**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Valentina Krklec

# TEORIJA PERKOLACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Rudi Mrazović

Zagreb, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

*Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc. Rudiju Mrazović koji mi je predložio ovu zanimljivu temu te na strpljenju, pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.*
*Hvala mojoj obitelji koja mi je omogućila studiranje i bila podrška tijekom svih godina studiranja.*
*Hvala svim prijateljicama na stvaranju divnih uspomena tijekom ovih pet godina studiranja.*
*Hvala dečku na velikoj podršci tijekom pisanja diplomskog rada.*

# Sadržaj

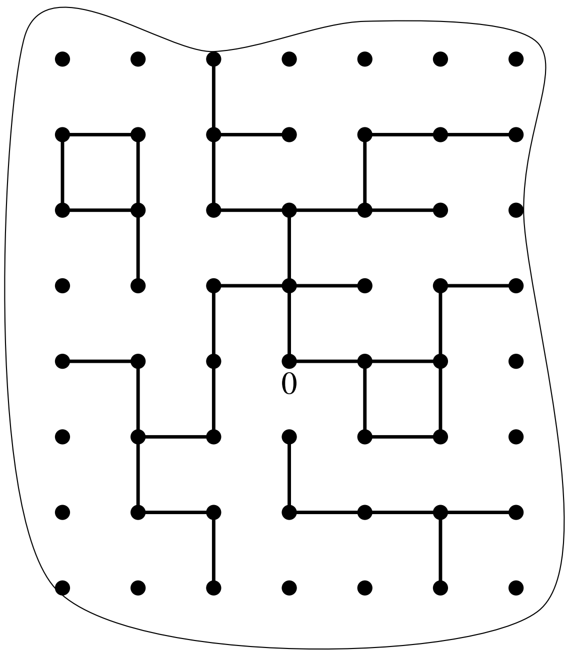
# Uvod

U uvodnom dijelu nastojat ću kroz par primjera zainteresirati čitatelja i približiti na intuitivnom nivou problematiku teorije perkolacije. Pretpostavimo da je veliki porozni kamen potopljen pod vodom. Hoće li voda doći do središta kamena? Tim pitanjem 1957. godine Broadbent i Hammersley uveli su pojam perkolacije. Teorija perkolacije opisuje model u teoriji vjerojatnosti koja prikazuje fazni prijelaz. Preciznije, ona prikazuje postojanje prirodnog parametara s obzirom na kojeg se ponašanje sustava drastično mijenja. Otpornost mreža pod naponom, prodiranje molekula kroz poroznu tvar, širenje epidemije u nekoj populaciji samo su par primjera problema koji se mogu modelirati pomoću teorije perkolacije.

# Poglavlje 1

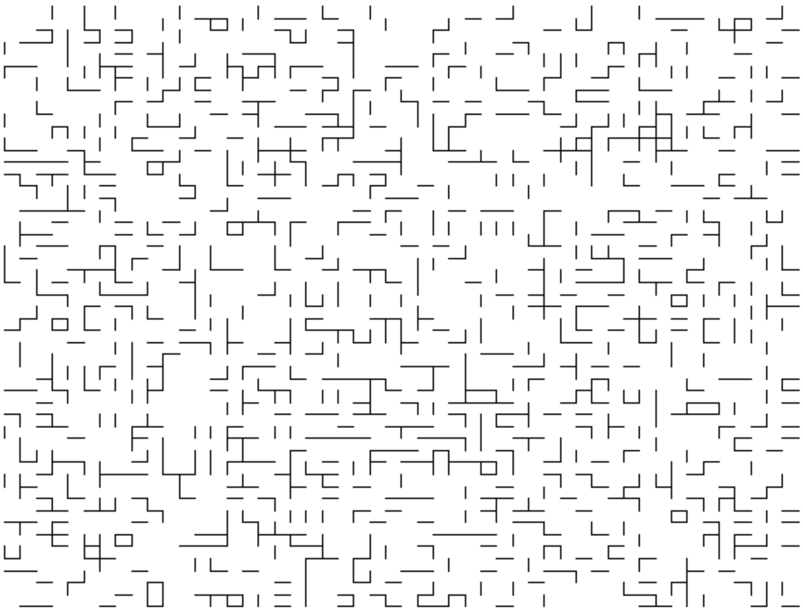
# Motivacijski primjeri

**Primjer 1.0.1.** *(Porozan kamen)*
*Ovaj primjer naveli smo već kao motivacijski primjer u uvodnom dijelu. Proučavamo kolika je vjerojatnost da središte kamena postane mokro. Neka je $\mathbb{Z}^2$ kvadratna rešetka, gdje je svaki brid rešetke otvoren s vjerojatnošću $p$ ili zatvoren s vjerojatnošću $1 - p$, nezavisno od ostalih bridova. Otvoreni bridovi predstavljaju prohodne kanale kroz koje voda može proći, a zatvoreni taj prolaz blokiraju. Obrišemo li zatvorene bridove dobiva se slučajan podgraf kvadratne rešetke $\mathbb{Z}^2$. Vrh $x$ unutar kamena koji se nalazi blizu središta će biti mokar ako postoji put koristeći samo otvorene bridove od $x$-a do neke točke na površini kamena. Vjerojatnost da će vrh $x$ unutar kamena biti mokar možemo poistovjetiti s vjerojatnošću da je vrh $x$ završni vrh beskonačne putanje otvorenih bridova u $\mathbb{Z}^2$. Jedan primjer takvog poroznog kamena sa otvorenim bridovima možemo promotriti na Slici 1.1.*

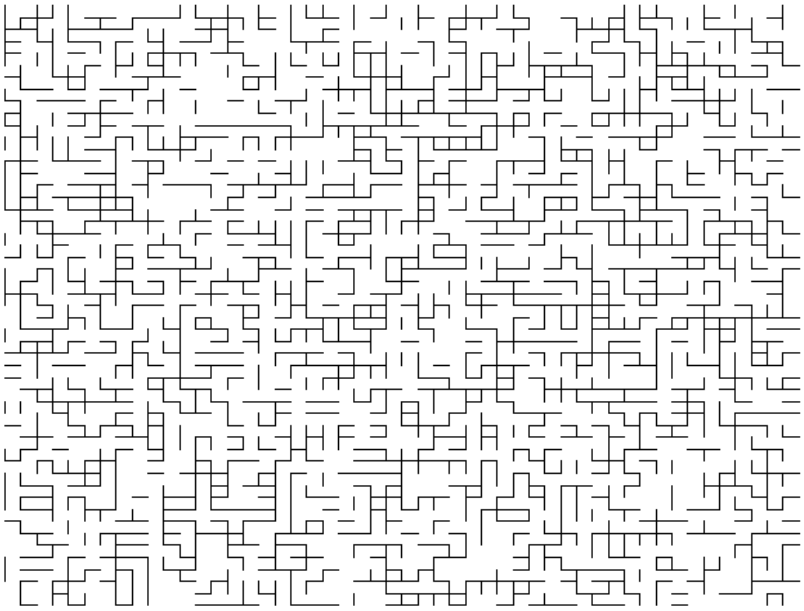



Slika 1.1: Prikaz poroznog kamena sa otvorenim bridovima

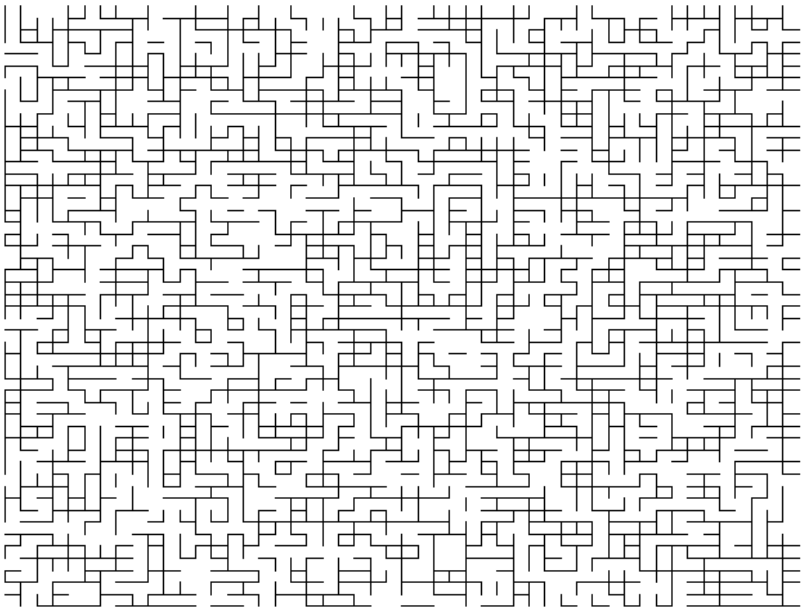
*Prodiranje vode do središta kamena povezano je s postojanjem beskonačno povezanog klastera otvorenih bridova. Kada će takav beskonačan klaster postojati? Intuitivno je jasno kada p poprima male vrijednosti, a kamen je relativno velik, tada će broj prohodnih kanala također biti mali i nedovoljan da osigura prolaz vode od površine kamena do njegovog središta. U slučaju kada p poprima velike vrijednosti, tada će broj prohodnih kanala biti dovoljan da osigura prolaz vode od površine kamena do njegovog središta. Kada je vrijednost od p mala povezani klasteri otvorenih bridova su izolirani i mali. Možemo zaključiti da kako se povećava p tako se povećavaju i veličine klastera. Drugim riječima, postoji kritična vjerojatnost* $p_c$ *koja označava vjerojatnost da je brid otvoren, ali takva da su svi klasteri otvorenih bridova konačni za* $p < p_c$*, te postoji beskonačan klaster otvorenih bridova za* $p > p_c$*. Do ovog zaključka možemo i doći tako da promatramo slike 1.2,1.3,1.4 i 1.5*



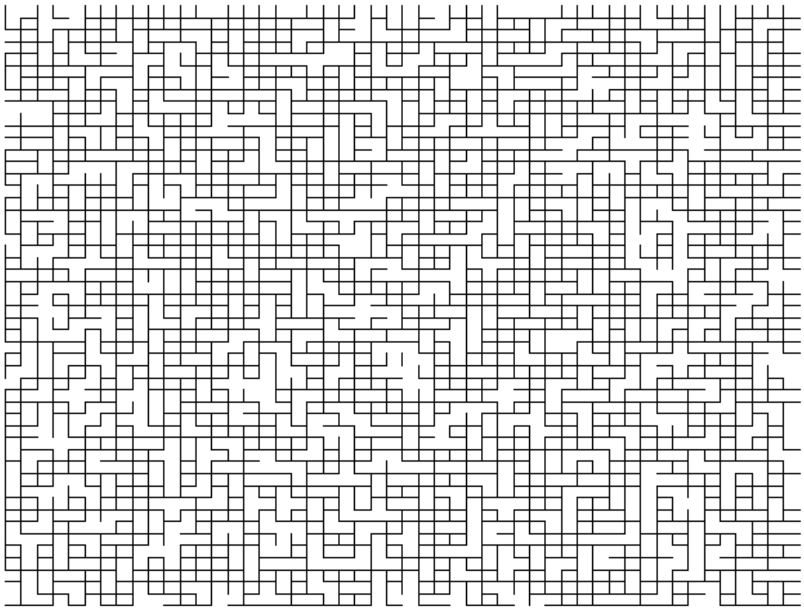
Slika 1.2: $p$=0.25



Slika 1.3: $p$=0.45

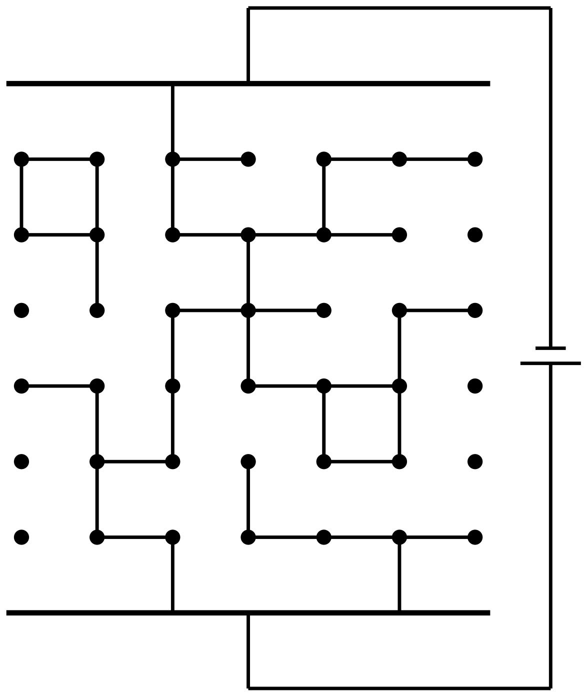


Slika 1.4: $p$=0.55



Slika 1.5: $p$=0.75

**Primjer 1.0.2.** *(Neuređena električna rešetka)*
*Neka je $U_n$ kvadratna rešetka $\{0, 1, ..., n\} \times \{0, 1, ..., n\}$ i neka su $S_n$ i $T_n$ donja i gornja stranica te rešetke, tj. $S_n = \{(m, 0) : 0 \leq m \leq n\}, T_n = \{(m, n) : 0 \leq m \leq n\}$. Na sljedeći način pretvorimo $U_n$ u električnu mrežu. Svaki brid od $U_n$ zamijenimo žicom jediničnog otpora s vjerojatnošću p, a inače brid izbacimo. Opisani proces radimo nezavisno od ostalih bridova. $S_n$ i $T_n$ zamijenimo metalnim šipkama koje spajamo na izvor struje kao na slici 1.6.*



