Zaštita od rizika u nepotpunim diskretnim modelima financijskih tržišta

Nakić, Neva

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:017084

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-11**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Neva Nakić

ZAŠTITA OD RIZIKA U NEPOTPUNIM DISKRETNIM MODELIMA FINANCIJSKIH TRŽIŠTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, prosinac 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

U potpunim modelima tržišta svaki je slučajni zahtjev dostižan, odnosno za svaki slučajni zahtjev postoji neka samofinancirajuća strategija trgovanja koja ga replicira. Takvu strategiju možemo shvatiti kao savršenu zaštitu od rizika vezanog za dani slučajni zahtjev. No što ako je model tržišta nepotpun, odnosno ako slučajni zahtjev ne možemo replicirati? Ovo pitanje nije besmisleno – potpuna tržišta su ekonomski restriktivna i često nisu ekonomski opravdana. U slučaju nepotpunog modela tržišta više se ne možemo ograničiti na samofinancirajuće strategije u cilju dostizanja našeg slučajnog zahtjeva – moramo dopustiti dodatno ulaganje na kraju svakog razdoblja trgovanja. Naravno, u interesu nam je minimizirati taj novčani tok, tu „grešku u replikaciji", što u ovom radu proučavamo u vidu minimizacije kvadratne pogreške.

U ovome radu bit će predstavljene tri verzije ovog problema. Lokalna verzija promatra pogrešku zaštite od rizika za svaki vremenski interval. Verzija preostalog rizika proučava pogrešku do koje dolazi nakon zadanog trenutka. Ukupnu pogrešku od početka do kraja trgovanja opisuje globalna verzija. Zanimat će nas egzistencija i identifikacija strategija trgovanja koje minimiziraju navedene rizike te povezanost ova tri pristupa problemu.

Poglavlje 1

Model financijskog tržišta

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ promatramo model financijskog tržišta s $d+1$ financijskom imovinom kojom se može trgovati u trenucima $t = 0, 1, ..., T$. Uzimamo da je nulta financijska imovina nerizična; donosi siguran i predvidiv povrat. To primjerice može biti obveznica ili novac u banci uložen uz fiksnu kamatnu stopu. Preostale d financijske imovine su rizična imovina, primjerice dionice. Cijena i-te financijske imovine u trenutku t dana je nenegativnom slučajnom varijablom S_t^i. Pretpostavljamo da je slučajan vektor $\overline{S}_t = (S_t^0, S_t) = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)$ izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. O σ-algebri $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ razmišljamo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku t. Stoga je prirodno pretpostaviti da vrijedi

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_T. \tag{1.1}$$

Definicija 1.1. *Familija $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ σ-algebri koja zadovoljava (1.1) naziva se* filtracija. *U našem slučaju,* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}, P)$ *naziva se i* filtrirani vjerojatnosni prostor.

Nadalje pretpostavljamo da vrijedi $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, odnosno u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o budućem stanju svijeta.

Definicija 1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ filtracija.*

(a) Slučajni proces $Y = (Y_t)_{t=0,...,T}$ zove se adaptiran *s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ ako je za svaki t slučajna varijabla Y_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva.*

(b) Slučajni proces $Z = (Z_t)_{t=1,...,T}$ zove se predvidiv *s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ ako je za svaki t slučajna varijabla Z_t $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.*

Uočimo da uz ranije pretpostavke cijene financijske imovine $\overline{S} = (\overline{S}_t)_{t=0,...,T}$ čine adaptirani slučajni proces s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$.

Definicija 1.3. Strategija trgovanja *(ili* dinamički portfelj*) je predvidiv proces* $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi) = (\xi_t^0, \xi_t^1, ..., \xi_t^d)_{t=1,...,T}$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$.

Vrijednost ξ_t^i strategije trgovanja $\overline{\xi}$ predstavlja broj jedinica i-te imovine tijekom t-tog razdoblja trgovanja između trenutaka $t-1$ i t. Tako je $\xi_t^i S_{t-1}^i$ količina uložena u i-tu imovinu u trenutku $t-1$, dok je $\xi_t^i S_t^i$ proizlazeća vrijednost u trenutku t. Ukupna vrijednost portfelja $\overline{\xi}_t$ u trenutku $t-1$ iznosi $\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_{t-1} = \sum_{i=0}^d \xi_t^i S_{t-1}^i$. Do vremena t, vrijednost se portfelja $\overline{\xi}_t$ promijeni u $\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \sum_{i=0}^d \xi_t^i S_t^i$. Predvidivost procesa $\overline{\xi}$ izražava činjenicu da se ulaganja moraju izvršiti na početku svakog razdoblja trgovanja, bez predviđanja budućih prirasta cijena.

Definicija 1.4. *Strategija trgovanja* $\overline{\xi}$ *je* samofinancirajuća *ako*

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{S}_t \quad \text{za } t = 1, ..., T-1.$$

Odnosno, u samofinancirajućoj strategiji trgovanja portfelj je uvijek rebalansiran na takav način da se sačuva njegova trenutna vrijednost.

Zanima nas i vrijednost financijskih imovina svedena na sadašnju vrijednost. Naime, razlikujemo jednu jedinicu neke valute primjerice u trenutku $t = 0$ i jednu jedinicu u trenutku $t = 1$. Ljudi obično preferiraju određeni iznos danas u odnosu na isti iznos za koji se obećava da će biti isplaćen kasnije. Pretpostavit ćemo da vrijedi

$$S_t^0 > 0 \quad P\text{-g.s. za sve } t.$$

Sada možemo formirati *diskontirani sustav cijena*

$$X_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, ..., T, \ i = 0, ..., d.$$

Vrijedi $X_t^0 \equiv 1$, a vektor $X_t = (X_t^1, ..., X_t^d)$ izražava vrijednost preostale financijske imovine u odnosu na nultu imovinu. Ovakvim diskontiranjem omogućena je usporedba cijena imovina koje se kotiraju u različito vrijeme.

Definicija 1.5. *Diskontirana* vrijednost portfelja $V = (V_t)_{t=0,...,T}$ *strategije trgovanja* $\overline{\xi}$ *definirana je s*

$$V_0 := \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 \quad i \quad V_t := \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t \quad \text{za } t = 1, ..., T.$$

Proces dobitka *strategije trgovanja* $\overline{\xi}$ *definiran je kao*

$$G_0 := 0 \quad i \quad G_t := \sum_{k=1}^t \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \quad \text{za } t = 1, ..., T.$$

Definicija 1.6. *Samofinancirajuća strategija trgovanja naziva se* arbitraža *(ili* mogućnost arbitraže*) ako za vrijednost portfelja V vrijedi*

$$V_0 \leq 0, \quad V_T \geq 0 \ P\text{-}g.s. \quad i \quad P\left[V_T > 0\right] > 0.$$

Mogućnost arbitraže interpretiramo kao investicijsku strategiju koja nije izložena riziku gubitka, već donosi pozitivan profit s pozitivnom vjerojatnošću. Ako niti jedna samofinancirajuća strategija nije arbitraža, kažemo da financijsko tržište ne dopušta arbitražu.

Definicija 1.7. *Slučajni proces $M = (M_t)_{t=0,\dots,T}$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Q)$ zove se* martingal *ako je M adaptiran, vrijedi $E_Q\left[\,|M_t|\,\right] < \infty$ za sve t, te ako*

$$M_s = E_Q\left[M_t \,|\, \mathcal{F}_s\right] \quad za\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Martingal možemo tumačiti kao matematičku formalizaciju „poštene igre”: za svaki trenutak s i za sve $t > s$, uvjetno očekivanje budućeg dobitka $M_t - M_s$ je nula, s obzirom na informacije dostupne u trenutku s.

Želimo li naglasiti ovisnost martingalnog svojstva procesa M o određenoj mjeri Q, kažemo da je *M Q-martingal* ili da je *M martingal s obzirom na mjeru Q*.

Definicija 1.8. *Neka su P i Q dvije vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Kažemo da je Q* apsolutno neprekidna *u odnosu na P na σ-algebri $\mathcal{F}$ (pišemo $Q \ll P$) ako za sve $A \in \mathcal{F}$,*

$$P[A] = 0 \quad \Rightarrow \quad Q[A] = 0.$$

Vrijede li i $Q \ll P$ i $P \ll Q$, kažemo da su Q i P ekvivalentne *te pišemo $Q \approx P$.*

Definicija 1.9. *Vjerojatnosna mjera Q na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ zove se* martingalna mjera *ako je diskontirani sustav cijena X (d-dimenzionalni) Q-martingal, tj.*

$$E_Q\left[X_t^i\right] < \infty \quad i \quad X_s^i = E_Q\left[X_t^i \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right], \quad 0 \leq s \leq t \leq T,\ i = 1, \dots, d.$$

Martingalna mjera P^* zove se ekvivalentna martingalna mjera *ako je ekvivalentna originalnoj mjeri P na $\mathcal{F}_T$. Skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera označavamo s $\mathcal{P}$.*

Sada iskazujemo fundamentalni teorem određivanja cijena imovine. Za dokaz vidjeti [4, Teorem 3.22].

Teorem 1.10. *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Definicija 1.11. Slučajni zahtjev *C je nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Slučajni zahtjev C naziva se* izvedenica *primarnih imovina $S^0, S^1, \dots, S^d$ ako je C izmjeriva u odnosu na σ-algebru generiranu sustavom cijena $(\overline{S}_t)_{t=0,\dots,T}$.*

Slučajni zahtjev predstavlja imovinu koja u trenutku T donosi iznos $C(\omega)$, ovisno o scenariju $\omega \in \Omega$ razvoja tržišta. Vrijeme T se naziva dospijeće zahtjeva C. Diskontirana vrijednost slučajnog zahtjeva C dana je s

$$H := \frac{C}{S_T^0}$$

te ju zovemo *diskontirani zahtjev*.

Definicija 1.12. *Slučajni zahtjev C je* dostižan *ako postoji samofinancirajuća strategija $\overline{\xi}$ takva da*

$$C = \overline{\xi}_T \cdot \overline{S}_T \quad P\text{-}g.s.$$

Kažemo da strategija $\overline{\xi}$ replicira C.

Slijedi da je slučajni zahtjev C dostižan ako i samo ako za pripadajući diskontirani zahtjev $H := \frac{C}{S_T^0}$ vrijedi $H = \overline{\xi}_T \cdot \overline{X}_T = V_T$ za neku samofinancirajuću strategiju $\overline{\xi}$ s vrijednošću portfelja V.

Definicija 1.13. *Model tržišta bez arbitraže je* potpun *ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Iskazat ćemo osnovni rezultat o potpunosti tržišta. Za dokaz vidjeti [4, Teorem 3.28].

Teorem 1.14. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

Zahtjev za potpunost tržišta često nije ekonomski opravdan, a ispunjava ga samo ograničena klasa modela financijskih tržišta. Stoga u ovome radu pretpostavljamo da je model financijskog tržišta nepotpun.

Poglavlje 2

Lokalni kvadratni rizik

U ovome poglavlju predstavljamo lokalnu verziju problema minimizacije kvadratne pogreške zaštite od rizika. U tu svrhu konstruirat ćemo postupak sekvencijalne regresije. Za početak donosimo jednostavan primjer kojim ćemo ilustrirati proces zaštite od rizika u jednoperiodnom modelu financijskog tržišta.

