}{576}$. Time smo dokazali da postoji koncentrični krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke. □

Zadatak 2.5.4. *(Općinsko natjecanje, srednja škola, 1. razred, 1998.)*
U konveksnom mnogokutu s 1998 *stranica, njihove duljine su prirodni brojevi. Opseg*

mnogokuta je 1997000. *Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.*

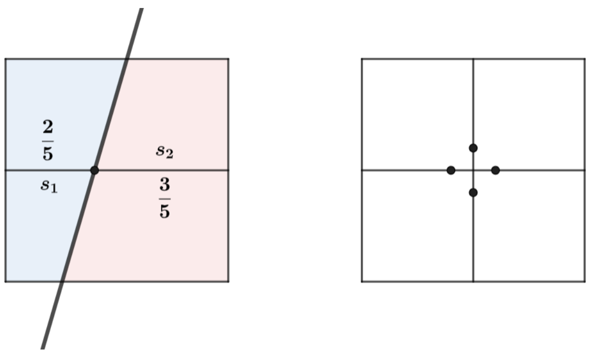
Rješenje. Promotrimo konveksni mnogokut s 1998 stranica. Budući da su duljine stranica tog mnogokuta prirodni brojevi, taj će mnogokut imati najmanji opseg ako su mu duljine stranica $1, 2, 3, \ldots, 1998$. Opseg tog mnogokuta iznosi

$$O = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1998 = \frac{1998 \cdot 1999}{2} = 1997001.$$

S obzirom na to da je opseg mnogokuta jednak 1997000, to znači da sigurno postoje dvije stranice tog mnogokuta koje su jednake duljine. □

Zadatak 2.5.5. *(Općinsko natjecanje, srednja škola, 3. razred, 1991.)*
Svaki od 25 *danih pravaca obojen je jednom od* 3 *boje: crvenom, bijelom ili plavom. Ako svaki od tih pravaca dijeli zadani kvadrat na* 2 *četverokuta čije se površine odnose kao* 2 : 3*, dokaži da bar* 3 *pravca iste boje prolaze istom točkom.*

Rješenje. Nacrtajmo kvadrat i jedan od zadanih 25 pravaca. Taj pravac, kao i ostalih 25 danih pravaca, dijelit će kvadrat na dva trapeza.



Slika 2.9: Podjela kvadrata pravcem

Površine trapeza računamo kao umnožak duljine visine tog trapeza i duljine srednjice trapeza. Prema slici 2.9 vidimo da su duljine visina tih trapeza jednake pa zaključujemo da će vrijediti

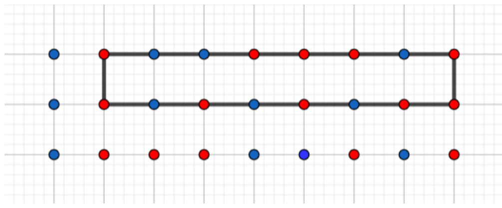
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{s_1 \cdot v}{s_2 \cdot v} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{3},$$

gdje su s_1 i s_2 duljine srednjica trapeza. Dakle, duljine srednjica trapeza odnose se kao 2 : 3. Postoje četiri točke na srednjicama kvadrata koje dijele srednjice u omjeru 2 : 3. Budući da imamo zadanih 25 pravaca, a 4 točke kojima ti pravci moraju prolaziti da bi vrijedio uvjet zadatka, prema Dirichletovom principu iz zapisa $25 = 6 \cdot 4 + 1$ slijedi da barem sedam pravaca prolazi jednom od četiri točke. Imamo 3 boje, a 7 pravaca, prema Dirichletovom principu iz $7 = 3 \cdot 2 + 1$ slijedi da su barem 3 pravca od tih 7 iste boje. □

Zadatak 2.5.6. *(Općinsko natjecanje, srednja škola, 3. razred, 2013.)*
Dano je 27 *točaka, raspoređenih u* 9 *stupaca i* 3 *retka. Svaka točka je obojana crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su svi vrhovi iste boje.*

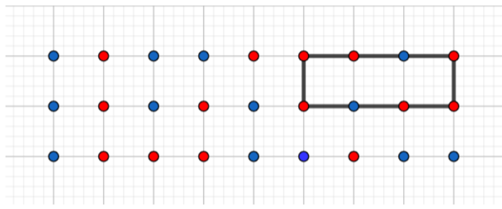
Rješenje. Imamo 9 stupaca i 3 retka. U svakome stupcu nalaze se tri točke. Dakle, svaku točku iz pojedinog stupca možemo obojiti u jednu od dvije boje. Iz toga slijedi da tri točke iz svakog stupca možemo obojiti na $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ načina. To bi značilo da imamo najviše 8 različito obojenih stupaca, no mi ih imamo 9 pa prema Dirichletovom principu možemo zaključiti da su barem dva stupca jednako obojena.

1. slučaj: Ako su dva stupca iste boje, onda među tih 6 točaka iste boje sigurno postoje 4 koje su vrhovi traženog pravokutnika kako je prikazano na slici 2.10.



Slika 2.10: Rješenje 1. slučaja

2. slučaj: Ako ti stupci nisu iste boje, onda su dva retka jedne boje, a treći redak druge boje. Dakle, opet postoje 4 točke iste boje koje su raspoređene u dva retka i dva stupca kako je prikazano na slici 2.11. Te točke vrhovi su traženog pravokutnika.



Slika 2.11: Rješenje 2. slučaja

□

Zadatak 2.5.7. *(Općinsko natjecanje, srednja škola, 4. razred, 2010.)*
Unutar kvadrata stranice duljine 10 *nalazi se šest različitih točaka raspoređenih tako da*

je udaljenost između svake dvije od njih cjelobrojna. Dokaži da među tim udaljenostima postoje dvije jednake.

Rješenje. Najveća moguća udaljenost dviju točaka unutar kvadrata stranice duljine 10 jednaka je duljini dijagonale tog kvadrata, tj. $10\sqrt{2} \approx 14.1421$. To znači da su cjelobrojne udaljenosti točaka unutar kvadrata $1, 2, \ldots, 14$. Između šest točaka je ukupno $\binom{6}{2} = 15$ udaljenosti. Prema Dirichletovom principu postoje dvije udaljenosti koje su jednake. □

Zadatak 2.5.8. *(Državno natjecanje, srednja škola, 1. razred, 1995.)*
Dokažite da postoji broj oblika $\overline{\ldots 1995}$ *djeljiv sa* 1999.

