Trokutasti brojevi

Pavlović, Matea

Master's thesis / Diplomski rad

2021

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Pavlović

TROKUTASTI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, prosinac 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

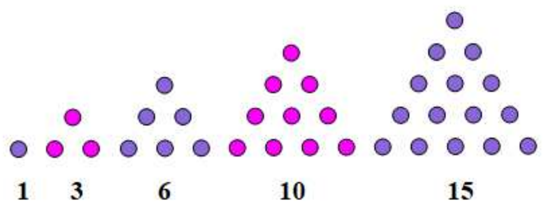
Hvala mojim najbližima koji su bili tu za mene u svim trenutcima ovog putovanja i učinili ga lakšim kada se činilo da to nije.
Najveća hvala mojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje, bili najveća podrška i od prvog dana vjerovali u mene.
Na kraju, posebna zahvala mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na uloženom trudu, izdvojenom vremenu i podršci tijekom pisanja ovog rada.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Sadržaj

Uvod

Teorija brojeva grana je matematike koja se bavi proučavanjem svojstava cijelih brojeva. U matematici nerijetko koristimo geometrijske ilustracije kako bismo opisali koncepte ili prikazali vezu različitih grana matematike. Tema ovog diplomskog rada su *trokutasti brojevi*, specijalni oblik *figurativnih brojeva* koji se mogu prikazati točkicama posloženim u određene geometrijske oblike (figure). S obzirom na njihov naziv, jasno je da se mogu reprezentirati jednakostraničnim trokutima. Stoga ova tema povezuje teoriju brojeva i geometriju koja nam daje uvijek poželjnu vizualizaciju u matematici te pobliže opisuje pojam trokutastog broja.



Na samom početku rada upoznat ćemo se s trokutastim brojevima, dati njihovu definiciju, vizualizaciju te uočiti gdje ih susrećemo u svakodnevnom životu. Lako se uočava da je n-ti trokutasti broj T_n zapravo zbroj prvih n prirodnih brojeva što znači da je $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Niz trokutastih brojeva zadovoljava različite identitete koji se lako mogu pokazati algebarski ili koristeći princip matematičke indukcije, no zanimljiva je vizualizacija tih identiteta, odnosno tzv. *dokazi bez riječi*. Trokutaste brojeve nalazimo u Pascalovom trokutu te u Pascalovom trokutu modulo 2 koji se još naziva *Trokut Sierpińskog*.

U drugome poglavlju rada pokazujemo da se neki problemi vezani uz trokutaste brojeve mogu povezati s diofantskim jednadžbama, konkretno s pelovskom i Pitagorinom jednadžbom. Tako, na primjer, pokazujemo da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva m za koje postoji trokutasti broj T_n takav da je $\mid T_n - m^2 \mid= 1$. Nadalje, pokazujemo da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trokuta (x, y, z) čije su katete

x i y uzastopni trokutasti brojevi.

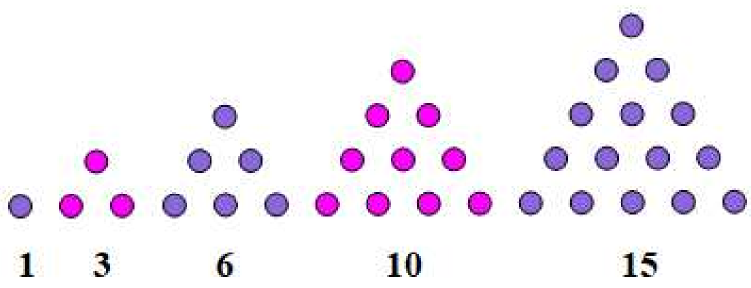
U trećem poglavlju obrađuje se veza niza trokutastih brojeva s poznatim nizovima kao što su niz Mersenneovih brojeva, niz Fermatovih, niz Fibonaccijevih brojeva i niz Pellovih brojeva. Za svaki nas od navedenih nizova zanima ima li među njima trokutastih brojeva. Pokazuje se da je za rješavanje ovih problema korisna karakterizacija trokutastih brojeva koja kaže da je broj N trokutasti ako i samo ako je $8N + 1$ potpuni kvadrat. Trokutasti brojevi 1, 3, 15 i 4095 su ujedno i Mersenneovi brojevi. U radu pokazujemo da postoji beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva koji *nisu* trokutasti. Dokaz te tvrdnje je elementaran i zasniva se na promatranju ostataka pri dijeljenju oba niza brojem 10. Nadalje, navedeni brojevi su i jedini Mersennovi trokutasti brojevi koji se još nazivaju i *Ramanujan-Nagellovi brojevi.* Nije teško pokazati da je broj 3 jedini Fermatov broj koji je trokutast. Poznati matematičar V. Hoggatt (1921.–1980.) koji se posebno zanimao za Fibonaccijeve brojeve pretpostavio je da su brojevi 1, 3, 21, 55 jedini trokutasti brojevi Fibonaccijevog niza. To je 1987. pokazao L. Ming koristeći Jacobijeve simbole. Budući da je dokaz te tvrdnje tehnički zahtjevan, opisat ćemo ukratko njegovu ideju i strategiju. Na kraju, pokazujemo da je broj 1 jedini Pellov broj koji je ujedno trokutasti broj. U dokazu se koristi više identiteta za Pellove brojeve te Jacobijevi simboli.

Poglavlje 1

Trokutasti brojevi

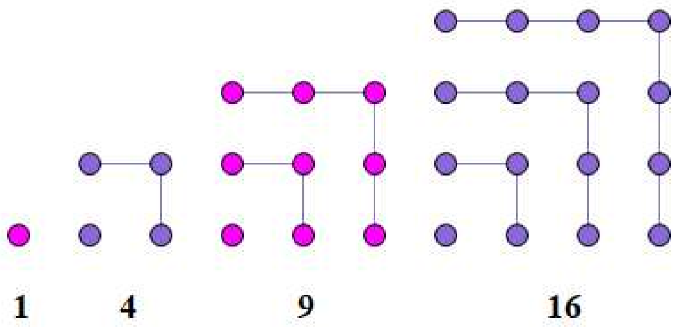
1.1 Motivacija i definicija

Figurativni brojevi poznati su još od vremena Stare Grčke, no iako se njihovo otkriće pripisuje Pitagorejcima, smatra se da su stari Kinezi bili upoznati s njima čak 500 godina prije Pitagore. To su brojevi koji se mogu dobiti slaganjem točkica (kvadratića) u određene geometrijske oblike (figure). Takav geometrijski prikaz brojeva omogućuje vizualno predočavanje algebarskih svojstava i relacija.

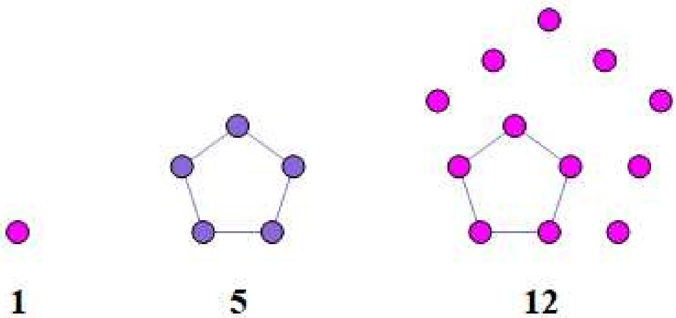


Slika 1.1: Trokutasti brojevi

Poligonalni brojevi posebna su klasa figurativnih brojeva. To su pozitivni cijeli brojevi koji se mogu prikazati pravilnim n-terokutom pri čemu je $n \geq 3$. Dakle, ideja jest da od određenog broj točkica složimo trokut, kvadrat, peterokut (slike 1.1, 1.2, 1.3), odnosno općenito pravilni n-terokut. Prema tome, razlikujemo trokutaste, kvadratne, peterokutne i općenito n-terokutne brojeve. Budući da su *trokutasti brojevi* tema ovog rada, u nastavku ćemo se baviti samo njima.