Primjer 2.1. *Promotrimo jedan od jednostavnijih modela financijskog tržišta: jednoperiodan model koji se sastoji od jedne rizične i jedne nerizične imovine. Podsjetimo se i pojma call opcije:* call opcija *na neku imovinu je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, na kupovinu te imovine u trenutku vremena dospijeća (u ovom slučaju, u trenutku* 1*) za fiksnu cijenu izvršenja. Diskontirana call opcija s diskontiranom cijenom izvršenja K odgovara slučajnoj isplati oblika*

$$H^{call} = (X_1 - K)^+ = \begin{cases} X_1 - K, & \text{ako je } X_1 > K, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pretpostavimo da smo prodali call opciju na rizičnu imovinu. Tada ćemo u trenutku $t = 1$ morati isplatiti slučajan iznos H^{call}. Željeli bismo se osigurati od ovog događaja; želimo zaštititi opciju. U tu svrhu, oformimo portfelj koji se sastoji od η_0 jedinica nerizične imovine i ξ jedinica rizične imovine. Vrijednost ovog portfelja u trenutku 0 *iznosi*

$$V_0 = \eta_0 + \xi X_0.$$

U trenutku vremena dospijeća $t = 1$, vrijednost portfelja je $\eta_0 + \xi X_1$, no mi želimo portfelj čija je vrijednost jednaka H^{call}. Kada bismo sada mogli podesiti količinu nerizične imovine s η_0 na $\eta_1 := H^{call} - \xi X_1$, vrijednost rezultirajućeg portfelja u trenutku $t = 1$ bi bila

$$V_1 = \eta_1 + \xi X_1.$$

Takav portfelj zadovoljava naš uvjet

$$V_1 = H^{call}.$$

Za dani H^{call}, takva strategija bit će određena našim inicijalnim izborom konstanti ξ i V_0. Promotrimo troškove koji proizlaze iz te strategije. Označimo li s C_t kumulativan trošak do trenutka t, imamo

$$C_0 = V_0,$$

te dodatni trošak zbog naše prilagodbe količine nerizične imovine u trenutku 1 *iznosi*

$$\begin{aligned} C_1 - C_0 &= \eta_1 - \eta_0 \\ &= (V_1 - \xi X_1) - (V_0 - \xi X_0) \\ &= V_1 - V_0 - \xi(X_1 - X_0). \end{aligned}$$

Probajmo sada odabrati strategiju na takav način da se rizik u trenutku 0*, mjeren očekivanim kvadratnim troškom*

$$\begin{aligned} R &:= E\left[(C_1 - C_0)^2\right] \\ &= E\left[(H^{call} - V_0 - \xi(X_1 - X_0))^2\right], \end{aligned}$$

svede na minimum. Ovo je jednostavan problem pronalaska najbolje linearne procjene za H^{call} na temelju $X_1 - X_0$. Prema tome, optimalne konstante ξ i V_0 dane su sa

$$\xi = \frac{\mathrm{cov}(H^{call}, X_1 - X_0)}{\mathrm{Var}(X_1 - X_0)} = \frac{\mathrm{cov}(H^{call}, X_1)}{\mathrm{Var}(X_1)}$$

te

$$V_0 = E[H^{call}] - \xi E[X_1 - X_0].$$

Promatramo strategije trgovanja koje nisu nužno samofinancirajuće, već postoji mogućnost dodatnog ulaganja nulte imovine na kraju svakog razdoblja trgovanja. Time osim početne investicije u trenutku $t = 0$ dopuštamo novčani tok sve do konačnog vremena T. Posebno, moguće je replicirati bilo koji dani slučajni zahtjev usklađivanjem razlike između isplate zahtjeva i vrijednosti koju je generirala prethodna strategija finalnom uplatom u trenutku T. Stoga uvodimo pojam generalizirane strategije trgovanja.

Definicija 2.2. Generalizirana strategija trgovanja *je uređen par slučajnih procesa* (ξ^0, ξ) *gdje je* $\xi^0 = (\xi^0_t)_{t=0,\dots,T}$ *adaptiran te je* $\xi = (\xi_t)_{t=1,\dots,T}$ *d-dimenzionalan predvidiv proces. Diskontiranu* vrijednost portfelja *V strategije* (ξ^0, ξ) *definiramo s*

$$V_0 := \xi^0_0 \quad i \quad V_t := \xi^0_t + \xi_t \cdot X_t \quad za\ t \geq 1.$$

Za generaliziranu strategiju trgovanja (ξ^0, ξ), ukupni dobitak (ili gubitak) ostvaren do trenutka t dobiven ulaganjem u rizičnu imovinu dan je sumom

$$\sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}).$$

Vrijednost portfelja V je oblika

$$V_0 = \xi_1^0 + \xi_1 \cdot X_0 \quad \text{i} \quad V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, ..., T,$$

ako i samo ako je $\bar{\xi} = (\xi_t^0, \xi_t)_{t=1,...,T}$ samofinancirajuća strategija trgovanja s početnom investicijom $V_0 = \xi_0^0 = \xi_1^0 + \xi_1 \cdot X_0$. U tom slučaju, $(\xi_t^0)_{t=1,...,T}$ je predvidiv proces. Međutim, općenito je razlika

$$V_t - \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

netrivijalna i možemo ju tumačiti kao kumulativni trošak do vremena t. Zapišimo ova razmatranja i formalno.

Definicija 2.3. Proces dobitka G *generalizirane strategije trgovanja* (ξ^0, ξ) *zadan je s*

$$G_0 := 0 \quad i \quad G_t := \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, ..., T.$$

Proces troškova C *generalizirane strategije trgovanja* (ξ^0, ξ) *definiran je razlikom*

$$C_t := V_t - G_t, \quad t = 0, ..., T,$$

vrijednosti portfelja V *i procesa dobitka* G.

U ovome radu rizičnost strategije mjerit ćemo u smislu kvadratne pogreške zaštite s obzirom na „objektivnu" mjeru P. Cilj će nam biti minimizirati tu kvadratnu pogrešku unutar klase onih generaliziranih strategija (ξ^0, ξ) koje repliciraju dani diskontirani zahtjev H tako da vrijedi

$$V_T = H \quad P\text{-g.s.}$$

U nastavku ćemo fiksirati zahtjev H. Kako bismo mogli proučavati kvadratnu pogrešku, uvodimo još pretpostavki:

Pretpostavka 2.4. *Pretpostavljamo da su diskontirani zahtjev* H *i diskontirani sustav cijena* X *rizične imovine kvadratno-integrabilni u odnosu na objektivnu mjeru* P:

(a) $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) =: \mathcal{L}^2(P)$

(b) $X_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ *za sve t.*

Definicija 2.5. $\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija *za H je generalizirana strategija trgovanja* (ξ^0, ξ) *čija vrijednost portfelja V zadovoljava*

$$V_T = H \ P\text{-g.s.} \quad i \quad V_t \in \mathcal{L}^2(P) \text{ za sve } t,$$

i čiji je proces dobitka G takav da vrijedi

$$G_t \in \mathcal{L}^2(P) \quad \text{za sve } t.$$

Sada smo spremni predstaviti lokalnu verziju problema minimizacije kvadratne pogreške zaštite od rizika.

Definicija 2.6. Proces lokalnog rizika $\mathcal{L}^2$*-dopustive strategije* (ξ^0, ξ) *je proces*

$$R_t^{loc}(\xi^0, \xi) := E\left[(C_{t+1} - C_t)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T-1.$$

$\mathcal{L}^2$*-dopustiva strategija* $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ *naziva se* strategija minimizacije lokalnog rizika *ako*

$$R_t^{loc}(\hat{\xi}^0, \hat{\xi}) \leq R_t^{loc}(\xi^0, \xi) \quad P\text{-g.s.}$$

vrijedi za sve t i za sve $\mathcal{L}^2$*-dopustive strategije* (ξ^0, ξ) *čija vrijednost portfelja zadovoljava* $V_{t+1} = \hat{\xi}^0_{t+1} + \hat{\xi}_{t+1} \cdot X_{t+1} = \hat{V}_{t+1}$.

Napomena 2.7. *Pojasnimo zašto prethodna definicija zahtijeva fiksiranje vrijednosti* $V_{t+1} = \hat{V}_{t+1}$. *Krećući se unatrag u vremenu, probajmo konstruirati strategiju minimizacije lokalnog rizika* $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$. *U trenutku T želimo izabrati* $\hat{\xi}^0_{T-1}$, $\hat{\xi}^0_T$, $\hat{\xi}_{T-1}$, $\hat{\xi}_T$ *takve da minimiziraju lokalni rizik* $R_{T-1}^{loc}(\xi^0, \xi)$. *Kako konačna vrijednost svake* $\mathcal{L}^2$*-dopustive strategije mora biti jednaka H, ova minimizacija zahtjeva ispunjenje uvjeta* $V_T = \xi^0_T + \xi_T \cdot X_T = H = \hat{V}_T$. *U dokazu Teorema 2.10 , vidjet ćemo da minimalnost od* $R_{T-1}^{loc}(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ *u potpunosti određuje* $\hat{\xi}^0_T$, $\hat{\xi}_T$ *i* $\hat{V}_{T-1}$, *no izbor za* $\hat{\xi}^0_{T-1}$ *i* $\hat{\xi}_{T-1}$ *je slobodan između svih* ξ^0_{T-1}, ξ_{T-1} *takvih da* $\xi^0_{T-1} + \xi_{T-1} \cdot X_{T-1} = \hat{V}_{T-1}$. *Sada nastavljamo tako da minimiziramo* $R_{T-2}^{loc}(\xi^0, \xi)$ *pod uvjetom da je* V_{T-1} *jednak vrijednosti* $\hat{V}_{T-1}$ *koju smo dobili u prethodnom koraku. Dobili smo problem istog tipa kao i u prethodnom koraku.*

Iako strategije minimizacije lokalnog rizika općenito nisu samofinancirajuće, pokazat ćemo da su „u prosjeku samofinancirajuće":

Definicija 2.8. $\mathcal{L}^2$*-dopustiva strategija zove se* srednje samofinancirajuća *ako je njen proces troškova C P-martingal, odnosno ako vrijedi*

$$E\left[C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad P\text{-g.s. za sve } t.$$

Kako bismo mogli formulirati uvjete za postojanje strategije minimizacije lokalnog rizika, prvo uvodimo nekoliko oznaka. *Uvjetna kovarijanca* dviju slučajnih varijabli W i Z u odnosu na P definirana je kao

$$\operatorname{cov}(W, Z \,|\, \mathcal{F}_t) := E\left[WZ \,|\, \mathcal{F}_t\right] - E\left[W \,|\, \mathcal{F}_t\right] E\left[Z \,|\, \mathcal{F}_t\right]$$

pod uvjetom da uvjetna očekivanja i njihova razlika imaju smisla. *Uvjetna varijanca* od W u odnosu na P definirana je kao

$$\operatorname{Var}(W \,|\, \mathcal{F}_t) := E\left[W^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] - E\left[W \,|\, \mathcal{F}_t\right]^2 = \operatorname{cov}(W, W \,|\, \mathcal{F}_t).$$

Definicija 2.9. *Za dva adaptirana procesa U i Y kažemo da su* jako ortogonalni *s obzirom na P ako*

$$\operatorname{cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t \,|\, \mathcal{F}_t) = 0 \quad P\text{-g.s. za } t = 0, ..., T-1.$$

U nastavku, kada ćemo promatrati jaku ortogonalnost procesa U i Y, tada će obično jedan od njih biti P-martingal. U tom se slučaju njihova uvjetna kovarijanca svodi na

$$\operatorname{cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t \,|\, \mathcal{F}_t) = E\left[(U_{t+1} - U_t)(Y_{t+1} - Y_t) \,|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Sada možemo iznijeti karakterizaciju strategija minimizacije lokalnog rizika.