Rješenje. Neka je $a_0 = 0, a_1 = 1995, a_2 = 19951995, \ldots, a_{1999} = 19951995\ldots1995$. Ovdje imamo 2000 brojeva. Promatramo ostatke pri dijeljenju brojeva $a_i, i = 0, 1, \ldots, 1999$ brojem 1999. Tih ostataka ima ukupno 1999 i to su: $0, 1, 2, \ldots, 1998$. Brojeva a_i, $i = 0, 1, \ldots, 1999$ ima 2000 pa prema Dirichletovom principu među njima sigurno postoje dva koja imaju isti ostatak pri dijeljenju brojem 1999. Neka su to brojevi $a_j = \underbrace{\overline{1995\ldots1995}}_{j}$ i $a_k = \underbrace{\overline{1995\ldots1995}}_{k}$, $j \geq k$. Njihova razlika djeljiva je brojem 1999 i oblika je

$$a_j - a_k = \overline{\underbrace{1995\ldots1995}_{j-k}\underbrace{00\ldots00}_{k}} = \underbrace{\overline{1995\ldots1995}}_{j-k} \cdot 10^k.$$

Kako su brojevi 10^k i 1999 relativno prosti, slijedi da je broj $\underbrace{\overline{1995\ldots1995}}_{j-k}$ djeljiv brojem 1999. Time smo našli broj oblika $\overline{\ldots 1995}$ koji je djeljiv sa 1999. □

Zadatak 2.5.9. *(Državno natjecanje, srednja škola, 3. razred, 1999.)*
Možemo li iz svakog deveteročlanog podskupa skupa prirodnih brojeva odabrati četiri različita elementa a, b, c i d, tako da brojevi $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20*?*

Rješenje. Promotrimo ostatke pri dijeljenju broja s 20. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: Postoje međusobno različiti prirodni brojevi a, b, c i d u deveteročlanom podskupu skupa prirodnih brojeva takvi da vrijedi $a \equiv c \pmod{20}$ i $b \equiv d \pmod{20}$. Tada su razlike $a - c$ i $b - d$ djeljive brojem 20. Iz toga slijedi da 20 dijeli $(a - c) + (b - d) = (a + b) - (c + d)$, tj. vrijedi $a + b \equiv c + d \pmod{20}$. Time smo gotovi.

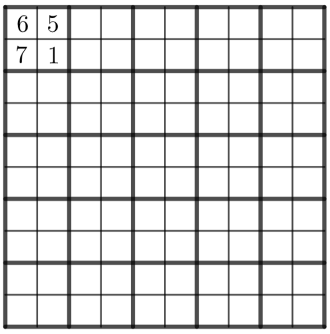
2. slučaj: Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da u deveteročlanom podskupu S skupa prirodnih brojeva ne postoje četiri broja a, b, c, d takvi da vrijedi $a \equiv c \pmod{20}$ i $b \equiv d \pmod{20}$. Iz toga slijedi da u skupu S mogu postojati najviše tri broja koja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20, a od preostalih barem šest brojeva nikoja dva nemaju isti ostatak pri dijeljenju s 20. Dakle, u deveteročlanom podskupu S postoji barem sedam brojeva koji imaju različite ostatke pri dijeljenju brojem 20. Od tih sedam brojeva moguće je načiniti

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = 21$$

par. Ako promotrimo ostatke pri dijeljenju zbrojeva članova tih parova, imat ćemo 21 zbroj, a 20 ostataka pri dijeljenju tih zbrojeva brojem 20. Dakle, postoje barem dva zbroja koji imaju isti ostatak pri dijeljenju brojem 20. Zaključujemo da postoje četiri broja, neka su to brojevi a, b, c, d, za koje je $a+b \equiv c+d \pmod{20}$. Time smo dokazali tvrdnju zadatka. □

Zadatak 2.5.10. *(Državno natjecanje, srednja škola, 4. razred, 2012.)*
Za dva polja tablice 10×10 *kažemo da su prijateljska ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak* 10*, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem* 17 *puta.*

Rješenje. Nacrtajmo tablicu 10×10. Pogledajmo kakvi se brojevi nalaze unutar kvadrata dimenzije 2×2 te tablice. Znamo da brojevi koji se nalaze unutar svaka dva prijateljska polja moraju biti relativno prosti. Dakle, u 2×2 kvadratima može se naći najviše jedan broj koji je djeljiv brojem 2 i najviše jedan broj koji je djeljiv brojem 3 da bi uvjet zadatka bio zadovoljen. Na slici 2.12 je primjer brojeva koji se mogu nalaziti unutar jednog 2×2 kvadrata.



Slika 2.12: Primjer brojeva unutar 2×2 kvadrata tablice

To znači da je u cijeloj tablici najviše 25 brojeva djeljivih s 2, te najviše 25 brojeva djeljivih s 3. Preostalih polja ima barem 50 i ona su popunjena brojevima koji nisu djeljivi ni s 2 ni s 3, dakle brojevima $1, 5$ ili 7. Broj 50 možemo zapisati na sljedeći način: $50 = 3 \cdot 16 + 2$ pa možemo zaključiti da se od tih triju brojeva, prema Dirichletovom principu barem jedan pojavljuje barem 17 puta. □

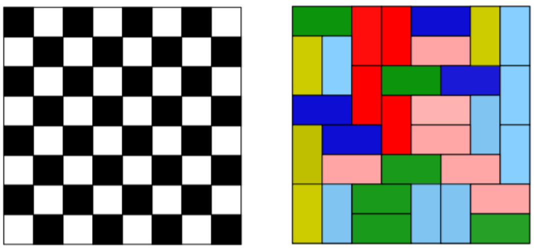
Poglavlje 3

Dokazi bojanjem

3.1 Općenito o dokazima bojanjem

Jedna vrsta rješavanja problema u kombinatorici jest dokazivanje bojanjem. Kod dokazivanja bojanjem pojavljuje se problem popločavanja. Problem popločavanja zahtijeva dokaz da je moguće u potpunosti pokriti određeno područje danim pločicama bez preklapanja. Najveća poteškoća koja se javlja kod ovakvih problema jest kako dokazati da zadano popločavanje postoji. Označavanjem, odnosno bojanjem polja na ploči razmatra se može li se ploča popločati sa zadanim uvjetima ([15]).

Britanski teoretski fizičar M.E. Fisher 1961. godine jednim dokazom riješio je jedan vrlo zahtijevan i poznat problem. Naime, on je pokazao da se šahovska ploča dimenzija 8×8 može popločati pločicama dimenzija 2×1 na $2^4\times 901^2$ različitih načina([1]). Na slici 3.1 prikazana je jedna mogućnost takvog popločavanja šahovske ploče 8×8.



Slika 3.1: Jedna mogućnost popločavanja šahovske ploče 8×8 pločicama dimenzija 2×1 (Izvor slike: [8])

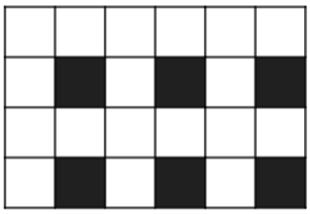
Druga vrsta problema kod dokaza bojanjem jest bojanje grafova. Vrhovima grafa pridružujemo boje tako da nikoja dva susjedna vrha nisu iste boje.

U ovom ćemo poglavlju riješiti neke probleme popločavanja te istražiti s kakvim se zadatcima učenici susreću na matematičkim natjecanjima.