Slika 1.2: Kvadratni brojevi

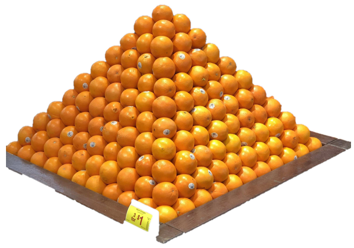


Slika 1.3: Peterokutni brojevi

Promotrimo li svijet oko sebe, uočit ćemo kako se trokutasti raspored objekata često pojavljuje u svakodnevnom životu. Ako odemo na kuglanje, set od deset čunjeva koje gađamo složeni su u trokut (slika 1.4a). Na biljaru, petnaest biljarskih kuglica na početku igre složene su upravo u trokut (slika 1.4b). Također, na mnogim tržnicama možemo pronaći štandove na kojima je voće poslagano u istom rasporedu (slika 1.4c).

(a) Čunjevi

(b) Kuglice



(c) Naranče

Slika 1.4: Trokutasti brojevi u svakodnevnom životu

Slika govori više od tisuću riječi što zaista vrijedi u ovom slučaju. Promatrajući navedene slike iz života te grafički prikaz trokutastih brojeva (slika 1.1), lako uočavamo da:

- u svakom sljedećem koraku trokut ima jedan red više nego u prethodnom,
- svaki sljedeći red ima jednu točkicu više nego prethodni (pa broj točaka u redu raste kao niz prirodnih brojeva 1, 2, 3, ...).

Izračunajmo ukupan broj točaka u svakom pojedinom trokutu:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1, \\
T_2 &= 1 + 2 = 3, \\
T_3 &= 1 + 2 + 3 = 6, \\
T_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \\
T_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \\
T_6 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, \\
T_7 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.
\end{aligned}$$

Članovi niza (T_n) predstavljaju trokutaste brojeve, a n-ti trokutasti broj jednak je zbroju prvih n prirodnih brojeva:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

1.2 Pascalov trokut

Pascalov trokut je struktura dobivena slaganjem binomnih koeficijenata u trokut. U svakom redu nalaze se brojevi koji predstavljaju koeficijente u razvoju odgovarajuće potencije binoma prema binomnom poučku. U n-tom retku nalaze se brojevi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

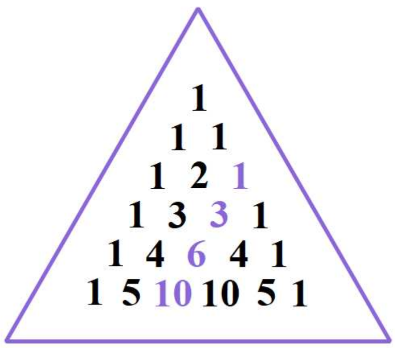
Za konstrukciju Pascalova trokuta koristi se rekurzivna relacija koju zadovoljavaju binomni koeficijenti

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

tj. svaki element trokuta, osim rubnih elemenata koji su jednaki 1, jednak je zbroju dvaju susjednih elemenata iznad njega. Nadalje, budući da je

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2},$$

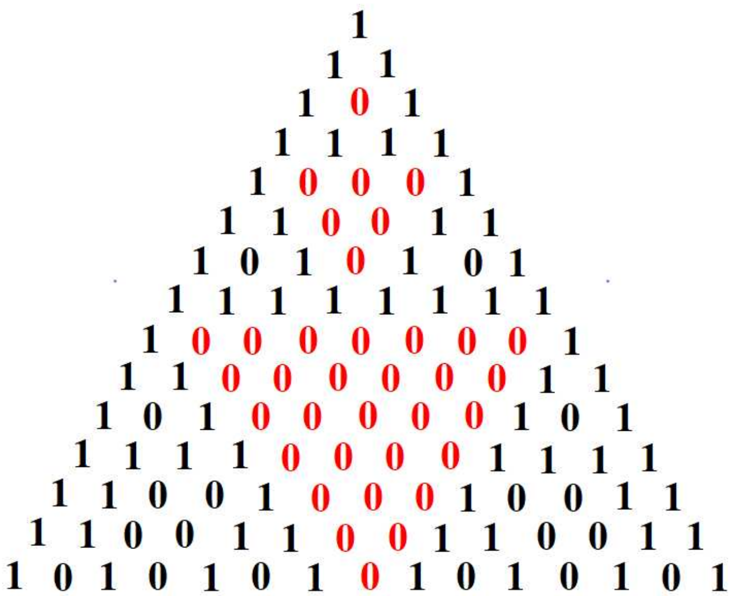
Pascalov trokut sadrži niz trokutastih brojeva (slika 1.5).



Slika 1.5: Pascalov trokut

Zamijenimo sve neparne brojeve u trokutu s brojem 1, a parne s brojem 0, tj. promotrimo Pascalov trokut modulo 2. Novonastali trokut nazivamo *Pascalov binarni trokut* ili *Trokut Sierpińskog* (slika 1.6). Jasno, ovaj trokut mogli smo generirati i tako da svaki element dobijemo kao zbroj dvaju susjednih elemenata iznad njega u polju $\mathbb{Z}_2$ (gdje je $1 + 1 = 0$), osim jednica na rubu. Uočimo da su u retku 2^n, ako vrh trokuta označimo kao nulti redak, svi elementi osim rubna dva jednaki 0, njih $2^n - 1$. U svakom od sljedećih redaka imat ćemo u središnjem dijelu niz nula „kraći” za jednu nulu. Redak $2^{n+1}-2$ retka ima točno jednu nulu u sredini retka, a redak $2^{n+1}-1$ sastoji se samo od jedinica. Nizovi nula u sredinama svakog retka (od 2^n do $2^{n+1}-2$) formiraju trokut Δ_n kojemu je baza u 2^n-tom redu, a vrh u sredini retka $2^{n+1}-2$. Broj nula u trokutu Δ_n iznosi

$$(2^n-1)2^{n-1} = T_{2^n-1}.$$



Slika 1.6: Pascalov binarni trokut

1.3 Svojstva trokutastih brojeva

Direkno iz (1.1) slijedi:

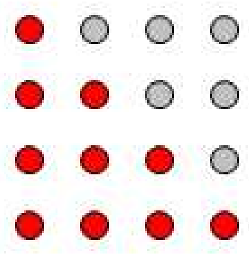
$$T_{n-1} + T_n = n^2, \ n \geq 2. \tag{1.2}$$

Na slici 1.7 dana je vizualna interpretacija relacije (1.2) za $n = 4$.

Teorem 1.3.1. *Dva uzastopna trokutasta broja, T_n i T_{n+1}, iste su parnosti ako i samo ako je n neparan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $T_n \equiv T_{n+1} \pmod 2$. Tada je $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ paran broj, odnosno $n+1$ je paran. Dakle, n je neparan broj.

Obrnuto, neka je n neparan broj. Tada je $(n+1)^2$ paran pa su zbog relacije (1.2) brojevi T_n i T_{n+1} iste parnosti. $\square$



Slika 1.7: $T_3 + T_4 = 4^2$

Sljedeće svojstvo bilo je poznato Diofantu oko 250. godine.

Teorem 1.3.2 (Diofant)**.** *Vrijedi*

$$8T_n + 1 = (2n+1)^2, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Dokaz. Prema (1.1) je

$$8T_n + 1 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

□

Posljedica prethodnog teorema je poznata relacija $(2n+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$, te sljedeća tvrdnja koja može poslužiti za testiranja je li neki broj trokutasti broj – bez rješavanja kvadratne jednadžbe.

Korolar 1.3.3. *Ako je $8N + 1$ potpuni kvadrat za neki $N \in \mathbb{N}$, onda je N trokutasti broj.*

Primjer 1.3.4. *Odredite koji je od brojeva 2 717 946 i 3 125 224 trokutasti broj.*

Rješenje. Kako je $8 \cdot 2\,717\,946 + 1 = 4663^2$, prema korolaru 1.3.3 slijedi da je 2 717 946 trokutasti broj T_n, pri čemu je $n = (4663-1)/2 = 2331$.