Teorem 2.10. *$\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija je strategija minimizacije lokalnog rizika ako i samo ako je srednje samofinancirajuća i njen proces troškova je jako ortogonalan na X.*

Dokaz. Proces lokalnog rizika $\mathcal{L}^2$-dopustive strategije (ξ^0, ξ) možemo izraziti kao sumu dva nenegativna člana:

$$R_t^{loc}(\xi^0, \xi) = \operatorname{Var}(C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t) + E\left[C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t\right]^2.$$

Kako se uvjetna varijanca ne mijenja dodamo li njenom argumentu neku $\mathcal{F}_t$-izmjerivu slučajnu varijablu, prvi član gornje sume zapisujemo kao:

$$\operatorname{Var}(C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t) = \operatorname{Var}(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t) \,|\, \mathcal{F}_t). \tag{2.1}$$

Za drugi član gornje sume vrijedi:

$$E\left[C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t\right]^2 = \left(E\left[V_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\right] - \xi_{t+1} \cdot E\left[X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right] - V_t\right)^2. \tag{2.2}$$

U idućem koraku fiksiramo t i V_{t+1}, a ξ_{t+1} i V_t shvaćamo kao parametre. Naš je namjera izvesti nužne uvjete za minimalnost $R_t^{loc}(\xi^0, \xi)$ s obzirom na promjene ξ_{t+1} i V_t. Uočimo prvo da parametre ξ_t^0 i ξ_t možemo mijenjati na takav način da V_t poprimi bilo koju danu vrijednost, tako da je modificirana strategija i dalje $\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija za H i da vrijednosti ξ_{t+1} i V_{t+1} ostanu nepromijenjene. Posebno, takva modifikacija ne utječe na vrijednost u (2.1). Stoga je za optimalnost od $R_t^{loc}(\xi^0, \xi)$ nužno da V_t minimizira (2.2). To je slučaj ako i samo ako

$$V_t = E\left[V_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\right] - \xi_{t+1} \cdot E\left[X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right]. \tag{2.3}$$

Vrijednost (2.1) je nezavisna od V_t te se može zapisati kao kvadratna funkcija $\mathcal{F}_t$-izmjerivog slučajnog vektora ξ_{t+1}. Zato je (2.1) minimalno ako i samo ako ξ_{t+1} rješava linearnu jednadžbu

$$0 = \operatorname{cov}\left(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t), X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right). \tag{2.4}$$

Primijetimo da je (2.3) ekvivalentno

$$E\left[C_{t+1} - C_t \,|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t) \,|\, \mathcal{F}_t\right] - V_t = 0. \tag{2.5}$$

Povrh toga, uz dano (2.3), uvjet (2.4) je ispunjen ako i samo ako

$$E\left[(C_{t+1} - C_t)(X_{t+1} - X_t) \,|\, \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Tu smo koristili činjenicu da se uvjetna kovarijanca u (2.4) ne mijenja oduzimanjem $\mathcal{F}_t$-izmjerive slučajne varijable V_t od prvog argumenta. Unazadna indukcija po t zaključuje dokaz. □

Prethodni dokaz daje nam uputu kako rekurzivno konstruirati strategiju minimizacije lokalnog rizika: Ako je V_{t+1} zadan, minimiziraj

$$E\left[(C_{t+1} - C_t)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[(V_{t+1} - (V_t + \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t)))^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

s obzirom na V_t i ξ_{t+1}. Ovo je samo uvjetna verzija određivanja *linearne regresije* za V_{t+1} na prirastu $X_{t+1} - X_t$. Promotrimo sada slučaj financijskog tržišta koje sadrži samo jednu rizičnu imovinu, $d = 1$. Tada nam sljedeća rekurzija daje eksplicitno rješenje:

$$\begin{aligned} \hat{V}_T &:= H, \\ \hat{\xi}_{t+1} &:= \frac{\operatorname{cov}\left(\hat{V}_{t+1}, X_{t+1} - X_t \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)}{\sigma_{t+1}^2} \cdot \mathrm{I}_{\{\sigma_{t+1}^2 \neq 0\}}, \\ \hat{V}_t &:= E\left[\hat{V}_{t+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] - \hat{\xi}_{t+1} \cdot E\left[X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ovdje je σ_{t+1}^2 skraćeni zapis za uvjetnu varijancu:

$$\sigma_{t+1}^2 := \operatorname{Var}\left(X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Definiramo li $\hat{\xi}_t^0 := \hat{V}_t - \hat{\xi}_t \cdot X_t$, dobijemo generaliziranu strategiju trgovanja $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ čija se konačna vrijednost portfelja $\hat{V}_T$ podudara s H. Međutim, potreban nam je dodatan uvjet da bismo zaključili da je ova strategija doista $\mathcal{L}^2$-dopustiva.

Propozicija 2.11. *Pretpostavimo da u modelu financijskog tržišta koji sadrži samo jednu rizičnu imovinu postoji konstanta C takva da*

$$(E[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq C \cdot \sigma_t^2 \quad P\text{-g.s. za sve } t. \tag{2.7}$$

Tada rekurzija (2.6) definira strategiju minimizacije lokalnog rizika $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$. *Štoviše, svaka druga strategija minimizacije lokalnog rizika podudara se s* $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ *do na modifikacije* $\hat{\xi}_t$ *na skupu* $\{\sigma_t^2 = 0\}$.

Dokaz. Trebamo pokazati da je strategija $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ $\mathcal{L}^2$-dopustiva. Uočimo da rekurzija (2.6) i uvjet (2.7) daju

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\hat{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1})\right)^2\right] \\
&= E\left[\frac{\operatorname{cov}\left(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)^2}{\sigma_t^4} \cdot E\left[(X_t - X_{t-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \mathrm{I}_{\{\sigma_t^2 \neq 0\}}\right] \\
&\leq (1 + C) \cdot E\left[\frac{\operatorname{cov}\left(\hat{V}_t, X_t - X_{t-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)^2}{\sigma_t^2}\right] \\
&\leq (1 + C) \cdot E\left[\operatorname{Var}\left(\hat{V}_t \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Zadnje očekivanje je konačno ako je $\hat{V}_t$ kvadratno-integrabilno. U tom slučaju, $\hat{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)$ te slijedi $\hat{V}_{t-1} \in \mathcal{L}^2(P)$. Sada $\mathcal{L}^2$-dopustivost od $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ slijedi indukcijom unazad. Tvrdnja da je $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ strategija minimizacije lokalnog rizika, kao i tvrdnja o jedinstvenosti slijede neposredno iz konstrukcije. □

Napomena 2.12. *Predvidiv proces*

$$\sum_{s=1}^{t} \frac{(E[X_s - X_{s-1} \,|\, \mathcal{F}_{s-1}])^2}{\operatorname{Var}(X_s - X_{s-1} \,|\, \mathcal{F}_{s-1})}, \quad t = 1, ..., T,$$

naziva se proces kompromisa očekivanja i varijance *za X (mean-variance trade-off process), a uvjet (2.7) poznat je kao pretpostavka o* omeđenom kompromisu očekivanja i varijance *(bounded mean-variance trade-off).*

Primjer 2.13. *Promotrimo model financijskog tržišta koji se sastoji od jedne rizične imovine* S^1 *i nerizične obveznice*

$$S_t^0 = (1 + r)^t, \quad t = 0, ..., T,$$

s konstantnim povratom $r > -1$. Pretpostavljamo da vrijedi $S_0^1 = 1$ te da su povrati rizične imovine

$$R_t := \frac{S_t^1 - S_{t-1}^1}{S_{t-1}^1}, \quad t = 1, ..., T,$$

nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable u $\mathcal{L}^2(P)$. Uz ove pretpostavke, diskontirani sustav cijena X, definiran s

$$X_t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1 + R_s}{1 + r}, \quad t = 0, ..., T,$$

je kvadratno-integrabilan. Označimo li s $\widetilde{m}$ očekivanje od R_t, a sa $\widetilde{\sigma}^2$ varijancu, dobijemo

$$E\left[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = X_{t-1} \cdot \frac{\widetilde{m} - r}{1 + r},$$
$$\mathrm{Var}\left(X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right) = X_{t-1}^2 \cdot \frac{\widetilde{\sigma}^2}{(1 + r)^2}.$$

Prema tome, uvjet omeđenog kompromisa očekivanja i varijance je zadovoljen bez dodatnih pretpostavki te strategija minimizacije lokalnog rizika postoji. Štoviše, P je martingalna mjera ako i samo ako $\widetilde{m} = r$.

Vratimo se sada na naš opći model financijskog tržišta s proizvoljnim brojem rizičnih imovina

$$X = (X^1, ..., X^d).$$

Sljedeći rezultat karakterizira egzistenciju strategije minimizacije lokalnog rizika u smislu dekompozicije zahtjeva H.

Korolar 2.14. *Strategija minimizacije lokalnog rizika postoji ako i samo ako H možemo zapisati kao dekompoziciju*

$$H = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T \quad P\text{-g.s.}, \tag{2.8}$$

gdje je c konstanta, ξ je d-dimenzionalan predvidiv proces takav da

$$\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P) \quad \text{za sve } t,$$

i gdje je L kvadratno-integrabilan P-martingal koji je jako ortogonalan na X i zadovoljava $L_0 = 0$. U tom slučaju, strategija minimizacije lokalnog rizika $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ je dana sa $\hat{\xi} = \xi$ i s adaptiranim procesom $\hat{\xi}^0$ koji je definiran sa $\hat{\xi}_0^0 = c$ i

$$\hat{\xi}_t^0 = c + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t - \xi_t \cdot X_t, \quad t = 1, ..., T.$$

Dekompozicija (2.8) je jedinstvena u smislu da su konstanta c i martingal L jedinstveno određeni.

Dokaz. Ako je $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ dana strategija minimizacije lokalnog rizika s procesom troškova $\hat{C}$, tada iz dokaza Teorema 2.10 (vidi (2.5)) slijedi da je $L_t := \hat{C}_t - \hat{C}_0$ kvadratno-integrabilan P-martingal jako ortogonalan na X. Dakle, dobivamo dekompoziciju (2.8). S druge strane, ako takva dekompozicija postoji, tada strategija $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ ima proces troškova $\hat{C} = c + L$ pa iz Teorema 2.10 slijedi da je $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ strategija minimizacije lokalnog rizika.

Da bismo pokazali da je L jedinstveno određena, pretpostavit ćemo da postoji još jedna dekompozicija od H s obzirom na $\widetilde{c}, \widetilde{\xi}$ i $\widetilde{L}$. Tada je

$$N_t := c - \widetilde{c} + L_t - \widetilde{L}_t = \sum_{s=1}^{t} (\widetilde{\xi}_s - \xi_s) \cdot (X_s - X_{s-1})$$

kvadratno-integrabilan P-martingal koji je jako ortogonalan na X. Zapisali smo ga kao martingalnu transformaciju, odnosno „stohastički integral” s obzirom na X. Iz jake ortogonalnosti od N na X imamo

$$0 = E\left[(\widetilde{\xi}_t - \xi_t) \cdot (X_t - X_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1} \right].$$

Množenjem s $\widetilde{\xi}_t - \xi_t$, dobijemo

$$0 = E\left[\left((\widetilde{\xi}_t - \xi_t) \cdot (X_t - X_{t-1}) \right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1} \right],$$

pa vrijedi $N_t - N_{t-1} = (\widetilde{\xi}_t - \xi_t) \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0$ P-g.s. S obzirom na $\widetilde{L}_0 = L_0 = 0$, dobijemo $\widetilde{L} = L$, a iz toga slijedi $\widetilde{c} = c$. □

Dekompozicija oblika (2.8) naziva se *ortogonalna dekompozicija* slučajnog zahtjeva H s obzirom na proces X. Ako je X P-martingal, tada se ortogonalna dekompozicija svodi na *Kunita-Watanabe dekompoziciju*. Nju ćemo iduću objasniti, no prvo predstavimo neke nove pojmove i zapažanja.

Lema 2.15. *Za kvadratno-integrabilne martingale M i N, sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) M i N su jako ortogonalni.

(b) Produkt MN je martingal.

Dokaz. Iz martingalnog svojstva za M i N slijedi

$$E\left[(M_{t+1} - M_t)(N_{t+1} - N_t) \,|\, \mathcal{F}_t \right] = E\left[M_{t+1}N_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t \right] - M_t N_t.$$

Ovaj izraz iščezava ako i samo ako je MN martingal. □

Označimo s $\mathcal{H}^2$ prostor svih kvadratno-integrabilnih P-martingala. Koristeći jednakost $M_t = E[M_T | \mathcal{F}_t]$, svaki $M \in \mathcal{H}^2$ može u potpunosti biti određen preko njegove konačne vrijednosti $M_T \in \mathcal{L}^2(P)$. Sa standardnom identifikacijom slučajnih varijabli koje se podudaraju P-g.s., $\mathcal{H}^2$ postaje Hilbertov prostor izomorfan s $L^2(P)$, ako je vektorski produkt dan s

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} := E[M_T N_T], \quad M, N \in \mathcal{H}^2.$$

Prije nastavljanja, podsjetit ćemo se pojmova vremena zaustavljanja i zaustavljenog procesa.