3.2 Problemi bojanja

Zadatak 3.2.1. *Pod pravokutnog oblika pokriven je pločicama dimenzija* 2×2 *i* 1×4. *Jedna pločica se razbila. Dostupna je pločica druge vrste. Pokažite da pod ne može biti prekriven preslagivanjem pločica.*

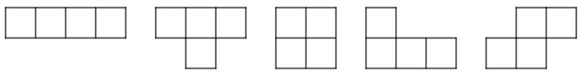
Rješenje. Nacrtajmo pod pravokutnog oblika sa kvadratićima dimenzija 1×1. Obojimo kvadratiće kao na slici 3.2. Uočimo da pločica dimenzija $1{\times}4$ pokriva uvijek 0 ili 2 obojena



Slika 3.2: Pod pravokutnog oblika

kvadratića (paran broj kvadratića), dok pločica dimenzija 2×2 pokriva uvijek samo jedan obojeni kvadratić (neparan broj kvadratića). Iz toga možemo zaključiti da nije moguće zamijeniti jednu pločicu drugom. □

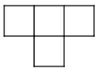
Zadatak 3.2.2. *Je li moguće oblikovati pravokutnik s pet tetromina sa slike 3.3? Ispod slike imenovani su tetromini.*



Slika 3.3: Ravni tetromino, T-tetromino, kvadratni tetromino, L-tetromino i iskrivljeni tetromino

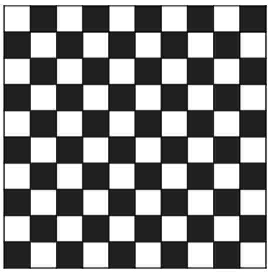
Rješenje. Ako želimo oblikovati pravokutnik s pet tetromina sa slike 3.3, to znači da će se pravokutnik sastojati od 20 kvadratića. Taj pravokutnik možemo obojiti kao šahovsku ploču, tj. da se crna i bijela polja pojavljuju naizmjenično. Ravni tetromino, kvadratni tetromino, L-tetromino i iskrivljeni tetromino pokrivaju uvijek dva bijela i dva crna polja, dok T-tetromino pokriva jedno bijelo i tri crna ili tri bijela i jedno crno polje. Dakle, tetromini koji pokrivaju po dva bijela i dva crna polja pokrit će 8 crnih i 8 bijelih polja. Preostat će 2 bijela i 2 crna polja koja T-tetromino očito ne može pokriti. Dakle, ne možemo oblikovati pravokutnik sa danim tetrominima. □

Zadatak 3.2.3. *Šahovska ploča dimenzija* 10×10 *ne može biti pokrivena s* 25 *T-tetromina. T-tetromino je prikazan na slici 3.4.*



Slika 3.4: T-tetromino

Rješenje. Šahovska ploča dimenzija 10×10 prikazana je na slici 3.5.



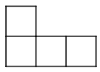
Slika 3.5: Šahovska ploča dimenzija 10×10

Kada bismo pokušali pokriti šahovsku ploču T-tetrominima, postojale bi dvije mogućnosti popločavanja. Prva mogućnost je da T-tetromino pokriva tri bijela polja i jedno crno polje. Druga mogućnost je da T-tetromino pokriva tri crna i jedno bijelo polje. Obje mogućnosti prikazane su na slici 3.6.

Slika 3.6: Bojanje T-tetromina

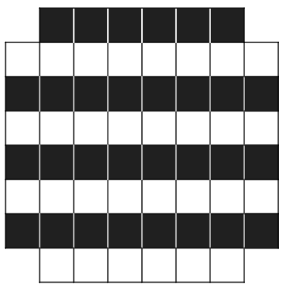
Kako bismo pokrili cijelu šahovsku ploču, trebali bismo imati jednak broj i jednih i drugih T-tetromina jer je na ploči 50 bijelih i 50 crnih polja. Budući da za pokrivanje ploče trebamo 25 T-tetromina, a 25 je neparan broj, zaključujemo da nije moguće popločati šahovsku ploču T-tetrominima na zadani način. □

Zadatak 3.2.4. *Zamislite šahovsku ploču dimenzija $n \times n$ s četiri uklonjena kuta. Za koje vrijednosti broja n možete prekriti ploču L-tetrominima prikazanim na slici 3.7?*



Slika 3.7: L-tetromino

Rješenje. Ploča dimenzija $n \times n$ s četiri uklonjena kuta sastoji se od $n \cdot n - 4 = n^2 - 4$ kvadratića. Jedan L-tetromino pokriva 4 kvadratića. Dakle, da bismo pokrili cijelu ploču L-tetrominima, ukupan broj kvadratića, tj. broj $n^2 - 4$ mora biti djeljiv brojem 4. Neka je k broj L-tetromina. Tada je $n^2 - 4 = 4k$. Iz toga zaključujemo da n mora biti paran broj.

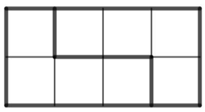


Slika 3.8: Ploča 8×8 s četiri uklonjena kuta

Obojimo ploču kao što je prikazano na slici 3.8. Ako bolje pogledamo sliku, možemo uočiti da jedan L-tetromino može pokrivati tri bijela i jedan crni kvadratić ili tri crna i jedan bijeli kvadratić. Sa slike vidimo da će se uklanjanjem četiri kutna kvadratića šahovske ploče ukloniti dva bijela i dva crna polja pa će na ploči ostati jednak broj crnih i bijelih polja. Dakle, za potpuno pokrivanje šahovske ploče, trebat će nam jednak broj L-tetromina koji prekrivaju tri crna i jedno bijelo polje, tj. tri bijela i jedno crno polje. Iz toga slijedi da je ukupan broj L-tetromina paran, odnosno broj k djeljiv je brojem 2, što možemo zapisati kao $k = 2m$, pri čemu je m prirodan broj. Sada slijedi da je $n^2 - 4 = 4 \cdot 2m = 8m$, tj. ukupan broj kvadratića na ploči djeljiv je brojem 8. Iz toga slijedi da broj n mora biti oblika $4k + 2$.

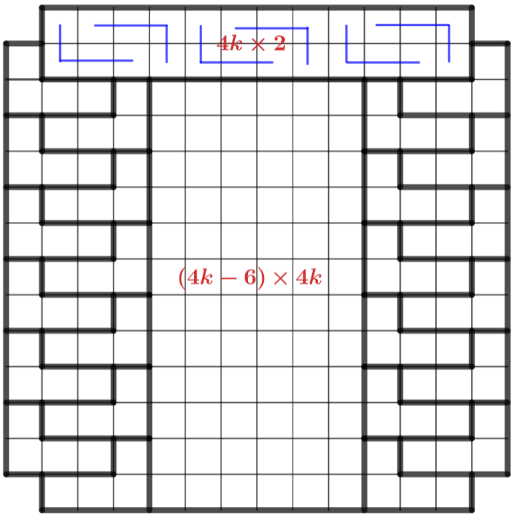
Pokažimo sada da je takvo popločavanje moguće za svaki prirodan broj k. Podijelimo ploču $(4k + 2) \times (4k + 2)$ na dijelove kao na slici 3.10. Na slici je nacrtana ploča za $k = 3$.

Pravokutnik $4k \times 2$ možemo popločati L-tetrominima jer možemo popločati svaki pravokutnik 4×2 (kao na slici 3.9) s dva L-tetromina pa iz toga slijedi da možemo popločati svaki pravokutnik kojemu je duljina jedne stranice višekratnik broja 4, a duljina druge stranice višekratnik broja 2. Za njegovo popločavanje potrebno nam je $8k : 4 = 2k$ L-tetromina. Dalje, pravokutnik $(4k - 6) \times 4k$ ima isto svojstvo kao i prethodni pravokutnik pa opet zaključujemo da i njega možemo pokriti L-tetrominima. Za njegovo popločavanje potrebno nam je $(16k^2 - 24k) : 4 = 4k^2 - 6k$ L-tetromina.