Broj 3 125 224 nije trokutasti, jer $8 \cdot 3\,125\,224 + 1$ nije potpuni kvadrat. □

Trokutasti brojevi zadovoljavaju niz identiteta koji se lako mogu pokazati algebarski pomoću osnovnih relacija (1.1), (1.2) i (1.3):

$$T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}, \tag{1.4}$$

$$8T_{n-1} + 4n = (2n)^2, \tag{1.5}$$

$$T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}, \tag{1.6}$$

$$T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}, \tag{1.7}$$

$$T_{T_{n-1}} + T_{T_n} = T_n^2, \tag{1.8}$$

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3, \tag{1.9}$$

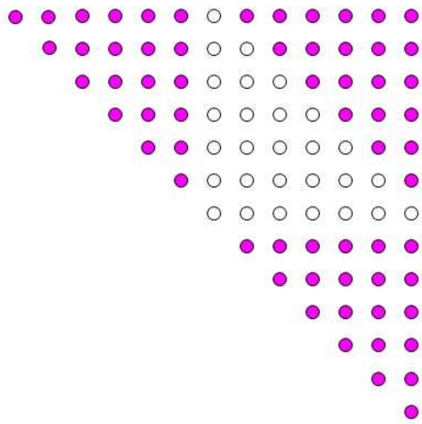
$$T_{2n} - 2T_n = n^2, \tag{1.10}$$

$$T_{2n-1} - 2T_{n-1} = n^2, \tag{1.11}$$

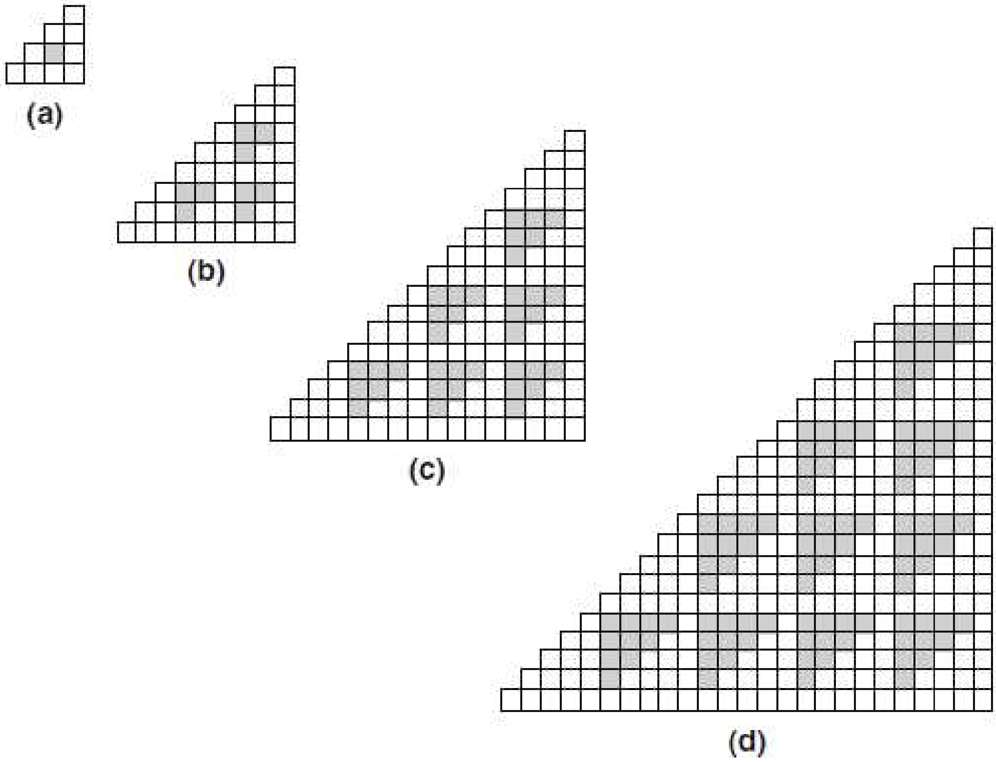
$$T_n^2 = T_n + T_{n-1}T_{n+1}, \tag{1.12}$$

$$2T_nT_{n-1} = T_{n^2-1}. \tag{1.13}$$

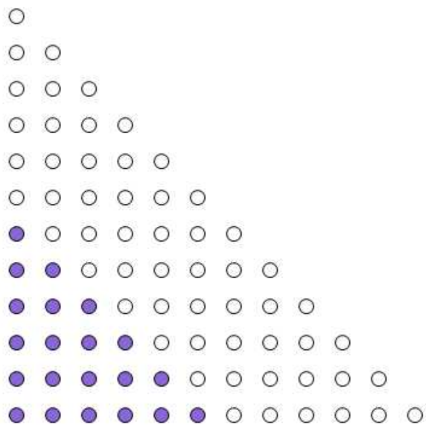
Posebno su zanimljivi tzv. *dokazi bez riječi* relacija ovakvog tipa. Na slikama 1.9, 1.11, 1.10 i 1.8 vizualni su prikazi relacija (1.4) – (1.7).



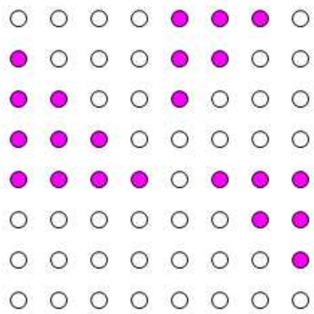
Slika 1.8: $T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}$



Slika 1.9: a) $T_1^2 + T_2^2 = T_4$ b) $T_2^2 + T_3^2 = T_9$ c)$T_3^2 + T_4^2 = T_{16}$ d) $T_4^2 + T_5^2 = T_{25}$



Slika 1.10: $T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$



Slika 1.11: $8T_{n-1} + 4n = (2n)^2$

1.4 Funkcija izvodnica za niz trokutastih brojeva

Za dani niz $(a_n)_{n\geq 0}$ *funkcija izvodnica* definira se kao *formalni red potencija*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

pri čemu pod pojmom *formalni* mislimo da se ne obaziremo na problem konvergencije reda, odnosno da varijabli x nije dodijeljena nikakva vrijednost. Često nad ovakvim redovima izvodimo različite algebarske manipulacije na čisto formalnoj razini. Ipak, konkretnu funkciju f definiramo kao

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

za sve x u kojima je dani red konvergentan.

Kako bismo odredili funkciju izvodnicu za niz trokutastih brojeva, krenut ćemo od poznate sume geometrijskog reda

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Deriviranjem prethodnog reda dobivamo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,$$

a ponovnim deriviranjem slijedi

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0} n(n+1)x^{n-1} = 2\sum_{n\geq 0} T_n x^{n-1} = 2\sum_{n\geq 1} T_n x^{n-1} = 2\sum_{n\geq 0} T_{n+1} x^n.$$

Množenjem prethodnog reda s x dolazimo do

$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{2} x^n = \sum_{n\geq 1} T_n x^n,$$

odnosno do funkcije izvodnice za niz trokutastih brojeva

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + \cdots .$$

Poglavlje 2

Veza s nekim diofantskim jednadžbama

Algebarska jednadžba s dvjema ili više nepoznanica čiji su koeficijenti cijeli brojevi, a rješenja pripadaju skupu prirodnih ili cijelih brojeva naziva se *diofantska jednadžba*.

2.1 Pellova jednadžba

Diofantska jednadžba drugog reda oblika

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2.1}$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat naziva se *Pellova jednadžba.* Za $N \in \mathbb{Z}$ jednadžba

$$x^2 - dy^2 = N \tag{2.2}$$

se naziva *pelovska jednadžba.* Pellova i pelovska jednažba rješavaju se u skupu prirodnih brojeva. Pellova jednadžba je rješiva za svaki $d \in \mathbb{N}$ koji nije potpuni kvadrat, dok pelovska jednadžba ne mora biti rješiva za svaki takav d. Ako je (x_1, y_1) najmanje rješenje Pellove jednadžbe (2.1) u skupu prirodnih brojeva, tzv. *fundamentalno rješenje*, onda su sva njena rješenja u $\mathbb{N}$ dana formulom:

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Ako je $a + b\sqrt{d}$ rješenje pelovske jednadžbe (2.2), a $u + v\sqrt{d}$ rješenje pripadne Pellove jednadžbe (2.1), onda je

$$(u + v\sqrt{d})(a + b\sqrt{d}) = a' + b'\sqrt{d}$$

rješenje pelovske jednadžbe (2.2).