Definicija 2.16. *Funkcija $\tau : \Omega \to \{0, 1, ..., T\} \cup \{+\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *ako $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ za $t = 0, ..., T$.*

Definicija 2.17. *Za slučajni proces Y i vrijeme zaustavljanja τ, s Y^τ označavamo* proces zaustavljen u vremenu τ*:*

$$Y_t^\tau(\omega) := Y_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega), \quad \text{za } \omega \in \Omega \text{ i za sve } t \in \{0, ..., T\}.$$

Podsjetimo se i *Doobovog teorema o zaustavljanju* te popratne propozicije. Navodimo ih bez dokaza; za dokaze pogledati [1, Teorem 6.17] i [1, Propozicija 6.38].

Teorem 2.18. (Doobov teorem o zaustavljanju.) *Neka je M adaptiran proces takav da $M_t \in \mathcal{L}^1(P)$ za sve t. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) M je P-martingal.

(b) Za sva vremena zaustavljanja τ, zaustavljeni proces M^τ je P-martingal.

(c) $E[M_{\tau \wedge T}] = M_0$ za sva vremena zaustavljanja τ.

Propozicija 2.19. *Za adaptiran proces M u $\mathcal{L}^1(P)$ sljedeće tvrdnje su ekvivalente:*

(a) M je P-martingal.

(b) $E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_{\tau \wedge \sigma}$ za sva vremena zaustavljanja τ t.d. $\tau \leq T$ i za sva vremena zaustavljanja σ.

Sada možemo uvesti pojam stabilnog potprostora.

Definicija 2.20. *Za $\mathcal{S}$ potprostor od $\mathcal{H}^2$ kažemo da je* stabilan *ako $M^\tau \in \mathcal{S}$ za sve $M \in \mathcal{S}$ i za sva vremena zaustavljanja τ.*

Propozicija 2.21. *Neka je $\mathcal{S}$ stabilan potprostor od $\mathcal{H}^2$ i neka je $L \in \mathcal{H}^2$ t.d. $L_0 = 0$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) L je ortogonalan na $\mathcal{S}$, tj.

$$(L, M)_{\mathcal{H}^2} = 0 \quad \text{za sve } M \in \mathcal{S}.$$

(b) L je jako ortogonalan na $\mathcal{S}$, tj. za sve $M \in \mathcal{S}$

$$E\left[(L_{t+1} - L_t)(M_{t+1} - M_t) \,|\, \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad P\text{-g.s. za sve } t.$$

(c) Produkt LM je martingal za sve $M \in \mathcal{S}$.

Dokaz. Ekvivalentnost (b) $\Leftrightarrow$ (c) slijedi iz Leme 2.15.

Da bismo dokazali (a) $\Leftrightarrow$ (c), pokazat ćemo da je LM martingal za fiksni $M \in \mathcal{S}$ ako i samo ako $(L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = 0$ za sva vremena zaustavljanja $\tau \leq T$. Iz Propozicije 2.19 slijedi

$$(L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = E[L_T M_\tau] = E[L_\tau M_\tau].$$

Kako je $L_0 M_0 = 0$, koristeći Teorem 2.18 zaključujemo da je $(L, M^\tau)_{\mathcal{H}^2} = 0$ za sva vremena zaustavljanja $\tau \leq T$ ako i samo ako je LM martingal. □

Konačno, iznosimo teorem egzistencije za *Kunita-Watanabe dekompoziciju* u diskretnom vremenu.

Teorem 2.22. *Ako je proces X kvadratno-integrabilan martingal s obzirom na P, tada je svaki martingal $M \in \mathcal{H}^2$ oblika*

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t$$

gdje je ξ d-dimenzionalan predvidiv proces takav da $\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)$ za sve t, i gdje je L kvadratno-integrabilan P-martingal koji je jako ortogonalan na X i zadovoljava $L_0 = 0$. Ova dekompozicija je jedinstvena u smislu da je L jedinstveno određen.

Dokaz. Označimo s $\mathcal{X}$ skup svih d-dimenzionalnih predvidivih procesa ξ takvih da $\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P)$ za sve t, te označimo s

$$G_t(\xi) := \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}), \quad t = 0, ..., T,$$

„stohastički integral" od $\xi \in \mathcal{X}$ s obzirom na X. Kako je za $\xi \in \mathcal{X}$ proces $G(\xi)$ kvadratno-integrabilan P-martingal, skup $\mathcal{G}$ svih takvih martingala možemo promatrati kao vektorski potprostor Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^2$. Štoviše, pokazat ćemo da je $\mathcal{G}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{H}^2$. Uočimo da iz martingalnog svojstva od $G(\xi)$ slijedi

$$(G(\xi), G(\xi))_{\mathcal{H}^2} = E[(G_T(\xi))^2] = \sum_{t=1}^{T} E[(\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}))^2].$$

Prema tome, ako je $\xi^{(n)}$ takav da je $G(\xi^{(n)})$ Cauchyjev niz u $\mathcal{H}^2$, tada je $\xi_t^{(n)} \cdot (X_t - X_{t-1})$ Cauchyjev niz u $L^2(P)$ za sve t. Kako je P martingalna mjera, koristeći [1, Lema 1.68] zaključujemo da je svako gomilište od $\xi_t^{(n)} \cdot (X_t - X_{t-1})$ oblika $\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1})$ za neki slučajan vektor ξ_t iz $\mathbb{R}^d$ koji je P-g.s. konačan i $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriv. Dakle, $\mathcal{G}$ je zatvoren u $\mathcal{H}^2$. Pokažimo sada da je $\mathcal{G}$ stabilan. Za $\xi \in \mathcal{X}$ i neko vrijeme zaustavljanja τ vrijedi $G_{t\wedge\tau}(\xi) = G_t(\widetilde{\xi})$ gdje je

$$\widetilde{\xi}_s := \xi_s \cdot \mathrm{I}_{\{\tau \geq s\}}, \quad s = 1, ..., T.$$

Nadalje, imamo $\widetilde{\xi} \in \mathcal{X}$ jer vrijedi

$$E\left[\left(\widetilde{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1})\right)^2\right] \leq E\left[(\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}))^2\right] < \infty.$$

Kako je $\mathcal{G}$ zatvoren, ortogonalna projekcija N od $M - M_0$ na $\mathcal{G}$ je dobro definirana standardnim metodama Hilbertovih prostora. Martingal N je iz $\mathcal{G}$, a razlika $L := M - M_0 - N$ je ortogonalna na $\mathcal{G}$. Prema Propoziciji 2.21, L je jako ortogonalan na $\mathcal{G}$ te je stoga jako ortogonalan na X. Dakle, $M = M_0 + N + L$ je tražena dekompozicija od M. Jedinstvenost od L slijedi kao u dokazu Korolara 2.14. $\square$

Poglavlje 3

Minimalna martingalna mjera

Ako je P martingalna mjera, imamo rješenje našeg originalnog problema konstruiranja strategije minimizacije lokalnog rizika; Teorem 2.22 i Korolar 2.14 daju nam:

Korolar 3.1. *Ako je P martingalna mjera, tada postoji strategija minimizacije lokalnog rizika za (diskontirani) slučajni zahtjev $H \in \mathcal{L}^2(P)$. Ta je strategija jedinstvena u smislu da je njena vrijednost portfelja $\hat{V}$ jedinstveno određena s*

$$\hat{V}_t = E\left[H \,|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T, \tag{3.1}$$

i da je njen proces troškova C dan s

$$\hat{C}_t = \hat{V}_0 + L_t, \quad t = 0, ..., T,$$

gdje je L jako ortogonalan P-martingal koji proizlazi iz Kunita-Watanabe dekompozicije od $\hat{V}$.

Što je sa slučajem kada P nije martingalna mjera? Pitamo se postoji li ekvivalentna martingalna mjera $\hat{P}$ takva da vrijednost portfelja $\hat{V}$ strategije minimizacije lokalnog rizika možemo dobiti na sličan način kao martingal

$$\hat{E}\left[H \,|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T. \tag{3.2}$$

Prije nego li nastavimo, podsjetit ćemo se važne karakterizacije apsolutne neprekidnosti. Za dokaz pogledati [3].

Teorem 3.2. (Radon–Nikodym.) *Neka su P i Q dvije vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Mjera Q je apsolutno neprekidna u odnosu na P na $\mathcal{F}$ ako i samo ako postoji $\mathcal{F}$-izmjeriva funkcija $\varphi \geq 0$ takva da*

$$\int F \, dQ = \int F\varphi \, dP \quad \text{za sve } \mathcal{F}\text{-izmjerive funkcije } F \geq 0.$$

Funkcija φ naziva se *Radon-Nikodymova derivacija* od Q u odnosu na P te pišemo

$$\frac{dQ}{dP} := \varphi.$$

Proces Radon-Nikodymove derivacije od Q u odnosu na P definira se kao

$$Z_t = E\left[\frac{dQ}{dP}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T.$$

Idući propoziciju navodimo bez dokaza. Za dokaz vidjeti [1, Propozicija A.12].

Propozicija 3.3. *Neka su P i Q dvije vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ takve da $Q \ll P$ na $\mathcal{F}$ s Radon-Nikodymovom derivacijom φ. Neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. Tada za sve $\mathcal{F}$-izmjerive $F \geq 0$ vrijedi*

$$E_Q[F\,|\,\mathcal{G}] = \frac{1}{E[\varphi\,|\,\mathcal{G}]} \cdot E[F\varphi\,|\,\mathcal{G}] \quad Q\text{-g.s.}$$

Sada možemo uvesti pojam minimalne martingalne mjere.

Definicija 3.4. *Ekvivalentna martingalna mjera $\hat{P} \in \mathcal{P}$ zove se* minimalna martingalna mjera *ako*

$$E\left[\left(\frac{d\hat{P}}{dP}\right)^2\right] < \infty,$$

i ako je svaki P-martingal $M \in \mathcal{H}^2$ koji je jako ortogonalan na X također $\hat{P}$-martingal.

Idući teorem govori da nam minimalna martingalna mjera zaista omogućuje traženi prikaz (3.2) – *ako* takva minimalna martingalna mjera postoji.

Teorem 3.5. *Ako je $\hat{P}$ minimalna martingalna mjera i ako je $\hat{V}$ vrijednost portfelja strategije minimizacije lokalnog rizika, tada vrijedi*

$$\hat{V}_t = \hat{E}[H\,|\,\mathcal{F}_t], \quad t = 0, ..., T.$$

Dokaz. Označimo s

$$H = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + L_T$$

ortogonalnu dekompoziciju od H kao u Korolaru 2.14. Tada je $\hat{V}$ dan s

$$\hat{V}_t = c + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) + L_t.$$

Proces L je $\hat{P}$-martingal jer je kvadratno-integrabilan P-martingal jako ortogonalan na X. Nadalje, $\xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}) \in \mathcal{L}^1(\hat{P})$ jer su $\xi_s \cdot (X_s - X_{s-1})$ i $d\hat{P}/dP$ kvadratno-integrabilni s obzirom na P. Slijedi da je $\hat{V}$ $\hat{P}$-martingal. Zbog $\hat{V}_T = H$, tvrdnja slijedi. □

Sada nam se naravno nameće pitanje egzistencije minimalne martingalne mjere. Da bismo došli do kriterija za egzistenciju, izvest ćemo karakterizaciju minimalne martingalne mjere. No, prvo moramo analizirati utjecaj zamjene ekvivalentne mjere na strukturu martingala.

Lema 3.6. *Neka je $\widetilde{P}$ vjerojatnosna mjera ekvivalentna s P. Adaptirani proces $\widetilde{M}$ je $\widetilde{P}$-martingal ako i samo ako je proces*

$$\widetilde{M}_t \cdot E\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T,$$

P-martingal.