Slika 1.6: Prikaz neuređene električne rešetke

*Interesira nas koliki je otpor $R_n$ ovakve slučajne rešetke. Intuitivno, za mali p klasteri bridova nisu dovoljno veliki da bi osigurali put struji od jedne strane rešetke do druge pa naslućujemo da je otpor jednak $R_n = \infty$. Kao i u prethodnom primjeru za $p > p_c$ postoji put otvorenih bridova između dviju strana pa je samim time omogućen put prolaska struje.*

**Primjer 1.0.3.** *(Epidemije i širenje požara u voćnjacima)*
*Pretpostavimo da stabla u nekom voćnjaku rastu u vrhovima kvadratne rešetke. Također pretpostavimo da svako zdravo stablo može biti zaraženo od susjednog stabla s vjerojatnošću p, gdje je p funkcija udaljenosti između susjednih stabala. Ako znamo da je jedno*

*stablo zaraženo, kolika je vjerojatnost da će se bolest proširiti na cijeli voćnjak? Odnosno, kolika mora biti udaljenost dva susjedna vrha na kvadratnoj rešetki? Kako bi spriječili da jedno stablo zarazi značajan dio voćnjaka potrebno je odabrati dovoljno veliku udaljenost na kvadratnoj rešetki, ali istovremeno da je* $p$ *manji od kritične vjerojatnosti* $p_c$ *.Kada* $p$ *poprima vrijednost veću od* $p_c$ *tada će postojati beskonačan klaster otvorenih bridova te će epidemija zahvatiti cijeli voćnjak. Na sličan način mogu se modelirati i šumski požari, gdje* $p$ *označava vjerojatnost da goruće stablo zapali susjedno stablo.*

U ovim primjerima sreli smo se s već spomenutim fenomenom faznog prijelaza koji se javlja u blizini kritične vjerojatnosti te proces rastavlja na dvije različite faze. U sljedećim poglavljima promotrit ćemo ponašanje u tim fazama.

# Poglavlje 2

# Vezana perkolacija

## 2.1 Definicije i oznake

Uvest ćemo osnovne definicije i oznake za vezanu perkolaciju na $\mathbb{Z}^d$, gdje $d$ označava dimenziju. Pretpostavimo da je $d \geq 1$. Neka je $\mathbb{Z}$ oznaka za skup cijelih brojeva, a $\mathbb{Z}^d$ za skup svih vektora $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ sa cjelobrojnim koordinatama.

**Definicija 2.1.1.** ***Udaljenost*** *$\delta(x, y)$ od $x$ do $y$ definiramo kao $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.*

Za udaljenost od ishodišta do točke $x$, odnosno za $\delta(0, x)$ koristimo oznaku $|x|$.
Definirajmo sljedeću funkciju udaljenosti na $\mathbb{Z}^d$ kao

$$\|x\| = max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}.$$

Promotrimo $\mathbb{Z}^d$ kao graf tako da dodamo bridove između svih parova $x, y \in \mathbb{Z}^d$ za koje je $\delta(x, y) = 1$. Tada rešetku nazivamo $d$-dimenzionalna kubična rešetka. Rešetku označimo sa $\mathbb{L}^d$, skup vrhova sa $\mathbb{Z}^d$ te skup bridova sa $\mathbb{E}^d$. Tada $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ možemo promatrati kao graf uložen u $\mathbb{R}^d$, gdje su bridovi ravne linije između njegovih vrhova.

**Definicija 2.1.2.** *Vrhovi $x$ i $y$ su* ***susjedni vrhovi*** *ako je $\delta(x, y) = 1$. Pišemo $x \sim y$ , a brid koji spaja $x$ i $y$ označavamo sa $\langle x, y \rangle$ .*

**Definicija 2.1.3.** *Brid $e$ je* ***incidentan*** *sa vrhom $x$ ako je $x$ završna točka brida $e$ .*

Ishodište od $\mathbb{Z}^d$ označavamo sa 0.
Neka $p$ i $q$ zadovoljavaju sljedeće uvjete $0 \leq p \leq 1$ i $p + q = 1$ . Svaki brid od $\mathbb{L}^d$ otvoren je s vjerojatnošću $p$, a zatvoren s vjerojatnošću $1 - p$ nezavisno od ostalih bridova. Neka je $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$ prostor elementarnih događaja čiji elementi su točke oblika $\omega = (\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ koje nazivamo konfiguracije. Kada imamo slučaj da je brid $e$ zatvoren to upravo odgovara slučaju $\omega(e) = 0$ , a $\omega(e) = 1$ nam govori da je brid $e$ otvoren. Za $\sigma$-algebru

$\mathcal{F}$ uzet ćemo $\sigma$-algebru podskupova od $\Omega$ generiranu konačno dimenzionalnim cilindrima. Na kraju za vjerojatnost ćemo uzeti produktnu mjeru

$$\mathbb{P}_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e,$$

gdje je $\mu_e$ vjerojatnost na $\{0, 1\}$ takva da $\mu_e(\omega(e) = 0) = q$ i $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$. Oznaka za pripadno očekivanje u odnosu na produktnu mjeru $\mathbb{P}_p$ biti će $\mathbb{E}_p$. Time smo definirali vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ te kada ćemo govoriti o veznoj perkolaciji na $\mathbb{L}^d$ misliti ćemo na rešetku $\mathbb{L}^d$ i upravo definiran vjerojatnosni prostor.
Neka je $A$ skup. Njegov komplement označavamo s $A^C$ , a $I_A$ označava indikatorsku funkciju skupa $A$ odnosno

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Nadalje, izraz $\mathbb{E}_p(X; A)$ označava očekivanje od $X$ na događaju $A$ i vrijedi $\mathbb{E}_p(X; A) = \mathbb{E}_p(X I_A)$.
Sljedeća notacija će nam biti od pomoći u kasnijim poglavljima. Neka je $f$ brid od $\mathbb{L}^d$, odnosno $f \in \mathbb{E}^d$. Označimo s $\mathbb{P}_p^f$ produktnu mjeru na prostoru elementarnih događaja $\prod_{e: e \notin f} \{0, 1\}$. Drugim riječima, $\mathbb{P}_p^f$ je vjerojatnosna mjera pridružena veznoj perkolaciji na $\mathbb{L}^d$, gdje je brid $f$ izbrisan.
Za $\omega \in \Omega$ definiramo $K(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d : \omega(e) = 1\}$ kao skup otvorenih bridova rešetke kada je konfiguracija $\omega$. Jasno je da vrijedi $\omega_1 \leq \omega_2$ ako i samo ako je $K(\omega_1) \subseteq K(\omega_2)$ .
Pretpostavimo da je $(X(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ familija nezavisnih slučajnih varijabli definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$ i indeksirana skupom svih bridova te neka je svaka $X(e)$ uniformno distribuirana na $[0, 1]$. Promotrimo sada kako možemo istovremeno promatrati vezanu perkolaciju za različite vjerojatnosti $p$ na bridove. Definirajmo familiju slučajnih varijabli $\eta_p = (\eta_p(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ za $p \in [0, 1]$ kao

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1, & X(e) < p \\ 0, & X(e) \geq p \end{cases}.$$

Primjetimo da $\eta_p(e)$ ovisi samo o $X(e)$ koji su međusobno nezavisni te to povlači da su slučajne varijable $(\eta_p(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ nezavisne i jednako distribuirane Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $p$ zbog uniformne distribucije od $X(e)$ . Vidimo da za $e \in \mathbb{E}^d$ vrijedi $\mathbb{P}(\eta_p(e) = 0) = 1 - p$ i $\mathbb{P}(\eta_p(e) = 1) = p$. Brid $e$ je $p$-otvoren ako je $\eta_p(e) = 1$. Uočimo da su realizacije slučajnog procesa $\eta_p$ konfiguracije. O $\eta_p$ možemo razmišljati kao o vezno perkolacijskom procesu na $\mathbb{L}^d$ s vjerojatnošću $p$ na bridovima. Primjetimo da ako vrijedi $p_1 \leq p_2$ tada je $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$. Vidimo da možemo na taj način udružiti dva perkolacijska procesa, prvi s vjerojatnošću $p_1$ na bridovima, a drugi s vjerojatnošću $p_2$ tako da je skup otvorenih bridova prvog procesa podskup skupa otvorenih bridova drugog procesa.

**Definicija 2.1.4.** ***Put*** *u* $\mathbb{L}^d$ *je alternirajući niz* $x_0, e_0, x_1, e_1, ..., e_{n-1}, x_n$ *različitih vrhova* $x_i$ *i bridova* $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ *. Takav put spaja vrhove* $x_0$ *i* $x_n$ *te ima duljinu n.*

**Definicija 2.1.5.** ***Ciklus*** *u* $\mathbb{L}^d$ *je alternirajući niz* $x_0, e_0, x_1, e_1, ..., e_{n-1}, x_n, e_n, x_0$ *vrhova i bridova takvih da je* $x_0, e_0, x_1, e_1, ..., e_{n-1}, x_n, e_n$ *put i* $e_n = \langle x_n, x_0 \rangle$*. Takav ciklus ima duljinu* $n + 1$.

**Definicija 2.1.6.** *Staza ili ciklus su* ***otvoreni*** *ako su svi njihovi bridovi otvoreni, a* ***zatvoreni*** *ako su svi njihovi bridovi zatvoreni.*

**Definicija 2.1.7.** *Dva podrafa u* $\mathbb{L}^d$ *su* ***bridovno disjunktna*** *ako nemaju zajedničkih bridova, a* ***disjunktna*** *ako nemaju zajedničkih bridova ni zajedničkih vrhova.*

**Definicija 2.1.8.** ***Relaciju povezanosti*** *za* $x, y \in \mathbb{Z}^d$ *definiramo ako postoji otvoreni put koji spaja vrhove x i y. Oznaka relacije povezanosti za* $x, y \in \mathbb{Z}^d$ *je* $x \leftrightarrow y$*.*

Neka je $G$ slučajan podgraf od $\mathbb{L}^d$ koji ima skup vrhova u $\mathbb{Z}^d$, a skup bridova mu čine svi otvoreni bridovi od $\mathbb{E}^d$. Pretpostavimo da je svaki vrh povezan otvorenim putem. Dobivamo da vrijedi $x \leftrightarrow x$ za svaki $x \in \mathbb{Z}^d$ i tada relacija postaje relacija ekvivalencije. Pripadna relacija ekvivalencije rastavlja skup vrhova $\mathbb{Z}^d$ na klase ekvivalencije. Time se graf $G$ rastavlja na komponente povezanosti gdje jednu komponentu povezanosti čini jedna klasa vrhova sa otvorenim bridovima koji spajaju te vrhove.

**Definicija 2.1.9.** *Komponentu povezanosti slučajnog grafa G nazivamo* ***otvorenim klasterom****.*

**Definicija 2.1.10.** ***Otvoreni klaster*** $C(x)$ ***od točke*** *x je otvoren klaster koji sadrži točku x.*

Drugim riječima, $C(x)$ predstavlja skup svih točaka dostižnih iz točke $x$ kroz otvorene bridove. Formalno to možemo zapisati kao $C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ . Specijalno, $C(0)$ označava otvoreni klaster iz ishodišta.
Neka su $A$ i $B$ skupovi vrhova od $\mathbb{L}^d$ . Pišemo $A \leftrightarrow B$ ako postoji otvoreni put koji spaja neki vrh iz skupa $A$ s nekim vrhom iz skupa $B$ . Ako imamo slučaj da vrijedi $A \cap B \neq \emptyset$ tada trivijalno slijedi $A \leftrightarrow B$. Ako ne postoje vrhovi u $A$ i $B$ koji su spojeni otvorenim putem tada pišemo $A \not\leftrightarrow B$. Nadalje, ako postoji otvoreni put koji spaja neki vrh iz $A$ s nekim vrhom iz $B$ , ali ne prolazi vrhovima skupa $D$ tada pišemo $A \leftrightarrow B$ bez $D$.