U sljedećem primjeru povezat ćemo trokutaste brojeve s pelovskim jednadžbama.

Primjer 2.1.1. *Pokažite da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva m za koje postoji trokutasti broj T_n takav da vrijedi*

$$| T_n - m^2 |= 1. \tag{2.3}$$

Rješenje. Lako možemo vidjeti da je

$$| T_2 - 2^2 |=| 3 - 4 |= 1, | T_4 - 3^2 |=| 10 - 9 |= 1, | T_5 - 4^2 |=| 15 - 16 |= 1.$$

Množenjem relacije (2.3) s 8 dobivamo

$$\left|4n(n+1) - 8m^2\right| = 8,$$

odnosno

$$\left|(2n+1)^2 - 1 - 2(2m)^2\right| = 8,$$

pa se uz supstituciju $x = 2n + 1$ i $y = 2m$ prethodna relacija svodi na dvije pelovske jednadžbe

$$x^2 - 2y^2 = 9 \text{ i } x^2 - 2y^2 = -7,$$

gdje je $x = 2n+1$ i $y = 2m$. Iz početnih primjera možemo uočiti da je svaka od ovih pelovskih jednadžbi rješiva; $9^2 - 2 \cdot 6^2 = 9$, $5^2 - 2 \cdot 4^2 = -7$.

Odredit ćemo niz mogućih cijelih brojeva m koji odgovara svakoj od pelovskih jednadžbi.

Slučaj 1: Budući da je $(3, 2)$ fundamentalno rješenje pripadne Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$, relacija

$$(3 + 2\sqrt{2})^k(9 + 6\sqrt{2}) = x_k + y_k\sqrt{d},\ k \geq 0 \tag{2.4}$$

generira niz rješenje (x_k, y_k) pelovske jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 9$. U tablici 2.1 dano je prvih nekoliko rješenja te njihova veza s brojevima m i T_n.

Iz relacije (2.4) mogu se dobiti sljedeće rekurzivne formule:

$$\begin{aligned} x_k &= 6x_{k-1} - x_{k-2}, \\ y_k &= 6y_{k-1} - y_{k-2},\ k \geq 2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

uz početne uvjete

$$x_0 = 3, x_1 = 9,\ y_0 = 0, y_0 = 6.$$

Iz rekurzija (2.5) vidi se da je x_k uvijek neparan broj, a y_k paran, pa za

$$m = \frac{y_k}{2},$$

i n-ti, $n = \frac{x_k - 1}{2}$, trokutasti broj

$$T_n = \frac{x_k^2 - 1}{8}$$

vrijedi relacija (2.3).

Rješavanjem rekurzije u (2.5) za niz (x_n) možemo dobiti niz eksplicitnih vrijednosti za m:

$$m_k = -\frac{3}{16}(-8 + 3\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^k + \frac{3}{16}(8 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^k, \ k \geq 0.$$

Slučaj 2: Analogno kao u prethodnom slučaju niz

$$(3 + 2\sqrt{2})^k(1 + 2\sqrt{2}) = x'_k + y'_k\sqrt{d}, \ k \geq 0 \tag{2.6}$$

generira rješenja jednadžbe $x^2 - 2y^2 = -7$.

Prema (2.6) dobivaju se iste rekurzije kao u (2.5) uz druge početne uvjete:

$$\begin{aligned} x'_k &= 6x'_{k-1} - x'_{k-2}, \\ y'_k &= 6y'_{k-1} - y'_{k-2}, \ k \geq 2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

uz početne uvjete

$$x'_1 = 1, x'_2 = 5, \ y'_0 = 2, y'_4 = 6.$$

Rješavanjem rekurzije u (2.7) za niz (x'_n) možemo dobiti niz eksplicitnih vrijednosti za m:

$$m'_k = -\frac{1}{8}(2 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^k + \frac{1}{8}(2 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^k, \ k \geq 0$$

te kao u prethodnom slučaju

$$m'_k = \frac{y'_k}{2}, T_n = \frac{{x'_k}^2 - 1}{8}, n = \frac{x'_k - 1}{2}$$

zadovoljavaju relaciju (2.3).

U tablicama 2.1 i 2.2 prikazana su prva četiri rješenja dobivenih jednadžbi $x^2 - 2y^2 = 9$ i $x^2 - 2y^2 = -7$ te odgovarajuće vrijednosti n, m, T_n i m^2.

□

x	y	n	m	T_n	m^2
3	0	1	0	1	0
9	6	4	3	10	9
51	36	25	18	325	324
297	210	148	105	11026	11025

Tablica 2.1

x	y	n	m	T_n	m^2
1	2	0	1	0	1
5	4	2	2	3	4
11	8	5	4	15	16
31	22	15	11	120	121

Tablica 2.2

2.2 Pitagorina jednadžba

Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) zovemo *Pitagorina trojka* ako su x i y katete, a z hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{2.8}$$

Ako su x, y, z relativno prosti, onda kažemo da je (x, y, z) *primitivna Pitagorina trojka* i takav trokut zovemo *primitivni Pitagorin trokut*. Diofantska jednadžba (2.8) zove se *Pitagorina jednadžba*. U primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva x, y mora biti neparan. Ako bi x i y bili parni, onda bi i z bio paran, što znači da x, y i z nisu relativno prosti. Ako su x i y oba neparni, onda je $z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$, što nije moguće. Nadalje, direktno iz (2.8) slijedi da su x, y i z iz primitivne Pitagorine trojke u parovima relativno prosti. Pokazuje se da su sve primitivne Pitagorine trojke (x, y, z), u kojima je y paran, dane formulom

$$(x, y, z) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2),$$

gdje je $m > n$ i m,n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti. Općenito, sve Pitagorine trojke su oblika

$$(d(m^2 - n^2), 2dmn, d(m^2 + n^2)),\ d \in \mathbb{N}.$$

Neka su (x, z) rješenja u skupu prirodnih brojeva specijalne Pitagorine jednadžbe

$$x^2 + (x+1)^2 = z^2. \tag{2.9}$$

Uočimo da je tada

$$T_{2x}{}^2 + T_{2x+1}{}^2 = \left(\frac{2x(2x+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2x+1)(2x+2)}{2}\right)^2$$
$$= (2x+1)^2(2x^2+2x+1) = (1+2x)^2z^2 = ((2x+1)z)^2.$$

Iz činjenice da jednadžba (2.9) ima beskonačno mnogo rješenja slijedi da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trokuta čije su katete upravo uzastopni trokutasti brojevi. Koristeći se prethodnom relacijom dajemo nekoliko primjera takvih Pitagorinih trokuta:

1) $T_6{}^2 + T_7{}^2 = 21^2 + 28^2 = 1\,225 = (7 \cdot 5)^2$, $x = 3$, $z = 5$,

2) $T_{40}{}^2 + T_{41}{}^2 = 820^2 + 861^2 = 1\,413\,721 = (41 \cdot 29)^2$, $x = 20$, $z = 29$,

3) $T_{238}{}^2 + T_{239}{}^2 = 28\,441^2 + 28\,680^2 = (239 \cdot 169)^2$, $x = 119$, $z = 169$.

Poglavlje 3

Trokutasti brojevi među poznatim nizovima

U ovom poglavlju bavit ćemo se poznatim nizovima tj. ispitivati pojavljuju li se trokutasti brojevi među Mersenneovim, Fermatovim, Fibonnaccijevim te već spomenutim Pellovim brojevima.

3.1 Mersenneovi brojevi

Brojevi oblika

$$M_n = 2^n - 1, n \geq 1,$$

nazivaju se *Mersenneovi brojevi*. Naziv su dobili po francuskom svećeniku Marinu Mersenneu (1588.-1648.) koji ih je proučavao te je zaslužan za važnu tvrdnju u teoriji brojeva. Prvih nekoliko Mersenneovih brojeva su 1, 3, 7, 15, 31, 63 itd. Uočavamo da među njima postoje i prosti i složeni brojevi. Pokušavajući pronaći pravilo za određivanje prostih brojeva, Mersenne je prvi iznio tvrdnju da je broj n prost ako je $2^n - 1$ prost broj. Takvi brojevi nazivaju se *Mersenneovi prosti brojevi*.