Dokaz. Uvedimo oznaku

$$Z_t := E\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Uočimo da je $\widetilde{M}_t \in \mathcal{L}^1(\widetilde{P})$ ako i samo ako je $\widetilde{M}_t Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$. Nadalje, radi ekvivalencije $\widetilde{P}$ i P proces Z je P-g.s. strogo pozitivan. Otuda nam Propozicija 3.3 daje

$$Z_t \cdot \widetilde{E}\left[\widetilde{M}_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right] = E\left[\widetilde{M}_{t+1} Z_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

te slijedi da je $\widetilde{E}\left[\widetilde{M}_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{M}_t$ ako i samo ako $E\left[\widetilde{M}_{t+1} Z_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{M}_t Z_t$. □

Propozicija 3.7. *Ako je $\widetilde{P}$ vjerojatnosna mjera ekvivalentna s P, tada postoji P-martingal $\Lambda = (\Lambda_t : t \in \{0, ..., T\})$ takav da je*

$$\Lambda_0 = 1 \quad i \quad \Lambda_{t+1} - \Lambda_t > -1 \quad P\text{-g.s. za sve } t, \tag{3.3}$$

i takav da martingal

$$Z_t := E\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T, \tag{3.4}$$

može biti prikazan kao

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}), \quad t = 0, ..., T. \tag{3.5}$$

S druge strane, ako je Λ P-martingal za kojeg vrijedi (3.3) i takav da (3.5) definira P-martingal Z, onda je s

$$d\widetilde{P} := Z_T dP$$

dana vjerojatnosna mjera $\widetilde{P} \approx P$.

Dokaz. Za danu vjerojatnosnu mjeru $\widetilde{P} \approx P$, definiramo Λ s $\Lambda_0 = 1$ i

$$\Lambda_{t+1} := \Lambda_t + \frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t}, \quad t = 0, ..., T-1,$$

gdje je $Z = (Z_t : t \in \{0, ..., T\})$ proces dan s (3.4). Za ovaj izbor Λ očito vrijedi (3.5). Iz ekvivalencije P i $\widetilde{P}$ slijedi da je Z_t P-g.s. strogo pozitivno za sve t pa Λ zadovoljava uvjet (3.3).

U idućem koraku indukcijom po t pokazujemo da je $\Lambda_t \in \mathcal{L}^1(P)$. Za $t = 0$ tvrdnja vrijedi po definiciji. Pretpostavimo da je $\Lambda_t \in \mathcal{L}^1(P)$. Kako je Z nenegativno, uvjetno očekivanje od Z_{t+1}/Z_t je dobro definirano i P-g.s. vrijedi

$$E\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t} \cdot E\left[Z_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\right] = 1.$$

Slijedi da je $Z_{t+1}/Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$ pa imamo

$$\Lambda_{t+1} = \Lambda_t - 1 + \frac{Z_{t+1}}{Z_t} \in \mathcal{L}^1(P).$$

Pokažimo sada martingalno svojstvo od Λ. Kako je Z_t strogo pozitivno, obje strane jednakosti $E\left[Z_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\right] = Z_t$ možemo podijeliti sa Z_t. Time dobijemo $E\left[\Lambda_{t+1} - \Lambda_t \,|\, \mathcal{F}_t\right] = 0$.

Dokažimo drugu tvrdnju. Ako je Λ P-martingal takav da (3.3) vrijedi i takav da (3.5) definira strogo pozitivan P-martingal Z, očito je $E[Z_t] = Z_0 = 1$ za sve t pa tvrdnja slijedi. □

Prije nastavka podsjetit ćemo se Doobove dekompozicije. Za dokaz vidjeti [1, Propozicija 6.1.].

Propozicija 3.8. *Neka je Q vjerojatnosna mjera i pretpostavimo da je $Y = (Y_t : t \in \{0, ..., T\})$ adaptiran proces takav da $Y_t \in \mathcal{L}^1(Q)$ za sve t. Tada postoji jedinstvena dekompozicija*

$$Y = M + A \tag{3.6}$$

gdje je $M = (M_t : t \in \{0, ..., T\})$ Q-martingal i $A = (A_t : t \in \{0, ..., T\})$ je predvidiv proces takav da je $A_0 = 0$. Dekompozicija (3.6) naziva se Doobova dekompozicija *od Y s obzirom na vjerojatnosnu mjeru Q.*

Idući teorem pokazuje nam kako na martingal $M = (M_t : t \in \{0, ..., T\})$ utječe ekvivalentna promjena ishodišne vjerojatnosne mjere P. Obično M više neće biti martingal s obzirom na novu mjeru $\widetilde{P}$ pa se u Doobovoj dekompoziciji

$$M = \widetilde{M} + A$$

od M s obzirom na $\widetilde{P}$ tada pojavljuje netrivijalan predvidiv proces $A = (A_t : t \in \{0, ..., T\})$. S druge strane, proces $-A$ možemo promatrati kao predvidiv proces koji se javlja u Doobovoj dekompoziciji $\widetilde{P}$-martingala $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t : t \in \{0, ..., T\})$ s obzirom na mjeru P. Idući rezultat, *Girsanovljeva formula* u diskretnom vremenu, opisuje proces A s obzirom na martingal $\Lambda = (\Lambda_t : t \in \{0, ..., T\})$ koji proizlazi iz prikaza (3.5).

Teorem 3.9. *Neka su P i $\widetilde{P}$ dvije ekvivalentne vjerojatnosne mjere i označimo s Λ P-martingal koji se javlja u prikazu (3.5) od $Z_t := E\left[d\widetilde{P}/dP \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$. Ako je $\widetilde{M}$ $\widetilde{P}$-martingal takav da $\widetilde{M}_t \in \mathcal{L}^1(P)$ za sve t, tada je proces $M = (M_t : t \in \{0, ..., T\})$ definiran s*

$$M_t := \widetilde{M}_t + \sum_{s=1}^{t} E\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(\widetilde{M}_s - \widetilde{M}_{s-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{s-1}\right]$$

P-martingal.

Dokaz. Uočimo prvo

$$(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1}) = \frac{1}{Z_{t-1}}\left(Z_t(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1})\right) - (\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1}). \tag{3.7}$$

Prema Lemi 3.6 $Z_t(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1})$ je prirast martingala pa je stoga iz $\mathcal{L}^1(P)$. Definirajmo

$$\tau_n := \inf\{t : Z_t < 1/n\} \wedge T, \quad n = 2, 3, ...$$

Tada slijedi

$$(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1})\, \mathrm{I}_{\{\tau_n \geq t\}} \in \mathcal{L}^1(P).$$

Posebno, uvjetna očekivanja iz iskaza teorema su P-g.s. dobro definirana. Nadalje, iz jednakosti (3.7) imamo da P-g.s. na $\{\tau_n \geq t\}$

$$\begin{aligned} &E\left[\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{1}{Z_{t-1}} E\left[Z_t(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] - E\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= -E\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(\widetilde{M}_t - \widetilde{M}_{t-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right]. \end{aligned}$$

Time smo odredili Doobovu dekompoziciju od $\widetilde{M}$ s obzirom na P. □

Pomoću prethodnog teorema možemo doći do karakterizacije onih ekvivalentnih mjera $P^* \approx P$ koje su i martingalne mjere. Označimo s

$$X = Y + B \tag{3.8}$$

Doobovu dekompoziciju od $X = (X_t : t \in \{0, ..., T\})$ s obzirom na P, gdje je $Y = (Y_t : t \in \{0, ..., T\})$ d-dimenzionalan P-martingal i $B = (B_t : t \in \{0, ..., T\})$ d-dimenzionalan predvidiv proces.

Korolar 3.10. *Neka $P^* \approx P$ takva da $E^*[|X_t|] < \infty$ za sve t te označimo s $\Lambda = (\Lambda_t : t \in \{0, ..., T\})$ P-martingal koji se javlja u prikazu (3.5) od $Z_t := E\left[dP^*/dP \,|\, \mathcal{F}_t\right]$. Tada je P^* ekvivalentna martingalna mjera ako i samo ako predvidiv proces B iz Doobove kompozicije (3.8) zadovoljava*

$$\begin{aligned} B_t &= -\sum_{s=1}^{t} E\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s - Y_{s-1}) \,|\, \mathcal{F}_{s-1}\right] \\ &= -\sum_{s=1}^{t} E\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(X_s - X_{s-1}) \,|\, \mathcal{F}_{s-1}\right] \end{aligned}$$

P-g.s. za $t = 1, ..., T$.

Dokaz. Ako je P^* ekvivalentna martingalna mjera, tada formula za B izravno slijedi iz Teorema 3.9.

Da bismo pokazali obratni smjer, označimo s

$$X = Y^* + B^*$$

Doobovu dekompoziciju od X s obzirom na P^*. Tada je $Y^* = (Y_t^* : t \in \{0, ..., T\})$ P^*-martingal. Iz Teorema 3.9 imamo da je $\widetilde{Y}^* := Y^* + \widetilde{B}^*$ P-martingal gdje je

$$\widetilde{B}_t^* = \sum_{s=1}^{t} E\left[(\Lambda_s - \Lambda_{s-1})(Y_s^* - Y_{s-1}^*) \,\middle|\, \mathcal{F}_{s-1}\right] = -B_t.$$

S druge strane, $Y = X - B = Y^* + (B^* - B)$ je P-martingal. Slijedi da je Doobova dekompozicija od Y^* s obzirom na P dana s $Y^* = Y + (B - B^*)$. Stoga vrijedi

$$Y + (B - B^*) = Y^* = \widetilde{Y}^* - \widetilde{B}^* = \widetilde{Y}^* + B.$$

Jedinstvenost Doobove dekompozicije nam daje $B^* \equiv 0$ pa je X P^*-martingal. □

Vratimo se sada zadatku karakterizacije minimalne martingalne mjere.

Teorem 3.11. *Neka je $\hat{P} \in \mathcal{P}$ ekvivalentna martingalna mjera čija je Radon-Nikodymova derivacija $d\hat{P}/dP$ kvadratno-integrabilna. Tada je $\hat{P}$ minimalna martingalna mjera ako i samo ako P-martingal Λ iz (3.5) možemo zapisati u obliku „stohastičkog integrala" s obzirom na P-martingal Y koji se javlja u Doobovoj dekompoziciji od X:*

$$\Lambda_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}), \quad t = 0, ..., T, \tag{3.9}$$

za neki d-dimenzionalan predvidiv proces $\lambda = (\lambda_t : t \in \{1, ..., T\})$.

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Trebamo pokazati da, ako je $M \in \mathcal{H}^2$ jako ortogonalan na X, tada je M $\hat{P}$-martingal. Po Lemi 3.6 ova tvrdnja slijedi pokažemo li da je MZ P-martingal gdje je

$$Z_t := E\left[\frac{d\hat{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Očito je $M_t Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$ jer su i M i Z kvadratno-integrabilni.