**Definicija 2.1.11.** *Neka je A skup vrhova.* ***Rub od*** *A je skup svih vrhova u A koji su susjedni s nekim vrhom koji nije u A. Oznaka za rub od A je* $\partial A$*.*

**Definicija 2.1.12.** *Podskup od* $\mathbb{Z}^d$ *nazivamo* ***pravokutnik*** *ako je on oblika*
$B(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^d : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, ..., d\}$ *za* $a, b \in \mathbb{Z}^d$ .

Možemo pisati i u sljedećem obliku

$$B(a,b) = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i].$$

Vidimo da se iz same definicije pravokutnika $B(a,b)$ bridovi prirodno nasljeđuju od rešetke $\mathbb{L}^d$ te ga možemo shvaćati kao podgraf rešetke $\mathbb{L}^d$. Pojam pravokutnika uveli smo iz razloga što ćemo ponekad morati aproksimirati beskonačnu rešetku $\mathbb{L}^d$ velikim konačnim podskupom od $\mathbb{L}^d$. S $B(n) = [-n,n]^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| \leq n\}$ označimo kvadrat čija je duljina stranice $2n$ i središte mu je u ishodištu. Primjetimo da $B(n)$ možemo nadopuniti do grafa tako da mu dodavamo bridove koje nasljeđuje iz $\mathbb{L}^d$. S $B(n,x)$ označavamo kvadrat čija je duljina stranice $2n$, a središte u vrhu $x \in \mathbb{Z}^d$.

## 2.2 Kritični fenomen

U motivacijskim primjera zaključili smo da je jedno od važnih pitanja upravo postojanje beskonačnog klastera otvorenih bridova te zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 2.2.1.** ***Perkolacijsku vjerojatnost*** *$\theta(p)$ definiramo kao $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(x)| = \infty)$. Drugim riječima, ona je vjerojatnost da proizvoljan vrh pripada beskonačnom klasteru otvorenih bridova.*

Dana definicija ne ovisi o izboru vrha zbog translacijske invarijantnosti rešetke i vjerojatnosne mjere. Bez smanjenja općenitosti promatrat ćemo ishodište. Tada perkolacijsku vjerojatnost možemo izraziti kao $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$. Alternativno, možemo pisati $\theta(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = n)$ . Lako vidimo da vrijedi $|C| = \infty$ ako i samo ako postoji beskonačan niz $x_0, x_1, x_2, ...$ različitih vrhova takvih da $x_0 = 0$ i $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je otvoren za svaki $i$. Primijetimo kako je $\theta(p)$ neopadajuća funkcija od $p$ koja zadovoljava sljedeće $\theta(0) = 0$ i $\theta(1) = 1$. Kako se vjerojatnost $p$ povećava tako dolazimo do povećanog broja otvorenih bridova pa tako i do povećanja broja i duljine otvorenih puteva koji sadrže ishodište. Monotonost te $\theta(0) = 0$ i $\theta(1) = 1$ osigurava postojanje kritične vjerojatnosti $p_c(d) = p_c$ takve da

$$\theta(p) \begin{cases} = 0, & p < p_c \\ > 0, & p > p_c \end{cases}.$$

**Definicija 2.2.2.** ***Kritična vjerojatnost*** *$p_c(d)$ je definirana kao $p_c(d) = sup\{p : \theta(p) = 0\}$.*

Promotrimo slučajeve za različite dimenzije $d$ . Slučaj $d = 1$ nije zanimljiv, zato što je jasno ako je $p < 1$ da će tada postojati beskonačno mnogo zatvorenih bridova lijevo

i desno od ishodišta u $\mathbb{L}^1$. Dakle, sigurno neće postojati beskonačan klaster otvorenih bridova. Vrijedi $\theta(p) = 0$ za $p < 1$ i $p_c(1) = 1$. Situacija je kompliciranija u više dimenzija te ćemo u nastavku promatrati što se tada događa.
Na prirodan način možemo $d$-dimenzionalnu rešetku $\mathbb{L}^d$ uložiti u $d + 1$-dimenzionalnu rešetku $\mathbb{L}^{d+1}$ tako da projiciramo $\mathbb{L}^{d+1}$ na potprostor generiran sa prvih $d$ koordinata. Za neki fiksni $p$ ishodište od $\mathbb{L}^{d+1}$ pripada beskonačnom klasteru otvorenih bridova kada god ono pripada beskonačnom klasteru otvorenih bridova podrešetke $\mathbb{L}^d$. Pošto je $\theta(p) = \theta_d(p)$ neopadajuća funkcija od $d$ , slijedi da je $p_c(d + 1) \leq p_c(d)$ za $d \geq 1$ .

**Definicija 2.2.3.** ***Konstanta povezanosti*** *$\lambda(d)$ od $\mathbb{L}^d$ dana je kao*

$$\lambda(d) = \lim_{n\to\infty}(\sigma(n)^{\frac{1}{n}}).$$

**Teorem 2.2.4.** *Ako je $d \geq 2$ tada je $0 < p_c(d) < 1$ .*

Suština teorema je kako u dvije ili više dimenzija imamo dvije faze procesa. U subkritičnoj fazi kada je $p < p_c(d)$, svaki vrh je gotovo sigurno u konačnom otvorenom klasteru. U tom slučaju svaki otvoreni klaster je gotovo sigurno konačan. U superkritičnoj fazi kada je $p > p_c(d)$, svaki vrh ima strogo pozitivnu vjerojatnost da je dio beskonačnog otvorenog klastera. Pretpostavimo da vrijedi $p = p_c(d)$. Tada postoji beskonačan otvoren klaster ako i samo ako vrijedi $\theta(p_c(d)) > 0$. Pitamo se postoji li takav otvoreni klaster za općenitu dimenziju $d$.

*Dokaz.* Pokazali smo kako vrijedi $p_c(d + 1) \leq p_c(d)$ te je dovoljno pokazati $p_c(d) > 0$ za svaki $d \geq 2$ i $p_c(2) < 1$.
Prvo ćemo pokazati $p_c(d) > 0$ za svaki $d \geq 2$ . Promotrit ćemo veznu perkolaciju na $\mathbb{L}^d$ kada $d \geq 2$ . Trebamo pokazati da je $\theta(p) = 0$ kada je $p$ dovoljno blizu nule. Neka je $\sigma(n)$ broj puteva u $\mathbb{L}^d$ sa duljinom $n$ i početnom točkom u ishodištu, a $N(n)$ broj takvih puteva ali koji su otvoreni. Da bi taj put bio otvoren tada bi svaki brid od njih $n$ trebao biti otvoren, a znamo da je vjerojatnost da je brid otvoren jednaka $p$. Zaključujemo da je takav put otvoren s vjerojatnošću $p^n$. Dobivamo,

$$\mathbb{E}_p(N(n)) = p^n\sigma(n).$$

Nadalje, ako ishodište pripada beskonačnom otvorenom klasteru tada postoje otvoreni putevi svih duljina koja počinju u ishodištu takva da

$$\theta(p) \leq \mathbb{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbb{E}_p(N(n)) = p^n\sigma(n), \tag{2.1}$$

za svaki $n$. Ograničimo odozgo $\sigma(n)$. Prvi korak kreće iz ishodišta te ono ima $2d$ susjednih vrhova te za svaki idući korak, njih sveukupno $n-1$, imamo $2d-1$ susjeda. Time dolazimo do sljedeće gornje ograde

$$\sigma(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1}, n \geq 1. \tag{2.2}$$

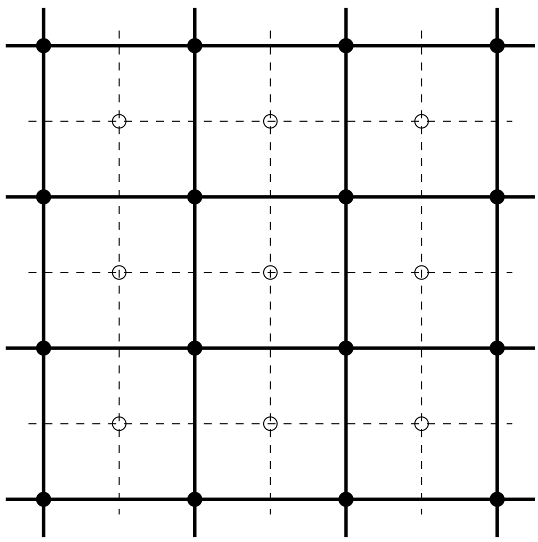
Iz (2.1) i (2.2) dobivamo

$$\theta(p) \leq p^n \sigma(n) \leq p^n 2d(2d-1)^{n-1} \leq (2dp)^n. \tag{2.3}$$

Neka je $p \in [0, \frac{1}{2d}\rangle$ i $n \to \infty$ te kada to uvrstimo u (2.3) zaključujemo da vrijedi $\theta(p) = 0$. Dobivamo

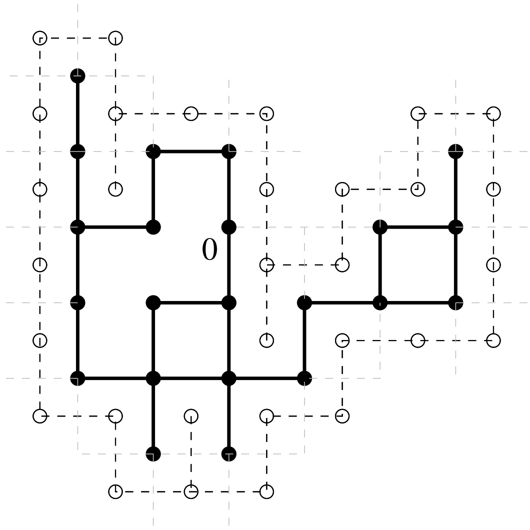
$$p_c(d) \geq \frac{1}{2d} > 0.$$

Sada ćemo pokazati $p_c(2) < 1$. Kako bi to dokazali potrebno je uvesti pojam dualnog grafa. Promatramo veznu perkolaciju u $\mathbb{L}^2$ . Neka je $G$ planarni graf takav da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Planarni dual od $G$ dobivamo na sljedeći način. Stavljamo vrh na svaku stranu od $G$, uključujući i beskonačnu ako ona postoji, te spojimo dva takva vrha bridom kada pripadne strane imaju zajednički brid od $G$ što možemo vidjeti na Slici 2.1.



Slika 2.1: Dio kvadratne rešetke $\mathbb{L}^2$ sa dualom.

Za vrhove planarnog grafa uzimamo skup $\{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{Z}^2\}$. Spojimo takva dva susjedna vrha ravnom crtom u $\mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da je otvoreni klaster u ishodištu od $\mathbb{L}^2$ konačan kao što je prikazano na Slici 2.2 .




Slika 2.2: Konačan otvoren klaster u ishodištu okružen zatvorenim ciklusom u dualnoj rešetci.

Vidimo da je ishodište okruženo zatvorenim bridovima koji blokiraju sve moguće puteve od ishodišta prema beskonačnosti. Zaključujemo da pripadni bridovi dualne rešetke tvore zatvoreni ciklus te da ono sadrži ishodište od $\mathbb{L}^2$ u svojoj unutrašnjosti. Primjetimo da vrijedi i obrat, odnosno ako je ishodište u unutrašnjosti zatvorenog ciklusa tada je otvoren klaster u ishodištu konačan. Odnosno, $|C| < \infty$ ako i samo ako ishodište od $\mathbb{L}^2$ leži u unutrašnjosti nekog zatvorenog ciklusa dualne rešetke. Neka je $\rho(n)$ broj ciklusa u dualu duljine $n$ koje u svojoj unutrašnjosti sadrže ishodište od $\mathbb{L}^2$. Jasno je da svaki takav ciklus prolazi kroz vrh oblika $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ za $0 \leq k < n$. On prolazi vrhom oblika $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ za neki $k \geq 0$ , ali ne može prolaziti tim vrhovima kada je $k \geq n$ zato što bi tada ciklus imao duljinu barem $2n$. Svaki ciklus duljine $n$ sadrži put duljine $n-1$ koji počinje u vrhu oblika $(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gdje je $0 \leq k < n$. Broj takvih puteva je najviše $n\sigma(n-1)$ pa dobivamo

$$\rho(n) \leq n\sigma(n-1). \tag{2.4}$$

Neka je $\gamma$ ciklus u dualu koji u svojoj unutrašnjosti sadrži ishodište od $\mathbb{L}^2$ te neka je $M(n)$ broj takvih ciklusa koji su duljine $n$. Iz definicije konstante povezanosti imamo $\sigma(n) = (\lambda(d) + o(1))^n$ kako $n \to \infty$. Uvrstimo li to u (2.1) dolazimo do

$$\theta(p) \leq (p\lambda(d) + o(1))^n$$

te ono teži u nulu ako $p\lambda(d) < 1$ kada $n \to \infty$. Neka je $q = 1 - p$. Tada iz (2.4) slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ je zatvoren}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n n\sigma(n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} qn(q\lambda(2) + o(1))^{n-1} \\ &< \infty \quad \text{ako je } q\lambda(2) < 1.\end{aligned}$$