Slika 3.9: Popločavanje pravokutnika 4×2 L-tetrominima

Preostaju nam dva dijela s lijeve i s desne strane. Svaki od tih dijelova sastoji se od $4k \cdot 4 = 16k$ polja. To znači da će nam za svaki dio biti potrebno $16k : 4 = 4k$ L-tetromina, tj. za oba $4k \cdot 2 = 8k$ L-tetromina. Ukupan broj L-tetromina na ploči je $2k + 4k^2 - 6k + 8k = 4k^2 + 4k$. Dakle, za svaku ploču $(4k + 2) \times (4k + 2)$ treba nam $4k^2 + 4k$ L-tetromina, tj. ukupan broj kvadratića na ploči za svaki k djeljiv je brojem 4 kako smo i htjeli.

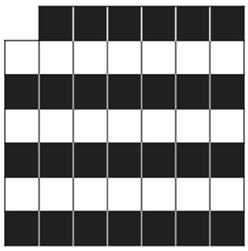


Slika 3.10: Popločavanje ploče $(4k + 2) \times (4k + 2)$ s četiri uklonjena kuta

□

Zadatak 3.2.5. *Jedan kut šahovske ploče dimenzija* $(2n + 1) \times (2n + 1)$ *je odrezan. Za koje* n *možete pokriti preostale kvadrate* 2×1 *dominama, tako da je polovina domina položena vodoravno?*

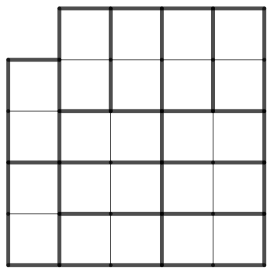
Rješenje. Zamislimo šahovsku ploču dimenzije $(2n+1)\times(2n+1)$ kojoj je jedan kut odrezan. Radi lakše vizualizacije, na slici 3.11 je prikazana ploča dimenzija 7×7 bez jednoga kuta.



Slika 3.11: Šahovska ploča bez jednog kuta

Takva ploča ima ukupno $(2n + 1) \cdot (2n + 1) - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n$ kvadratića. Crnih kvadratića je $(2n + 1) \cdot (n + 1) - 1 = 2n^2 + 3n$, a bijelih $(2n + 1) \cdot n = 2n^2 + n$. Budući da imamo ukupno $4n^2 + 4n$ kvadratića, trebat će nam $2n^2 + 2n$ domina da bismo popločali cijelu ploču. Prema uvjetu zadatka, polovina domino pločica treba biti vodoravno postavljena. Dakle, n^2+n domino pločica će biti postavljena vodoravno, a drugih n^2+n domino pločica će biti postaveljena okomito. Svaka okomito postavljena domino pločica pokriva dva polja ploče, jedno crno i jedno bijelo polje. Dakle, pokriva $n^2 + n$ crnih i $n^2 + n$ bijelih polja. Preostaje nam još $n^2 + 2n$ crnih i n^2 bijelih polja koji moraju biti pokriveni vodoravnim domino pločicama. Svaka vodoravna domino pločica pokriva polja iste boje, tj. dva bijela ili dva crna polja. Dakle, da bi vodoravne domino pločice pokrile n^2 bijelih polja, broj n mora biti paran broj.

Na slici 3.12 prikazano je popločavanje ploče dimenzija $(2n + 1) \times (2n + 1)$ za $n = 2$, tj. popločavanje ploče dimenzija 5×5 bez jednoga kuta 2×1 dominama.



Slika 3.12: Ploča dimenzija 5×5 dominama 2×1

Pokažimo sada da je takvo popločavanje moguće za svaki paran n. Neka je uklonjeno prvo polje ploče $(2n + 1) \times (2n + 1)$ kao na slici 3.12. Budući da je u prvome retku i prvome stupcu te ploče paran broj polja, možemo pokriti prvi redak te ploče s n vodoravnih domina i prvi stupac te ploče s n okomitih domina. Promatrajmo sada preostali dio ploče. Ostaje nam dio $2n \times 2n$. Podijelimo taj dio na 2×2 kvadrate. Budući da je n paran broj, $2n \times 2n$ dio možemo popločati tako da imamo jednak broj vodoravnih i okomitih pločica. S obzirom na to da je i u prvom stupcu i u prvom retku jednak broj vodoravnih i okomitih pločica, zaključujemo da je za svaki paran broj n moguće popločavanje ploče dimenzija $(2n+1)\times(2n+1)$ kojoj je jedan kut odrezan tako da je polovina domina položena vodoravno. □

Zadatak 3.2.6. *Možete li smjestiti* 53 *cigle dimenzija* $1\times1\times4$ *u kutiju dimenzija* $6\times6\times6$*? Strane cigla su paralelne sa stranama kutije.*

Rješenje. Podijelimo kutiju na manje kutije dimnezija $2\times2\times2$. Takvih kutija unutar kutije dimenzija $6 \times 6 \times 6$ ima ukupno 27. Ako obojimo te manje kutije naizmjenično crnom ili bijelom bojom, imat ćemo 14 crnih i 13 bijelih kutija dimenzija $2\times2\times2$. Dakle, to znači da ćemo imati $14\cdot2\cdot2\cdot2 = 112$ crnih kutija dimenzija $1\times1\times1$, odnosno $13\cdot2\cdot2\cdot2 = 104$ bijele kutije dimenzija $1 \times 1 \times 1$. Promotrimo sada kako se ponašaju kutije dimenzija $1 \times 1 \times 4$ unutar velike kutije. Svaka kutija dimenzija $1 \times 1 \times 4$ pokrit će 2 crne i 2 bijele kutije dimenzija $1 \times 1 \times 1$. Kad bismo uzeli 53 takve kutije, te kutije pokrile bi $53 \cdot 2 = 106$ bijelih kutija dimenzija $1 \times 1 \times 1$, a njih je ukupno samo 104.

Dakle, ne možemo smjestiti 53 cigle dimenzija $1 \times 1 \times 4$ u kutiju dimenzija $6 \times 6 \times 6$. □

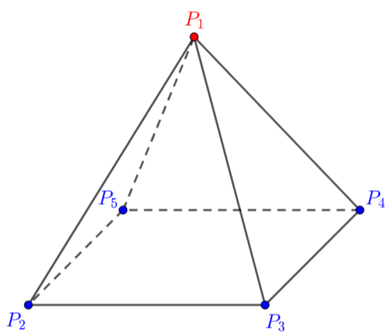
Zadatak 3.2.7. *Sve točke prostora obojene su crvenom ili plavom bojom. Pokažite da među kvadratima stranice duljine* 1 *u prostoru postoji barem jedan s tri crvena vrha ili barem jedan s četiri plava vrha.*

Rješenje. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: Sve točke prostora obojene su plavom bojom. Tada postoji kvadrat stranice duljine 1 s četiri plava vrha.