U idućem koraku definiramo vremena zaustavljanja

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |\lambda_{t+1}| > n\} \wedge T.$$

Zaustavljanjem martingala Λ u trenutku τ_n, dobijemo P-martingal Λ^{τ_n}. Kako je X kvadratno-integrabilno, Jensenovom nejednakošću dobijemo $E[|Y_t|^2] < \infty$. Posebno, $M\Lambda^{\tau_n}$ je integrabilno. Nadalje, kako su M i Y jako ortogonalni, Lema 2.15 kaže da je MY d-dimenzionalan P-martingal. Dakle,

$$E\left[M_{t+1}(\Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathrm{I}_{\{t+1\leq\tau_n\}}\,\lambda_{t+1}\cdot\Big(E\left[M_{t+1}Y_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t\right] - E\left[M_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t\right]Y_t\Big) = 0.$$

Primijetimo da vrijedi

$$Z^{\tau_n}_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + \Lambda^{\tau_n}_s - \Lambda^{\tau_n}_{s-1}),$$

te da je Z^{τ_n} kvadratno-integrabilno. Sada zaključujemo

$$E\left[M_{t+1}Z^{\tau_n}_{t+1}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = Z^{\tau_n}_t E\left[M_{t+1}(1 + \Lambda^{\tau_n}_{t+1} - \Lambda^{\tau_n}_t)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = Z^{\tau_n}_t M_t.$$

Dakle, za svaki n je $Z^{\tau_n}M$ P-martingal. Po Doobovom teoremu o zaustavljanju, proces

$$(Z^{\tau_n}M)^{\tau_n} = (ZM)^{\tau_n}$$

je također P-martingal. Kako $\tau_n \nearrow T$ P-g.s. i

$$\left|M^{\tau_n}_{t+1}Z^{\tau_n}_{t+1}\right| \leq \sum_{s=0}^{T}|M_s Z_s| \in \mathcal{L}^1(P),$$

primijenimo li teorem o dominantnoj konvergenciji za uvjetno očekivanje, dobijemo

$$E\left[M_{t+1}Z_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[M^{\tau_n}_{t+1}Z^{\tau_n}_{t+1}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \lim_{n\to\infty} M^{\tau_n}_t Z^{\tau_n}_t = M_t Z_t.$$

Time smo pokazali martingalno svojstvo od MZ. Zaključujemo da je $\hat{P}$ minimalna martingalna mjera.

$\boxed{\Rightarrow}$ Označimo sa

$$Z_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) + L_t$$

Kunita-Watanabe dekompoziciju od Z s obzirom na mjeru P i kvadratno-integrabilan martingal Y, kao u Teoremu 2.22. Proces L je kvadratno-integrabilan P-martingal jako ortogonalan na Y, a time i na X. Stoga pretpostavka da je $\hat{P}$ minimalna martingalna mjera povlači da je L također $\hat{P}$-martingal. Primjenom Leme 3.6 slijedi da je

$$L_t Z_t = L_t + L_t \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}) + L_t^2$$

P-martingal. Prema Lemi 2.15, iz jake ortogonalnosti od L i Y slijedi da je

$$L_t \sum_{s=1}^{t} \eta_s \cdot (Y_s - Y_{s-1})$$

P-martingal. Tada i L_t^2 također mora biti P-martingal. Posebno imamo

$$E[L_t^2] = L_0^2 = 0$$

iz čega imamo da je $L = 0$ P-g.s. Stoga je Z jednak „stohastičkom integralu" od η s obzirom na Y pa možemo zaključiti da vrijedi

$$\Lambda_{t+1} - \Lambda_t = \frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t} = \frac{1}{Z_t} \eta_{t+1} \cdot (Y_{t+1} - Y_t).$$

Uzmemo li $\lambda_t := \eta_t / Z_{t-1}$, dobijemo (3.9), što smo i htjeli pokazati. □

Korolar 3.12. *Postoji najviše jedna minimalna martingalna mjera.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\hat{P}$ i $\hat{P}'$ dvije minimalne martingalne mjere te označimo martingale iz prikaza (3.5) s Λ, odnosno s Λ'. Iz Korolara 3.10 slijedi da je martingal $N := \Lambda - \Lambda'$ jako ortogonalan na Y. S druge strane, iz Teorema 3.11 vidimo da N možemo zapisati kao „stohastički integral" s obzirom na P-martingal Y:

$$N_t = \sum_{s=1}^{t} (\lambda_s - \lambda'_s) \cdot (Y_s - Y_{s-1}), \quad t = 0, ..., T.$$

Definirajmo $\tau_n := \inf\{t : |\lambda_{t+1} - \lambda'_{t+1}| > n\}$. Tada je N^{τ_n} iz $\mathcal{L}^2(P)$. Kao u dokazu Korolara 2.14, dobijemo $N^{\tau_n} = 0$ P-g.s. Zaključujemo da se Radon-Nikodyimove derivacije od $\hat{P}$ i $\hat{P}'$ (s obzirom na P) podudaraju. □

Prije idućeg rezultata podsjetimo se da smo za dimenziju $d = 1$ sa

$$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\,(X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1})$$

definirali uvjetnu varijancu prirasta od X.

Korolar 3.13. *Za $d = 1$, egzistencija minimalne martingalne mjere $\hat{P}$ povlači iduća dva uvjeta:*

(a) Predvidiv proces λ koji se javlja u prikazu (3.9) je oblika

$$\lambda_t = \frac{-E\,[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]}{\sigma_t^2} \quad P\text{-g.s. na } \{\sigma_t^2 \neq 0\}. \tag{3.10}$$

(b) Za sve t, P-g.s. na $\{\sigma_t^2 \neq 0\}$ vrijedi

$$(X_t - X_{t-1}) \cdot E\,[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] < E\left[(X_t - X_{t-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{3.11}$$

Dokaz. (a): Označimo s $X = Y + B$ Doobovu dekompoziciju od X s obzirom na P. Prema Korolaru 3.10, za P-martingal Λ koji se javlja u prikazu (3.5) Radon-Nikodymove derivacije $d\hat{P}/dP$ vrijedi

$$B_t - B_{t-1} = -E\,[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\,.$$

Koristeći $\sigma_t^2 = E\left[(Y_t - Y_{t-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right]$ te $B_t - B_{t-1} = E\,[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$, dobijemo traženu formulu za λ_t.

(b): Prema Propoziciji 3.7 slijedi da za P-martingal Λ vrijedi

$$\Lambda_t - \Lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}) > -1 \quad P\text{-g.s. za sve } t.$$

Uz dano (a), ovaj uvjet je ekvivalentan s (3.11). □

Teorem 3.14. *Promotrimo model financijskog tržišta koji se sastoji od jedne rizične imovine koja zadovoljava uvjet* (b) *Korolara 3.13 te pretpostavimo da vrijedi pretpostavka omeđenog kompromisa očekivanja i varijance*

$$(E\,[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq C \cdot \sigma_t^2 \quad P\text{-g.s. za sve } t \geq 1.$$

Tada postoji jedinstvena martingalna mjera $\hat{P}$ čija je Radon-Nikodymova derivacija $d\hat{P}/dP = Z_T$ dana s (3.10), (3.9) i (3.5).

Dokaz. Označimo s $X = Y + B$ Doobovu dekompoziciju od X s obzirom na P. Za λ_t definiran preko (3.10), pretpostavka omeđenog kompromisa očekivanja i varijance daje

$$E\left[(\lambda_t \cdot (Y_t - Y_{t-1}))^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq C \quad P\text{-g.s.} \tag{3.12}$$

Slijedi da je Λ_t definiran preko (3.9) kvadratno-integrabilan P-martingal. U drugom dijelu dokaza Korolara 3.13 vidjeli smo da njegov uvjet (b) vrijedi ako i samo ako $\Lambda_t - \Lambda_{t-1} > -1$ za sve t. Stoga je proces Z, definiran sa

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + \Lambda_s - \Lambda_{s-1}) = \prod_{s=1}^{t}(1 + \lambda_s \cdot (Y_s - Y_{s-1}))$$

P-g.s. strogo pozitivan. Nadalje, iz omeđenosti (3.12) slijedi da je Z kvadratno-integrabilan P-martingal. Koristeći Propoziciju 3.7 zaključujemo da je Z proces Radon-Nikodymove derivacije za vjerojatnosnu mjeru $\hat{P} \approx P$ s kvadratno-integrabilnom Radon-Nikodymovom derivacijom $d\hat{P}/dP$. Posebno, X_t je $\hat{P}$-integrabilno za sve t. Iz konstrukcije od λ slijedi

$$\begin{aligned} E\left[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(Y_t - Y_{t-1}) \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] &= -E\left[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= -(B_t - B_{t-1}) \end{aligned}$$

pa je $\hat{P}$ ekvivalentna martingalna mjera prema Korolaru 3.10. Iz Teorema 3.11 slijedi da je $\hat{P}$ minimalna martingalna mjera. Jedinstvenost je već utvrđena po Korolaru 3.12. □

Primjer 3.15. *Osvrnimo se ponovno na Primjer 2.13. Proučavamo model financijskog tržišta s nezavisnim jednako distribuiranim povratima $R_t \in \mathcal{L}^2(P)$. Ranije smo vidjeli da je uvjet omeđenog kompromisa očekivanja i varijance zadovoljen bez dodatnih pretpostavki. Uveli smo oznake $\widetilde{m} := E[R_1]$ i $\widetilde{\sigma}^2 := \mathrm{Var}(R_1)$. Upotrebom formula za $E\left[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right]$ i $\mathrm{Var}\left(X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)$ dobivenih u Primjeru 2.13 dobijemo da je uvjet* (b) *Korolara 3.13 ekvivalentan s*

$$(\widetilde{m} - r)R_1 < \widetilde{\sigma}^2 + \widetilde{m}(\widetilde{m} - r) \quad P\text{-g.s.} \tag{3.13}$$

Dakle, (3.13) je ekvivalentno egzistenciji minimalne martingalne mjere. U slučaju $\widetilde{m} > r$ uvjet (3.13) daje gornju granicu za R_1, dok donja granica proizlazi za slučaj $\widetilde{m} < r$. Za slučaj $\widetilde{m} = r$, mjera P je minimalna martingalna mjera. Ako je distribucija od R_1 zadana i vrijedi

$$a \leq R_1 \leq b \quad P\text{-g.s.}$$

za neke konstante $a > -1$ te $b < \infty$, tada je uvjet (3.13) zadovoljen za sve r u nekoj okolini od $\widetilde{m}$.

Sada uvodimo drugačiji način za promatranje rizičnosti $\mathcal{L}^2$-dopustive strategije.

Definicija 3.16. Preostali uvjetni rizik $\mathcal{L}^2$*-dopustive strategije* (ξ^0, ξ) *s procesom troškova* C *definiran je procesom*

$$R_t^{rem}(\xi^0, \xi) := E\left[(C_T - C_t)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, ..., T.$$

Kažemo da $\mathcal{L}^2$*-dopustiva strategija* (ξ^0, ξ) minimizira preostali uvjetni rizik *ako*

$$R_t^{rem}(\xi^0, \xi) \leq R_t^{rem}(\eta^0, \eta) \quad P\text{-g.s.}$$

za sve t *i za sve* $\mathcal{L}^2$*-dopustive strategije* (η^0, η) *koje se podudaraju s* (ξ^0, ξ) *do trenutka* t.

Propozicija 3.17. *Za* $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{L}^2$*-dopustiva strategija minimizira preostali uvjetni rizik ako i samo ako je strategija minimizacije lokalnog rizika.*

Dokaz. Neka je $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ strategija minimizacije lokalnog rizika – po Korolaru 3.1 znamo da ona postoji. S $\hat{V}$ označimo njenu vrijednost portfelja, a s $\hat{C}$ njen proces troškova. Neka je (η^0, η) neka druga $\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija s vrijednošću portfelja V i procesom troškova C. Iz jednakosti $\hat{V} = H = V_T$ slijedi

$$\begin{aligned} C_T - C_t &= V_T - V_t - \sum_{k=t+1}^{T} \eta_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \\ &= \hat{V}_t - V_t + \sum_{k=t+1}^{T} (\hat{\xi}_k - \eta_k) \cdot (X_k - X_{k-1}) + \hat{C}_T - \hat{C}_t. \end{aligned}$$

Kako su X i $\hat{C}$ jako ortogonalni martingali, preostali uvjetni rizik od (η^0, η) zadovoljava

$$R_t^{rem}(\eta^0, \eta) = (\hat{V}_t - V_t)^2 + E\left[\sum_{k=t+1}^{T} (\hat{\xi}_k - \eta_k)^2 (X_k - X_{k-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] + E\left[(\hat{C}_T - \hat{C}_t)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Gornji izraz je minimalan ako i samo ako $V_t = \hat{V}_t$ i $\eta_k = \hat{\xi}_k$ za sve $k \geq t + 1$ P-g.s. □

Gornji teorem govori nam da je minimiziranje preostalog uvjetnog rizika za martingalnu mjeru jednako kao minimiziranje lokalnog rizika. Korolar 3.1 nam tada daje formule za vrijednost portfelja i proces troškova minimizirajuće strategije. Međutim, vidjet ćemo da u općem slučaju ne postoji $\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija koja minimizira preostali uvjetni rizik.