Štoviše, za $q < \frac{1}{2\lambda(2)}$ vrijedi

$$\sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ je zatvoren}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} qn(q\lambda(2) + o(1))^{n-1} \leq q \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2} + o(1))^{n-1}.$$

Iz čega možemo zaključiti

$$\sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ je zatvoren}) \to 0 \text{ kako } q = 1 - p \downarrow 0.$$

Možemo naći $\pi$ takav da $0 < \pi < 1$ te da zadovoljava

$$\sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ je zatvoren}) \leq \frac{1}{2} \text{ ako je } p > \pi.$$

Iz svega navedenog, te primjenom $\sigma$-subaditivnosti slijedi,

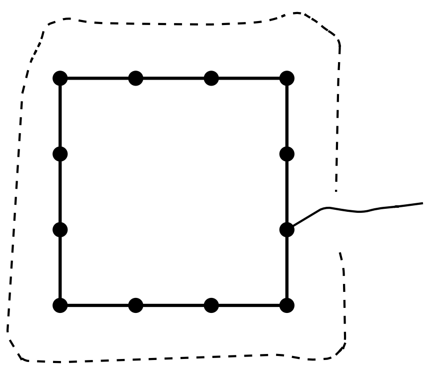
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(|C| = \infty) &= \mathbb{P}_p(M(n) = 0 \quad \text{za svaki} \quad n) \\ &= 1 - \mathbb{P}_p(M(n) \geq 1 \quad \text{za neki} \quad n) \\ &\geq 1 - \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ je zatvoren}) \\ &\geq \frac{1}{2} \quad \text{ako } p > \pi,\end{aligned}$$

što nam daje $p_c(2) \leq \pi$. Pokažimo sada da vrijedi $p_c(2) \leq 1 - \lambda(2)^{-1}$. Neka je $m$ pozitivan cijeli broj. Neka je $F_m$ događaj kada postoji zatvoreni dualni ciklus koji sadrži pravokutnik

$B(m)$ u svojoj unutrašnjosti, te neka je $G_m$ događaj kada su svi bridovi od $B(m)$ otvoreni. Jasno je da su ta dva događaja nezavisna, zato što su definirana na disjunktnim skupovima bridova. Vrijedi

$$\mathbb{P}_p(F_m) \leq \mathbb{P}_p(\sum_{n=4m}^{\infty} M(n) \geq 1) \leq \sum_{n=4m}^{\infty} q^n n\sigma(n-1). \tag{2.5}$$

Kao i prije, ako je $q < \lambda(2)^{-1}$, možemo pronaći $m$ takav da je $\mathbb{P}_p(F_m) < \frac{1}{2}$ te prema tome određujemo $m$. Pretpostavimo da se događaj $G_m$ dogodio, ali događaj $F_m$ nije. Kao što i vidimo na Slici 2.3, ako se ne dogodi događaj $F_m$ to povlači da neki vrh od $B(m)$ leži u beskonačnom otvorenom putu.



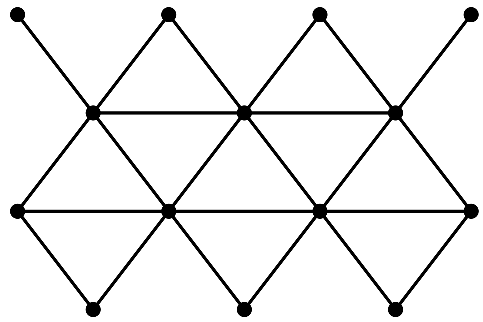
Slika 2.3: Ako ne postoji zatvoreni dualni ciklus koji okružuje $B(m)$ , tada neki vrh od $B(m)$ leži u beskonačnom otvorenom putu.

Dobivamo da vrijedi $|C| = \infty$ . Štoviše, koristeći nezavisnost od $F_m$ i $G_m$ slijedi

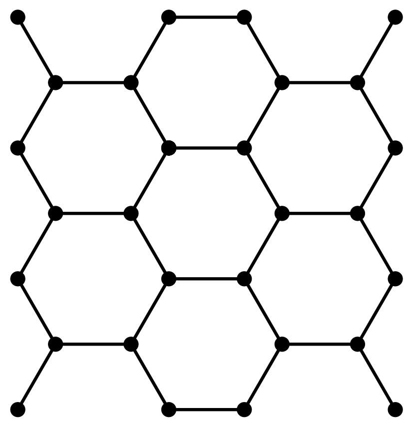
$$\theta(p) \geq \mathbb{P}_p(\overline{F_m} \cap G_m) = \mathbb{P}_p(\overline{F_m})\mathbb{P}_p G_m \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_p(G_m) > 0$$

ako je $q < \lambda(2)^{-1}$. Upravo smo dokazali tvrdnju koju smo i htjeli. □

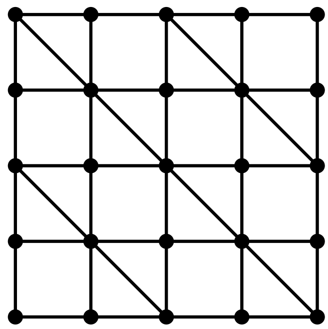
Poznate su točne vrijednosti kritičnih vjerojatnosti na dvodimenzionalnoj rešetci za neke specifične vrste rešetke. Do sada smo spominjali samo kvadratnu vrstu rešetke. Rezultati o vrijednosti kritične vjerojatnosti poznati su za trokutastu, heksagonsku i bow-tie vrstu rešetke koje su tim redom prikazane na Slikama 2.4,2.5 i 2.6 .



Slika 2.4: Trokutasta vrsta rešetke



Slika 2.5: Heksagonska vrsta rešetke



Slika 2.6: Bow-tie vrsta rešetke

U sljedećoj tablici prikazani su poznati rezultati

| vrsta rešetke | $p_c$ |
|---|---|
| kvadratna | $\frac{1}{2}$ |
| trokutasta | $2\sin(\pi/18)$ |
| heksagonska | $1-2\sin(\pi/18)$ |
| bow-tie | $p_c(bow-tie)$ |

gdje je $p_c(bow-tie)$ jedinstven korijen u intervalu $(0,1)$ jednadžbe

$$1-p-6p^2+6p^3-p^5=0.$$

## 2.3 Glavna pitanja

U prijašnjem poglavlju bavili smo se samo jednim od glavnih pitanja u teoriji perkolacije. U ovom poglavlju navest ćemo još nekoliko glavnih pitanja i njihove odgovore ako su poznati, a neke ćemo i dokazati u sljedećim poglavljima. Promatramo veznu perkolaciju na $\mathbb{L}^d$, gdje je $d \geq 2$. Interesira nas veličina i oblik otvorenog klastera ako znamo da vjerojatnost $p$ varira između 0 i 1 i označava vjerojatnost da je brid otvoren. Preciznije, zanima nas postojanje otvorenog beskonačnog klastera.

**Definicija 2.3.1.** ***Srednju vrijednost otvorenog klastera u ishodištu*** *definiramo kao*

$$\chi(p)=\mathbb{E}_p|C|.$$

Koristeći invarijantnost na translaciju dobivamo da vrijedi $\chi(p)=\mathbb{E}_p|C(x)|$ za svaki vrh $x$. Veličina $\chi(p)$ predstavlja prosječan broj vrhova otvorenog klastera u ishodištu i njega možemo izraziti u terminima distribucije od $|C|$ na sljedeći način,

$$\begin{aligned}\chi(p) &= \infty \cdot \mathbb{P}_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C| = n)\\ &= \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C| = n).\end{aligned}$$

Odakle možemo zaključiti da je $\chi(p) = \infty$ kada $p > p_c$. Obrnuti slučaj, kada je $\chi(p) < \infty$ ako $p < p_c$, nije očit. Kod veličina $\chi$ i $\theta$ pojavljuje se kritično ponašanje u istoj vrijednosti $p = p_c$. Preciznije, postoje točno dvije faze procesa koje ovise o odnosu vjerojatnosti $p$ i kritične vjerojatnosti $p_c$. Kada vrijedi $p < p_c$ proces se nalazi u subkritičnoj fazi. Nadalje, kada vrijedi $p > p_c$ proces se nalazi u superkritičnoj fazi, a kada vrijedi je $p = p_c$ proces se nalazi u stanju kritične točke.
Glavna otvorena pitanja nalazimo u slučaju kada se proces nalazi u stanju kritične točke. Postoji li beskonačan otvoren klaster u slučaju kada je $p = p_c$? Poznato je da u slučajevima $d = 2$ i $d \geq 19$ ne postoji takav otvoren beskonačan klaster. Pretpostavimo da ne postoji beskonačni otvoreni klaster za $p_c$. Tada vrijedi $\theta(p_c) = 0$. Interesira nas kako se ponaša veličina $\mathbb{P}_{p_c}(|C| = n)$. Vjeruje se da vrijedi

$$\mathbb{P}_{p_c}(|C| \geq n) \approx n^{-\frac{1}{\delta}} \quad n \to \infty$$

gdje je $\delta = \delta(d) > 0$.
Promatramo slučaj kada je proces blizu kritične točke. Pitamo se kako se ponašaju veličine $\chi$ i $\theta$ kada $p$ teži ka $p_c$ odozgo (ili odozdo). Vjeruje se da se te veličine ponašaju kao potencije od $|p - p_c|$. Ova tvrnja nije dokazana te ona predstavlja otvoren problem teorije perkolacije. Potrebno je dokazati postojanje sljedećih limesa

$$\gamma = -\lim_{p \uparrow p_c} \frac{\log \chi(p)}{\log |p - p_c|},$$

$$\beta = \lim_{p \uparrow p_c} \frac{\theta(p)}{\log |p - p_c|}$$

i

$$\delta^{-1} = -\lim_{n \to \infty} \frac{\log \mathbb{P}_{p_c}(|C| \geq n)}{\log n}.$$

Veličine $\gamma, \beta$ i $\delta$ zovu se kritični eksponenti.

# Poglavlje 3

# Broj otvorenih klastera po vrhu

## 3.1 Definicija

**Definicija 3.1.1.** ***Broj otvorenih klastera po vrhu*** *definiramo kao*

$$\kappa(p) = \mathbb{E}_p(|C|^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}_p(|C| = n), \tag{3.1}$$

*gdje je $|C|$ broj vrhova otvorenih klastera koji sadrže ishodište.*

Neka je $B(n)$ kvadrat sa središtem u ishodištu i stranicom duljine $2n$. Promatramo ga kao graf dodavajući mu bridove koje nasljeđuje iz $\mathbb{L}^d$. Neka je $K_n$ broj otvorenih klastera od $B(n)$. Preciznije, $K_n$ je broj komponenta povezanosti sadržanih u $B(n)$ dobivene brisanjem svih zatvorenih bridova. Pokazuje se da je $K_n$ aproksimativno linearna funkcija volumena od $B(n)$. Drugim riječima $K_n|B(n)|^{-1}$ teži ka netrivijalnom limesu kada $n \to \infty$. Upravo je to tvrdnja sljedećeg teorema.