Teorem 3.1.1. *Ako je n prirodan broj i $M_n = 2^n - 1$ prost broj, onda je i n prost broj.*

Dokaz. Dokažimo ekvivalentnu tvrdnju koja glasi: ako je n složen, onda je i broj $2^n - 1$ složen. Neka je $n = rs$ pri čemu su r i s pozitivni cijeli brojevi. Tada je

$$2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)\left((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1\right),$$

pa je broj $2^n - 1$ složen. $\square$

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095

Tablica 3.1

U tablici 3.1 prikazano je prvih 12 Mersenneovih brojeva. Uočavamo da su

$$M_1 = 1 = T_1, M_2 = 3 = T_2, M_4 = 15 = T_5, M_{12} = 4\,095 = T_{90}$$

trokutasti brojevi. Štoviše, to su jedini trokutasti brojevi u nizu (M_n). Mersenneovi brojevi koji su ujedno i trokutasti nazivaju se i *Ramanujan Nagellovi brojevi* prema dvojici poznatih matematičara koji su ih proučavali.

Teorem 3.1.2 (Satyanarayana, 1958.)**.** *Postoji beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva koji nisu trokutasti brojevi.*

Prethodni teorem koristi sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.1.3. *Za svaki trokutasti broj T_n vrijedi da je*

$$T_n \mod 10 \in \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}.$$

Prije nego što dokažemo lemu promotrimo ostatke pri dijeljenju članova niza trokutastih brojeva nekim prirodnim brojem m. Za $m = 2$, dobivamo da niz $(T_n \mod 2)$ poprima vrijednosti

$$\overline{1, 1, 0, 0}, \overline{1, 1, 0, 0}, 1, 1, \cdots .$$

Za $m = 3$, dobivamo da niz $(T_n \mod 3)$ poprima vrijednosti

$$\overline{1, 0, 0}, \overline{1, 0, 0}, 1, 0, \cdots ,$$

a za $m = 4$, dobivamo da je niz $(T_n \mod 4)$ dan s

$$\overline{1, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0}, \overline{1, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0}, 1, 3, \ldots$$

Uočavamo da se ostatci modulo m niza (T_n) ponavljaju svakih m članova ako je m neparan, odnosno svakih $2m$ članova ukoliko je m paran.

Teorem 3.1.4. *Ako je m neparan prirodan broj, onda je*

$$T_{km+i} \equiv T_i \pmod{m}, \ i = 0, 1, \ldots, m - 1,$$

a ako je m paran prirodan broj, onda je

$$T_{2km+i} \equiv T_i \pmod{m}, \ i = 0, 1, \ldots, 2m - 1,$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz. Vrijedi
$$T_{km+i} - T_i = \frac{km(1+km)}{2} + jkm.$$
Neka je $m = 2\ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Tada je
$$T_{km+i} - T_i = \frac{km(1+2k\ell+k)}{2} + jkm = \frac{k(k+1)m}{2} + k\ell m + jkm,$$
odnosno
$$T_{km+i} - T_i = m \underbrace{\left(\frac{k(k+1)}{2} + k\ell + jk\right)}_{\in\mathbb{N}} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Kako je
$$T_{2km+i} - T_i = km + 2jkm + 2k^2m^2 \equiv 0 \pmod{m},$$
vrijedi tvrdnja. □

Dokaz leme 3.1.3. Prema teoremu 3.1.4 za $m = 10$ vrijedi
$$T_{20k+i} \equiv 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0 \pmod{m},$$
za $i = 0, 1, \ldots, 19$ i $k \in \mathbb{N}_0$. □

Dokaz teorema 3.1.2. Za dokaz koristimo prethodnu lemu, odnosno pokazat ćemo da postoji beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva koji pri dijeljenju s 10 daju ostatak 7. Neka je M_n n-ti Mersenneov broj. Tada, s obzirom na ostatke pri dijeljenju broja n s 4, razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. slučaj: Neka je $n \equiv 0 \pmod 4$, tj. $n = 4k$, za neki $k \geq 0$. Tada je
$$M_n = 2^{4k} - 1 = (2^4)^k - 1 \equiv 6^k - 1 \equiv 6 - 1 \equiv 5 \pmod{10}.$$

2. slučaj: Neka je $n \equiv 1 \pmod 4$, tj. $n = 4k+1$, za neki $k \geq 0$. Tada je
$$M_n = 2^{4k+1} - 1 = 2 \cdot (2^4)^k - 1 \equiv 2 \cdot 6^k - 1 \equiv 2 \cdot 6 - 1 \equiv 1 \pmod{10}.$$

3. slučaj: Neka je $n \equiv 2 \pmod 4$, tj. $n = 4k+2$, za neki $k \geq 0$. Tada je
$$M_n = 2^{4k+2} - 1 = 4 \cdot (2^4)^k - 1 \equiv 4 \cdot 6^k - 1 \equiv 4 \cdot 6 - 1 \equiv 3 \pmod{10}.$$

4. slučaj: Neka je $n \equiv 3 \pmod 4$, tj. $n = 4k+3$, za neki $k \geq 0$. Tada je
$$M_n = 2^{4k+3} - 1 = 8 \cdot (2^4)^k - 1 \equiv 8 \cdot 6^k - 1 \equiv 8 \cdot 6 - 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Dakle,

$$M_n = \begin{cases} 5 \pmod{10}, \text{ za } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 \pmod{10}, \text{ za } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 3 \pmod{10}, \text{ za } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 7 \pmod{10}, \text{ za } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Stoga zaključujemo kako postoji beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva M_{4k+3} koji pri dijeljenju s 10 daju ostatak 7, a oni prema lemi 3.1.3 ne mogu biti trokutasti brojevi. □

Teorem 3.1.5. *Postoje točno četiri Ramanujan-Nagellova broja:* $1, 3, 15, 4095$.

Skica dokaza. Neka su m i n prirodni brojevi za koje vrijedi

$$2^m - 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prethodna relacija ekvivalentna je

$$2^{m+3} - 7 = (2n+1)^2,$$

odnosno uz supstituciju $k = m + 3$ i $x = 2n + 1$ s jednadžbom

$$x^2 + 7 = 2^k.$$

Jedina rješenja prethodne jednadžbe (tzv. Ramanujan-Nagellove jednadžbe) su $x = 1, 3, 5, 11, 181$, a ona odgovaraju Mersenneovim trokutastim brojevima (0),1,3,15,4095. □

3.2 Fermatovi brojevi

Pozitivni cijeli brojevi oblika

$$f_n = 2^{2^n} + 1, n \geq 0,$$

nazivaju se *Fermatovi brojevi* prema Pierreu de Fermatu (1601.-1665.), jednom od najznačajnijih matematičara 17. stoljeća. Fermat je vjerovao da su svi brojevi tog oblika prosti. Pogledajmo prvih nekoliko Fermatovih brojeva:

$$f_0 = 3, f_1 = 5, f_2 = 17, f_3 = 257, f_4 = 65\,537.$$

Uočavamo kako su svi navedeni brojevi zaista prosti, no ta tvrdnja ne vrijedi za sljedeći broj $f_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ što je Euler uspio dokazati pronašavši njegov rastav $f_5 = 641 \cdot 6700417$ te tako opovrgnuti Fermatovu tvrdnju. Ako je f_n prost broj, onda kažemo da je on *Fermatov prost broj.*

Teorem 3.2.1. *Fermatov broj f_5 je djeljiv brojem 641.*

Dokaz. Neka je $a = 2^7$ i $b = 5$ i vrijedi

$$1 + ab = 1 + 2^7 \cdot 5 = 641.$$

Lako se vidi da je

$$1 + ab - b^4 = 1 + (a - b^3)b = 1 + 3b = 2^4.$$

Iz toga slijedi

$$f_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 2^4 a^4 + 1 = (1 + ab - b^4)a^4 + 1 = (1 + ab)a^4 + (1 - a^4 b^4)$$
$$= (1 + ab)\left[a^4 + (1 - ab)(1 + a^2 b^2)\right],$$

odnosno, $641 | f_5$. □

Prema teoremu 3.1.4 je

$$T_m = \begin{cases} 1 \pmod 3, & \text{za } m \equiv 1 \pmod 3 \\ 0 \pmod 3, & \text{za } m \equiv 0, 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Navedene kongruencije koristimo u dokazu sljedeće tvrdnje koja nam daje odgovor na pitanje koliko ima Fermatovih trokutastih brojeva.