Poglavlje 4

Zaštita s obzirom na optimalnu varijancu

Neka je $H \in \mathcal{L}^2(P)$ kvadratno-integrabilan diskontirani zahtjev. U ovome poglavlju pretpostavljamo da je diskontirani sustav cijena X rizične imovine kvadratno-integrabilan s obzirom na P:

$$E[|X_t|^2] < \infty \quad \text{za sve } t.$$

Proučavamo problem zaštite od rizika s obzirom na minimalnu varijancu. Jednostavno rečeno, želimo minimizirati kvadratnu pogrešku zaštite definirane kao udaljenost u $L^2(P)$ između H i konačne vrijednosti portfelja V samofinancirajuće strategije trgovanja

$$\|H - V_T\|_2^2 = E[(H - V_T)^2].$$

Napomena 4.1. *Ovakva vrsta zaštite od rizika blisko je povezana s problemima minimizacije lokalnog rizika i minimizacije preostalog uvjetnog rizika. Da bismo to i pokazali, označimo s (ξ^0, ξ) neku $\mathcal{L}^2$-dopustivu strategiju za H, kao u Definiciji 2.5. Označimo s V pripadnu vrijednost portfelja, s G pripadni proces dobitka i s C pripadni proces troškova. Vrijednost*

$$R(\xi^0, \xi) := E\left[(C_T - C_0)^2\right]$$

možemo shvatiti kao globalni kvadratni rizik *za strategiju (ξ^0, ξ). Uočimo, ta se vrijednost podudara s inicijalnom vrijednošću preostalog uvjetnog rizika $R_0^{rem}(\xi^0, \xi)$. Primijetimo također da vrijedi*

$$R(\xi^0, \xi) = E\left[(H - V_0 - G_T)^2\right]$$

pa je taj izraz nezavisan od vrijednosti od ξ^0 u trenucima $t = 1, ..., T$. Zato možemo zaključiti da se globalni kvadratni rizik generalizirane *strategije trgovanja (ξ^0, ξ) podudara s kvadratnom greškom zaštite*

$$E\left[(H - \widetilde{V}_T)^2\right]$$

gdje je $\widetilde{V}$ *vrijednost portfelja* samofinancirajuće *strategije trgovanja koja proizlazi iz d-dimenzionalnog predvidivog procesa* ξ *i početne investicije* $\widetilde{V}_0 = V_0 = \xi_0^0$.

U prethodnoj napomeni vidjeli smo kako problem zašite od rizika s obzirom na varijancu možemo promatrati i u kontekstu samofinancirajućih i u kontekstu generaliziranih strategija trgovanja. Da bismo objedinili ta dva pristupa, uvedimo neke nove oznake. Za d-dimenzionalan predvidiv proces ξ označimo s $G(\xi)$ pripadni proces dobitka

$$G_t(\xi) = \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot (X_s - X_{s-1}), \quad t = 0, ..., T.$$

Uvedimo klasu

$$\mathcal{K} := \{\xi : \xi \text{ je predvidiv i } G_t(\xi) \in \mathcal{L}^2(P) \text{ za sve } t\}.$$

Definicija 4.2. *Uređen par* (V_0^*, ξ^*) *gdje su* $V_0^* \in \mathbb{R}$ *i* $\xi^* \in \mathcal{K}$ *zove se* strategija optimalne varijance *za diskontirani zahtjev* H *ako*

$$E\left[(H - V_0^* - G_T(\xi^*))^2\right] \leq E\left[(H - V_0 - G_T(\xi))^2\right] \tag{4.1}$$

za sve $V_0 \in \mathbb{R}$ *i sve* $\xi \in \mathcal{K}$.

Napomena 4.3. *Pojasnimo zašto strategiju* (V_0^*, ξ^*) *iz prethodne definicije nazivamo strategijom optimalne* varijance. *Naime, uvjet* (4.1) *ekvivalentan je uvjetu*

$$\mathrm{Var}\,(H - V_0^* - G_T(\xi^*)) \leq \mathrm{Var}\,(H - V_0 - G_T(\xi))$$

za slučaj kada vrijedi

$$E[H - V_0^* - G_T(\xi^*)] = E[H - V_0 - G_T(\xi)] = 0.$$

Odnosno, tada (V_0^*, ξ^*) *i* (V_0, ξ) *predstavljaju strategije koje u srednjem prate zahtjev* H. *Premda se mi ne ograničavamo na rad s isključivo takvim strategijama, prirodno je da će nam zanimljive biti baš one strategije za koje očekujemo da će odgovarati zahtjevu* H.

U identifikaciji strategije optimalne varijance krenut ćemo sa slučajem kada je $P \in \mathcal{P}$.

Propozicija 4.4. *Pretpostavimo da je* $P \in \mathcal{P}$. *Neka je* $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ $\mathcal{L}^2$*-dopustiva strategija minimizacije lokalnog rizika konstruirana kao u Korolaru 3.1. Tada je* $(V_0^*, \xi^*) := (\hat{\xi}_0^0, \hat{\xi})$ *strategija optimalne varijance.*

Dokaz. Neka je (ξ^0, ξ) neka $\mathcal{L}^2$-dopustiva strategija za H te neka je V pripadna vrijednost portfelja. U Napomeni 4.1 pokazali smo da je tada izraz

$$E\left[(H - V_0 - G_T(\xi))^2\right]$$

jednak početnoj vrijednosti $R_0^{rem}(\xi^0, \xi)$ procesa preostalog uvjetnog rizika za (ξ^0, ξ). Prema Propoziciji 3.17, $(\hat{\xi}_0^0, \hat{\xi})$ minimizira R_0^{rem} pa je time dana strategija optimalne varijance. □

Nastavljamo s općim slučajem gdje X nije P-martingal. Radi jednostavnosti uvodimo pretpostavku da model financijskog tržišta sadrži jednu rizičnu imovinu. Prvo ćemo izvesti rezultat o egzistenciji strategije optimalne varijance. Ključna ideja našeg postupka bit će minimiziranje funkcionala

$$\mathcal{K} \ni \xi \mapsto E[(H - V_0 - G_T(\xi))^2],$$

prvo za fiksni V_0, a potom ćemo varirati parametar V_0. U prvom ćemo koraku projicirati $H - V_0$ na prostor „stohastičkih integrala"

$$\mathcal{G}_T := \{G_T(\xi) : \xi \in \mathcal{K}\}.$$

Očito je $\mathcal{G}_T$ vektorski potprostor od $L^2(P)$. Zato do *optimalnog* $\xi = \xi(V_0)$ možemo doći preko ortogonalne projekcije od $H - V_0$ na $\mathcal{G}_T$ kada znamo da je $\mathcal{G}_T$ *zatvoren* u $L^2(P)$. Iduća propozicija dat će nam kriterij za zatvorenost od $\mathcal{G}_T$, no prvo uvedimo neke oznake. Označimo sa

$$\sigma_t^2 := \operatorname{Var}(X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}), \quad t = 1, ..., T,$$

uvjetnu varijancu, a s

$$\alpha_t := E\,[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}], \quad t = 1, ..., T,$$

uvjetno očekivanje od prirasta od X.

Propozicija 4.5. *Neka je $d = 1$ i pretpostavimo da vrijedi uvjet omeđenog kompromisa očekivanja i varijance*

$$\alpha_t^2 \leq C \cdot \sigma_t^2 \quad P\text{-g.s. za sve } t. \tag{4.2}$$

Tada je $\mathcal{G}_T$ zatvoren vektorski potprostor od $L^2(P)$.

Dokaz. Neka je $X = M + A$ Doobova dekompozicija od X gdje je $M = (M_t : t \in \{0, ..., T\})$ P-martingal i $A = (A_t : t \in \{0, ..., T\})$ je predvidiv proces takav da je $A_0 = 0$. Tada vrijedi

$$\sigma_T^2 = \operatorname{Var}(X_T - X_{T-1} \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) = E\left[(M_T - M_{T-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right].$$

Za $\xi \in \mathcal{K}$ imamo

$$\begin{aligned} E\left[G_T(\xi)^2\right] &= E\left[(G_{T-1}(\xi) + \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}))^2\right] \\ &= E\left[(G_{T-1}(\xi) + \xi_T \cdot (A_T - A_{T-1}))^2\right] + E\left[(\xi_T \cdot (M_T - M_{T-1}))^2\right] \\ &\geq E\left[\xi_T^2 \cdot \sigma_T^2\right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pretpostavimo sada da je ξ^n niz u $\mathcal{K}$ takav da $G_T(\xi^n)$ konvergira u $L^2(P)$ prema nekom Y. Iz primjene nejednakosti (4.3) na $G_T(\xi^n) - G_T(\xi^m) = G_T(\xi^n - \xi^m)$ slijedi da je $\phi^n := \xi_T^n \cdot \sigma_T$ Cauchyjev niz u $L^2(P)$. Označimo $\phi := \lim_n \phi^n$ i uzmemo

$$\xi_T := \mathrm{I}_{\{\sigma_T > 0\}} \frac{\phi}{\sigma_T}.$$

Sada iz pretpostavke (4.2) slijedi

$$\begin{aligned} E&\left[(\xi_T^n \cdot (X_T - X_{T-1}) - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}))^2\right] \\ &= E\left[(\xi_T^n - \xi_T)^2 \cdot E[(X_T - X_{T-1})^2 \mid \mathcal{F}_{T-1}]\right] \\ &= E\left[(\xi_T^n - \xi_T)^2 \cdot (\sigma_T^2 + \alpha_T^2)\right] \\ &\leq (1 + C)\, E\left[(\xi_T^n \sigma_T - \xi_T \sigma_T)^2\right] \\ &= (1 + C)\, E\left[(\phi^n - \phi)^2\right]. \end{aligned}$$

Kako zadnji izraz konvergira u 0, imamo

$$G_{T-1}(\xi^n) = G_T(\xi^n) - \xi_T^n \cdot (X_T - X_{T-1}) \longrightarrow Y - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1})$$

u $L^2(P)$. Unazadnim ponavljanjem ovog postupka dolazimo do predvidivog procesa $\xi \in \mathcal{K}$ takvog da vrijedi $Y = G_T(\xi)$. Zaključujemo da je $\mathcal{G}_T$ zatvoren u $L^2(P)$. □

Teorem 4.6. *U dimenziji $d = 1$, uvjet (4.2) omeđenog kompromisa očekivanja i varijance jamči egzistenciju strategije optimalne varijance (V_0^*, ξ^*). Takva je strategija P-g.s. jedinstvena do na modifikacije od ξ_t^* na $\{\sigma_t = 0\}$.*

Dokaz. Neka je $p : L^2(P) \to \mathcal{G}_T$ ortogonalna projekcija na zatvoren potprostor $\mathcal{G}_T$ Hilbertovog prostora $L^2(P)$, tj. $p : L^2(P) \to \mathcal{G}_T$ je linearan operator takav da za sve $Y \in L^2(P)$ vrijedi

$$E\left[(Y - p(Y))^2\right] = \min_{Z \in \mathcal{G}_T} E\left[(Y - Z)^2\right]. \tag{4.4}$$

Za proizvoljan $V_0 \in \mathbb{R}$ odaberemo neki $\xi(V_0) \in \mathcal{K}$ t.d. $G_T(\xi(V_0)) = p(H - V_0)$. Iz (4.4) vidimo da $\xi(V_0)$ minimizira funkcional

$$E\left[(H - V_0 - G_T(\xi))^2\right]$$

između svih $\xi \in \mathcal{K}$. Uočimo,

$$V_0 \mapsto G_T(\xi(V_0)) = p(H - V_0) = p(H) - V_0 \cdot p(1)$$

je afina transformacija. Stoga je

$$E\left[(H - V_0 - G_T(\xi(V_0)))^2\right]$$

kvadratna funkcija od V_0 i postoji neki V_0^* koji ju minimizira. Za proizvoljne $V_0 \in \mathbb{R}$ i $\xi \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$\begin{aligned} E\left[(H - V_0 - G_T(\xi))^2\right] &\geq E\left[(H - V_0 - G_T(\xi(V_0)))^2\right] \\ &\geq E\left[(H - V_0^* - G_T(\xi(V_0^*)))^2\right]. \end{aligned}$$