**Teorem 3.1.2.** *Pretpostavimo $0 \leq p \leq 1$. Broj otvorenih klastera $K_n$ po vrhu od $B(n)$ zadovoljava*

$$\frac{1}{|B(n)|} K_n \to \kappa(p) \text{ kada } n \to \infty, \mathbb{P}_p\text{-g.s. i u } L^1(\mathbb{P}_p).$$

*Dokaz.* Za $x \in B(n)$ definiramo $C_n(x)$ kao otvoren klaster od $B(n)$ koji sadrži vrh $x$. Preciznije, obrišemo li sve zatvorene bridove od $B(n)$ tada je $C_n(x)$ komponenta povezanosti tog grafa koja sadrži vrh $x$. Kao i inače, $|C_n(x)|$ predstavlja broj vrhova od $C_n(x)$.
Za svaki $x \in \mathbb{Z}^d$ definiramo $\Gamma(x)$ tako da

$$\Gamma(x) = \begin{cases} |C(x)|^{-1}, & \text{ako je } |C(x)| < \infty \\ 0, & \text{ako je } |C(x)| = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Za $x \in B(n)$ definiramo $\Gamma_n(x)$ tako da

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{|C_n(x)|}. \tag{3.3}$$

Jasno je da vrijedi

$$|C(x)| \geq |C_n(x)| \text{ za sve } x \in B(n). \tag{3.4}$$

Iz (3.2),(3.3) i (3.4) slijedi

$$\Gamma(x) \leq \Gamma_n(x) \text{ za sve } x \in B(n). \tag{3.5}$$

Odredimo čemu je jednaka sljedeća suma

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x). \tag{3.6}$$

Neka je $\Sigma$ otvoren klaster od $B(n)$. Svaki vrh $x$ od $\Sigma$ doprinosi $|\Sigma|^{-1}$ sumi (3.6) pa je ukupan doprinos vrhova iz otvorenog klastera $\Sigma$ toj sumi jednak 1. Dakle, svaki otvoren klaster od $B(n)$ doprinosi 1 toj sumi, a broj otvorenih klastera od $B(n)$ jednak je $K_n$. Pokazali smo da vrijedi

$$\sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) = K_n. \tag{3.7}$$

Iz (3.4) i (3.7) dobivamo

$$\frac{1}{|B(n)|} K_n = \frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) \geq \frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x). \tag{3.8}$$

Nadalje, $(\Gamma(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$ je familija ograničenih funkcija međusobno nezavisnih bridova. Ona je i stacionarna u odnosu na translacije po rešetci $\mathbb{L}^d$. Iz teorema ergodičnosti slijedi

$$\frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) \to \mathbb{E}_p(\Gamma(0)) \text{ (g.s.)} \tag{3.9}$$

kada $n \to \infty$, što nam daje

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{|B(n)|} K_n \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{|B(n)|} \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) = \mathbb{E}_p(\Gamma(0)) = \kappa(p) \text{ (g.s.)}. \tag{3.10}$$

Konstruirajmo sada gornju ogradu za $K_n$. Iz (3.5) dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B(n)} \Gamma_n(x) &= \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x \in B(n)} (\Gamma_n(x) - \Gamma(x)) \\ &\leq \sum_{x \in B(n)} \Gamma(x) + \sum_{x : x \leftrightarrow \partial B(n)} \Gamma_n(x), \end{aligned}$$

gdje zadnja suma ide po svim vrhovima $x$ iz $B(n)$ koji su spojeni otvorenim putem s rubom $\partial B(n) = \{y \in B(n) : ||y|| = n\}$ od $B(n)$. Kada god ne postoji otvoreni put koji spaja vrh $x$ sa nekim vrhom od $\partial B(n)$ vrijedi $C_n(x) = C(x)$. Štoviše, tada vrijedi $\Gamma_n(x) = \Gamma(x)$. Druga suma u posljednjoj nejednakosti jednaka je broju otvorenih klastera od $B(n)$ koji imaju neprazan presjek s $\partial B(n)$. Zbog toga broj tih otvorenih klastera nije veći od kardinaliteta $|\partial B(n)|$. Iz (3.9) i činjenice da $\frac{|\partial B(n)}{|B(n)|} \to 0$ kada $n \to \infty$ slijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(n)|}\sum_{x\in B(n)}\Gamma_n(x) &\leq \frac{1}{|B(n)|}\left(\sum_{x\in B(n)}\Gamma(x)) + \frac{|\partial B(n)|}{|B(n)|}\right)\\ &\to \kappa(p) \text{ (g.s.)},\end{aligned}$$

kada $n \to \infty$. Kombinirajući (3.7) i (3.10) dobivamo

$$\frac{1}{|B(n)|}K_n \to \kappa(p) \text{ (g.s.)} \tag{3.11}$$

kada $n \to \infty$. Iz $0 \leq K_n|B(n)|^{-1} \leq 1$ slijedi konvergencija i u $L^1$, zato što možemo primjeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Tada dobijemo

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_p\left(\frac{K_n}{|B(n)|}\right) = \mathbb{E}_p(\kappa(p)) = \kappa(p).$$

Time slijedi tvrdnja

$$\frac{K_n}{|B(n)|} \to \kappa(p) \text{ u } L^1(\mathbb{P}_p).$$

□

## 3.2 Životinje

Veličine $\theta$, $\chi$ i $\kappa$ možemo prikazati s obzirom na distribuciju od $|C|$, a ono predstavlja broj vrhova otvorenog klastera u ishodištu. Kako bi izračunali ili procjenili tu distribuciju potrebno je primijeniti kombinatoriku.

**Definicija 3.2.1.** ***Životinja*** *je konačan povezan podgraf od $\mathbb{L}^d$ koji sadrži ishodište.*

**Definicija 3.2.2.** ***Bridovna granica*** *$\Delta A$ je skup bridova od $\mathbb{L}^d$ koji ne pripadaju $A$, ali imaju barem jedan vrh u $A$.*

Skup životinja $A$ za koje vrijedi $|A_v| = n$, $|A_e| = m$ i $|\Delta A| = b$ označavamo s $\mathcal{A}_{nmb}$. Neka je $a_{nmb} = |\mathcal{A}_{nmb}|$ broj takvih životinja. Svaki vrh od $A$ incidentan je s najviše $2d$ bridova koji nisu u $A$ pa možemo pretpostaviti da vrijedi

$$1 \leq b \leq 2dn. \tag{3.12}$$

Svaki povezan graf s $n$ vrhova ima najmanje $n-1$ bridova te zaključujemo da broj bridova životinje $A$, u oznaci $m$, mora biti veći ili jednak $n-1$. Svaki vrh od $A$ ima najviše $2d$ susjednih vrhova u $A$. Iz prethodnih zaključaka slijedi

$$n - 1 \leq m \leq 2d. \tag{3.13}$$

Neka je $\mathcal{A}$ skup svih životinja u $\mathbb{L}^d$. Otvoren klaster $C$ je slučajna životinja i vrijedi

$$\mathbb{P}_p(C = A) = p^m(1-p)^b, \tag{3.14}$$

za svaki $A \in \mathcal{A}$. Vjerojatnost da $C$ sadrži točno $n$ vrhova je

$$\mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb} p^m (1-p)^b. \tag{3.15}$$

Iz čega vidimo da nam je potrebno pronaći funkciju izvodnicu za broj životinja kako bi mogli izračunanti distribuciju od $|C|$. Iz (3.12) i (3.13) vidimo da je gornji razvoj u red od $\mathbb{P}_p(|C| = n)$ konačan. Preciznije, $\mathbb{P}_p(|C| = n)$ je polinom od $p$ konačnog stupnja. Kako bi dokazali diferencijabilnost veličine $\kappa(p)$, za koju vrijedi

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}_p(|C| = n),$$

prvo ćemo proučiti ponašanje od $a_{nmb}$ kada su $n$, $m$ i $b$ veliki.
Neka je $0 < p = 1 - q < 1$. Deriviranjem (3.15) s obzirom na $p$ dobivamo

$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb}\Big(\frac{m}{p} - \frac{b}{q}\Big)p^m q^b. \tag{3.16}$$

Za veliki $n$ ponašanje gornje sume ovisi o ponašanju $p^{-1}|A_e| - q^{-1}|\Delta A|$.

**Teorem 3.2.3.** *Postoji $\epsilon > 0$ takav da, za $0 < x < \epsilon$,*

$$\sum_{m,b:|\frac{m}{p}-\frac{b}{q}|>dxn} a_{nmb} p^m q^b \leq 3d^2 n^2 \exp\Big(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q\Big), \tag{3.17}$$

*za $n \geq 1$ i $0 < p = 1 - q < 1$.*

Koristeći (3.15) možemo (3.17) zapisati u terminima vjerojatnosti na sljedeći način

$$\mathbb{P}_p(|h(C)| > dxn, |C| = n) \leq 3d^2 n^2 \exp\Big(-\frac{1}{3} n x^2 p^2 q\Big), \tag{3.18}$$

za sve $n$ i dovoljno mali $x$, gdje je

$$h(C) = \frac{1}{q}|\Delta C| - \frac{1}{p}|C_e|,$$

ako je $C_e$ skup vrhova od $C$, a $\Delta C$ bridovna granica od $C$. Vjerojatnost (3.18) ide u 0 kada $n \to \infty$. Štoviše, za velike $n$ vjerojatnost da je $h(C)$ usporediv s veličinom od $C$ također je velika.

*Dokaz.* Prvo ćemo dokazati da ukupan broj životinja s $n$ vrhova zadovoljava

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq 7^{dn} \text{ za sve } n. \tag{3.19}$$

Iz (3.15) i definicije vjerojatnosti koja nam govori da ona ne poprima vrijednost veću od 1 vrijedi

$$\mathbb{P}_p(|C| < \infty) = \sum_{m,b} a_{nmb} p^m (1-p)^b \leq 1, \tag{3.20}$$

gdje je $0 \leq p = 1 - q \leq 1$. Kada primijenimo (3.12) i (3.13) na (3.20) dobivamo sljedeće

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq p^{-m} q^{-b} \leq p^{-dn} q^{-2dn} = (pq^2)^{-dn}. \tag{3.21}$$

Koristeći (3.12) i (3.13) za svaki fiksni $n$ i za sve vrijednosti $p$ dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{m,b} a_{nmb} p^m q^b &\geq \sum_{m,b} a_{nmb} p^{dn} q^{2dn} \\ &= (pq^2)^{dn} \sum_{m,b} a_{nmb}. \end{aligned}$$

Iskoristimo (3.21) i dobivamo da za svaki $p$ vrijedi

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq (pq^2)^{-dn}. \tag{3.22}$$

Biramo $p$ tako da maksimiziramo $pq^2 = p(1-p)^2$, time dobijemo

$$\sum_{m,b} a_{nmb} \leq \left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2\right)^{-dn} = \left(\frac{4}{27}\right)^{-dn} = \left(\frac{27}{4}\right)^{dn} \leq 7^{dn}.$$

Dokazali smo (3.19). Dokažimo sada tvrdnju teorema. Iz (3.20) za svaki $n, m, b$ i svaki $p$ vrijedi $a_{nmb} p^m (1-p)^b \leq 1$. Možemo odabrati $p = m(m+b)^{-1}$ i $q = b(m+b)^{-1}$ te dobivamo

$$a_{nmb} \leq p^{-m} q^{-b} = \left(\frac{m+b}{m}\right)^m \left(\frac{m+b}{b}\right)^b \text{ za } n \geq 2. \tag{3.23}$$

Desna strana je gornja ograda od broja životinja s $m$ bridova i $b$ bridovnih granica. Za fiksni $n \geq 2$ iz (3.23), (3.12) i (3.13) slijedi

$$\sum_{m,b:|\frac{m}{p}-\frac{b}{q}|>dxn} a_{nmb}p^m q^b \leq \sum_{m,b:|\frac{m}{p}-\frac{b}{q}|>dxn} \left(\frac{m+b}{m}\right)^m \left(\frac{m+b}{b}\right)^b p^m q^b \leq 2d^2n^2 max(f(m,b)), \quad (3.24)$$

gdje je za sve $m$ i $b$ koji zadovoljavaju (3.12), (3.13) i $|mq - bp| > dxnpq$, $f(m,b)$ definiran kao

$$f(m,b) = \left(\frac{(m+b)p}{m}\right)^m \left(\frac{(m+b)q}{b}\right)^b.$$

Kada primijenimo (3.13) dobijemo da je to maksimum za sve $m$ i $b$ koji zadovoljavaju $|mq - bp| \geq xmpq$. Fiksirajmo $m$ i neka je $f(m,y)$ funkcija neprekidne varijable $y$. Neka je

$$\begin{aligned} g_m(y) &= \log f(m,y) \\ &= m\log\left(\frac{(m+y)p}{m}\right) + y\log\left(\frac{(m+y)q}{y}\right). \end{aligned}$$

Deriviranjem $g_m$ po varijabli $y$ dobivamo

$$\begin{aligned} g'_m(y) &= m\frac{m}{(m+y)p}\frac{p}{m} + \log\left(\frac{(m+y)q}{y}\right) + y\frac{y}{(m+y)q}\frac{qy-(m+y)q}{y^2} \\ &= \frac{m}{m+y} + \log\left(\frac{(m+y)q}{y}\right) - \frac{m}{m+y} \\ &= \log\left(\frac{(m+y)q}{y}\right) = \log\left(\frac{y-y+(m+y)q}{y}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{mq+yq-y}{y}\right) = \log\left(1 + \frac{mq+y(q-1)}{y}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{mq-yp}{y}\right). \end{aligned}$$