2. slučaj: Postoji barem jedna crvena točka. Označimo ju s P_1. Neka je ta točka P_1 vrh piramide sa svim bridovima duljine 1 i neka su točke P_2, P_3, P_4, P_5 preostali vrhovi te piramide, tj. vrhovi kvadrata stranice duljine 1 koji je baza te piramide. Opet ćemo razlikovati slučajeve:

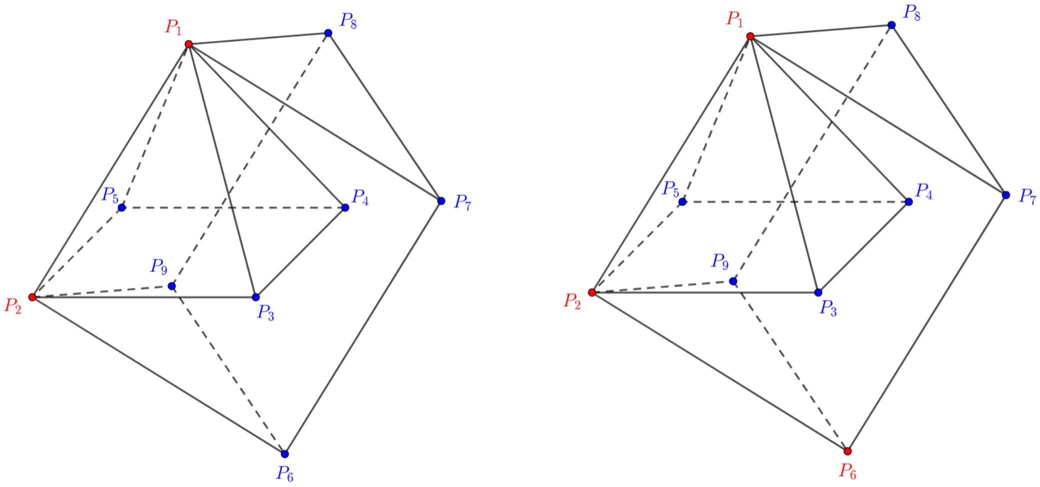
(1) Sva četiri vrha baze piramide su plave boje. Dakle, postoji kvadrat stranice duljine 1 kojemu su sva četiri vrha plave boje.



Slika 3.13: Piramida s jednim crvenim vrhom

(2) Postoji barem jedan vrh baze koji je crvene boje. Neka je to točka P_2. Neka je sada P_1P_2 brid prizme s bridovima duljine 1 koju ti vrhovi čine s točkama P_6, P_7, P_8, P_9. Razlikujemo dva slučaja s obzirom na to koje su boje točke P_6, P_7, P_8, P_9:

(a) Sve četiri točke P_6, P_7, P_8, P_9 su plave boje. Dakle, postoji kvadrat $P_6P_7P_8P_9$ stranice duljine 1 kojemu su sva četiri vrha plave boje. Taj kvadrat možemo vidjeti lijevo na slici 3.14.



(a) slučaj (b) slučaj

Slika 3.14: Bojanje vrhova prizme

(b) Jedna od točaka P_6, P_7, P_8, P_9 je crvene boje. Neka je to točka P_6. Tada postoji kvadrat stranice duljine 1 kojemu su tri vrha crvene boje, a to su točke P_1, P_2 i P_6. Taj kvadrat možemo vidjeti desno na slici 3.14.

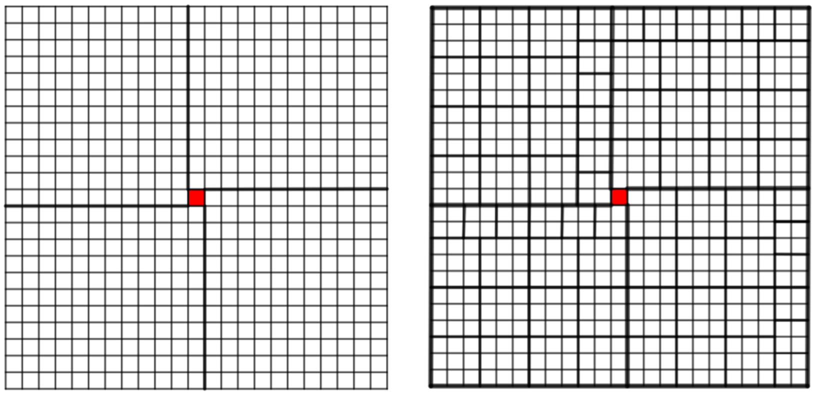
□

Zadatak 3.2.8. *Kvadrat dimenzija* 23×23 *popločan je pločicama dimenzija* 1×1, 2×2 *i* 3×3. *Koji je minimalan broj pločica dimenzija* 1×1 *potreban za popločavanje?*

Rješenje. Promotrimo redom slučajeve za broj potrebnih pločica dimenzija 1×1.

Pretpostavimo prvo da nije potrebna niti jedna pločica dimenzija 1×1. Tada je cijeli kvadrat dimenzija 23×23 popločan pločicama dimenzija 2×2 i 3×3. Obojimo redove tog kvadrata crnom i bijelom bojom naizmjenično. Neka je prvi red crne boje, drugi red bijele boje, itd. Budući da je neparan broj redova, bit će jedan više obojeni red crnom bojom od broja redova obojenih bijelom bojom. Dakle, bit će 23 crnih kvadratića više nego bijelih. Kvadrat dimenzija 2×2 pokriva točno dva bijela i dva crna kvadratića. Kvadrat dimenzija 3×3 pokriva za 3 više kvadratića jedne boje nego druge. Iz toga možemo zaključiti da je razlika između crnih i bijelih kvadratića djeljiva s 3. No, broj 23 nije djeljiv s 3. To znači da naša pretpostavka nije točna, to jest, nije moguće popločiti ovaj kvadrat bez korištenja 1×1 pločice.

Pretpostavimo sada da nam je dovoljna jedna pločica dimenzija 1×1. Smjestimo tu jednu pločicu u središte kvadrata dimenzija 23×23. Ako podijelimo ostatak kvadrata na četiri pravokutnika dimenzija 12×11, te pravokutnike možemo popločati pločama dimenzija 2×2 i 3×3 na sljedeći način. Podijelit ćemo ostatak kvadrata na četiri pravokutnika dimenzija 11×12 kao lijevo na slici 3.15.



Slika 3.15: Podjela ostatka kvadrata

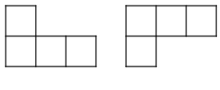
Unutar tih četiriju pravokutnika možemo smjestiti pločice dimenzija 2×2 i 3×3 tako da postoji jedan red od 6 pločica dimenzija 2×2 i tri reda pločica 3×3 kao desno na slici 3.15.

Time smo pokazali da je dovoljna jedna pločica za zadano popločavanje. □

3.3 Zadatci s natjecanja

Dokazi bojanjem vrlo često se pojavljuju u zadatcima na natjecanjima za srednje škole. U ovom ćemo dijelu riješiti nekoliko zadataka koji su se pojavili na natjecanjima prethodnih godina.

Zadatak 3.3.1. *(Općinsko - gradsko natjecanje, srednja škola, 4. razred, 1994.)*
Može li se ploča 8×8 *bez kutnih polja pokriti s* 15 *pločica oblika sa slike 3.16?*



Slika 3.16

Rješenje. Obojimo redom ploču u dvije boje, crnu i bijelu, kao na slici 3.8.

Svaka od pločica sa slike 3.16 može pokriti ili 3 crna i 1 bijelo polje ili 3 bijela i 1 crno polje. Neka je x broj pločica koje pokrivaju 3 crna i 1 bijelo polje. Tada preostalih $15 - x$ pločica pokriva 3 bijela i 1 crno polje. Crnih polja na ploči je 30 pa zato mora vrijediti $3x + 15 - x = 30$ iz čega dobivamo da je $x = \frac{15}{2}$, što nije moguće. □

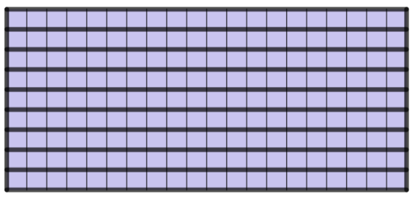
Zadatak 3.3.2. *(Školsko/gradsko natjecanje, srednja škola, 1. razred, 2016.)*
Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9. *Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici?*

Rješenje. Zadan je pravokutnik dimenzija 20×9 kojeg trebamo popločati s devet sukladnih pravokutnika. Površina velikog pravokutnika iznosi $20 \cdot 9 = 180$. Dakle, površina manjih pravokutnika jednaka je $180 : 9 = 20$.

Prvo moramo otkriti mogućnosti za dimenzije manjih pravokutnika tako da je njegova površina jednaka 20. Dakle, tražimo prirodne brojeve čiji je umnožak jednak 20. To su sljedeći parovi brojeva: 1 i 20, 2 i 10, 4 i 5. Dakle, mogućnosti za dimenzije su: 1×20, 2×10, 4×5.

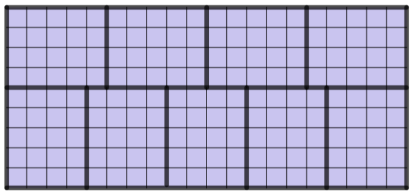
Provjerimo sada od kojih je pravokutnika gore navedenih dimenzija moguće popločati zadani pravokutnik.

Pravokutnike dimenzija 1×20 možemo poslagati kao što je prikazano na slici 3.17.



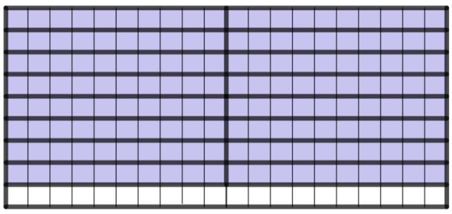
Slika 3.17: Popločavanje pravokutnicima 1×20

Pravokutnike dimenzija 4×5 možemo poslagati kao što je prikazano na slici 3.18.



Slika 3.18: Popločavanje pravokutnicima 4×5

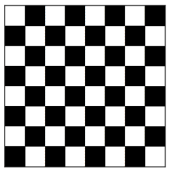
Još preostaje provjeriti možemo li pokriti zadani pravokutnik s devet sukladnih pravokutnika dimenzije 2×10. Možemo uočiti da nam stranica manjeg pravokutnika dimenzije 10 ne može biti paralelna stranici velikog pravokutnika dimenzije 9 jer je očito dulja od nje. Dakle, mora biti paralelna s većom stranicom duljine 20 velikog pravokutnika. Iz toga slijedi da će nam dva takva pravokutnika prekriti dio dimenzija 20×2. Četiri takva dijela pokrit će pravokutnik 20×8, ali tada će nam ostati pravokutnik dimenzija 20×1 kojeg nećemo moći pokriti što možemo vidjeti na slici 3.19. Dakle, pravokutnik dimenzija 20×9 ne možemo pokriti sa devet sukladnih pravokutnika dimenzija 2×10.



Slika 3.19: Popločavanje pravokutnicima 2×10

Možemo zaključiti da je s devet sukladnih pravokutnika dimenzija 1×20 i 4×5 moguće sastaviti pravokutnik dimenzija 20×9. $\square$

Zadatak 3.3.3. *(Županijsko natjecanje, srednja škola, 1. razred, 2014.)*
Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?



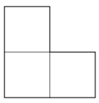
Slika 3.20: Šahovska ploča

Rješenje. U svakom potezu mijenjamo boju točno 8 polja na ploči. Dakle, ako je u nekome retku ili stupcu k crnih polja, onda je u tom retku ili stupcu preostalih $8 - k$ polja bijelo. Ako označimo s C ukupan broj crnih polja na ploči prije nekog poteza, onda će nakon tog poteza na ploči biti

$$C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k$$

crnih polja. To znači da će parnost broja crnih polja na ploči uvijek biti ista. Budući da je početni broj crnih polja na ploči jednak 32, to znači da će broj crnih polja na ploči nakon bilo kojeg poteza ostati paran. Dakle, nije moguće da na ploči ostane neparan broj crnih polja. Posebno, nije moguće da točno jedno polje na ploči bude crno. □

Zadatak 3.3.4. *(Županijsko natjecanje, srednja škola, 1. razred, 2016.)*
Na koliko načina možemo obojati polja ploče 2×2016 *u dvije boje tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici 3.21? Pločicu je dozvoljeno rotirati.*



Slika 3.21

Rješenje. Prvi način bojanja ploče 2×2016 u dvije boje jest sljedeći: ako su u prvome stupcu oba polja crna, onda u drugome stupcu ne smije postojati niti jedno crno polje. Dakle, u drugome stupcu su oba polja bijela. Tako nastavljamo bojati do kraja ploče. Bojanje je prikazano na slici 3.22 na ploči dimenzija 2×11.

Slika 3.22: Bojanje ploče 2×11 ako su u prvome stupcu oba polja crna

Isto vrijedi i ako su u prvome stupcu oba polja bijela. Tada u drugome stupcu ne smije postojati niti jedno bijelo polje. Dakle, oba polja drugoga stupca moraju biti crna. Tako nastavljamo bojati do kraja ploče. Bojanje je prikazano na slici 3.23 na ploči dimenzija 2×11.

Slika 3.23: Bojanje ploče 2×11 ako su u prvome stupcu oba polja bijela

Sljedeća mogućnost za bojanje jest ako su u prvome stupcu oba polja različite boje, jedno crno i jedno bijelo polje. U ovom slučaju, u sljedećem stupcu ne smiju se pojaviti polja iste boje. Dakle, i u drugome stupcu polja moraju biti različitih boja. Tako nastavimo bojati do kraja ploče. Dakle, za prvi stupac imamo dva načina bojanja, za drugi stupac imamo dva načina bojanja, tj. za svaki stupac imamo dvije mogućnosti za bojanje. Iz toga slijedi da je ukupno $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2016} = 2^{2016}$ mogućnosti za takva bojanja ploče. Jedno takvo bojanje prikazano je na slici 3.24 na ploči dimenzija 2×11.

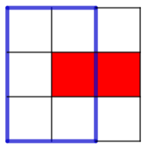
Slika 3.24: Bojanje ploče 2×11 ako su u prvome stupcu polja različite boje

Dakle, ukupno je $2 + 2^{2016}$ načina za bojanje ploče dimenzije 2×2016 tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici 3.21. $\square$

Zadatak 3.3.5. *(Državno natjecanje, srednja škola, 1. razred, 1997.)*
Na beskonačnom bijelom papiru podijeljenom na jednake kvadratiće neki od njih su obojeni crvenom bojom. U svakom 2×3 *pravokutniku točno dva kvadratića su crvena. Promatrajte bilo koji* 9×11 *pravokutnik. Koliko u njemu ima crvenih kvadratića?*

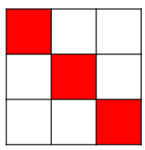
Rješenje. Promotrimo kvadrat 3×3. Unutar tog kvadrata, svaki pravokutnik 2×3 mora sadržavati dva crvena kvadratića.

Neka je crveno središnje polje 3×3 kvadrata. Promotrimo situaciju kao na slici 3.25. Možemo primijetiti da plavi pravokutnik 2×3 u ovom slučaju ima samo jedan crveni kvadratić, što ne zadovoljava uvjet zadatka. Dakle, središnjem crvenom polju susjedni kvadratići ne smiju biti crvene boje.



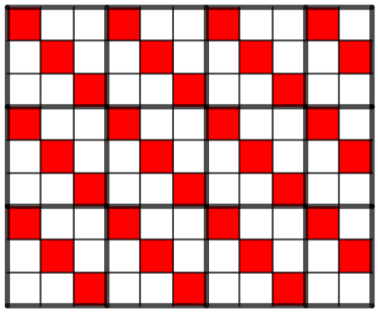
Slika 3.25: Kvadrat 3×3 kojemu su dva susjedna polja crvene boje

Dakle, ako je crven središnji kvadratić, tada je crven ili prvi ili treći kvadratić prvoga retka. Neka je to prvi kvadratić. Tada kvadrat mora biti obojen kao na slici 3.26 da bi zadovoljavao uvjete zadatka, tj. da svaki pravokutnik 2×3 tog kvadrata sadrži dva crvena kvadratića.



Slika 3.26: Bojanje kvadrata 3×3 tako da zadovoljava uvjet zadatka

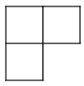
Sada promotrimo od koliko se 3×3 kvadrata sastoji 9×11 pravokutnik. Ako pogledamo sliku 3.27, možemo primijetiti da se sastoji od devet 3×3 kvadrata i još tri pravokutnika 2×3. Dakle, pravokutnik 9×11 sadrži ukupno $9 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 33$ crvena kvadratića.



Slika 3.27: Pravokutnik 9×11

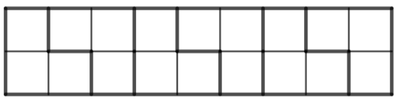
□

Zadatak 3.3.6. *(Državno natjecanje, srednja škola, 1. razred, 2001.)*
Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča $9 \times n$ *može prekriti pločicama oblika sa slike 3.28 tako da se one međusobno ne preklapaju?*



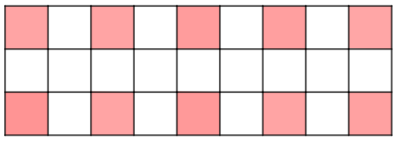
Slika 3.28

Rješenje. Pogledajmo redom slučajeve. Za $n = 2$ je očito da se ploča može pokriti danim pločicama. Popločavanje je prikazano na slici 3.29.



Slika 3.29: Popločavanje ploče 9×2

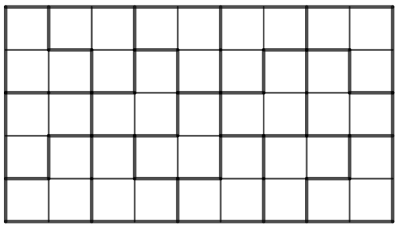
Dakle, svaku ploču $9 \times 2k$, gdje je k prirodni broj, možemo popločati na zadani način. Promotrimo slučaj kada je $n = 3$. Za svako polje obojeno crvenom bojom potrebna je po jedna pločica.



Slika 3.30: Popločavanje ploče 9×3

Crvenih polja je ukupno 10, što znači da nam treba 10 pločica. Tih 10 pločica prekriva 30 polja, a na ploči je ukupno 27 polja. Dakle, ploču 9×3 nije moguće popločati danim pločicama.

Dalje, za $n = 5$ moguće je ploču prekriti danim pločicama na način koji je prikazan na slici 3.31.

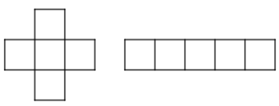


Slika 3.31: Popločavanje ploče 9×5

Iz toga možemo zaključiti da danim pločicama možemo prekriti ploču za svaki $n = 2k+1, k \geq 3$ jer se svaka ploča $9 \times (2k+1)$ može rezdvojiti na ploču 9×5 i $9 \times (2k-4), k \geq 3$.

Dakle, možemo prekriti svaku ploču dimenzija $9 \times n$ za $n \geq 2, n \neq 3$. □

Zadatak 3.3.7. *(Državno natjecanje, srednja škola, 2. razred, 2016.)*
Dana je ploča s 2016 *redaka i* 2017 *stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjem stupcu te ploče tako da dobivenu ploču možemo prekriti pločicama oblika kao na slici 3.32? Pločice je dozvoljeno rotirati.*



Slika 3.32

Rješenje. Popunimo polja redaka ploče prirodnim brojevima od 1 do 2017 počevši od najmanjega prema najvećemu. U svakom polju zadnjeg stupca ploče nalazi se broj 2017 pa će nakon što uklonimo dva polja zadnjeg stupca nestati dva broja 2017.

Prva pločica sa slike 3.32 pokriva sljedeće brojeve: $n, n-1, n, n+1, n$. Zbroj tih brojeva je $n+(n-1)+n+(n+1) = 5n$. Druga pločica sa slike 3.32 pokriva ili pet uzastopnih brojeva ili pet istih brojeva. Dakle, zbroj brojeva je $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 5n$ ili $m+m+m+m+m = 5m$. Možemo primijetiti da će pločice uvijek pokrivati brojeve čiji je zbroj djeljiv s 5. Dakle, da bismo mogli prekriti ploču na zadani način, zbroj svih brojeva na prekrivenim pločicama bi trebao biti djeljiv s 5.

Redaka u kojima nije uklonjeno polje iz zadnjega stupca je 2014. Zbroj svih brojeva koji se nalaze u tim retcima jest

$$2014 \cdot \frac{2017 \cdot 2018}{2} = 1007 \cdot 2017 \cdot 2018 \equiv 2 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 2 \pmod 5.$$

Preostaju još dva retka u kojima moramo odrediti zbroj brojeva. U njima su uklonjena polja iz zadnjega stupca. Zbroj brojeva u tim retcima iznosi

$$2 \cdot \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 2016 \cdot 2017 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 5.$$

Dakle, zbroj svih brojeva s ploče pri dijeljenju s 5 daje ostatak 4, odnosno zbroj brojeva na ploči nakon uklanjanja dvaju polja iz zadnjeg stupca nije djeljiv s 5. Zaključujemo da nije moguće ukloniti dva polja u zadnjem stupcu ploče tako da dobivenu ploču možemo prekriti pločicama oblika kao na slici 3.32. □

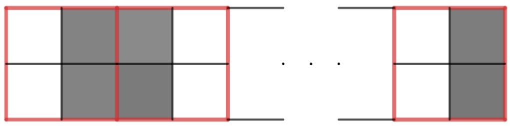
Zadatak 3.3.8. *(Državno natjecanje, srednja škola, 3. razred, 2019.)*
Na ploču dimenzija 20×19 *postavljene su pločice dimenzija* 3×1 *tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima. Odredi najveći mogući broj pločica* 3×1 *na toj ploči.*

Rješenje. Pogledajmo vrhove koje prekrivaju pločice 3×1. Svaka pločica dimenzija 3×1 prekriva 8 vrhova kvadratića 1×1. U kojem god bio položaju, pravokutnik 3×1 uvijek prekriva paran broj vrhova. Svaki stupac sastoji se od 20 polja, odnosno sadrži 21 vrh. Dakle, pravokutnicima možemo prekriti najviše 20 vrhova. Stupaca je 20 pa se najviše može pokriti $20 \cdot 20 = 400$ vrhova. Budući da svaka pločica prekriva 8 vrhova, iz toga slijedi da je najveći broj postavljenih pločica $\frac{400}{8} = 50$. □

Zadatak 3.3.9. *(Državno natjecanje, srednja škola, 3. razred, 2011.)*
Svako polje ploče 1000×1000 *obojano je crnom ili bijelom bojom. Ukupan broj crnih polja na ploči je za* 2012 *veći od ukupnog broja bijelih polja. Dokaži da postoji kvadrat* 2×2 *koji sadrži tri polja jedne boje i jedno polje druge boje.*

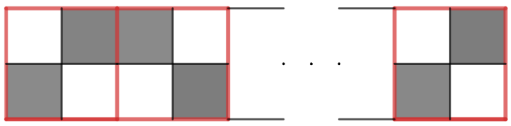
Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se unutar svakog 2×2 kvadrata nalazi paran broj crnih polja. Promotrimo sada boje susjednih redaka pravokutnika 2×1000.

Ako su oba polja prvoga stupca iste boje, onda su polja drugoga stupca suprotne boje. Dakle, oba polja drugoga stupca su također iste boje. Ako na isti način nastavimo promatrati svaka dva susjedna stupca pravokutnika 2×1000, možemo zaključiti da u ovom slučaju svaka dva retka imaju isti raspored boja. Na slici 3.33 je prikazan primjer za ovaj slučaj.



Slika 3.33: Polja susjednih redaka su iste boje

Ako su polja prvoga stupca suprotnih boja, onda su polja drugoga stupca također suprotnih boja. Uočimo da su susjedna polja donjeg i gornjeg retka uvijek različitih boja (jedno bijelo, drugo crno). Ako na isti način nastavimo promatrati svaka dva susjedna stupca pravokutnika 2×1000, možemo zaključiti da će svaka dva susjedna retka imati suprotno obojena polja. Na slici 3.34 je prikazan primjer za ovaj slučaj.



Slika 3.34: Polja susjednih redaka su različite boje

Primijetimo da su u oba slučaja međusobno jednaki svi retci kvadrata 1000×1000 kojima je prvo polje crne boje i svi retci kvadrata 1000×1000 kojima je prvo polje bijele boje.

Označimo s c broj redaka kojima je prvo polje crne boje. Tada je $1000 - c$ broj redaka kojima je prvo polje bijele boje. Označimo s d razliku broja crnih i broja bijelih polja u retcima kojima je prvo polje crne boje. Tada je $-d$ razlika broja crnih i broja bijelih polja u retcima kojima je prvo polje bijele boje. Budući da je ukupna razlika broja crnih i broja bijelih polja jednaka 2012, mora vrijediti sljedeća jednakost:

$$c \cdot d + (1000 - c) \cdot (-d) = 2012.$$

Iz toga slijedi da je

$$2d(c - 500) = 2012.$$

Primijetimo da je razlika d broja crnih i broja bijelih polja u retku kojemu je prvo polje crne boje paran broj zato što je zbroj crnih i bijelih polja u retku jednak 1000. Isto tako, mora vrijediti da je $d \leq 1000$. Sada iz $2d(c - 500) = 2012$ slijedi da je

$$d(c - 500) = 1006.$$

Budući da je d paran broj, jedina mogućnost je da je $d = 2$ i $c - 500 = 503$. Iz toga slijedi da je $c = 1003$, što očito nije moguće jer je ukupni broj redaka 1000. Time smo došli do kontradikcije.

Dakle, ne postoji kvadrat 2×2 koji sadrži tri polja jedne boje i jedno polje druge boje. □

Kao što smo vidjeli, zadatci bojanja i popločavanja spadaju u logičko - kombinatornu vrstu zadataka. Iako rješavanje ovakvih zadataka nije (uvijek) jednostavno, ipak se radi o zadatcima koji su, već po svojoj formulaciji zanimljivi i atraktivni učenicima, naročito učenicima koji sudjeluju u natjecanjima iz matematike, te je zato poželjno uvrstiti i neke od zadataka ovog tipa u nastavu matematike. Kao i uvijek u matematici, nakon što učenici riješe jedan dio zadataka ovog tipa i upoznaju se s nekim korištenim idejama, oni će ih dalje moći kombinirati i nadograđivati te tako samostalno rješavati slične zadatke.

Bibliografija

[1] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

[2] A. Horvatek, Natjecanja iz matematike u RH, dostupno na http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm (studeni 2021.)

[3] M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, HMD, Zagreb, 2001.

[4] Z. Kurnik, *Heuristička nastava*, Matematika i škola 34 (2006), 148-153.

[5] Z. Kurnik, *Pierre Gustave Lejeune Dirichlet i njegov princip*, Matematika i škola 28 (2005), 100-104.

[6] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

[7] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15 (2002), 196-202.

[8] Tri Lai, Enumeration of Tilings and Related Problems, dostupno na https://www.math.unl.edu/~tlai3/UBC.pdf (listopad, 2021.)

[9] L. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] S. Majstorović, *Dirichletov princip*, Osiječki matematički list 6 (2006), 99-105.

[11] Pigeonhole principle, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle (rujan, 2021.)

[12] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.

[13] B. Rittaud, A. Heeffer, The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet, dostupno na https://www.researchgate.net/publication/265784589_The_Pigeonhole_Principle_Two_Centuries_Before_Dirichlet (rujan, 2021.)

[14] The Pigeonhole Principle, dostupno na https://www.math.hkust.edu.hk/~mabfchen/Math391I/Pigeonhole.pdf (studeni, 2021.)

[15] Tiling and coloring, dostupno na https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2016/07/lesson_4.pdf (listopad, 2021.)

[16] Two Colors - Two Points, dostupno na https://www.cut-the-knot.org/proofs/2Colors2Points.shtml#solution (studeni, 2021.)

Sažetak

Rješavanjem matematičkih problema, to jest matematičkih zadataka koje ne možemo riješiti primjenom unaprijed poznatog algoritma, razvija se učenička kreativnost i potiče njihova motivacija za učenjem matematike.

Da bi učenici uspješno rješavali matematičke probleme, osim što trebaju ustrajati u pokušajima njihovog rješavanja, trebaju upoznati i različite strategije rješavanja. U ovom radu opisali smo dvije takve strategije: Dirichletov princip i bojanje ili popločavanje.

Summary

Solving mathematical problems, i. e. mathematical assignments which we cannot solve by applying a pre-known algorithm, develops students' creativity and stimulates their motivation to study mathematics.

In order for students to successfully solve mathematical problems, not only that they should be persistent while trying to solve them, but they should also familiarize themselves with different solving strategies. In this paper we have described two such strategies: Pigeonhole principle and coloring or tiling.

Životopis

Rođena sam 11. kolovoza 1997. godine u Dubrovniku. Završila sam Osnovnu školu Mokošica. Po završetku osnovne škole, upisala sam Gimnaziju Dubrovnik, opći smjer. Godine 2015. završila sam srednju školu te upisala Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, sveučilišni studij Matematika: nastavnički smjer. Godine 2018. stekla sam zvanje prvostupnika edukacije matematike. Nastavila sam svoje obrazovanje te upisala Diplomski studij Matematika: nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.