Korolar 3.2.2. *Jedini Fermatov trokutasti broj je $f_0 = 3$.*

Dokaz. I. način: Neka je $f_n = 2^{2^n} + 1$ gdje je $n \geq 0$. Tada je $f_0 = 3$ trokutasti broj. Pretpostavimo da je $n \geq 1$. Tada je $f_n \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$ pa je i $8f_n + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Kako je 2 kvadratni neostatak modulo 3, prema korolaru 1.3.3 zaključujemo da f_n ne može biti trokutasti broj za $n \geq 1$.

II. način: Tvrdnju možemo dokazati i direktno. Iz pretpostavke

$$f_n = T_k$$

slijedi

$$2^{2^n} + 1 = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow k^2 + k - 2(2^{2^n} + 1) = 0.$$

Kako bi dobivena kvadratna jednadžba imala cjelobrojno rješenje, pripadna diskriminanta mora biti kvadrat nekog cijelog broja, tj.

$$\sqrt{1 + 8(2^{2^n} + 1)} \in \mathbb{N}.$$

Prema tome,

$$1 + 8(2^{2^n} + 1) = m^2 \Rightarrow 2^{2^n+3} = m^2 - 9 = (m+3)(m-3).$$

Da bi jednakost vrijedila, izrazi s desne strane jednadžbe moraju biti potencije broja 2. S obzirom na to da se $m+3$ i $m-3$ razlikuju za 6, jedina mogućnost za to je $(m-3, m+3) = (2, 8)$. Sada se lako vidi da jednakost vrijedi samo za $n = 0, k = 2$ i $m = 5$ čime smo dokazali tvrdnju.

III. način: Matematičkom indukcijom pokazuje se da je

$$f_n \equiv 7 \pmod{10},$$

za sve $n \geq 2$. Kako je prema lemi 3.1.3 $T_n \equiv 0, 1, 5, 6$ ili $8 \pmod{10}$, gdje je $n \geq 1$, slijedi tvrdnja. □

3.3 Fibonaccijevi brojevi

Fibonaccijev niz (F_n), $n \in \mathbb{N}$ definira se pomoću rekurzivne formule

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, n \geq 2,$$

uz početne uvjete

$$F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Prvih nekoliko članova Fibonaccijevog niza, odnosno Fibonaccijevih brojeva je

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots .$$

Niz je dobio ime prema talijanskom matematičaru Leonardu iz Pise (1170.-1250.), poznatijem kao Fibonacci, koji je pronašao rješenje za problem razmnožavanja zečeva, a to je rješenje bilo upravo spomenuti niz.

Zanima nas postoje li Fibonaccijevi brojevi koji su ujedno i trokutasti. Odnosno, postoje li Fibonaccijevi brojevi za koje vrijedi da je $8F_n + 1$ potpun kvadrat veći od 1 (prema korolaru 1.3.3). Uočimo da već među gore navedenim Fibonaccijevim brojevima pronalazimo one koji su trokutasti, a to su

$$1, 3, 21, 55.$$

Pokazuje se da su to jedini trokutasti brojevi u nizu Fibonaccijevih brojeva. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1 (Ming, 1987.). $8F_n + 1$ *je potpuni kvadrat ako i samo ako je*

$$n = 0, 1, 2, 4, 8, 10.$$

Budući da je dokaz ovog teorema tehnički zahtjevan, objasnit ćemo samo glavne ideje bez ulaženja u detalje. U dokazu se koristi Jacobijev simbol – poopćenje Lagrangeovog simbola. Za neparan prost broj p i cijeli broj a, *Legendreov simbol*, u oznaci $\left(\frac{a}{p}\right)$, definira se kao

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} -1, & \text{ako } x^2 \equiv a \pmod p \text{ nema rješenja,} \\ 1, & \text{ako } x^2 \equiv a \pmod p \text{ ima rješenja,} \\ 0, & \text{ako } p \mid a. \end{cases}$$

Ako je $\operatorname{nzd}(a, p) = 1$ i kongruencija $x^2 \equiv a \pmod p$ ima rješenja, onda za a kažemo da je *kvadratni ostatak modulo p*, a u suprotnom je *a kvadratni neostatak.*

Za cijeli broj a i $Q = q_1 q_2 \cdots q_k$ gdje su $q_1, q_2, \ldots, q_k$ neparni prosti brojevi i ne nužno različiti vrijedi, definiramo tzv. *Jacobijev simbol* kao

$$\left(\frac{a}{Q}\right) = \left(\frac{a}{q_1}\right)\left(\frac{a}{q_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{q_k}\right).$$

Podsjećamo na najvažnija svojstva Jacobijevog simbola:

1. Ako je $a \equiv b \pmod Q$, onda je $\left(\frac{a}{Q}\right) \equiv \left(\frac{b}{Q}\right)$.
2. $\left(\frac{ab}{Q}\right) = \left(\frac{a}{Q}\right)\left(\frac{b}{Q}\right)$, $\left(\frac{a}{Q_1 Q_2}\right) = \left(\frac{a}{Q_1}\right)\left(\frac{a}{Q_2}\right)$
3. $\left(\frac{1}{Q}\right) = 1$, $\left(\frac{-1}{Q}\right) = (-1)^{\frac{Q-1}{2}}$
4. $\left(\frac{2}{Q}\right) = (-1)^{\frac{Q^2-1}{8}}$.
5. Ako su brojevi Q, P neparni relativno prosti prirodni brojevi, onda je
$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}.$$

Dokaz teorema 3.3.1 temelji se na tome da se za $n \neq 0, 1, 2, 4, 8, 10$ pokaže da je

$$\left(\frac{8F_n + 1}{W_n}\right) = -1 \tag{3.1}$$

za neki prirodan broj W_n. Tada $8F_n + 1$ nije potpuni kvadrat. Pokazuje se da je W_n Lucasov broj L_k za indeks k koji ovisi o n. *Lucasov niz* (L_n) definira se istom rekurzivnom formulom kao i Fibonaccijev niz:

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1}, n \geq 2,$$

uz početne uvjete

$$L_0 = 2, L_1 = 1.$$

Prvih nekoliko članova Lucasovog niza je

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$$

Ova dva niza, Fibonaccijev i Lucasov, vežu mnogi identiteti. Za dokaz se korisnom pokazala relacija

$$F_{2kt+n} \equiv (-1)^t F_n \pmod{L_k}, \tag{3.2}$$

gdje su $n, t, k \in \mathbb{N}$ i $k = \pm 2 \pmod 6$, te relacija dana u sljedećoj lemi.

Lema 3.3.2. *Neka su a i n prirodni brojevi takvi da je $n \equiv \pm 2 \pmod 6$ i $\mathrm{nzd}(a, L_n) = 1$. Ako L_{2n} ne dijeli $\pm 4aF_{2n} + 1$ i ako $64a^2 + 5$ ne dijeli $8aF_n \pm L_n$, tada je*

$$\left(\frac{\pm 4aF_{2n} + 1}{L_{2n}}\right) = -\left(\frac{8aF_n \pm L_n}{64a^2 + 5}\right)$$

Kako pronaći Lucasov broj u (3.1) opisat ćemo, ilustracije radi, u jednom specijalnom slučaju.

Propozicija 3.3.3. *Ako je $n \equiv 0 \pmod{2^2 \cdot 5^2}$ i $8F_n + 1$ potpuni kvadrat, tada je $n = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $n \neq 0$. Zbog pretpostavke, n možemo zapisati kao

$$n = 2 \cdot 5^2 \cdot 2^s \cdot \ell,$$

gdje je ℓ neparan broj i $s \geq 1$. Definiramo

$$k = \begin{cases} 2^s, & \text{ako je } s \equiv 0 \pmod 3, \\ 5^2 \cdot 2^s, & \text{ako je } s \equiv 1 \pmod 3, \\ 5 \cdot 2^s, & \text{ako je } s \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Brojevi n i k su namješteni tako da vrijedi

$$\left(\frac{8F_n + 1}{L_{2k}}\right) = \left(\frac{\pm 8F_{2k} + 1}{L_{2k}}\right).$$

Očito je $k \equiv \pm 1 \pmod 3$ i paran pa je $k \equiv \pm 2 \pmod 6$. Nadalje, kako je L_n paran broj ako i samo ako je n višekratnik od 3 slijedi da je $\text{nzd}(L_k, 2) = 1$ (odnosno da je L_k neparan broj). Sada prema lemi 3.3.2 za $a = 2$ slijedi

$$\left(\frac{\pm 8F_{2k}+1}{L_{2k}}\right) = -\left(\frac{16F_k \pm L_k}{64 \cdot 4 + 5}\right).$$

Zbog $64 \cdot 4 + 5 = 3^2 \cdot 29$ je

$$\left(\frac{\pm 8F_{2k}+1}{L_{2k}}\right) = -\left(\frac{16F_k \pm L_k}{29}\right).$$

Ostatci pri dijeljenju niza $(16F_k + L_k)_{k\geq 0}$ brojem 29 su:

$$\underline{17, 19}, 7, 26, 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 16, 15, 2, \underline{17, 19}, 7, 26, 4, \ldots$$

Budući da niz $(16F_k + L_k)_{k\geq 0}$ zadovoljava rekurziju drugog reda, jasno je da se ostatci pri dijeljenju s 29 ponavljaju nakon prvih 14 ostataka. Nadalje, pretpostavka na k povlači da je

$$k \equiv \pm 6 \pmod{14},$$

pa nas zanimaju ostatci samo na mjestima $k = 6, 8$ a ti su 1 i 6. Stoga je

$$16F_k + L_k \equiv 1 \pmod{29} \quad \text{za} \quad k \equiv 6 \pmod{14},$$

te

$$16F_k + L_k \equiv 6 \pmod{29} \quad \text{za} \quad k \equiv -6 \equiv 8 \pmod{14}.$$

Sada isto ponovimo za niz $(16F_k - L_k)_{k\geq 0}$. Ostatci pri dijeljenju brojem 29 su:

$$\underline{15, 13}, 28, 12, 11, 23, 5, 28, 4, 3, 7, 10, 17, 27, \underline{15, 13}, 28, 12, 11, \ldots,$$

odnosno period ponavljanja je također 14. Kako je

$$16F_6 - L_6 \equiv 23 \equiv -6 \pmod{29}, 16F_8 - L_8 \equiv 28 \equiv -1 \pmod{29},$$

dobivamo

$$16F_k - L_k \equiv -6 \pmod{29} \quad \text{za} \quad k \equiv 6 \pmod{14},$$

te

$$16F_k - L_k \equiv -1 \pmod{29} \quad \text{za} \quad k \equiv -6 \equiv 8 \pmod{14}.$$

Konačno dobivamo da je

$$\left(\frac{8F_n+1}{L_{2k}}\right) = -\left(\frac{\pm 1}{29}\right) \quad \text{ili} \quad -\left(\frac{\pm 6}{29}\right),$$

što u svi slučajevima dovodi do

$$\left(\frac{8F_n+1}{L_{2k}}\right) = -1,$$

jer su $\pm 1, \pm 6$ kvadratni ostatci modulo 29. Dakle, $8F_n + 1$ ne može biti potpuni kvadrat.

U slučaju $n = 0$ je očito $8F_0 + 1 = 1$, pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Dokaz teorema 3.3.1 sastoji se od niza tvrdnji sličnim propoziciji 3.3.3.

Korolar 3.3.4. *Jedini Fibbonacijevi trokutasti brojevi su* $1, 3, 21$ *i* 55.

3.4 Pellovi brojevi

Brojevi definirani s

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2,$$

uz početne uvjete $P_0 = 0, P_1 = 1$ nazivaju se *Pellovi brojevi.* Nizu Pellovih brojeva pridružuje se niz definiran istom rekurzijom

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 2,$$

ali uz početne uvjete $Q_0 = 1, Q_1 = 1$. Prema tome, niz Pellovih brojeva je

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \cdots,$$

a njemu pridružen (Q_n) je

$$1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, \cdots.$$

Niz $(2Q_n)$ naziva se niz *Pell-Lucasovih brojeva.*

Uočavamo kako je $P_1 = 1 = T_1$ trokutast broj. Štoviše, to je jedini trokutasti broj među Pellovim brojevima. Dokaz te tvrdnje temelji se na raznim identitetima te na četirima pomoćnim tvrdnjama koje u nastavku iskazujemo.
Pellovi i Pell-Lucasovi brojevi zadovoljavaju niz identiteta:

$$P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n, \tag{3.3}$$

$$P_{m+n} = 2P_m Q_n - (-1)^n P_{m-n}, \tag{3.4}$$

$$P_{2^t n} = P_n(2Q_n)(2Q_{2n})(2Q_{4n}) \cdots (2Q_{2^{t-1}n}), \tag{3.5}$$

$$Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n, \tag{3.6}$$

$$Q_{2n} = 2Q_n^2 - (-1)^n, \tag{3.7}$$

za m, n, t nenegativne cijele brojeve.

Nadalje, ako je $\mathrm{nzd}(m, n) = d$, tada je

$$\mathrm{nzd}(P_m, Q_n) = Q_d, \tag{3.8}$$

ako je $\frac{m}{d}$ paran broj, a inače je

$$\mathrm{nzd}(P_m, Q_n) = 1. \tag{3.9}$$

Lema 3.4.1. *Neka su n, k i t prirodni brojevi i neka je g neparan prirodan broj. Tada vrijede tvrdnje:*

(1) $P_{n+2kt} \equiv (-1)^{t(k+1)} P_n \pmod{Q_k}$,

(2) $P_{2kg} \equiv (-1)^{(g-1)/2} P_{2k} \pmod{Q_{2k}}$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1) matematičkom indukcijom po t. Za $t = 1$ imamo

$$P_{n+2k} = P_{(n+k)+k} = [(3.4)] = 2P_{n+k}Q_k - (-1)^k P_n \equiv (-1)^{k+1} P_n \pmod{Q_k},$$

pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj t te dokažimo da vrijedi za $t + 1$. Slijedi

$$\begin{aligned} P_{n+2k(t+1)} &= P_{(n+2kt)+2k} = 2P_{n+2kt}Q_{2k} - (-1)^{2k} P_{n+2k(t-1)} \\ &\equiv 2(-1)^{t(k+1)} P_n (2Q_k^2 - (-1)^k) - (-1)^{(t-1)(k+1)} P_n \pmod{Q_k} \\ &\equiv (2(-1)^{(t+1)(k+1)} - (-1)^{(t+1)(k+1)}) P_n \pmod{Q_k} \\ &\equiv (-1)^{(t+1)(k+1)} P_n \pmod{Q_k}. \end{aligned}$$

Dakle, po principu matematičke indukcije tvrdnja (1) je dokazana.

Koristeći relaciju (3.4) dobivamo

$$\begin{aligned} P_{2kg} &= P_{2k(g-1)+2k} = 2P_{2k(g-1)}Q_{2k} - (-1)^{2k} P_{2k(g-2)} \\ &\equiv (-1)^1 P_{2k(g-2\cdot 1)} \pmod{Q_{2k}} \\ &\equiv (-1)^2 P_{2k(g-2\cdot 2)} \pmod{Q_{2k}} \\ &\equiv (-1)^3 P_{2k(g-2\cdot 3)} \pmod{Q_{2k}}. \end{aligned}$$

Općenito, $P_{2kg} \equiv (-1)^r P_{2k(g-2r)} \pmod{Q_{2k}}$, a za $g - 2r = 1$ tvrdnja (2) je dokazana. □

Slično se pokazuju i sljedeće tvrdnje.

Lema 3.4.2. *Neka je $k = 2^t$, gdje je $t \geq 1$. Tada je*

$$\left(\frac{8P_{2k}+1}{Q_{2k}}\right) = \left(\frac{-8P_{2k}+1}{Q_{2k}}\right).$$

Lema 3.4.3. *Neka je $k = 2^t$, gdje je $t \geq 2$. Tada je*

$$\left(\frac{8P_k+Q_k}{33}\right) = -1,$$

tj. $8P_k + Q_k$ nije kvadrat nekog broja.

Lema 3.4.4. *Ako je $n \equiv m \pmod{24}$, onda je $P_n \equiv P_m \pmod{9}$.*

Dokaz. Vrijedi

$$P_{24} = 543\,339\,720 \equiv 0 \pmod{9} \text{ i } P_{25} = 1\,311\,738\,121 \equiv 1 \pmod{9}.$$

Prema navedenom i relaciji (3.3) slijedi

$$P_{n+24} = P_n P_{25} + P_{n-1} P_{24} \equiv P_n + 0 \equiv P_n \pmod{9}.$$

□

Koristeći navedene identitete i pomoćne tvrdnje sada možemo dokazati glavni teorem.

Teorem 3.4.5. *Pellov broj P_n je trokutast ako i samo ako $n = 1$.*

Dokaz. Za $n = 1$ je $P_1 = 1 = T_1$ trokutast broj.

Obratno, pretpostavimo da je P_n trokutast broj. Prema korolaru 1.3.3 slijedi da $8P_n + 1$ mora biti potpuni kvadrat. Pokazat ćemo da $8P_n + 1$ nije potpuni kvadrat $n > 1$. Neka je $n = 2kg + m$, $k = 2^t$, $t \geq 1$, $g \geq 1$ neparan. Razlikujemo tri slučaja:

1. slučaj: Neka je n neparan. Kako je $n \equiv \pm 1 \pmod{4}$ tada je prema lemi 3.4.1 (1)

$$8P_n + 1 = 8P_{2kg+1} + 1 \equiv -8P_1 + 1 \equiv -7 \pmod{Q_k}.$$

Može se pokazati da je

$$Q_{7j+i} \equiv 1, 1, 3, 0, 3, 6 \pmod{7}$$

za $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, respektivno, pa je za $k = 2^t$, $t > 1$,

$$Q_k \equiv 3 \pmod{7}.$$

Koristeći svojstva Jacobijevog simbola dobivamo

$$\left(\frac{8P_n+1}{Q_k}\right) = \left(\frac{-7}{Q_k}\right) = \left(\frac{Q_k}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) = -1,$$

što znači da $8P_n + 1$ nije potpuni kvadrat.

2. slučaj: Neka je $n \equiv 2 \pmod 4$. Ostatci pri dijeljenju elementata niza (P_n) sa 7 daju periodičan niz perioda duljine 6. Konkretno

$$P_{6j+i} \equiv 0, 1, 2, 5, 5, 1 \pmod 7$$

za $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, redom. Stoga je

$$8P_{6j+i} + 1 \equiv 1, 2, 3, 6, 6, 2 \pmod 7.$$

Budući da su brojevi 2, 3, 6 kvadratni neostatci modulo 7, a 1 je uvijek kvadratni ostatak, ostaje za pokazati samo da $8P_n + 1$ nije potpun kvadrat za $n \equiv 0 \pmod 6$. Zbog pretpostavke da je $n \equiv 2 \pmod 4$, znači da moramo pokazati da $8P_n + 1$ nije potpuni kvadrat za $n \equiv \pm 6 \pmod{24}$. Prema lemi 3.4.4 imamo

$$8P_n + 1 \equiv \pm 8P_6 + 1 \equiv 3 \ \text{ ili } 8 \pmod 9.$$

Međutim, brojevi 3 i 8 nisu kvadratni ostatci modulo 9, stoga $8P_n + 1$ nije potpun kvadrat.

3. slučaj: Neka je $n \equiv 0 \pmod 4$. Koristeći lemu 3.4.1 (2) i lemu 3.4.2 slijedi

$$\left(\frac{8P_n+1}{Q_{2k}}\right) = \left(\frac{8P_{2k}+1}{Q_{2k}}\right).$$

Za $k = 2$, odnosno $t = 1$ dobivamo

$$\left(\frac{8P_{2k}+1}{Q_{2k}}\right) = \left(\frac{97}{17}\right) = -1.$$

Pretpostavimo da je $t \geq 2$. Slijedi

$$8P_{2k} + 1 \equiv 8P_{2k} + (2{Q_k}^2 - Q_{2k}) \equiv 2Q_k(8P_k + Q_k) \pmod{Q_{2k}}.$$

Neka je $s_k = 8P_k + Q_k$ i vrijedi $s_k \equiv 1 \pmod 8$. Tada koristeći svojstva (3.6) i (3.7) dobivamo

$$\left(\frac{8P_{2k}+1}{Q_{2k}}\right) = \left(\frac{Q_k}{Q_{2k}}\right)\left(\frac{s_k}{Q_{2k}}\right) = \left(\frac{Q_{2k}}{Q_k}\right)\left(\frac{Q_{2k}}{s_k}\right) = \left(\frac{2{Q_k}^2-1}{Q_k}\right)\left(\frac{2{P_k}^2+{Q_k}^2}{s_k}\right)$$

$$= \left(\frac{2{P_k}^2+(s_k-8P_k)^2}{s_k}\right) = \left(\frac{66{P_k}^2}{s_k}\right) = \left(\frac{33}{s_k}\right) = \left(\frac{s_k}{33}\right) = \left(\frac{8P_k+Q_k}{33}\right) = -1.$$

Dakle, teorem je dokazan. $\square$

Bibliografija

[1] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, McGraw Hill, 2010.

[2] B. Dakić, *Figurativni brojevi*, MiŠ, 31 (2005/06), str. 22–25.

[3] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[4] I. Fundurulić, *Zvjezdasti brojevi*, Poučak, Vol. 13, No. 50 (2012), str. 50–55.

[5] T. Koshy, *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer, 2014.

[6] W. L. McDaniel, *Triangular Numbers in the Pell Sequence*, Fib. Quart. 34, 105–107, 1996.

[7] L. Ming, *On Triangular Fibonacci Numbers*, Fib. Quart. 27, 98–108, 1989.

[8] Š. Šuljić, *Pascalov ili kineski trokut*, MiŠ, 21 (2003/04), str. 26–30.

[9] *Five Ramanujan-Nagell Numbers*, `https://proofwiki.org/wiki/Five_Ramanujan-Nagell_Numbers`

[10] *Mersenneovi brojevi*, MiŠ, 11 (2001/02), str. 38–39.

Sažetak

Trokutasti brojevi specijalna su klasa figurativnih brojeva koji se dobivaju slaganjem točkica u jednakostraničan trokut. Trokutasti broj T_n jednak je zbroju prvih n prirodnih brojeva, odnosno $n(n+1)/2$. Možemo ih vizualizirati, pronaći u svijetu koji nas okružuje te algebarskom manipulacijom iskazati niz različitih svojstava i identiteta koje zadovoljavaju. U radu je, koristeći navedeno, prikazana njihova veza s Pellovom i Pitagorinom jednadžbom te mnogim poznatim brojevima poput Fermatovih, Fibonaccijevih, Mersenneovih i Pellovih brojeva.

Summary

Triangular numbers are a special class of figurate numbers that can be represented by dots arranged in an equilateral triangle. A triangular number T_n is the sum of first n natural numbers, i.e. $n(n+1)/2$. We can visualize them, find triangular arrangements of objects in the real world and establish some interesting properties and identities algebraically. Using the above, their connections with the Pell and Pythagorean equations and also with many known numbers such as Fermat, Fibonacci, Mersenne and Pell numbers are represented in this thesis.

Životopis

Rođena sam 16. prosinca 1996. godine u Dubrovniku gdje započinjem školovanje u Osnovnoj školi Ivana Gundulića. Uz redovno osnovnoškolsko obrazovanje, završavam i osnovnu glazbenu te osnovnu baletnu školu u Umjetničkoj školi Luke Sorkočevića u Dubrovniku. Školovanje nastavljam u Biskupijskoj klasičnoj gimnaziji Ruđera Boškovića s pravom javnosti Dubrovnik, a 2015. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, postajem prvostupnica edukacije matematike te iste godine obrazovanje nastavljam na diplomskom studiju Matematike, također nastavnički smjer, na Sveučilištu u Zagrebu.