Iz čega slijedi da je funkcija $g_m$ rastuća funkcija u varijabli $y$ ako $mq - yp > 0$, a padajuća funkcija u varijabli $y$ ako je $mq - yp < 0$. Maksimum od $g_m(y)$ za vrijednost $y$ za koju vrijedi $|mq - yp| \geq xmpq$ postiže se kada $mq - yp = xmpq$ ili $mq - yp = -xmpq$. Kada raspišemo ove dvije mogućnosti dobivamo

$$-yp = \pm xmpq - mq,$$

iz čega slijedi

$$yp = mq \pm xmpq$$

i konačno dobivamo

$$y = mqp^{-1}(1 \pm xp).$$

Uvrstimo ove dvije vrijednosti u funkciju $g_m(y)$ te kada razvijemo logaritam slijedi

$$\begin{aligned}
g_m(y) &= m\log\left(\frac{(m + mqp^{-1}(1 \pm xp))p}{m}\right) + mqp^{-1}(1 \pm xp)\log\left(\frac{(m + mqp^{-1}(1 \pm xp))q}{mqp^{-1}(1 \pm xp)}\right)\\
&= m\log(p + q(1 \pm xp) + mqp^{-1}(1 \pm xp)\log\left(\frac{1 + qp^{-1}(1 \pm xp)}{p^{-1}(1 \pm xp)}\right)\\
&= m\log(p + q \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp)\log\left(\frac{p + q(1 \pm xp)}{1 \pm xp}\right)\\
&= m\log(1 - q + q \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp)\log\left(\frac{1 - q + q \pm xpq}{1 \pm xp}\right)\\
&= m\log(1 \pm xpq) + mqp^{-1}(1 \pm xp)\log\left(\frac{1 \pm xpq}{1 \pm xp}\right)\\
&= -\frac{1}{2}mx^2p^2q(1 + O(x)),
\end{aligned}$$

gdje $O(x)$ ne ovisi o $m$ ili $p$. Pokazali smo da za fiksne $m$ i $n$ ( $\geq 2$) koji zadovoljavaju $m \leq dn$ i za sve male pozitivne vrijednosti od $x$ vrijedi

$$max(f(m, b) : |mp^{-1} - bq^{-1}| > dxn) \leq \exp\left(-\frac{1}{3}mx^2p^2q\right). \tag{3.25}$$

Uvrstimo to u (3.24) i ako iskoristimo (3.13) dobivamo da za sve male pozitivne vrijednosti od $x$-a vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{m,b:|\frac{m}{p}-\frac{b}{q}|>dxn} a_{nmb}p^mq^b &\leq 2d^2n^2 max\left(\exp\left(-\frac{1}{3}mx^2p^2q\right) : m \geq n-1\right)\\
&\leq 3d^2n^2\exp\left(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\right) \text{ ako je } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Preostalo nam je dokazati da tvrdnja vrijedi u slučaju kada je $n = 1$, ali detalje tog dijela dokaza ćemo izostaviti. □

## 3.3 Diferencijabilnost od $\kappa$

Pokazat ćemo diferencijabilnost funkcije $\kappa$ od $p$ na segmentu $[0, 1]$.

**Teorem 3.3.1.** *Broj otvorenih klastera po vrhu je neprekidno diferencijabilna funkcija od p na segmentu [0,1].*

Iz definicije od $\kappa(p)$ znamo da vrijedi

$$\kappa(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}_p(|C| = n). \tag{3.26}$$

Želimo dokazati da možemo derivirati $\kappa$. Drugim riječima, želimo pokazati da vrijedi

$$\kappa'(p) = \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} a_{nmb}(mp^{m-1}q^b - bp^m q^{b-1}). \tag{3.27}$$

*Dokaz.* Derivirajmo (3.26) član po član i dobit ćemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n).$$

Prvo ćemo pokazati da taj red uniformno kovergira za vrijednosti $p$ koje se nalaze u svakom segmentu oblika $[p_1, p_2]$ gdje je $0 < p_1 < p_2 < 1$. Pretpostavimo da je $0 < p = 1 - q < 1$. Tada iz (3.16) znamo da vrijedi

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) = \sum_{m,b} a_{nmb} \left( \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right) p^m q^b.$$

Razdvojimo sumu na dva slučaja ovisno o tome je li $|mp^{-1} - bq^{-1}| > dxn$ ili nije.
Kada je $|mp^{-1} - bq^{-1}| > dxn$, koristeći (3.12) i (3.13) dobivamo sljedeću nejednakost

$$\left| \frac{m}{p} - \frac{b}{q} \right| \leq \frac{m+b}{pq} \leq \frac{3dn}{pq}.$$

Iskoristimo rezultat Teorema (3.2.3). Kada je $x$ mali vrijedi

$$\left| n^{-1} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(|C| = n) \right| \leq dx \mathbb{P}_p(|C| = n) + \left( \frac{3d}{pq} \right) 3d^2 n^2 \exp\left( -\frac{1}{3} n x^2 p^2 q \right).$$

Stavimo da je $x = a\sqrt{\frac{\log n}{n}}$ za $n \geq N \geq 3$. Funkcija $f(x) = \frac{\log x}{x}$ je padajuća funkcija za $x > e$ jer je njena derivacija negativna na tom intervalu. Primjenimo li da je to padajuća funkcija dobijemo sljedeću nejednakost

$$\begin{aligned} dx \mathbb{P}_p(|C| = n) &= da \sqrt{\frac{\log n}{n}} \mathbb{P}_p(|C| = n) \\ &\leq da \sqrt{\frac{\log N}{N}} \mathbb{P}_p(|C| = n). \end{aligned}$$

Neka je $\gamma = \gamma(p, d) = \frac{9d^3}{pq} < \infty$ i $\eta = \eta(p) = \frac{1}{3}p^2 q > 0$ tada vrijedi

$$\begin{aligned}\Big(\frac{3d}{pq}\Big)3d^2n^2 \exp\Big(-\frac{1}{3}nx^2p^2q\Big) &= \frac{9d^3}{pq}n^2 \exp\Big(-\frac{1}{3}na^2\frac{\log n}{n}p^2q\Big)\\ &= \frac{9d^3}{pq}n^2 \exp\Big(\log\Big(n^{-\frac{1}{3}a^2p^2q}\Big)\Big)\\ &= \gamma n^{2-a^2\eta}.\end{aligned}$$

Iz prethodnih nejednakosti dobivamo

$$\left|n^{-1}\frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(|C| = n)\right| \leq da\sqrt{\frac{\log N}{N}}\mathbb{P}_p([C| = n) + \gamma n^{2-a^2\eta}.$$

Neka su $p_1$ i $p_2$ takvi da $0 < p_1 < p_2 < 1$ te neka je

$$\hat{\gamma} = \sup\{\gamma(p, d) : p_1 \leq p \leq p_2\} \text{ i } \hat{\eta} = \inf\{\eta(p) : p_1 \leq p \leq p_2\}.$$

Izaberemo $a$ takada da $2 - a^2\hat{\eta} < -2$. Tada za sve $p \in [p_1, p_2]$ vrijedi

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|n^{-1}\frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(|C| = n)\right| \leq da\sqrt{\frac{\log N}{N}} + \hat{\gamma}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{3.28}$$

zato što vrijedi

$$\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}_p(|C| = n) \leq 1.$$

Vidimo da lijeva strana od (3.28) uniformno konvergira k 0 kada $N \to \infty$ po $p \in [p_1, p_2]$. Zaključno, $\kappa$ je neprekidno diferencijabilna na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ sa derivacijom (3.27).
Na kraju ćemo pokazati da je $\kappa$ neprekidno diferencijabilna i u slučajevima $p = 0$ i $p = 1$. Dokazat ćemo slučaj $p = 0$, a sličan argument vrijedi za slučaj $p = 1$. Znamo da vrijedi $\mathbb{P}_p(|C| < \infty) = 1$ kada $p < p_c$ pa je tada

$$\sum_{n,m,b} a_{n,m,b}p^m q^b = 1.$$

Jasno je da $\kappa(0) = 1$ i time dobivamo

$$\frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} = \sum_{n,m,b:n\geq 2}\Big(\frac{1}{n} - 1\Big)a_{nmb}p^{m-1}q^b.$$

Kada izlučimo član uz $p^0$ dobijemo

$$\frac{\kappa(p) - \kappa(0)}{p} = A(p) + \sum_{n,b}\Big(\frac{1}{n} - 1\Big)a_{n1b}q^b, \tag{3.29}$$

gdje je

$$A(p) = \sum_{n,m,b:m\geq 2} \left(\frac{1}{n} - 1\right) a_{nmb} p^{m-1} q^b.$$

Iskoristimo li (3.19) i (3.13) tada imamo

$$\begin{aligned}
|A(p)| &\leq p \sum_{n,m,b:n\geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) q^b a_{nmb} p^{n-2} \\
&\leq p \sum_{n\geq 2} p^{n-2} \sum_{m,b} a_{nmb} \\
&\leq p 7^{2d} \sum_{n\geq 2} p^{n-2} (7d)^{n-2} \\
&= p 7^{2d} \frac{1}{1 - p7^d} \quad \text{za } p7^d < 1.
\end{aligned}$$

Kada $p \to 0$ tada $A(p) \to 0$. Postoji točno $2d$ životinja koje sadrže ishodište i za koje je $m = 1$ i svaka takva životinja ima $n = 2$ i $b = 2(2d - 1)$. Pustimo $p \to 0$ u (3.29) i time dobijemo $\kappa'(0) = -d$. S druge strane, iz prvog dijela dokaza ovog teorema znamo da za $p \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi

$$\kappa'(p) = \sum_{n,m,b} \frac{1}{n} a_{nmb} (m p^{m-1} q^b - b p^m q^{b-1}).$$

Tvrdnju $\kappa'(p) \to -d$ kada $p \to 0$ dobijemo na sličan postupak kao i gore. $\square$

# Poglavlje 4

# Pitanje jedinstvenosti

## 4.1 Jedinstvenost kritične točke

Promatramo veznu perkolaciju na $\mathbb{L}^d$ kada je $d \geq 2$ uz vjerojatnost $p$ koja označava da je brid otvoren. Kao i u prethodnim poglavljima neka je

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty) \text{ i } \chi(p) = \mathbb{E}_p|C|,$$

gdje je $C$ otvoren klaster koji sadrži ishodište, a $|C|$ je broj vrhova od $C$. Vidjeli smo da postoji $p_c = p_c(d)$ unutar intervala $\langle 0, 1\rangle$ takav da

$$\theta(p) \begin{cases} = 0, & p < p_c \\ > 0, & p > p_c \end{cases}.$$

Kritična vjerojatnost $p_c$ je vrijednost od $p$ iznad koje se pojavljuje beskonačan otvoren klaster. Funkcija $\chi$ također ima svojstvo kritičnog fenomena. Jasno je da je $\chi$ neopadajuća u varijabli $p$, $\chi(0) = 1$ i $\chi(1) = \infty$. Znamo od prije da vrijedi

$$\chi(p) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C| = n),$$

te $\chi(p) = \infty$ uvijek kada je $\theta(p) > 0$. Stoga vrijedi da je $\chi(p) = \infty$ kada je $p > p_c$. U ovom poglavlju proučavati ćemo obrat, dakle cilj je dokazati da je $\chi(p) < \infty$ kada je $p < p_c$.

**Teorem 4.1.1.** *Očekivana veličina $\chi(p)$ otvorenog klastera koji sadrži ishodište je konačna ako je $p < p_c$.*

Dokaz ovog teorema bio je jedan od najvećih izazova u proučavanju teorije perkolacije te je u povijesti preformuliran na sljedeći način. Definiramo drugu "kritičnu vjerojatnost" $p_T = p_T(d)$ kao

$$p_T = \sup\{p : \chi(p) < \infty\}, \tag{4.1}$$

kao vrijednost od $p$ u kojoj se $\chi$ mijenja iz konačne vrijednosti u beskonačnost. Iz prethodnog vidimo da je $p_T \leq p_c$ i preostaje nam dokazati da vrijedi $p_T = p_c$. Za dokaz nam je potreban sljedeći rezultat koji ćemo navesti bez dokaza i čiji dokaz se može pronaći u [1]. Neka je $S(n)$ kugla radijusa $n$ sa središtem u ishodištu. Dakle, $S(n)$ je skup svih točaka $x$ iz $\mathbb{Z}^d$ za koje vrijedi da je $\delta(0, x) \leq n$. Neka je $\partial S(n)$ skup svih točaka $x$ za koje vrijedi da je $\delta(0, x) = n$. Događaj $A_n$ opisuje da postoji otvoreni put koji spaja središte sa nekim vrhom koji se nalazi u $\partial S(n)$.

**Teorem 4.1.2.** *Ako je $p < p_c$, tada postoji $\psi(p) > 0$ takav da*

$$\mathbb{P}_p(A_n) < e^{-n\psi(p)} \text{ za svaki } n.$$

Dokažimo sada Teorem 4.1.1.

*Dokaz.* Broj vrhova od $S(n)$ nije veći od volumena euklidske kugle u $\mathbb{R}^d$ sa radijusom $n+1$. Dakle, postoji $\nu = \nu(d)$ takav da

$$|S(n)| \leq \nu(n+1)^d.$$

Neka je $M = \max\{n : \text{dogodio se događaj } A_n\}$. Ako je $p < p_c$ tada je $\mathbb{P}_p(M < \infty) = 1$ što nam daje

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p|C| &\leq \sum_n \mathbb{E}_p(|C| \,|M = n)\mathbb{P}_p(M = n) \\
&\leq \sum_n |S(n)|\mathbb{P}_p(A_n) \\
&\leq \sum_n \nu(n+1)^d e^{-n\psi(p)} < \infty,
\end{aligned}$$

gdje je $\psi(p)$ veličina iz Teorema 4.1.2. □

## 4.2 Jedinstvenost beskonačnog otvorenog klastera

Glavni rezultat ovog poglavlja je postojanje jedinstvenog otvorenog klastera. Neka je $p$ vrijednost za koju je vjerojatnost postojanja beskonačnog otvorenog klastera strogo pozitivna, tada gotovo sigurno postoji točno jedan takav klaster.

**Teorem 4.2.1.** *Ako je $p$ takav da je $\theta(p) > 0$, tada je*

$$\mathbb{P}_p(\text{postoji točno jedan beskonačan otvoren klaster}) = 1.$$

*Dokaz.* Tvrdnja je trivijalna za slučajeve kada je $p = 0$ i $p = 1$ pa pretpostavimo da je $0 < p < 1$. Neka je $N$ broj beskonačnih otvorenih klastera. Neka je $B$ konačan skup vrhova i $\mathbb{E}_B$ predstavlja skup bridova iz $\mathbb{L}^d$ koji spajaju vrhove iz skupa $B$. Pišemo $N_B(0)$ ($N_B(1)$) za broj beskonačnih otvorenih klastera kada su svi bridovi iz $\mathbb{E}_B$ zatvoreni (otvoreni). Konačno, $M_B$ predstavlja broj beskonačnih otvorenih bridova koji sijeku skup $B$.
Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, a $\mathbb{P}_p$ je produktna mjera na $\Omega$. Kako je $N$ translacijski invarijantna funkcija na $\Omega$ ona je gotovo sigurno konstanta, drugim riječima postoji $k \in \{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ takav da je $\mathbb{P}_p(N = k) = 1$. Jasno je da vrijednost od $k$ ovisi o izboru vrijednosti $p$.
Sada ćemo pokazati da $k$ nužno poprima vrijednosti 0,1 ili $\infty$. Pretpostavimo suprotno, neka $k$ zadovoljava $2 \leq k < \infty$. Kako svaka konfiguracija na $\mathbb{E}_B$ ima strogo pozitivnu vjerojatnost slijedi da je $N$ konstanta gotovo sigurno takva da je

$$\mathbb{P}_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1.$$

Sada $N_B(0) = N_B(1)$ ako i samo ako $B$ siječe najviše jedan beskonačan otvoren klaster (ovdje koristimo pretpostavku $k < \infty$) i stoga vrijedi da je

$$\mathbb{P}_p(M_B \geq 2) = 0.$$

Dakle, $M_B$ je neopadajuća u $B$ i $M_B \to N$ kada $B$ teži u $\mathbb{Z}^d$. Neka je $S(n)$ skup točaka takav da je

$$S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \delta(0, x) \leq n\}.$$

Neka je $B$ "dijamant" od $S(n)$. Kada pustimo $n \to \infty$ dobivamo da vrijedi

$$0 = \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 2) \to \mathbb{P}_p(N \geq 2), \tag{4.2}$$

što nam daje $k \leq 1$, a to je u kontradikciji sa našom pretpostavkom $2 \leq k < \infty$.
Preostaje nam dokazati da isključimo slučaj $k = \infty$. Dokazati ćemo kontradikcijom pomoću geometrijskog argumenta. Pretpostavimo suprotno, neka je $k = \infty$. Vrh $x$ zovemo trodijelan ako
(i) $x$ leži na beskonačnom otvorenom klasteru,
(ii) postoje točno tri otvorena brida incidentna sa $x$ i
(iii) brisanjem vrha $x$ i njegova tri incidentna otvorena brida razdvajamo beskonačan otvoren klaster na točno tri razdvojena beskonačna klastera i bez konačnih klastera.
Događaj da je vrh $x$ trodijelan označavamo sa $T_x$. Sada, $\mathbb{P}_p(T_x)$ je konstanta za svaki $x$ i stoga vrijedi da je

$$\frac{1}{|B(n)|}\mathbb{E}_p\left(\sum_{x\in B(n)} I_{T_x}\right) = \mathbb{P}_p(T_0), \tag{4.3}$$

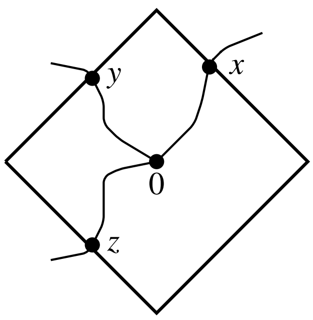
gdje $I_{T_x}$ predstavlja indikatorsku funkciju događaja $T_x$. Pokažimo da je $\mathbb{P}_p(T_0)$ strogo pozitivna vrijednost. Neka je $M_B(0)$ broj beskonačnih otvorenih klastera koji sijeku $B$ kada su svi bridovi od $\mathbb{E}_B$ zatvoreni. Vrijedi $M_B(0) \geq M_B$ i iz (4.2) slijedi

$$\mathbb{P}_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \mathbb{P}_p(M_{S(n)} \geq 3) \to \mathbb{P}_p(N \geq 3) = 1$$

kada $n \to \infty$. Stoga postoji $n$ takav da je

$$\mathbb{P}_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}, \tag{4.4}$$

i neka je $B = S(n)$. Primjetimo da tada
(a) događaj $\{M_B(0) \geq 3\}$ je nezavisan s obzirom na to jesu li bridovi u $\mathbb{E}_B$ otvoreni ili zatvoreni
(b) ako se dogodi $\{M_B(0) \geq 3\}$ tada postoje $x, y, z \in \partial B$ koji leže na različitim beskonačnim otorenim klasterima od $\mathbb{E}^d \backslash \mathbb{E}_B$.
Neka je $\omega \in \{M_B(0) \geq 3\}$ i biramo $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$ i $z = z(\omega)$ iz (b). Geometrijski se lako pokaže da u $\mathbb{E}_B$ postoje tri različita puta koja spajaju središte sa $x, y$ i $z$ te da ona mogu biti odabrana na način da
(i) središte je jedinstven vrh zajednički za bilo koji od vrhova $x$,$y$ i $z$ i
(ii) svaki put prolazi točno jednim vrhom koji leži na $\partial B$,
što možemo vidjeti na Slici 4.1.




Slika 4.1: "Dijamant" $B$ siječe barem tri različita beskonačna otvorena klastera gdje je ishodište trodijelni vrh.

Neka je $J_{x,y,z}$ događaj kada su svi bridovi tih puteva otvoreni, a svi ostali bridovi iz $\mathbb{E}_B$ su zatvoreni. Neka je $R$ broj bridova iz $\mathbb{E}_B$. Kako je $B$ konačan skup dobivamo da je

$$\mathbb{P}_p(J_{x,y,z} | M_B(0) \geq 3) \geq (\min\{p, 1-p\})^R > 0. \tag{4.5}$$

Iz (4.4) i (4.5) dobije se da vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(0 \text{ je trodijelan vrh}) &\geq \mathbb{P}_p(J_{x,y,z}|M_B(0) \geq 3)\mathbb{P}_p(M_B(0) \geq 3)\\ &\geq \frac{1}{2}(\min\{p, 1-p\})^R > 0,\end{aligned}$$

što nam daje da je $\mathbb{P}_p(T_0) > 0$. Iz (4.3) slijedi da prosječan broj trodijelnih vrhova unutar $B(n)$ se ponaša kao i $|B(n)|$ kada $n \to \infty$. Pomoću prethodnog konstruirati ćemo kontradikciju. Izaberemo $t_1$ trodijelni vrh od $B(n)$ te neki vrh $y_1$ takav da $y_1 \in \partial B(n)$ koji zadovoljava $t_1 \leftrightarrow y_1$ u $B(n)$. Izaberimo sada novi trodijelni vrh $t_2 \in B(n)$. Koristeći definiciju trodijelnog vrha možemo zaključiti da postoji $y_2 \in \partial B(n)$ takav da je $y_1 \neq y_2$ i $t_2 \leftrightarrow y_2$ u $B(n)$. Nastavljano na sličan način, u svakom koraku biramo novi trodijelni vrh $t_k \in B(n)$ i novi vrh $y_k \in \partial B(n)$. Ako postoji $\tau$ trodijelnih vrhova u $B(n)$, tada dobivamo $\tau$ različitih vrhova $y_k$ koji leže na $\partial B(n)$. Štoviše, $|\partial B(n)| \geq \tau$. Možemo usporediti $\mathbb{E}_p(\tau)$ i $|B(n)|$. Ali to je kontradikcija za velike $n$, zato što tada $|\partial B(n)|$ teži ka $n^{d-1}$, a $|B(n)|$ teži ka $n^d$.
Zapišimo ovaj argument na sljedeći način. Neka je $Y$ konačan skup takav da $|Y| \geq 3$. Definirajmo trodijelnu particiju $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ od $Y$ kao podjelu od $Y$ na tri neprazna skupa $P_1, P_2$ i $P_3$. Neka je $\Pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ još jedna podjela skupa $Y$ na tri neprazna skupa $P'_1, P'_2$ i $P'_3$. Kažemo da su trodijelne particije $\Pi$ i $\Pi'$ kompatibilne ako vrijedi $P_1 \supseteq P'_2 \cup P'_3$ ili ekvivalentno $P'_1 \supseteq P_2 \cup P_3$. Za $\mathcal{P}$ familiju trodijelnih particija kažemo da je kompatibilna ako svaka dva različita elementa koja se nalaze u toj familiji su kompatibilna. Dokažimo sljedeću pomoćnu lemu.

**Lema 4.2.2.** *Ako je $\mathcal{P}$ kompatibilna familija trodijelnih particija od $Y$, tada $|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2$.*

*Dokaz.* Dokazat ćemo indukcijom s obzirom na $|Y|$. Primjetimo da vrijedi $|\mathcal{P}| \leq 1$ ako je$|Y| = 3$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n$ takav da je $|Y| \leq n$ i neka $Y$ zadovoljava da je $|Y| = n + 1$. Biramo $y \in Y$ i pišemo $Z = Y \backslash \{y\}$.
Neka je $\mathcal{P}$ kompatibilna familija trodijelnih particija od $Y$. Bilo koji $\Pi \in \mathcal{P}$ možemo zapisati kao $\Pi = \{\Pi_1 \cup \{y\}, \Pi_2, \Pi_3\}$ za neke disjunktne podskupove $\Pi_1, \Pi_2$ i $\Pi_3$ od $Z$ koji zadovoljavaju da su $\Pi_2$ i $\Pi_3$ neprazni skupovi i $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3 = Z$. Neka je $\mathcal{P}'$ skup svih $\Pi$ takvih da $\Pi_1 \neq \emptyset$ i neka je $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \backslash \mathcal{P}'$.
Jasno je da $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ je kompatibilna familija trodijelnih particija od $Z$. Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$|\mathcal{P}'| \leq |Z| - 2 \leq |Y| \leq 3.$$

Na kraju trebamo pokazati da je $|\mathcal{P}'| \leq 1$. Pretpostavimo suprotno, neka $\mathcal{P}''$ sadrži dvije različite trodijelne particije od $Y$. Zapišimo ih kao $\{\{y\}, A_2, A_3\}$ i $\{\{y\}, B_2, B_3\}$. Iz definicije kompatibilnosti možemo zaključiti $A_2 \supseteq \{y\} \cup B_2$, a to je u kontradikciji zato što je $y \neq A_2$.
Na kraju dobivamo,

$$|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}'| + |\mathcal{P}''| \leq |Y| - 2.$$

Što smo i trebali dokazati. □

Neka je $K$ povezan otvoren klaster od $B(n)$. Neka je $x$ trodijelni vrh koji pripada skupu $K \cap B(n-1)$. Micanje $x$-a inducira podjelu od $K \cap \partial B(n)$ na tri skupa, naime to su skupovi spojeni otvorenim putem sa $x$ kroz svaki od tri otvorena brida incidentna sa $x$. Stoga, $x$ odgovara trodjelnoj particiji $\Pi(x) = \{P_1, P_2, P_3\}$ od $K \cap \partial B(n)$ sa sljedećim svojstvima
(a) $P_i$ je neprazan skup za svaki $i = 1, 2, 3$ ,
(b) $P_i$ je podskup povezanog otvorenog podgrafa od $B(n) \backslash \{x\}$ i
(c) $P_i \not\leftrightarrow P_j$ u $B(n) \backslash \{x\}$ ako je $i \neq j$.
Neka je $x'$ trodijelni vrh od $K \cap B(n-1)$ različit od $x$. Tada je $\Pi(x)$ različita i kompatibilna sa $\Pi(x')$. Neka je $\tau(K)$ broj trodijelnih vrhova iz $K \cap B(n-1)$. Pomoću Leme (4.2.2) dobivamo

$$\tau(K) \leq |K \cap \partial B(n)| - 2.$$

Sumiranjem prethodne nejednakost po svim povezanim klasterima $K$ od $B(n)$ dobivamo da je

$$\sum_{x \in B(n-1)} I_{T_x} \leq |\partial B(n)|.$$

Kada djelujemo očekivanjem i iskoristimo (4.3) slijedi da je

$$|B(n-1)| \mathbb{P}_p(T_0) \leq |\partial B(n)|,$$

što nije moguće za velike $n$ zato što lijeva strana teži k $n^d$, a desna strana k $n^{d-1}$ te smo došli do kontradikcije. □

# Poglavlje 5

# Razvoj teorije perkolacije

## 5.1 Mješovita perkolacija

U diplomskom radu proučila sam reprezentativnu klasu svih procesa perkolacije, a to je upravo vezna perkolacija na $\mathbb{L}^d$. U ovom poglavlju proučit ćemo njene različite generalizacije.
Pretpostavimo da je svaki vrh otvoren s vjerojatnošću $p$, a zatvoren s vjerojatnošću $1 - p$. Vidimo da je razlika u tome što djelujemo na vrhove, a ne na bridove. Opisani proces nazivano položajna perkolacija. Povezane komponente podgrafa rešetke koji je dobiven skupom otvorenih vrhova nazivamo otvoreni klaster položajne perkolacije. Svaki proces vezne perkolacije može se reformulirati kao proces položajne perkolacije na drugoj rešetci, ali postoji proces položajne perkolacije koji ne proizlazi iz nekog procesa vezne perkolacije. Time možemo zaključiti da je položajna perkolacija općenitiji pojam od vezne, ali navedimo jedan konkretan argument.
Promatramo veznu perkolaciju na rešetci $\mathcal{L}$ . Konstruirajmo rešetku $\mathcal{L}_c$ od $\mathcal{L}$ na sljedeći način. Svakom bridu od $\mathcal{L}$ odgovara vrh od $\mathcal{L}_c$ tako da ga stavimo u polovište tog brida. Dva takva vrha su susjedna ako i samo ako su odgovarajući bridovi susjedni. Jasno je da nema velike razlike u proučavanju vezne perkolacije na $\mathcal{L}$ i položajne perkolacije na $\mathcal{L}_c$. Svi prethodno navedeni rezultati za veznu perkolaciju analogno vrijede i za procese položajne.
Ako pogledamo općenito možemo zaključiti da brid ima više susjeda nego vrh. Uzmimo konkretno primjer na kvadratičnoj rešetci. Tada brid ima šest susjednih bridova, a vrh ima četiri susjedna vrha. Prema tome, beskonačni otvoreni klasteri u veznoj perkolaciji mogu biti lakše formirani nego u položajnoj perkolaciji. To nas dovodi do zaključka da je kritična vjerojatnost $p_c$ za veznu perkolaciju manja od kritične vjerojatnosti za položajnu.
U slučaju mješovite perkolacije i bridovi i vrhovi mogu biti otvoreni odnosno zatvoreni, a te vjerojatnosti mogu biti različite. Neka su vrhovi otvoreni s vjerojatnošću $p_1$, a bridovi s

vjerojatnošću $p_2$. Dva otvorena vrha pripadaju otvorenom klasteru ako su povezani putem koja se sastoji od alternirajućeg niza susjednih otvorenih vrhova i bridova. Jasno je da kada vrijedi da je $p_2 = 1$ tada smo u slučaju položajne perkolacije, a kada vrijedi da je $p_1 = 1$ tada smo u slučaju vezne perkolacije. Mješovita perkolacija je korisna za model širenja epidemije.
Možemo razmatrati i nehomogenu perkolaciju. Primjer nehomogene perkolacije bio bi vezna perkolacija na $\mathbb{L}^d$ uz vjerojatnosti $p_h$ i $p_v$, gdje $p_h$ predstavlja vjerojatnost da je horizontalni brid otvoren, a $p_v$ vjerojatnost da je vertikalan brid otvoren. Još jedan primjer nehomogene perkolacije bio bi vezna perkolacija na trokutastoj rešetci gdje je brid otvoren s vjerojatnošću $p_1$, $p_2$ ili $p_3$, ovisno o tome da li s horizontalom zatvara kut $0, \pi/3$ ili $2\pi/3$.

## 5.2 Usmjerena perkolacija

Potreba za modeliranjem galaksija, poluvodiča i elementarnih čestica dovelo je do proučavanja perkolacije na usmjerenim rešetkama.
Rešetka $\overrightarrow{\mathbb{L}}^d$ dobivena je od rešetke $\mathbb{L}^d$ gdje je svaki brid orijentiran u smjeru rastućih koordinatnih vrijednosti, a zovemo je 'sjever-istok' rešetka. Brid od $\overrightarrow{\mathbb{L}}^d$ je otvoren s vjerojatnošću $p$, a zatvoren inače. Stanja bridova međusobno su nezavisna. Tekućini u središtu rešetke dopustimo širenje samo kroz otvorene bridove koji su u smjeru orijentacije tih bridova. Neka je $C$ skup vrhova koji su dostižni iz ishodišta kroz otvorene usmjerene bridove. Perkolacijska vjerojatnost je

$$\overrightarrow{\theta}(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty),$$

a kritična vjerojatnost

$$\overrightarrow{p}_c(d) = \sup\{p : \overrightarrow{\theta}(p) = 0\}.$$

U ovom slučaju perkolacije imamo dodatan zahtjev na usmjerenost bridova. Drugim riječima, postojanje beskonačnog otvorenog klastera ovisi i o orijentaciji bridova tog klaster. Možemo zaključiti da je kritična vjerojatnost usmjerene perkolacije veća od kritične vjerojatnosti obične vezne pekrolacije.
Usmjerena perkolacija se koristi i za modeliranje šumskih požara kada imamo utjecaj jakog vjetra. U tom slučaju smjer vjetra predstavlja orijentaciju brida.

## 5.3 Perkolacija prvog prolaza

Perkolacija prvog prolaza je model koji ovisi o vremenu širenja tekućine. Svakom bridu $e$ rešetke $\mathbb{L}^d$ pridružujemo vremensku koordinatu $T(e)$ koja označava vrijeme potrebno tekućini da proteče bridom $e$. Pretpostavimo da su slučajne varijable $T(e)$ za svaki $e$ nezavisne i nenegativne sa zajedničkom funkcijom distribucije $F$.

**Definicija 5.3.1.** *Neka je $\pi$ put.* ***Prolazno vrijeme*** *$T(\pi)$ definiramo kao*

$$T(\pi) = \sum_{e \in \pi} T(e).$$

**Definicija 5.3.2.** ***Vrijeme prvog prolaza*** *$a(x, y)$ između vrhova $x$ i $y$ definiramo kao*

$$a(x, y) = \inf\{T(\pi) : \pi \text{ je put od } x \text{do } y\}.$$

Primjetimo da je $a(x, y)$ najmanje vrijeme potrebno da tekućina iz vrha $x$ dođe do vrha $y$. Ako ishodište opskrbimo sa beskonačnom količinom tekućine, skup svih bridova do kojih će doći tekućina u trenutku $t$ je

$$W(t) = \{x \in \mathbb{Z}^d : a(0, x) \leq t\}.$$

Najvažnije pitanje kojim su se bavili bilo je kako se ponaša skup $W(t)$ kada $t \to \infty$.

## 5.4 Protok kroz mrežu

U opisanom primjeru perkolacije prvog prolaza naglasak je bio na vremensko ograničenje, ali možemo promatrati i model koji ima ograničenje kapaciteta.
Neka je $e$ brid konačnog grafa $G$ kojem pridružujemo nenegativan kapacitet $c(e)$. Kapacitet $c(e)$ možemo shvatiti kao gornju ogradu za količinu tekućine koja može proći bridom $e$ u jedinici vremena. Neka su $S$ i $T$ disjunktni skupovi vrhova koje redom zovemo skup izvora i skup ponora. Nenegativan broj $f(e)$ nazivamo tok od $S$ do $T$ gdje za

$$I(v) = \sum_{w: v \to w} f(\langle v, w \rangle) - \sum_{w: w \to v} f(\langle v, w \rangle)$$

vrijedi $I(v) = 0$ za svaki vrh $v \notin S \cup T$.

**Definicija 5.4.1.** *Tok $f$ je* ***dopustiv*** *ako vrijedi*

$$f(e) \leq c(e) \text{ za svaki brid } e.$$

**Definicija 5.4.2.** ***Vrijednost dopustivog toka*** *definiramo kao*

$$\sum_{v \in S} I(v), \ v \notin S \cup T.$$

Maksimalni tok je najveća vrijednost od svih dopustivih tokova. Formaliziramo opisani primjer pomoću teorije perkolacije. Neka je $\mathbb{L}^d$ rešetka. Pretpostavimo da je $(c(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ familija nezavisnih slučajnih varijabli koji imaju zajedničku funkciju distribucije $F$. Interesira nas tok kroz veliki kvadrat. Označimo sa $U_n$ kvadrat $[0, n]^d$ od rešetke $\mathbb{L}^d$.
Dno od $U_n$ je

$$S_n = [0, n]^{d-1} \times \{0\},$$

a vrh od $U_n$ je

$$T_n = [0, n]^{d-1} \times \{n\}.$$

Glavno pitanje kojim su se bavili je što možemo reći o maksimalnom toku od $S_n$ do $T_n$ kroz $U_n$.

# Bibliografija


[1] Geoffrey Richard Grimmett, *Percolation*, Springer Verlag, 1989.

[2] Geoffrey Richard Grimmett, David Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford, 1992.

[3] Mireille Bousquet-Mélou, *Percolation models and animals*, European J. Combin, 1996.

[4] Dietrich Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, London, 1985.

[5] Charles Miller Grinstead, James Laurie Snell, *Introduction to Probability*, The CHANCE Project, 2006.

[6] Harry Kesten, *Percolation theory for mathematicians*, Mir, Moskva, 1986.

# Sažetak

Teorija perkolacije opisuje fazni prijelaz. Postoji prirodni parametar s obzirom na kojeg se ponašanje sustava drastično mijenja. Takav prirodan parametar u teoriji perkolacije nazivamo kritična vjerojatnost. Postoje točno dvije faze procesa koje ovise o odnosu vjerojatnosti $p$ koja označava da je brid otvoren i kritične vjerojatnosti $p_c$. Kada je vjerojatnost $p$ manja od kritične vjerojatnosti $p_c$ tada se proces nalazi u subkritičnoj fazi, a inače u superkritičnoj fazi. U subkritičnoj fazi ne postoji otvoreni beskonačni klaster, dok u superkritičnoj fazi postoji. Ako je vjerojatnost postojanja beskonačnog otvorenog klastera strogo pozitivna tada gotovo sigurno postoji točno jedan takav klaster. Iz osnovnog procesa teorije perkolacije možemo razviti znatno kompleksnije procese, te samim time znatno proširiti njihove primijene u biologiji, fizici, kemiji i astronomiji.

# Summary

Percolation theory describes a phase transition process. There is a natural parameter which describes sudden change in the behavior of the system. Such natural parameter in percolation theory is called critical probability. There are two stages of the percolation process that are determined by the value of critical probability $p_c$ and the probability $p$ of a fixed edge being open. When the probability $p$ is less than the critical probability $p_c$ then the process is called the subcritical phase, otherwise it is known as supercritical phase. Open infinite cluster does not exist in the subcritical phase while in the supercritical phase it exists. If the probability for the existance of an infinite open cluster is strictly positive then there is almost certainly unique. From the basic process of the percolation theory we can develop much more complex processes, and thus significantly expand the range of their application in biology, physics, chemistry and astronomy.

# Životopis

Rođena sam 10.3.1998. godine u Zaboku, a odrasla u Humu na Sutli. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam 2012. godine u Osnovnoj školi Viktora Kovačića u Humu na Sutli. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Pregradi gdje sam pohađala smjer Opća gimnazija. Obrazovanje sam nastavila upisom, 2016. godine, na preddiplomski studij Prirodoslovno matematičkog fakulteta na Matematičkom odsjeku nastavnički smjer. Titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.) stekla sam 2019. godine. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij Prirodosovno matematičkog fakulteta smjer Financijska i poslovna matematika. Tijekom cijelog studija održavala sam demonstrature. Krajem studija zaposlila sam se u Privrednoj banci Zagreb gdje sam počela raditi kao student, a trenutno radim kao pripravnik upravljanja rizicima.