Zato je $(V_0^*, \xi^*) := (V_0^*, \xi(V_0^*))$ strategija optimalne varijance. Jedinstvenost slijedi iz (4.3) □

Sad kada smo izveli rezultat o egzistenciji, želimo i eksplicitno odrediti traženu strategiju optimalne varijance (V_0^*, ξ^*). To je moguće pod pretpostavkom

$$\frac{\alpha_t^2}{\sigma_t^2} \text{ je determinističko za sve } t \tag{4.5}$$

(ovdje koristimo dogovor $\frac{0}{0} := 0$). Pokazat će se da je (V_0^*, ξ^*) usko povezana sa strategijom minimizacije lokalnog rizika $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$. Podsjetimo se, po Propoziciji 2.11, $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$ i pripadna vrijednost portfelja $\hat{V}$ određeni su rekurzijom:

$$\begin{aligned} \hat{V}_T &= H, \\ \hat{\xi}_{t+1} &= \frac{\operatorname{cov}\left(\hat{V}_{t+1}, X_{t+1} - X_t \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)}{\sigma_{t+1}^2} \cdot \mathrm{I}_{\{\sigma_{t+1} \neq 0\}}, \\ \hat{V}_t &= E\left[\hat{V}_{t+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] - \hat{\xi}_{t+1} \cdot E\left[X_{t+1} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right]; \end{aligned}$$

proces $\hat{\xi}^0$ je dan s $\hat{\xi}_t^0 := \hat{V}_t - \hat{\xi}_t \cdot X_t$.

Teorem 4.7. *Uz uvjet* (4.5), $V_0^* := \hat{V}_0$ *i*

$$\xi_t^* := \hat{\xi}_t + \frac{\alpha_t}{\sigma_t^2 + \alpha_t^2} (\hat{V}_{t-1} - \hat{V}_0 - G_{t-1}(\xi^*)), \quad t = 1, ..., T,$$

definiraju strategiju optimalne varijance (V_0^*, ξ^*)*. Štoviše,*

$$E\left[(H - V_0^* - G_T(\xi^*))^2\right] = \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot E\left[(\hat{C}_t - \hat{C}_{t-1})^2\right],$$

gdje $\hat{C}$ *označava proces troškova od* $(\hat{\xi}^0, \hat{\xi})$*, a* γ_t *je dan s*

$$\gamma_t := \prod_{k=t+1}^{T} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \alpha_k^2}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po T. Za $T = 1$ problem se svodi na poseban slučaj Propozicije 2.11, koja nam daje $\xi_1^* = \hat{\xi}_1$ i $V_0^* = \hat{V}_0$.

Za $T > 1$, koristit ćemo ortogonalnu dekompoziciju

$$H = \hat{V}_T = \hat{V}_0 + \sum_{t=1}^{T} \hat{\xi}_t \cdot (X_t - X_{t-1}) + \hat{C}_T - \hat{C}_0 \tag{4.6}$$

diskontiranog zahtjeva H konstruiranu kao u Korolaru 2.14. Pretpostavljamo da je tvrdnja teorema dokazana za $T - 1$. Prvo želimo minimizirati

$$\xi_T \mapsto E[(\hat{V}_T - V_{T-1} - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}))^2], \tag{4.7}$$

gdje je V_{T-1} neka slučajna varijabla u $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{T-1}, P)$. Po (4.6) i dokazu Teorema 2.10, $\hat{V}_T$ možemo zapisati kao

$$\hat{V}_T = \hat{V}_{T-1} + \hat{\xi}_T \cdot (X_T - X_{T-1}) + \hat{C}_T - \hat{C}_{T-1},$$

gdje je $\hat{C}$ P-martingal jako ortogonalan na X. Zato možemo raspisati

$$\begin{aligned} &E[(\hat{V}_T - V_{T-1} - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}))^2] \\ &\quad = E[(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1} - (\hat{\xi}_T - \xi_T) \cdot (X_T - X_{T-1}) + \hat{C}_T - \hat{C}_{T-1})^2]. \end{aligned}$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje od argumenta s desne strane gornje jednakosti uz dano $\mathcal{F}_{T-1}$:

$$\begin{aligned} &E\left[(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1} - (\hat{\xi}_T - \xi_T) \cdot (X_T - X_{T-1}) + \hat{C}_T - \hat{C}_{T-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right] \\ &\quad = (\hat{V}_{T-1} - V_{T-1})^2 + 2(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1})(\hat{\xi}_T - \xi_T) \cdot \alpha_T \\ &\qquad + (\hat{\xi}_T - \xi_T)^2(\sigma_T^2 + \alpha_T^2) + E\left[(\hat{C}_T - \hat{C}_{T-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Minimum tog izraza se postiže za

$$\xi_T(V_{T-1}) := \hat{\xi}_T + \frac{\alpha_T}{\sigma_T^2 + \alpha_T^2}(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1}), \tag{4.9}$$

što onda također minimizira i (4.7). Minimalna vrijednost u (4.8) je dana s

$$(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1})^2 \frac{1}{1 + \alpha_T^2/\sigma_T^2} + E\left[(\hat{C}_T - \hat{C}_{T-1})^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right].$$

Koristeći pretpostavku (4.5) da je α_T^2/σ_T^2 konstantno, možemo izračunati očekivanje zadnjeg izraza te dobijemo:

$$\begin{aligned} &E[(\hat{V}_T - V_{T-1} - \xi_T(V_{T-1}) \cdot (X_T - X_{T-1}))^2] \\ &\quad = E[(\hat{V}_{T-1} - V_{T-1})^2] \cdot \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \alpha_T^2} + E[(\hat{C}_T - \hat{C}_{T-1})^2]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Do sad nismo odredili V_{T-1}. Promotrimo stoga minimizaciju od

$$E[(\hat{V}_T - V_{T-1} - \xi_T(V_{T-1}) \cdot (X_T - X_{T-1}))^2]$$

s obzirom na V_{T-1}, kada je V_{T-1} oblika $V_{T-1} = V_0 + G_{T-1}(\xi)$ za $\xi \in \mathcal{K}$ i $V_0 \in \mathbb{R}$. Prema (4.10), ovaj je problem ekvivalentan minimizaciji od

$$(V_0, \xi) \mapsto E[(H_{T-1} - V_0 - G_{T-1}(\xi))^2],$$

gdje je $H_{T-1} := \hat{V}_{T-1}$. Po pretpostavci indukcije, ovaj problem rješavaju V_0^* i $(\xi_t^*)_{t=1,\dots,T-1}$ definirani kao u tvrdnji teorema. Još nam je preostalo odrediti ξ_T^* – korištenjem formule (4.9) za $\xi_T(V_0^* + G_{T-1}(\xi^*))$ dolazimo do traženog rješenja. Time je ispunjena tvrdnja indukcije i dokaz je gotov. □

Napomena 4.8. *Iz martingalnog svojstva od $\hat{C}$ slijedi*

$$E[(\hat{C}_T - \hat{C}_0)^2] = \sum_{t=1}^{T} E[(\hat{C}_t - \hat{C}_{t-1})^2].$$

Ako je $\hat{C} \not\equiv \hat{C}_0$ i ako $\gamma_1 < 1$, onda $E[(\hat{C}_T - \hat{C}_0)^2]$ mora biti strogo veće od minimalnog globalnog rizika

$$E[(H - V_0^* - G_T(\xi^*))^2] = \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot E[(\hat{C}_t - \hat{C}_{t-1})^2].$$

Napomena 4.9. *Podsjetimo se, Propozicijom 3.17 na kraju prošlog poglavlja pokazali smo da, u slučaju kada je P martingalna mjera, postoji strategija koja minimizira preostali uvjetni rizik u smislu Definicije 3.16. Što ako P nije martingalna mjera? Iz Teorema 4.7 i Napomene 4.8 slijedi da će se proces ξ^* iz strategije optimalne varijance (V_0^*, ξ^*) razlikovati od odgovarajućeg procesa $\hat{\xi}$ iz strategije minimizacije lokalnog rizika ako postoji neki t takav da je $\alpha_t \neq 0$, tj. ako P nije martingalna mjera. Ovo objašnjava zašto tada ne mora postojati strategija koja minimizira preostali uvjetni rizik. Naime, za minimalnost od*

$$R_0^{rem}(\xi^0, \xi) = E[(C_T - C_0)^2] = E[(H - \xi_0^0 - G_T(\xi))^2]$$

treba vrijediti $\xi = \xi^*$, dok minimalnost od

$$R_{T-1}^{rem}(\xi^0, \xi) = E[(C_T - C_{T-1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] = R_{T-1}^{loc}(\xi^0, \xi)$$

traži $\xi_T = \hat{\xi}_T$. Dakle, ova dva zahtjeva su općenito neuskladiva.

Bibliografija

[1] H. Föllmer i A. Schied, *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, 2004.

[2] H. Föllmer i M. Schweizer, *Hedging by Sequential Regression: An Introduction to the Mathematics of Option Trading*, ASTIN Bulletin **18** (1988), 147–160.

[3] H. Šikić, *Mjera i integral, nastavni materijali*.

[4] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1, nastavni materijali*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p11_2.pdf`, datum zadnjeg pristupanja dokumentu 21.10.2021.

Sažetak

U ovom radu predstavljamo jedan od pristupa problemu zaštite od rizika u nepotpunim diskretnim modelima financijskih tržišta; u središtu je minimizacija kvadratne greške zaštite.

U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove kako bismo definirali model financijskog tržišta u diskretnom vremenu.

U drugom poglavlju iznosimo lokalnu verziju problema minimizacije kvadratne greške. Problem promatramo kao proces sekvencijalne regresije te dolazimo do postupka rekurzivne konstrukcije strategije minimizacije lokalnog rizika. Rješenje problema također uključuje ortogonalnu dekompoziciju danog slučajnog zahtjeva.

Nadalje, u trećem poglavlju proučavamo minimalne martingalne mjere. Važno svojstvo takvih ekvivalentnih martingalnih mjera jest da se vrijednost portfelja generirana strategijom minimizacije lokalnog rizika može opisati kao martingal uvjetnih očekivanja danog slučajnog zahtjeva. Također, uvodimo pojam preostalog uvjetnog rizika.

Na kraju, u četvrtom poglavlju promatramo problem zaštite od rizika s obzirom na optimalnu varijancu gdje želimo minimizirati globalnu kvadratnu grešku. Pokazujemo da se rješenja lokalnog i globalnog problema podudaraju ako je ishodišna mjera martingalna.

Summary

In this thesis, we present one of the approaches to the problem of hedging in incomplete financial market models in discrete time; the focus is on minimizing the quadratic hedging error.

In the first chapter, we introduce fundamental concepts used to define the financial market model in discrete time.

In the second chapter, we present a local version of the minimization problem. We view the problem as a sequential regression procedure and we develop a process of recursive construction of a locally risk-minimizing strategy. The solution to the problem also involves an orthogonal decomposition of a given contingent claim.

Furthermore, in the third chapter, we study the minimal martingale measures. An important characteristic of such equivalent martingale measures is that the value process generated by a locally risk-minimizing strategy can be described as the martingale of conditional expectations of the given contingent claim. We also introduce the concept of the remaining conditional risk.

Finally, in the fourth chapter, we analyze the problem of variance-optimal hedging where we try to minimize the global quadratic hedging error. We show that the solutions to the local and global problem coincide if the underlying measure is itself a martingale measure.

Životopis

Rođena sam 10. kolovoza 1997. u Zagrebu. Nakon završetka zagrebačke XV. gimnazije, 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2019. te iste godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike.