SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Polančec

GEOMETRIJSKA PRESLIKAVANJA I MATRICE U KURIKULUMU ZA NASTAVNI PREDMET MATEMATIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Eva Špalj, prof.

Suvoditelj rada:
prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, prosinac, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se dečku Dariju, sestri Kseniji, obitelji i kolegicama na bezuvjetnoj podršci koju su mi pružili tijekom svih ovih godina.

Isto tako, zahvaljujem se prof. Evi Špalj na ukazanom povjerenju, strpljenju i pruženim savjetima prilikom izrade diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U svijetu u kojem se svakodnevno događaju brojne promjene, posljedično dolazi i do promjena u sustavu obrazovanja, a samim time i u načinu poučavanja matematike. Tradicionalnim načinom poučavanja, u kojem učenik ima pasivnu ulogu prilikom obrade novih sadržaja, sve je zahtjevnije pobuditi interes učenika za pojedinu nastavnu jedinicu. Iz tog se razloga sve više ističu prednosti suvremene nastave matematike koja istraživačkom usmjerenošću u centar nastavnog procesa stavlja učenika. Time se potiče veća motivacija i bolje razumijevanje nastavnih sadržaja, ali se pokazuje i relevantnost matematike u svakodnevnom životu. Cilj suvremene nastave matematike nije prezentiranje gotovih rješenja i ideja, već uvođenje učenika u samostalan i istraživački rad s ciljem razvijanja njihovih sposobnosti. Mnogi učenici su prema matematici razvili negativne stavove pa je zadaća nastavnika da u nastavi uskladi učeničke sposobnosti, potrebe, stavove i uvjerenja s ciljevima nastavnog programa. Iz tog razloga, suvremeni nastavnik treba imati sposobnost stvaranja nastavnih situacija s dobro osmišljenim aktivnostima tijekom kojih učenici samostalno uče. Učenike se potiče na otkrivanje novih koncepata postavljajući pitanja koja zahtjevaju upotrebu već stečenog znanja, ali paralelno otkrivaju i potrebu za uvođenjem novih znanja. Takvim načinom poučavanja učenici posebno razvijaju kritički način razmišljanja, ali i osvješćuju odgovornost za vlastiti uspjeh i napredovanje.

U prvom poglavlju ovog rada dan je pregled geometrijskih preslikavanja s kojima se učenici susreću u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. Novost u kurikulumu za nastavni predmet Matematike uvođenje je pojma matrica u gimnazijski program pa se u drugom poglavlju spominju osnovni pojmovi vezani uz matrice. Osim toga, opisuje se način upotrebe matrica prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

Iako bi učenici mogli pretpostaviti da veza između dosad spomenutih tema ne postoji, u trećem poglavlju dokazuje se upravo suprotno, odnosno da geometrijska preslikavanja možemo zapisati u matričnom obliku.

U zadnjem poglavlju rada dani su metodički materijali temeljeni na istraživačkoj nastavi pomoću kojih će učenici, koristeći program dinamične geometrije, vizualizirati geometrijska preslikavanja i istraživati njihova svojstva te ih povezati s matricama.

Poglavlje 1

Geometrijska preslikavanja

Od samih početaka razvoja čovječanstva razvijala se i geometrija koju danas smatramo najstarijom i neizostavnom granom matematike. Geometriju su u svakodnevnom životu, najviše u svrhu mjerenja, koristili već stari Egipćani i Babilonci, a kao granu matematike formirali su je i popularizirali Grci. Riječ geometrija dolazi iz grčkog jezika, odnosno od riječi „geo" što znači „zemlja" i „metron" što znači „mjerenje". Zahvaljujući Euklidovim *Elementima*, cjelokupno znanje o matematici, koja je u ono vrijeme bila poistovjećena s geometrijom, već je u 3. st. pr. Krista bilo dostupno širem krugu ljudi pa ne začuđuje ubrzani razvoj te grane matematike. *Euklidska geometrija*, nazvana po Euklidu, danas se poučava u osnovnim i srednjim školama.

Budući da je geometrija vrlo široko područje koje se može povezati s gotovo svim granama matematike, važno je kod učenika pravovremeno i na adekvatan način razvijati geometrijsko mišljenje. O važnosti razvoja geometrijskog mišljenja u procesu učenja matematike govori istraživanje Pierra i Dine van Hiele iz 1973. godine na temelju kojeg su pisani brojni kurikulumi. Njihov opis razvoja geometrijskog mišljenja podijeljen je u pet etapa i poprilično je idealiziran, ali pomaže nastavnicima kako bi bolje i kvalitetnije planirali vlastito poučavanje te prije svega shvatili kako učenici razmišljaju.

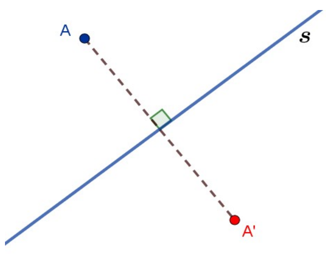
U hrvatskom kurikulumu nastavnog predmeta Matematika tema geometrije nalazi se prvenstveno unutar domene *Oblik i prostor*, ali i domene *Mjerenje*. Osim razvoja sposobnosti misaone predodžbe objekata i prostornih odnosa, interakcijom s ostalim domenama, učenici uče prepoznavati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnom životu te ih upotrebljavaju u opisivanju i analiziranju svijeta koji ih okružuje. Jedna od temeljnih ideja koja je zastupljena u domeni *Oblik i prostor* odnosi se na proučavanje geometrijskih svojstava likova i tijela. Konkretno, odnosi se na proučavanje određenih oblika i njihovih svojstava kao što su osna, centralna i rotacijska simetričnost. Isto tako, jedna od temeljnih ideja su geometrijska preslikavanja (transformacije). Napomenimo da pri tome pojam „preslikavanja" u geometriji smatramo sinonimom za pojam funkcije. U geometrijska preslikavanja spadaju translacija, osna i centralna simetrija, rotacija, homotetija i inverzija (koju ne uključujemo u osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje). Korištenjem raznih nastavnih sredstava učenici izvode spomenuta geometrijska preslikavanja te istraživanjem i primjenom njihovih svojstava razvijaju iznimno bitne koncepte sukladnosti i sličnosti. Navedene temeljne ideje pojavljuju se u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike te je u nastavku ovog poglavlja analizirano kako su obrađene.

1.1 Geometrijska preslikavanja u osnovnoj školi

Nastavni sadržaji vezani uz geometrijska preslikavanja u osnovnoj se školi prvi put konkretno spominju u petom razredu. Nakon što učenici usvoje temeljne ideje kako opisati skupove točaka u ravnini, analizirati i primjenjivati njihova svojstva i odnose te kako crtati/konstruirati geometrijske likove i stvarati motive koristeći se njima, susreću se s pojmom osnosimetričnih i centralnosimetričnih likova. Učenicima je, prije početka obrade novih nastavnih sadržaja, poželjno prikazati nekoliko primjera iz vlastitog okruženja na kojima će, bez spoznaje da je zapravo riječ o geometrijskim preslikavanjima, prvenstveno uočiti određenu pravilnost i sklad (npr. fotografiju leptira).

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti „dobar" na kraju petog razreda podrazumijevaju da učenik može osnosimetrično i centralnosimetrično preslikati određene skupove točaka u ravnini (točku, dužinu, trokut, četverokut, krug i kružnicu). Kako bi mogli osnom simetrijom preslikavati skupove točaka, učenici se za početak upoznaju s pojmom osnosimetrične točke.

Definicija 1.1.1. *Ako je pravac s simetrala dužine $\overline{AB}$, onda kažemo da su točke A i A'* ***osnosimetrične točke*** *s obzirom na pravac s. Točka A osnosimetrična je slika točke A', a točka A' osnosimetrična je slika točke A. ([1])*

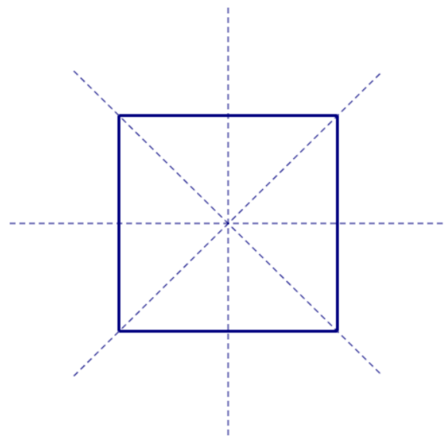


Slika 1.1: Osnosimetrične točke A i A'

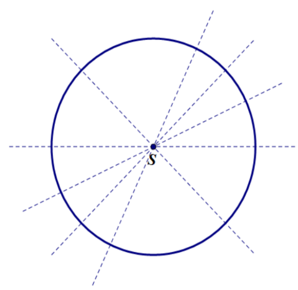
Iz navedene definicije slijedi zaključak da je osnosimetrična slika dužine ponovno dužina iste duljine. Ali, isto tako, osnosimetrična slika bilo kojeg mnogokuta, kružnice ili kruga ponovno je mnogokut, kružnica ili krug istog radijusa. Sljedeći bitan pojam je pojam osi simetrije kojeg se učenicima može vizualizirati na vrlo jednostavan način, presavijanjem papira na kojem je nacrtan lik.

Definicija 1.1.2. *Ako je zadani lik vlastita osnosimetrična slika s obzirom na pravac s, onda je s* ***os simetrije*** *tog lika. Tada kažemo da je zadani lik osnosimetričan.([1])*

Osim prepoznavanja i crtanja osnosimetričnih likova, učenici trebaju moći odrediti os simetrije osnosimetričnim likovima pri čemu trebaju biti svjesni činjenice da kod određenih likova postoji više osi simetrija. Pa tako kvadrat ima četiri osi simetrije, a kružnica ih ima beskonačno mnogo.



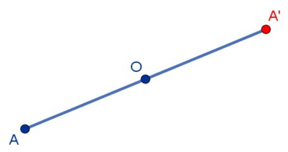
Slika 1.2: Osi simetrije kvadrata



Slika 1.3: Neke osi simetrije kružnice

Potom slijedi definiranje pojma centralnosimetričnih točaka.

Definicija 1.1.3. *Neka je točka O polovište dužine $\overline{AA'}$, onda kažemo da su točke A i A′* ***centralnosimetrične točke*** *s obzirom na centar simetrije O. Točka A centralnosimetrična je slika točke A′, a točka A′ centralnosimetrična je slika točke A. ([1])*



Slika 1.4: Centralnosimetrične točke A i A'

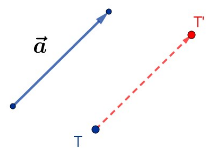
I ovdje će centralnosimetrična slika dužine, mnogokuta, kružnice i kruga ponovno biti dužina, mnogokut, kružnica odnosno krug istog radijusa. Isto tako, određeni se likovi mogu preslikati sami u sebe s obzirom na neki centar simetrije.

Definicija 1.1.4. *Ako je zadani lik, s obzirom na neki centar O, vlastita centralnosimetrična slika, ona je O* ***centar simetrije*** *tog lika. Tada kažemo da je zadani lik centralnosimetričan. ([1])*

Kao primjer centralnosimetričnih likova navode se kvadrat i pravokutnik kojima se centar simetrije nalazi u sjecištu dijagonala, ali i kružnica kojoj je centar simetrije u njezinom središtu.

Služeći se stvarnim materijalima učenici mogu rezati, docrtavati, dopunjavati, sastavljati i rastavljati razne osnosimetrične i centralnosimetrične slike. Iako niti u jednom trenutku, na strogo formalan način, nije definirana osna, odnosno centralna simetrija kao geometrijsko preslikavanje, stvoreni su preduvjeti za intuitivno prihvaćanje tih definicija u kasnijem školovanju. Prije toga, u sedmom razredu, učenici se nakon uvođenja pojma vektora susreću s pojmom translacije ili usporednog pomaka. I ovdje je poželjno prije definiranja pojma translacije dati primjer iz stvarnog života kojeg učenici mogu povezati s dosad naučenim, a ujedno otkriti potrebu za uvođenjem novog pojma (npr. pomicanje predmeta u određenom smjeru).

Definicija 1.1.5. ***Translacija*** *(usporedni pomak) za vektor $\vec{a}$ preslikava svaku točku T u točku T′ tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.([2])*



Slika 1.5: Translacija točke T za vektor $\vec{a}$

Bitno je da učenici mogu prepoznati translatirane likove, translatirati zadani lik za zadani vektor, ali i nacrtati vektor koji povezuje lik i njegovu sliku nastalu translacijom. Iako se kod osnosimetričnih i centralnosimetričnih likova nije direktno spominjao pojam sukladnosti, kod translacije se jasno napominje da se trokut preslika u njemu sukladan trokut, a mnogokut u njemu sukladan mnogokut. Razlog tome je što se s pojmom sukladnosti učenici upoznaju u šestom razredu.
Sve do sad navedeno u hrvatskom je kurikulumu obavezan nastavni sadržaj u osnovnoj školi. U osmom razredu pojavljuje se izborni ishod koji se odnosi na kompoziciju preslikavanja. Spomenuti se dio gradiva uglavnom ne obrađuje, ali je vrijedan jer nastavnicima daje mogućnost realizacije jedne važne geometrijske teme, a to su izometrije u ravnini. Upravo su izometrije, odnosno preslikavanja koja čuvaju udaljenost, temelj proučavanja euklidske geometrije. Na taj je način i poznati geometričar i matematički edukator Felix Klein (1849. – 1925.) opisao čime se bavi geometrija. Prema njemu, geometrija se bavi proučanjem geometrijskih svojstava i pojmova koja se ne mijenjaju pri izometrijama. O izometrijama će više biti rečeno prilikom proučavanja geometrijskih preslikavanja u srednjoj školi.

U osmom se razredu spomenuta preslikavanja ponovno definiraju pri čemu treba imati na umu da navedene definicije nisu izrečene na strogo formalan, matematički način, već su deskriptivne, odnosno opisuju kako nastaje slika neke točke ravnine pri pojedinom preslikavanju.

Definicija 1.1.6. *Neka je u ravnini zadan pravac s. Preslikavanje o koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T′ takvu da je pravac s simetrala dužine* $\overline{TT'}$ *naziva se* ***osna simetrija*** *s obzirom na pravac s. Pišemo:* $T' = o(T)$. *([3])*

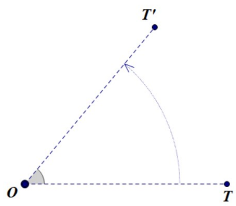
Definicija 1.1.7. *Neka je zadana točka O. Preslikavanje c koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T′ takvu da je točka O polovište dužine* $\overline{TT'}$ *naziva se* ***centralna simetrija*** *s obzirom na točku O. Pišemo:* $T' = c(T)$. *([3])*

Definicija 1.1.8. *Neka je u ravnini zadan vektor* $\vec{a}$. *Preslikavanje t koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T′ sa svojstvom da je* $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ *naziva se* ***translacija*** *za vektor* $\vec{a}$. *Pišemo:* $T' = t(T)$. *([3])*

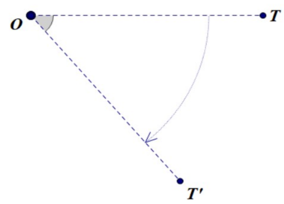
Dolazi se i do pojma rotacija koji nije prije spomenut, ali i s njim su se učenici susreli u stvarnom životu. Kao primjer se može navesti zidni sat jer kazaljke sata rotiraju oko jedne čvrste točke.

Definicija 1.1.9. *Neka je u ravnini zadana točka O i kut veličine α. Preslikavanje r koje svakoj točki T pridružuje točku T' takvu da je $\angle TOT' = \alpha$ i $|OT| = |OT'|$ naziva se* ***rotacija*** *oko točke O za kut α. Točka O naziva se središte (centar) rotacije, a kut α kut rotacije. Pišemo: $T' = r(T)$. ([3])*

Kod uvođenja pojma rotacije bitno je naglasiti da je rotaciju moguće raditi u dva smjera. U pozitivnom smjeru, koji je suprotan od smjera kazaljke na satu, ali i u negativnom smjeru, smjeru kazaljke na satu.



Slika 1.6: Rotacija u pozitivnom smjeru ($\alpha > 0$)



Slika 1.7: Rotacija u negativnom smjeru ($\alpha < 0$)

I ovdje se uočava da rotacija preslikava dužinu u dužinu iste duljine, trokut u njemu sukladan trokut, a kružnicu ili krug u kružnicu ili krug istog radijusa. Dodatno, može se spomenuti pojam rotacijski simetričnog lika u ravnini. Lik je rotacijski simetričan ako postoji rotacija tog lika oko neke točke kojom se on preslikava u sebe. Kao primjer se mogu navesti svi pravilni mnogokuti.

Nakon usvajanja osnovnih činjenica o geometrijskim preslikavanjima, dolazi se do slaganja ili ulančavanja dvaju ili više preslikavanja što se naziva kompozicija preslikavanja. Učenici će prilikom obrade ovog nastavnog sadržaja odabrati dva preslikavanja u ravnini i konstruirati njihovu kompoziciju pri čemu će obrazložiti postupak i svojstva tog preslikavanja. Odnosno, odredit će os simetrije, centar simetrije, vektor translacije te središte i kut rotacije u nekoj unaprijed nacrtanoj kompoziciji. Također, otkrit će da kompozicijom osnih simetrija pod točno određenim uvjetom dobivamo sva ostala preslikavanja. Upravo je to formalniji pristup geometrijskim preslikavanjima. Može se uočiti sljedeće:

- kompozicija dviju osnih simetrija kojima se osi sijeku je rotacija,
- kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi paralelne je translacija,
- kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi okomite je centralna simetrija.

Dodatno, može se spomenuti i klizna simetrija koja je kompozicija translacije duž nekog pravca i osne simetrije s obzirom na taj pravac.

Time se zaokružuje priča o geometrijskim preslikavanjima u osnovnoj školi. Naravno, na dodatnoj nastavi učenici mogu detaljnije proučiti navedena preslikavanja i poopćiti neke zaključke. Iako se ovaj dio gradiva nekim učenicima može učiniti apstraktnim, važno je sve navedeno potkrijepiti primjerima iz svakodnevnog života i unaprijed osmišljenim aktivnostima dati učenicima priliku da samostalno otkrivaju.

1.2 Geometrijska preslikavanja u srednjoj školi

Po starom kurikulumu, u pojedinim programima, učenici su se u prvom razredu srednje škole najprije bavili izometrijama ravnine, a onda upoznali i s pojmom homotetije prilikom obrade nastavnih sadržaja vezanih uz sukladnost i sličnost. U drugom razredu susreli su se i s geometrijskim preslikavanjima u prostoru. Iako u trenutno važećem kurikulumu nije eksplicitno navedeno nijedno geometrijsko preslikavanje, svakako ih se može uključiti u redovnu nastavu, u programe s više sati matematike tjedno, kao određenu vrstu dodatnog sadržaja. Na taj će se način učenici prisjetiti već naučenog u osnovnoj školi, ali i proširiti dotadašnje znanje o geometrijskim preslikavanjima. Budući da se sad eksplicitno spominje pojam izometrije ravnine za početak se definira taj pojam, a nakon toga se prisjećamo definicija iz osnovne škole.

Definicija 1.2.1. ***Izometrija*** *je preslikavanje f ravnine koje čuva udaljenost za svaki par točaka A i B, tj. ako su $A' = f(A)$ i $B' = f(B)$ njihove slike, onda vrijedi $|A'B'| = |AB|$. ([5])*

Kako izometrijama preslikavamo razne likove koji su sastavljeni od dijelova pravaca i kružnica temeljno je znati da je slika pravca pri bilo kojoj izometriji ponovno pravac, a slika kružnice je kružnica. Sva dosad spomenuta geometrijska preslikavanja objedinjena su jednim imenom - izometrije. One, osim što čuvaju udaljenost, čuvaju i kutove između dvaju pravaca. Definicija je sama po sebi jasna, ali i intuitivna s obzirom na ranije naučeno. Sve izometrije definirane su na analogan način kao i u osnovnoj školi, ali od učenika se sad može zahtjevati i dodatna razina apstrakcije, tj. dokazivanje određenih tvrdnji vezanih uz pojedine izometrije što je i sadržaj udžbenika za prirodoslovno-matematičke gimnazije.

S pojmom sličnosti učenici su se upoznali još u osnovnoj školi. Tada se definira pojam sličnosti koji je vezan isključivo za trokut pa se učenici opravdano mogu pitati kako za neki općeniti lik dobiti lik koji mu je sličan. Na intuitivnoj razini učenici znaju prepoznati slične likove, ali odgovor na to pitanje dobivaju tek u prvom razredu srednje škole kada se ponovno spominje pojam sličnosti. Ideja je svaku točku ravnine preslikati u neku drugu točku, ali po točno utvrđenom pravilu. Zapravo je riječ o preslikavanju kojeg nazivamo homotetija i s kojim do sad nije bilo susreta.

Definicija 1.2.2. *Neka je O točka ravnine i $k \neq 0$ realan broj.* ***Homotetija*** *h je preslikavanje ravnine koje svakoj točki T pridružuje točku $T' = h(T)$ tako da vrijedi:*

1) Točke O, T i T' leže na istom pravcu.

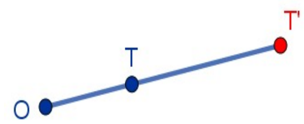
2) Ako je:

a) $k > 0$, onda T' leži na polupravcu OT,

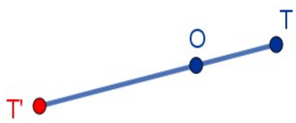
b) $k < 0$, onda T' ne leži na polupravcu OT.

3) $|OT'| = |k| \cdot |OT|$.

Točku O nazivamo središte (centar) homotetije, a broj k koeficijent homotetije. ([4])

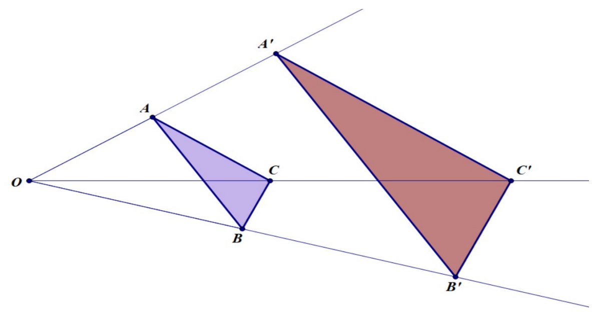


Slika 1.8: Homotetija za $k > 0$



Slika 1.9: Homotetija za $k < 0$

Samostalnim istraživanjem učenici mogu otkriti da se pri preslikavanju homotetijom pravac preslika u njemu paralelan pravac, a dužina u njoj paralelnu dužinu čija će se duljina promijeniti ovisno o koeficijentu homotetije. S obzirom na vrijednost koeficijenta homotetije mogu se izdvojiti dva posebna slučaja. U slučaju kada je $k = -1$ zapravo je riječ o centralnoj simetriji, a za $k = 1$ o identičnom preslikavanju. Općenito, za $|k| < 1$ može se primijetiti da dolazi do sažimanja, a za $|k| > 1$ do rastezanja likova. Sljedeće bitno svojstvo je da homotetija preslikava kut u njemu sukladan kut, pa iz dosad navedenog slijedi zaključak da homotetija preslikava trokut u njemu sličan trokut. Pri tome je apsolutna vrijednost koeficijenta homotetije zapravo jednaka koeficijentu sličnosti trokuta.



Slika 1.10: Slika trokuta pri homotetiji je njemu sličan trokut

Osim geometrijskih preslikavanja u ravnini, mogu se proučavati i geometrijska preslikavanja u prostoru, točnije izometrije prostora (npr. zrcalna simetrija, osna simetrija, centralna simetrija, rotacija oko osi, translacija, homotetija) čija se svojstva na nesvjesnoj razini upotrebljavaju u stereometriji. Za početak se definira pojam simetralne ravnine, a potom zrcalna simetrija.

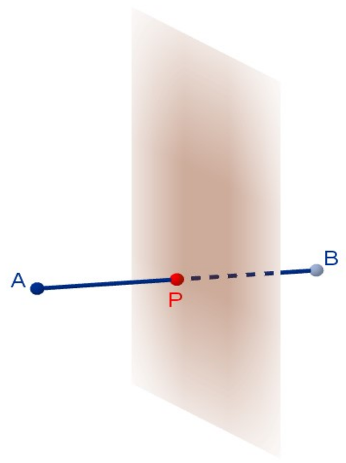
Definicija 1.2.3. *Neka je $\overline{AB}$ zadana dužina.* ***Simetralna ravnina*** *dužine $\overline{AB}$ je ravnina koja prolazi polovištem P dužine i okomita je na pravac AB. ([6])*

Definicija 1.2.4. *Neka je zadana ravnina σ. Točki A pridružujemo točku A' tako da vrijedi:*

- *točke su jednako udaljenje od ravnine, tj. ako točka P, polovište dužine $\overline{AA'}$, pripada ravnini vrijedi $|AP| = |A'P|$,*
- *pravac AA' okomit je na danu ravninu.*

Tada preslikavanje koje točki A pridružuje točku A' zovemo ***zrcalna simetrija****. ([8])*

Ideja osne i centralne simetrije ostaje ista. U odnosu na prijašnje definicije, razlika je u tome da u slučaju osne simetrije radimo preslikavanje s obzirom na neki istaknuti pravac



Slika 1.11: Simetralna ravnina dužine $\overline{AB}$

(ili ravninu), a u slučaju centralne simetrije preslikavanje s obzirom na neku istaknutu točku prostora.

Definicija 1.2.5. ***Osna simetrija*** *je preslikavanje prostora koje točku A preslikava u točku A' tako da vrijedi:*

- *pravac AA' okomit je na pravac p,*
- *ako je P sjecište pravca AA' i p, tada vrijedi $|AP| = |A'P|$,*

Pravac p nazivamo os simetrije. ([8])

Definicija 1.2.6. ***Centralna simetrija*** *je preslikavanje prostora koje točku A preslikava u točku A' tako da vrijedi:*

- *točke A, A' i O leže na istom pravcu,*
- *vrijedi $|OA| = |OA'|$,*

Točku O nazivamo središte simetrije. ([8])

Kao i u ravnini i ovdje možemo proučavati homotetiju.

Definicija 1.2.7. *Neka je S istaknuta točka u prostoru.* ***Homotetija*** *je preslikavanje koje točki A pridružuje točku A' tako da vrijedi:*

1) *Točke S, A i A' leže na istom pravcu (kolinearne su).*

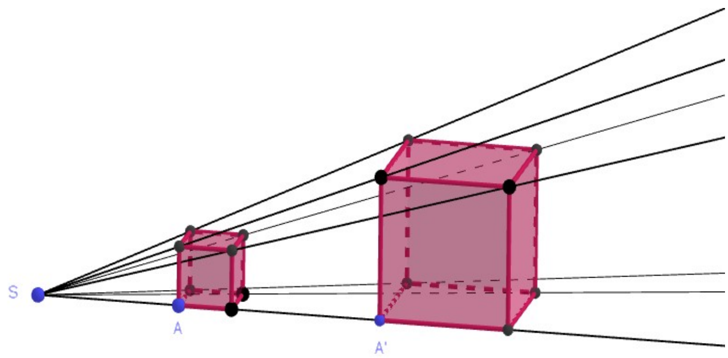
2) $|SA'| = |k| \cdot |SA|$.

3) *Ako je:*

   a) $k > 0$ *točke A i A' leže na istom polupravcu određenom točkom S,*

   b) $k < 0$ *točke A i A' leže na različitim polupravcima određenom točkom S.*

Broj k naziva se koeficijent homotetije. ([8])



Slika 1.12: Homotetija u prostoru

Poglavlje 2

Matrice

U 2. st. prije Krista, rješavajući sustave linearnih jednadžbi, Kinezi su koeficijente sustava zapisivali u tablicu brojeva te njenom transformacijom, koja u suvremenoj matematici predstavlja transponiranu matricu sustava, rješavali sustav. Iako duže vrijeme matematičari nisu tome pridavali preveliku pozornost, u 17. stoljeću pojavom determinanti počinje se intenzivnije razvijati i pojam matrice. Sam naziv matrica prvi je 1850. godine koristio engleski matematičar James Joseph Sylvester (1814. – 1897.), a za njihov je razvoj najzaslužniji, također engleski matematičar, Arthur Cayley (1812. – 1895.) koji ih je prvi apstraktno definirao, ali i opisao osnovne računske operacije koje s njima možemo provoditi. Iako su u samim počecima razvoja matrice bile vezane isključivo uz rješavanje sustava linearnih jednadžbi, u suvremenom se svijetu njihova primjena nalazi puno šire. Osim korištenja u matematici, danas se koriste u računalnoj grafici, statistici, fizici, kriptografiji, elektrotehnici, programiranju, ali i mnogim drugim područjima suvremene znanosti.

Dok su u visokoškolskoj matematici matrice nezaobilazni dio sadržaja s kojim se studenti susreću, u srednjoškolskoj se matematici pojavljuju u programima za prirodoslovno-matematičke gimnazije. Na taj način učenici stječu predznanje koje će im u budućnosti omogućiti lakše savladavanje gradiva linearne algebre. Po novom se kurikulumu gradivo matrica obrađuje u 2. razredu, a unutar kurikuluma matrice su obuhvaćene domenom *Brojevi* i domenom *Algebra i funckije*. Učenici uče kako opisati matricu te navode primjere matrica (nulmatrica, jedinična matrica, kvadratna matrica, gornjetrokutasta i donjetrokutasta matrica) i određuju inverznu matricu, ali i rješavaju jednostavne matrične jednadžbe. Budući da su matrice usko vezane uz rješavanje sustava linearnih jednadžbi s kojima se učenici prvi put susreću u osmom, a potom i u prvom razredu srednje škole, pojam matrice mogao bi se uvesti i ranije.

2.1 Osnovni pojmovi

U svakodnevnom se životu podaci ne mogu dovoljno brzo interpretirati ukoliko nisu organizirani na neki sustavan način. Organizacijom podataka u pravokutnu tablicu, s čime su se učenici susreli često tijekom školovanja, dolazi se do pojma matrice i prije nego je definiran na matematički formalan način. Prilikom obrade nastavnih sadržaja vezanih uz matrice, prva je zadaća nastavnika, odabirom prikladnog motivacijskog zadatka, osvijestiti učenicima potrebu i smisao za uvođenjem pojma matrice. Primjer jednog takvog zadatka imamo u nastavku.

Zadatak (ideja zadatka preuzeta iz [9]): Učenici drugih razreda planiraju dvodnevni izlet. Zainteresirani su za dvije destinacije. Na natječaj su se prijavile tri agencije A1, A2 i A3 s po jednom ponudom cijena putovanja za destinacije D1 i D2 redom: A1 1700 kn, 1800 kn; A2 1800 kn, 2000 kn; A3 1600 kn, 1900 kn.

a) Dane podatke organizirajte u tablicu.

b) Što predstavljaju redci, a što stupci u tvojoj matrici? Koliko imaš redaka, a koliko stupaca?

c) Što predstavlja podatak koji se u tvojoj tablici nalazi u prvom retku i drugom stupcu?

d) Može li tvoja tablica biti organizirana na još koji način? Ako da, koliko tada imaš redaka, a koliko stupaca?

Ovim se, vrlo jednostavnim zadatkom, intuitivno spominju činjenice koje će biti izuzetno bitne za matrice. Organizacijom podataka u pravokutnu tablicu, učenici će primijetiti dva različita načina organizacije tih podataka čime se osvješćuje činjenica da je za daljnju interpretaciju podataka bitno što se nalazi u redcima, a što u stupcima njihove tablice.

	A1	A2	A3
D1	1700	1800	1600
D2	1800	2000	1900

Tablica 2.1: Organizacija podataka u tablicu u kojoj redci predstavljaju destinacije

	D1	D2
A1	1700	1800
A2	1800	2000
A3	1600	1900

Tablica 2.2: Organizacija podataka u tablicu u kojoj redci predstavljaju agencije

Sam motivacijski zadatak može biti i direktno vezan uz primjenu matrica unutar matematike, tj. uz sustave linearnih jednadžbi. Npr. može se tražiti od učenika da na temelju nekog problemskog zadatka postave odgovarajući sustav linearnih jednadžbi i koeficijente tog sustava organiziraju u tablicu. Nakon motivacijskog zadatka, u kojem će učenici pojam matrice povezati s pravokutnom tablicom, pojam se matrice definira na formalan način, ali definiraju se i osnovni pojmovi vezani uz matrice.

Definicija 2.1.1. ***Opći oblik matrice*** *A tipa $m \times n$ sastavljene od m redaka i n stupaca je*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Elementi matrice a_{ij} $(i = 1, \cdots, m\ ;\ j = 1, \cdots, n)$ označavaju se indeksima, gdje prvi indeks i označava broj retka, a drugi indeks j broj stupca u kojem se nalazi element. Element matrice A na presjeku i-tog retka i j-tog stupca često se označava i s $(A)_{ij}$.([9])

Definicija 2.1.2. *Ako je broj redaka matrice m jednak broju stupaca n za matricu kažemo da je **kvadratna matrica** reda n ili kvadratna matrica n-tog reda. Opći oblik kvadratne matrice reda n je*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Elementi $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu**, a elementi $a_{1\,n}, a_{2\,n-1}, \cdots, a_{n\,1}$ **sporednu dijagonalu** kvadratne matrice.([9])*

Definicija 2.1.3. *Zbroj elemenata koji čine glavnu dijagonalu matrice A nazivamo **trag matrice** i označavamo s trA.([9])*

Definicija 2.1.4. *Za dvije matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ i $B = \left(b_{ij}\right)$ kažemo da su **jednake** ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki, odnosno ako vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j. ([9])*

Definicija 2.1.5. ***Nulmatrica*** *je matrica čiji su svi elementi nule. Nulmatrice se označavaju s O i mogu biti bilo kojeg tipa ili reda.([9])*

Definicija 2.1.6. ***Dijagonalna matrica*** *je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale 0, odnosno* $a_{ij} = 0$ *za* $i \neq j$*.([9])*

Definicija 2.1.7. ***Jedinična matrica*** *je dijagonalna matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1. Označava se s I (ili s E). ([9])*

Definicija 2.1.8. ***Gornjetrokutasta matrica*** *je kvadratna matrica čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, odnosno* $a_{ij} = 0$ *za* $i > j$*. ([9])*

Definicija 2.1.9. ***Donjetrokutasta matrica*** *je kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli, odnosno* $a_{ij} = 0$ *za* $i < j$*. ([9])*

Definicija 2.1.10. ***Transponirana matrica*** *matrice A je matrica* A^T *za koju vrijedi* $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$ *za sve* i, j*. ([9])*

Definicija 2.1.11. *Matricu koja ima samo jedan redak nazivamo* ***jednoredčana*** *matrica ili* ***vektor-redak****. Matricu koja ima samo jedan stupac nazivamo* ***jednostupčana*** *matrica ili* ***vektor-stupac****. Matrice koje imaju samo jedan stupac ili samo jedan redak nazivamo vektorima. ([9])*

Iako su neki pojmovi vrlo intuitivni, od učenika je poželjno tražiti da za definirane pojmove zapišu nekoliko primjera u bilježnice kako bi se provjerilo razumijevanje samih definicija koje je itekako potrebno u daljnjoj obradi gradiva.

2.2 Operacije s matricama

Već od samih početaka učenja matematike, učenici s brojevima provode računske operacije zbrajanja i oduzimanja te množenja i dijeljenja, a u kasnijem se školovanju susreću s potenciranjem i korjenovanjem. Opravdano se mogu pitati možemo li barem neke od spomenutih računskih operacija provoditi s matricama te ostaju li svojstva tih operacija i dalje sačuvana.

Kad su u pitanju računske operacije s matricama, smatra se da su zbrajanje, odnosno oduzimanje te množenje matrice realnim brojem (skalarom) osnovne računske operacije koje se s njima mogu provoditi. Spomenute su operacije dosta intuitivne te učenicima nije potrebno prezentirati gotov postupak kako se provode, već im omogućiti da ih samostalno otkriju, kao i svojstva koja pritom vrijede. Samo množenje matrica ipak je nešto složenije.

Zbrajanje matrica može se uvesti već na primjeru matrica tipa 2×2 pri čemu matrice ne trebaju biti zadane eksplicitno. Učenici na temelju zadatka iz stvarnog konteksta mogu samostalno organizirati podatke u matricu, a potom na temelju postavljenih pitanja donijeti zaključak o tome mogu li se matrice zbrajati, po kojem pravilu te na što je potrebno paziti. Primjer jednog takvog zadatka, iako na matrici tipa 2×3 (ili 3×2), imamo u nastavku.

Zadatak: Marko je u ponedjeljak kupio 1 kg banana, 2 sladoleda i 3 paketa bombona , a Sven 2 kg banana, 3 sladoleda i 2 paketa bombona. U utorak su obojica kupila 2 kg banana, 4 sladoleda i 2 paketa bombona.

a) U matrici P prikažite podatke koliko su kojih proizvoda Marko i Sven kupili u ponedjeljak.

b) U matrici U, organiziranoj na isti način kao i u 1) podzadatku, prikažite podatke koliko su kojih proizvoda Marko i Sven kupili u utorak.

c) Što označavaju stupci, a što redci u tvojim matricama?

d) Mogu li se podatci u matrici organizirati na još neki način?

e) U matrici Z, organiziranoj na isti način kao u a) i b) podzadatku, prikažite podatke koliko su kojih proizvoda kupili Marko i Sven oba dana

Možete li povezati matrice P, U i Z?

Glavna ideja ovog zadatka je zbrajanju matrica dati smisao. Tako osmišljenim zadatkom, učenici će primijetiti da podatke mogu organizirati na dva različita načina ovisno o tome predstavljaju li im redci dane ili vrste kupljenih proizvoda. Iza toga se krije pojam koji su prethodno naučili, a to su transponirane matrice. Iz samog konteksta zadatka, učenici će lako zaključiti da se matrice mogu zbrajati i moći će opisati postupak kako ih zbrajati. Iako u tekstu prethodnog zadatka nije direktno postavljeno pitanje o tipu matrica koje možemo zbrajati, svakako isto treba prokomentirati prije same definicije zbrajanja te ujedno i tip matrice koju dobijemo kao konačan rezultat.

Definicija 2.2.1. *Neka su $A = \left(a_{ij}\right)$ i $B = \left(b_{ij}\right)$ matrice istog tipa.* ***Zbroj matrica*** *A i B je matrica $C = \left(c_{ij}\right)$ istoga tipa čije elemente dobivamo zbrajanjem odgovarajućih elemenata matrica A i B, odnosno $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, za svaki i, j. Tada pišemo $C = A + B$.([9])*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Oduzimanje matrica je također vrlo intuitivno i učenici bi zaključak o tome kako oduzimamo matrice, nakon što su usvojili postupak zbrajanja, mogli donijeti i bez proučavanja nekog konkretnog primjera, ali je prije toga potrebno definirati pojam suprotne matrice.

Definicija 2.2.2. *Za matricu B kažemo da je **suprotna** matrici A ako vrijedi $A + B = O$, gdje je O nulmatrica istog tipa kao i matrice A i B. ([9])*

Opravdanje za gornju definiciju je u činjenici da se već kod oduzimanja brojeva zaključilo da je oduzimanje zapravo dodavanje suprotnog broja. Do istog se zaključka dolazi i kad su u pitanju matrice. Tek se sada može definirati operacija oduzimanja matrica koja se kasnije može povezati i s operacijom množenja matrica realnim brojem.

Definicija 2.2.3. ***Oduzimanje*** *dviju matrica A i B istog tipa svodi se na zbrajanje matrice A sa suprotnom matricom od B. Vrijedi $A - B = A + (-B)$. ([9])*

Nakon dvije najosnovnije računske operacije dolazi se do množenja matrica realnim brojem, tj. skalarom. I u ovom je slučaju poželjno da učenici samostalno zaključe kako množiti matricu realnim brojem.

Definicija 2.2.4. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ realan broj i A matrica. **Umnožak** matrice A realnim brojem α je matrica αA, takva da vrijedi $\alpha (A)_{ij} = (\alpha A)_{ij}$. ([9])*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sada se može prokomentirati i smislenost definicije oduzimanja matrica. Naime, prilikom oduzimanja matrica A i B zbrajamo matricu A i matricu suprotnu matrici B koju zapravo dobivamo na način da svaki element matrice B pomnožimo s -1. Iz toga zaključujemo da je oduzimanje matrica u skladu s definicijom množenja matrica realnim brojem.

Sljedeći bitan korak je proučiti koja svojstva vrijede prilikom zbrajanja i množenja matrica realnim brojem. Učenici znaju koja svojstva vrijede prilikom zbrajanja i množenja realnih brojeva pa je za očekivati da će pretpostaviti da bi ista mogla vrijediti i kod matrica. Pri tome je poželjno da učenici samostalno istraže vrijede li ta svojstva.

Općenito, ako su A, B i C matrice istog tipa te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ može se pokazati da vrijedi sljedeće (prema [9]):

- komutativnost zbrajanja: $A + B = B + A$,
- asocijativnost zbrajanja: $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- neutralni element za zbrajanje je nulmatrica: $O + A = A + O = A$,

- suprotni element za zbrajanje je suprotna matrica: $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- kvaziasocijativnost: $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$,
- distributivnost množenja prema zbrajanju matrica: $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- distributivnost množenja prema zbrajanju realnih brojeva: $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

Nakon obrade osnovnih računskih operacija koje možemo raditi s matricama, dolazi se do nešto kompleksnije operacije, a to je množenje dvije matrice. Iako je u udžbenicima, koji sadrže dio gradiva o matricama, odmah opisan postupak kako se dvije matrice množe ovdje će biti prezentiran zadatak čijim rješavanjem učenici, vođenim otkrivanjem, do zaključka dolaze samostalno. Učenici će zasigurno pretpostaviti da bi se množenje dvije matrice moglo definirati na način da se odgovarajući elementi pomnože, što naravno nije točno. Razlog zašto spomenuta ideja množenja matrica ne vrijedi je veza matrica i linearnih operatora, tj. linearnih preslikavanja. O tome će više biti rečeno u idućem poglavlju rada. Sada dajemo primjer zadatka u kojem će učenici naslutiti kako množiti matrice.

Zadatak:

a) Marko je kupio 3 kilograma banana čija je cijena 10 kn/kg i 2 kilograma mandarina po cijeni od 6 kn/kg.

   1) Izračunajte koliko je novaca Marko potrošio i zapišite račun.
   2) Dane podatke organizirajte u matrice tako da one ne budu istog tipa.
   3) Kojom bi računskom operacijom mogli povezati dobivene matrice tako da se rezultat poklapa s iznosom koji je Marko potrošio?

b) Dane su matrice A i B. Odredite elemente matrice koja nastaje množenjem tih matrica.

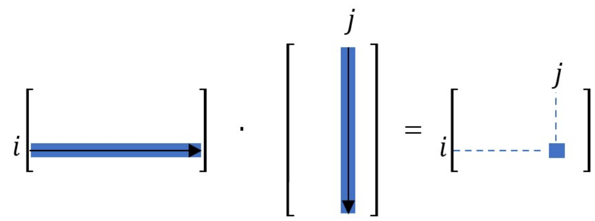
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{--} & \text{--} & 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} \end{bmatrix}$$

   1) Odredite tip matrice A, matrice B i matrice $A \cdot B$.
   2) Postoji li veza između tipa matrice A, matrice B i matrice $A \cdot B$? Riječima opišite pravilnost koju ste uočili.

Navedenim će zadatkom učenici osvijestiti nekoliko bitnih činjenica vezanih uz množenje matrica. Iako je u a) dijelu gore navedenog zadatka konačan rezultat množenja realan broj (iznos koji je Marko potrošio) rezultat množenja dvije matrice općenito nije realan broj već matrica (b) podzadatak). Kao rezultat množenja dobiva se matrica koja ima broj redaka jednak broju redaka prve matrice, a broj stupaca jednak broju stupaca druge matrice. Matrice s tim svojstvom nazivaju se ulančane matrice. Općenito, mogu se množiti samo ulančane matrice. U suprotnom umnožak neće biti definiran.

Definicija 2.2.5. ***Umnožak*** *matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ tipa $m \times n$ i matrice $B = \left(B_{ij}\right)$ tipa $n \times p$ je matrica AB tipa $m \times p$ čije elemente dobivamo:*

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.([9])$$



Slika 2.1: Slikovni prikaz množenja matrica

Kao i ranije, i ovdje se može istražiti koja svojstva vrijede prilikom množenja matrica. Prva bitna činjenica koju učenici trebaju uočiti je da množenje matrica nije komutativno, ali isto tako da matrice ne zadovoljavaju neka uobičajena svojstva koja vrijede za realne brojeve. Kao naprimjer:

- ako je umnožak AB definiran, BA ne mora biti,
- jednakost $AB = AC$ ne povlači nužno $B = C$
- ako je $AB = 0$, tada ne mora biti niti $A = 0$ niti $B = 0$.

Za sve gore navedeno može se tražiti od učenika vlastiti primjer čime će se uvjeriti u istinitost tih tvrdnji. Općenito, ako su A, B i C matrice te $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da su navedeni produkti definirani vrijedi sljedeće (prema [9]):

- asocijativnost matričnog množenja: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
- distributivnost množenja prema zbrajanju matrica: $A\,(B + C) = AB + AC$,
- neutralni element za množenje je jedinična matrica: $I \cdot A = A \cdot I = A$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

2.3 Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Sustavi linearnih jednadžbi primjenjuju se u mnogim područjima. Tijek dosadašnjeg školovanja učenici su se susreli s nekoliko metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi među kojima su metoda supstitucije, metoda suprotnih koeficijenata, metoda komparacije, ali i grafička metoda. Nakon definiranja pojma matrice i operacija koje s njima možemo provoditi, učenike želimo upoznati s njihovom primjenom unutar matematike. Koristimo ih upravo prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi i ta je primjena izuzetno korisna kad su dani sustavi linearnih jednadžbi s puno nepoznanica. Tu se pojavljuje i pojam determinante koji do sada nije spomenut, a zapravo je u povijesnom razvoju prethodio pojmu matrice pa ćemo se iz tog razloga osvrnuti i na njega. Iako neki izvori spominju da su se determinante koristile već u 4. st. pr. Kr., pravi razvoj doživjele su tek u 17. st. kada su se istovremeno pojavile u Japanu i Europi. Izraz determinanta 1801. godine prvi je upotrijebio poznati matematičar Gauss (1777. – 1855.), a u suvremenom smislu prvi ga je koristio Cauchy (1789. – 1857.). Sam pojam determinante veže se uz realan broj koji se pridružuje kvadratnoj matrici i definiran je na induktivan način, tj. najprije definiramo determinantu matrice prvog reda, a onda redom za više redove.

Definicija 2.3.1. *Determinanta matrice* $A = [a_{11}]$ *prvog reda je realni broj definiran formulom:* $det(A) = \left|a_{11}\right| = a_{11}$.([9])

Definicija 2.3.2. *Determinanta matrice* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *drugog reda je realni broj definiran formulom:* $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.([9])

Definicija 2.3.3. *Determinanta matrice* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *trećeg reda je realni broj definiran formulom:*

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.([9]) \end{aligned}$$

Već kod matrica trećeg reda formulu nije jednostavno upamtiti, ali svakako to nije ni cilj. Iz tog razloga koristi se Sarrusovo pravilo. Primjenjuje se na način da determinanti dopišemo prva dva stupca te zbrajamo umnoške elemenata glavne dijagonale i oduzimamo umnoške elemenata sporedne dijagonale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Slika 2.2: Sarrusovo pravilo

Budući da to pravilo vrijedi samo za računanje determinanti trećeg reda potrebna je efikasna metoda računanja determinantne za matrice višeg reda. To je Laplaceov razvoj determinante, po određenom stupcu ili retku, pomoću kojeg računanje determinante n-tog reda svodimo na računanje n determinanti $n-1$-vog reda.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Slika 2.3: Laplaceov razvoj determinante trećeg reda po elementima prvog reda

Kako se u srednjoj školi ne rješavaju često sustavi koji sadrže više od tri nepoznanice, Laplaceov razvoj determinanti višeg reda neće se detaljnije komentirati.

Pojam determinante uveden je kako bi se sustav linearnih jednadžbi mogao rješavati još jednom metodom, metodom determinanti. Za to je potrebno taj sustav zapisati u matričnom obliku. Općenito, svakom sustavu linearnih jednadžbi mogu sr pridružiti dvije matrice - matrica sustava i proširena matrica sustava.

Definicija 2.3.4. ***Matrica sustava*** *je matrica koeficijenata koji se nalaze uz nepoznanice u sustavu linearnih jednadžbi.([9])*

Definicija 2.3.5. ***Proširena matrica sustava*** *je matrica sustava proširena stupcem koeficijenata s desnih strana jednakosti.([9])*

Zapis nekog sustava u proširenoj matrici sustava bit će puno jednostavniji prikaz tog sustava ako imamo velik broj jednadžbi i nepoznanica. Svaki red matrice predstavljat će jednu jednadžbu sustava, a u pojedinom stupcu te matrice nalazit će se koeficijenti uz istu nepoznanicu.

Na sljedeći se način mogu rješavati sustavi linearnih jednadžbi 2×2 metodom determinanti. Ako imamo sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

možemo ga prikazati u obliku proširene matrice sustava

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$$

na temelju koje su definirane sljedeće determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Općenito, može se pokazati da u tom slučaju vrijedi sljedeće:

- Ako je $D \neq 0$ tada početni sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$.
- Ako je $D = 0$ i $D_x = D_y = 0$ tada početni sustav ima beskonačno mnogo rješenja.
- Ako je $D = 0$ i ako je barem jedna od determinantni D_x i D_y različita od nule tada početni sustav nema rješenja.

Na sasvim analogan način mogu se rješavati i sustavi tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Takav način rješavanja sustava, koristeći determinante, poznat je pod nazivom Cramerova metoda rješavanja sustava. U nekim slučajevima sustav neće biti rješiv metodom determinanti (različit je broj jednadžbi i broj nepoznanica ili je determinanta sustava jednaka nuli) ili će ta metoda biti nepraktična za rješavanje. U takvim će se slučajevima koristiti Gauss-Jordanova metoda eliminacija kojom se početni sustav svodi na jednostavniji, tj. ekvivalentan sustav čiji će skup rješenja biti isti. Iz tog ekvivalentnog sustava rješenje će se moći odrediti na jednostavniji način. Općeniti sustav koji se sastoji od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica zapisuje se na sljedeći način:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Rješenje jednog takvog sustava je uređena n-torka $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ čijim se uvrštavanjem u svih m jednadžbi dobivaju istinite jednakosti. Pitanje je kako doći do jednostavnijeg sustava, tj. kako koristiti Gauss-Jordanovu metodu. Za početak razmotrimo koje se transformacije mogu raditi na sustavu jednadžbi, a da se pritom skup rješenja ne mijenja. Pri svođenju sustava na ekvivalentan sustav (prema [9]) mogu se upotrebljavati sljedeće elementarne transformacije jednadžbi sustava:

- zamjena poretka dviju jednadžbi,
- množenje jednadžbe sustava brojem različitim od 0,

- zbrajanje dvije jednadžbe sustava.

S navedenim su se transformacija učenici već susreli, ali sada te transformacije želimo povezati s proširenom matricom sustava. Želimo li gore spomenute elementarne transformacije provoditi i na proširenoj matrici sustava tada transformacije provodimo na redcima te matrice i dopuštena je (prema [9]):

- zamjena poretka dvaju redaka matrice,
- množenje retka matrice brojem različitim od 0,
- zbrajanje dvaju redaka matrice.

Tim transformacijama će se proširena matrica sustava svesti na matricu koja u svakom retku sadrži nule te jednu jedinicu ili samo nule. Iz takve matrice se lako očitaju rješenja sustava.

I prije smo, samo proučavajući koeficijente pojedinog sustava, mogli reći nešto o njegovim rješenjima. Proučimo sada možemo li reći nešto općenito o rješenjima sustava ako proučavamo njegovu proširenu matricu. Općenito, razlikujemo homogeni i nehomogeni sustav linearnih jednadžbi i sama razlika proizlazi iz vrijednosti slobodnih koeficijenata.

Ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli, onda kažemo da je sustav homogen i takav će sustav uvijek imati rješenje. Ako nakon određenog broja elementarnih transformacija dobivamo jediničnu matricu, sustav ima jedinstveno nul-rješenje. Ali, sustav može imati i netrivijalno rješenje. U tom slučaju nakon provođenja određenog broja elementarnih transformacija dobivamo gornjetrokutastu matricu, tj. matricu koja sadrži nul-redak. Tada rješenje sustava ovisi o parametru, tj. sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Ako u sustavu nisu svi slobodni koeficijenti jednaki nuli, pričamo o nehomogenom sustavu. I u ovom slučaju imat ćemo samo jedno rješenje ako nakon određenog broja elementarnih transformacija dobivamo jediničnu matricu, a beskonačno mnogo rješenja ako dobivamo gornjetrokutastu matricu. Razlika između homogenih i nehomogenih sustava je u tome što nehomogeni sustav može ne imati rješenja. Sustav neće imati rješenja ako nakon određenog broja transformacija dobivamo nul-redak, ali u odgovarajućem retku u posljednjem stupcu proširene matrice imamo element različit od nule. Za učenike u srednjoj školi nećemo ulaziti u daljnju razradu navedenih činjenica, ali nastavnik svakako treba biti svjestan pozadine iz koje proizlaze ti zaključci.

Poglavlje 3

Veza geometrijskih preslikavanja i matrica

Nakon proučavanja geometrijskih preslikavanja u osnovnoj i srednjoj školi želimo osvijestiti učenicima da između njih i matrica postoji veza. Prelazimo na jednu višu razinu u kojoj se zapravo još više dotičemo gradiva linearne algebre. Odnosno, želimo da učenici matrice primjenjuju, ne samo prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi, već i u drugim područjima matematike. Preslikavanja koja smo do sad spominjali možemo objediniti pod još jednim imenom - linearna preslikavanja. Razlog tome leži u činjenici da preslikavanja s kojima su se učenici do sad upoznali imaju jedno dodatno svojstvo, svojstvo linearnosti, koje se do ovog trenutka nije posebno isticalo. Ono što u literaturi zapravo češće pronalazimo je pojam linearnog operatora koji predstavlja drugi naziv za linearna preslikavanja. Kako bismo mogli izreći vezu između njih i matrica za početak ćemo definirati linearno preslikavanje odnosno pojam linearnog operatora.

Definicija 3.0.1. *Preslikavanje $f : V^2 \to V^2$ je* ***linearno*** *ako za sve skalare α_1, α_2 i vektore $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ vrijedi:*

$$f(\alpha_1 \vec{r_1} + \alpha_2 \vec{r_2}) = \alpha_1 f(\vec{r_1}) + \alpha_2 f(\vec{r_2}).$$

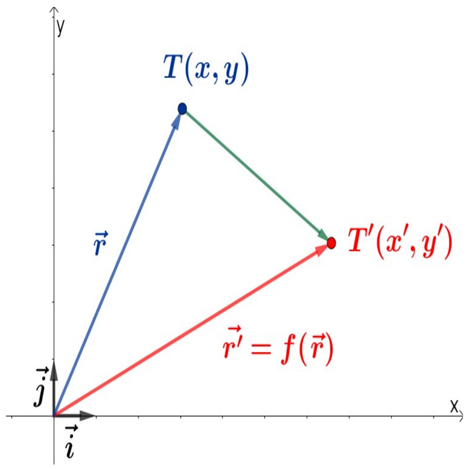
Ili, ekvivalentno:

$$f(\vec{r_1} + \vec{r_2}) = f(\vec{r_1}) + f(\vec{r_2}),$$

$$f(\alpha_1 \vec{r_1}) = \alpha_1 f(\vec{r_1}).$$

Linearno preslikavanje nazivamo još imenom ***linearni operator****. ([7])*

Učenici znaju od ranije da je proizvoljna točka $T(x, y)$ ravnine jednoznačno određena svojim radijvektorom $\vec{r} = \vec{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Pri tome su vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori, te su međusobno okomiti i čine kanonsku bazu, tj. linearnom kombinacijom tih vektora možemo prikazati sve ostale vektore nekog vektorskog prostora. Budući da ćemo proučavati linearna preslikavanja u ravnini vrijedi da je $\vec{i} = (1, 0)$, a $\vec{j} = (0, 1)$. Preslikavanje koje točki $T(x, y)$ pridružuje točku $T'(x', y')$ možemo shvatiti i kao linearno preslikavanje $f : V^2 \to V^2$ koje radijvektoru $\vec{r}$ pridružuje radijvektor $\vec{r'} = f(r)$.



Slika 3.1: Linearno preslikavanje koje točki $T(x, y)$ pridružuje točku $T'(x', y')$

Sada to linearno preslikavanje želimo prikazati matricom. Elemente te matrice računamo na način da odredimo kako to preslikavanje djeluje na vektorima kanonske baze. Prikaz vektora $f\left(\vec{i}\right)$ u kanonskoj bazi dan je s $f\left(\vec{i}\right) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ što odgovara matričnom prikazu $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Analogno, vektor $f\left(\vec{j}\right)$ u kanonskoj bazi dan je s $f\left(\vec{j}\right) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ što odgovara matričnom prikazu $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Iz navedenog sada možemo zaključiti da linearno preslikavanje $f : V^2 \to V^2$ možemo prikazati matricom $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Uzmemo li bilo koji vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, čiji je matrični prikaz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, i primijenimo li na njega definiciju linearnog preslikavanja dobivamo:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= f\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \\ &= xf\left(\vec{i}\right) + yf\left(\vec{j}\right) \\ &= x\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\right) + y\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}\right) \\ &= (a_1x + b_1y)\,\vec{i} + (a_2x + b_2y)\,\vec{j} \end{aligned}$$

Ako pomnije proučimo zadnju jednakost možemo primijetiti da bi množenjem matričnog prikaza linearnog preslikavanja f matričnim prikazom vektora $\vec{r}$ došli do istog zaključka, tj. da vrijedi:

$$A\vec{r} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = (a_1x + b_1y)\,\vec{i} + (a_2x + b_2y)\,\vec{j} = f(\vec{r}).$$

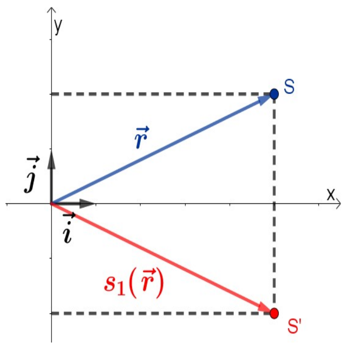
Time smo zapravo pokazali da postoji matrica A takva da je $A\vec{r} = f(\vec{r})$. Možemo dokazati i obrat, tj. da je svakom matricom A drugog reda definirano jedno linearno preslikavanje u ravnini koje vektoru $\vec{r}$ pridružuje vektor $\vec{r'} = A\vec{r}$. Sada možemo formalno izreći vezu linearnog preslikavanja i matrice.

Definicija 3.0.2. *Svakom linearnom preslikavanju $f : V^2 \to V^2$ odgovara matrica drugog reda takva da je $f(\vec{r}) = A\vec{r}, \forall\vec{r} \in V^2$. Stupci matrice A dobiju se tako da se odredi djelovanje preslikavanja f na vektorima kanonske baze. ([7])*

Spomenutu vezu između linearnih preslikavanja i matrica sada možemo proučiti i na konkretnim primjerima. Preslikavanja koja smo spominjali, proučit ćemo u koordinatnom sustavu, te zaključiti kako ih zapisati matrično. Dodatno, uvjerit ćemo se da je svako od tih preslikavanja linearno.

3.1 Matrični prikaz osne simetrije

Za početak proučimo osne simetrije s obzirom na osi koordinatnog sustava. *Osnu simetriju s obzirom na os apscisa* označimo sa s_1. Uzmemo li proizvoljnu točku $S\,(x, y)$ ravnine ona će se osnom simetrijom s obzirom na os apscisa preslikati u točku $S'\,(x, -y)$. Na temelju toga zaključujemo da će to preslikavanje radijvektoru točke $S\,(x, y)$ pridružiti vektor koji je osnosimetričan tom vektoru s obzirom na os apscisa, tj. radijvektor točke $S'\,(x, -y)$.



Slika 3.2: Osna simetrija točke $S\,(x, y)$ s obzirom na os apscisa

Ako s $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ označimo radijvektor točke $S\,(x, y)$, onda preslikavanje s_1 tom vektoru pridružuje vektor $s_1\,(\vec{r}) = x\vec{i} - y\vec{j}$. Po definiciji preslikavanje s_1 je za $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ linearno:

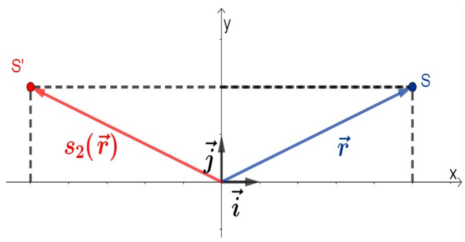
$$\begin{aligned} s_1\,(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}) &= s_1\left(\alpha_1\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)\right) \\ &= s_1\left((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\,\vec{i} + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,\vec{j}\right) \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\,\vec{i} - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,\vec{j} \\ &= \alpha_1\left(x_1\vec{i} - y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} - y_2\vec{j}\right) \\ &= \alpha_1 s_1\,(\vec{r_1}) + \alpha_2 s_1\,(\vec{r_2}) \end{aligned}$$

Već smo spomenuli da za određivanje matrice tog preslikavanja trebamo odrediti kako to preslikavanje djeluje na vektorima kanonske baze. U ovom slučaju dobivamo:

$$s_1\left(\vec{i}\right) = \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_1\left(\vec{j}\right) = -\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

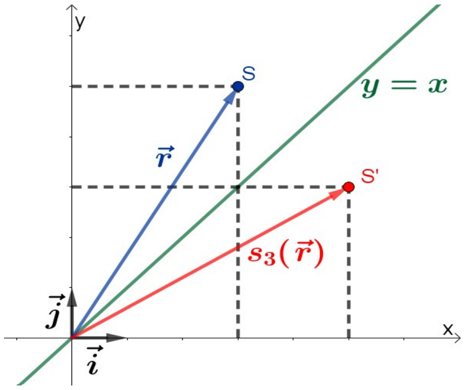
čime smo odredili stupce matrice koja je pridružena tom preslikavanju, tj. dobili smo matricu $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Upravo je matrica S_1 matrica osne simetrije s_1.

Pogledamo li *osnu simetriju s_2 s obzirom na os ordinata* na sasvim analogan način zaključujemo da je matrica osne simetrije s_2 matrica oblika $S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.



Slika 3.3: Osna simetrija točke $S\,(x, y)$ s obzirom na os ordinata

Osim osnih simetrija s obzirom na koordinatne osi proučit će se i osne simetrije s obzirom na pravce $y = x$ i $y = -x$. Osnu simetriju obzirom na pravac $y = x$ označimo sa s_3. Uzmimo proizvoljnu točku $S\,(x, y)$ ravnine. Preslikavanje s_3 će radijvektoru točke $S\,(x, y)$ pridružiti vektor koji je osnosimetričan tom vektoru s obzirom na pravac $y = x$.

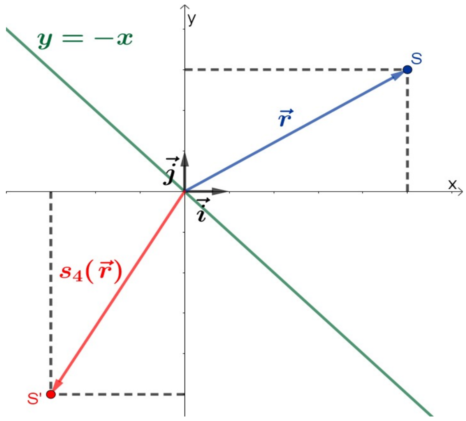


Slika 3.4: Osna simetrija točke $S\ (x, y)$ s obzirom na pravac $y = x$

To će preslikavanje radijvektoru $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ točke $S\ (x, y)$ pridružiti vektor $s_3\left(\vec{r}\right) = y\vec{i} + x\vec{j}$ i za $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
s_3\left(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}\right) &= s_3\left(\alpha_1\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)\right) \\
&= s_3\left(\left(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2\right)\vec{i} + \left(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2\right)\vec{j}\right) \\
&= \left(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2\right)\vec{i} + \left(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2\right)\vec{j} \\
&= \alpha_1\left(y_1\vec{i} + x_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(y_2\vec{i} + x_2\vec{j}\right) \\
&= \alpha_1s_3\left(\vec{r_1}\right) + \alpha_2s_3\left(\vec{r_2}\right),
\end{aligned}$$

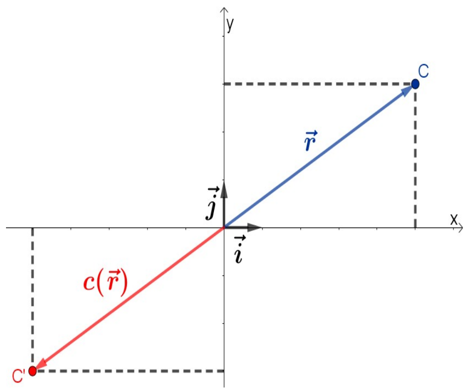
tj. preslikavanje s_3 je linearno. Kako je $s_3\left(\vec{i}\right) = \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a $s_3\left(\vec{j}\right) = \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ matrica koja je pridružena tom preslikavanju je matrica oblika $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Analogno, možemo zaključiti da *osnu simetriju* s_4 *s obzirom na pravac* $y = -x$ možemo prikazati matricom $S_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.



Slika 3.5: Osna simetrija točke $S\ (x, y)$ s obzirom na pravac $y = -x$

3.2 Matrični prikaz centralne simetrije

Nakon osne simetrije obrađivala se centralna simetrija pa ćemo ovdje proučiti *centralnu simetriju c s obzirom na ishodište koordinatnog sustava*. Uzmemo li proizvoljnu točku $C\,(x, y)$ ravnine centralnom simetrijom c s obzirom na ishodište koordinatnog sustava ta će se točka preslikati u točku $C'\,(-x, -y)$.



Slika 3.6: Centralna simetrija točke $C\,(x, y)$ s obzirom na ishodište koordinatnog sustava

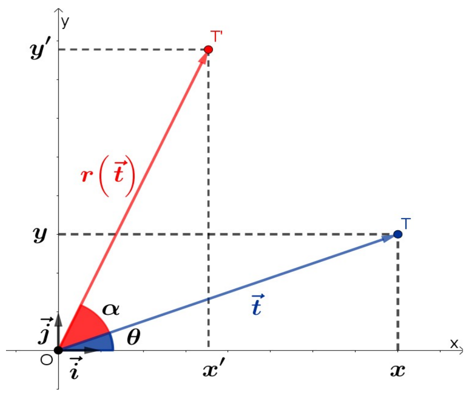
Radijvektoru $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ točke $C\,(x, y)$ preslikavanje c pridružuje centralnosimetričan vektor s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, tj. vrijedi $(\vec{r}) = -x\vec{i} - y\vec{j}$. I u ovom slučaju iz definicije slijedi da je preslikavanje c za $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ linearno:

$$\begin{aligned} c\left(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}\right) &= c\left(\alpha_1\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)\right) \\ &= c\left(\left(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2\right)\vec{i} + \left(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2\right)\vec{j}\right) \\ &= -\left(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2\right)\vec{i} - \left(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2\right)\vec{j} \\ &= \alpha_1\left(-x_1\vec{i} - y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(-x_2\vec{i} - y_2\vec{j}\right) \\ &= \alpha_1c\left(\vec{r_1}\right) + \alpha_2c\left(\vec{r_2}\right). \end{aligned}$$

Kako je $c\left(\vec{i}\right) = -\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a $c\left(\vec{j}\right) = -\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ matrica koja je pridružena tom preslikavanju je matrica oblika $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3.3 Matrični prikaz rotacije

Sljedeće preslikavanje koje ćemo proučiti te odrediti matricu kojom je zadano je *rotacija r za zadani kut α oko ishodišta koordinatnog sustava*, tj. točke $O = (0, 0)$. Točka $T = (x, y)$, različita od točke O, rotacijom oko ishodišta preslikat će se u točku $T' = (x', y')$ pri čemu je $|OT| = |OT'|$ i $\angle TOT' = \alpha$. Već smo spomenuli da ukoliko je zadani kut $\alpha > 0$ imamo rotaciju u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, a za $\alpha < 0$ rotaciju u smjeru kazaljke na satu. Označimo s θ kut koji radijvektor točke $T\,(x, y)$ zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.



Slika 3.7: Rotacija točke $T\,(x, y)$ oko ishodišta koordinatnog sustava za kut $\alpha > 0$

Primijetimo da za koordinate točke $T = (x, y)$ vrijedi:

$$x = |OT| \cdot \cos\theta,$$

$$y = |OT| \cdot \sin\theta,$$

dok za koordinate točke $T'\ (x', y')$ vrijedi:

$$x' = |OT'| \cdot \cos(\theta + \alpha),$$

$$y' = |OT'| \cdot \sin(\theta + \alpha).$$

Primjenom adicijskih formula za kosinus i sinus dobivamo:

$$x' = |OT'| \cdot \cos(\theta + \alpha) = |OT'| \cdot \cos\theta\cos\alpha - |OT'| \cdot \sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y' = |OT'| \cdot \sin(\theta + \alpha) = |OT'| \cdot \sin\theta\cos\alpha + |OT'| \cdot \cos\theta\sin\alpha = y\cos\alpha + x\sin\alpha.$$

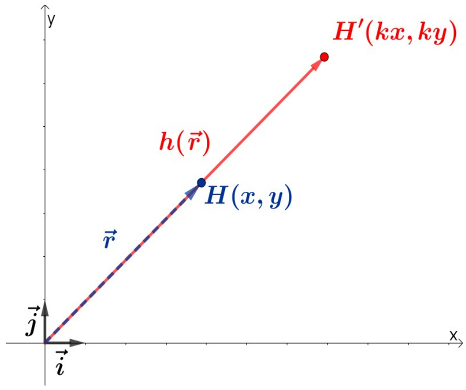
Iz navedenog zaključujemo da preslikavanje r radijvektoru $\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j}$ točke $T\ (x, y)$ pridružuje vektor $r\left(\vec{t}\right) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\,\vec{i} + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)\,\vec{j}$. I ovdje lako pokažemo da je za $\vec{t_1}, \vec{t_2} \in V^2$ preslikavanje linearno:

$$\begin{aligned}
r\left(\alpha_1\vec{t_1} + \alpha_2\vec{t_2}\right) &= r\left(\alpha_1\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)\right) \\
&= r\left((\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\,\vec{i} + (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)\,\vec{j}\right) \\
&= ((\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\cos\alpha - (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)\sin\alpha)\,\vec{i} + \\
&\qquad ((\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)\cos\alpha + (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\sin\alpha)\,\vec{j} \\
&= \alpha_1\left((x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)\,\vec{i} + (y_1\cos\alpha + x_1\sin\alpha)\,\vec{j}\right) + \\
&\qquad \alpha_2\left((x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha)\,\vec{i} + (y_2\cos\alpha + x_2\sin\alpha)\,\vec{j}\right) \\
&= \alpha_1 r\left(\vec{t_1}\right) + \alpha_2 r\left(\vec{t_2}\right)
\end{aligned}$$

Kako za vektore kanonske baze vrijedi $r\left(\vec{i}\right) = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}$ i $r\left(\vec{j}\right) = -\sin\alpha\cdot\vec{i} + \cos\alpha\cdot\vec{j}$ slijedi da je matrica tog preslikavanja dana s $R = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$. Tu matricu nazivamo matrica rotacije.

3.4 Matrični prikaz homotetije

Proučimo *homotetiju h kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava*, a koeficijent k joj je pozitivan. Ta će homotetija proizvoljnu točku $H(x, y)$ preslikati u točku $H'(kx, ky)$ koja leži na polupravcu OH.



Slika 3.8: Homotetija točke $H(x, y)$ s centrom u ishodištu za $k > 0$

Homotetija h će radijvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ točke $H(x, y)$ preslikati u radijvektor $\vec{r'} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$ točke $H'(kx, ky)$ pri čemu za $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in V^2$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
h(\alpha_1\vec{r_1} + \alpha_2\vec{r_2}) &= h\left(\alpha_1\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right)\right) \\
&= h\left((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\vec{i} + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y2)\vec{j}\right) \\
&= k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\vec{i} + k(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\vec{j} \\
&= \alpha_1\left(kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j}\right) + \alpha_2\left(kx_2\vec{i} + ky_2\vec{j}\right) \\
&= \alpha_1 h(\vec{r_1}) + \alpha_2 h(\vec{r_2})
\end{aligned}$$

pa je i ovo preslikavanje linearno. Budući da je $h\left(\vec{i}\right) = k\vec{i} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ i $h\left(\vec{j}\right) = k\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ slijedi da je matrica preslikavanja h dana s $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

3.5 Kompozicija linearnih preslikavanja

Linearnim preslikavanjima smo u prethodnom dijelu pridruživali matrice koje ih određuju, a sada želimo istražiti može li se kompoziciji linearnih preslikavanja također pridružiti matrica. Za početak proučimo proizvoljna linearna preslikavanja f i g pri čemu je preslikavanju f pridružena matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, a preslikavanju g matrica $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\alpha_1 \vec{r_1} + \alpha_2 \vec{r_2}) &= f(g(\alpha_1 \vec{r_1} + \alpha_2 \vec{r_2})) \\
&= f(\alpha_1 g(\vec{r_1}) + \alpha_2 g(\vec{r_2})) \\
&= f(\alpha_1 g(\vec{r_1})) + f(\alpha_2 g(\vec{r_2})) \\
&= \alpha_1 (f(g(\vec{r_1}))) + \alpha_2 (f(g(\vec{r_2}))) \\
&= \alpha_1 (f \circ g)(\vec{r_1}) + \alpha_2 (f \circ g)(\vec{r_2}),
\end{aligned}$$

tj. kompozicija $f \circ g$ je ponovno linearno preslikavanje. Označimo tu kompoziciju s h te njoj pridruženu matricu s $C = \left(c_{ij}\right)$. Da bismo odredili elemente te matrice potrebno je odrediti djelovanje kompozicije h na vektorima kanonske baze. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
h\left(\vec{i}\right) &= (f \circ g)\left(\vec{i}\right) = f\left(g\left(\vec{i}\right)\right) \\
&= f\left(b_{11}\vec{i} + b_{21}\vec{j}\right) \\
&= b_{11} f\left(\vec{i}\right) + b_{21} f\left(\vec{j}\right) \\
&= b_{11}\left(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}\right) + b_{21}\left(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}\right) \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,\vec{i} + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,\vec{j} \\
&= c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h\left(\vec{j}\right) &= (f \circ g)\left(\vec{j}\right) = f\left(g\left(\vec{j}\right)\right) \\
&= f\left(b_{12}\vec{i} + b_{22}\vec{j}\right) \\
&= b_{12} f\left(\vec{i}\right) + b_{22} f\left(\vec{j}\right) \\
&= b_{12}\left(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}\right) + b_{22}\left(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}\right) \\
&= (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,\vec{i} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,\vec{j} \\
&= c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j}.
\end{aligned}$$

Iz navedenog slijedi da su elementi matrice C oblika $c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j}$ za $i, j = 1, 2$. U prethodnom smo poglavlju proučili računske operacije s matricama i na temelju toga možemo primijetiti da matricu C zapravo dobivamo množenjem matrice A matricom B. Odnosno, kompoziciji linearnih preslikavanja $f \circ g$ odgovara matrica koja je jednaka umnošku matrica pojedinih linearnih preslikavanja (u istom poretku), tj. $C = AB$.

Osnoj simetriji s obzirom na os apscisa, označenoj sa s_1, pridružili smo matricu $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dok smo osnoj simetriji s obzirom na os ordinata, označenoj sa s_2, pridružili matricu $S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Množenjem matrica S_1 i S_2 dobit ćemo matricu koja odgovara kompoziciji $s_1 \circ s_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je rezultat množenja matrica koja je pridružena centralnoj simetriji c s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. U prvom je poglavlju spomenuto da je centralna simetrija kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi okomite, a sada se to isto potvrdilo i promatranjem matričnog prikaza tih preslikavanja.

Promotrimo i kompoziciju dvije rotacije u ravnini oko ishodišta koordinatnog sustava. Označimo s r_1 rotaciju za kut α, a s r_2 rotaciju za kut β. Tada je očito kompozicija tih rotacija jednaka rotaciji za kut $\alpha + \beta$. Kako svakoj rotaciji možemo pridružiti matricu rotacije označimo s $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ matricu rotacije r_1, a s $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ matricu rotacije r_2. Množenjem matrica A i B dobivamo matricu koja odgovara kompoziciji $r_1 \circ r_2$:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Već je komentirano da je kompozicija $r_1 \circ r_2$ jednaka rotaciji za kut $\alpha + \beta$ čija je pripadna matrica $\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$. Budući da ta matrica treba biti jednaka matrici koju smo dobili množenjem, ovime smo zapravo izveli adicijske teoreme za trigonometrijske funkcije.

Poglavlje 4

Aktivnosti

U ovom će se poglavlju dati pregled nekoliko aktivnosti koje nastavnici mogu provoditi prilikom obrade do sad spomenutih nastavnih sadržaja. Prva aktivnost je namijenjena ponavljanju naučenih sadržaja o sustavima linearnih jednadžbi, matričnom prikazu sustava te načinu rješavanja sustava Gauss-Jordanovom metodom. Nakon toga je dan niz aktivnosti pomoću kojih će učenici, koristeći program dinamičke geometrije, vizualizirati geometrijska preslikavanja i istraživati njihova svojstva.

4.1 Aktivnost 1.: *Rješavanje sustava linearnih jednadžbi Gauss-Jordanovom metodom*

Cilj aktivnosti: učenici će primjeniti Gauss-Jordanovu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić.

Nastavni listić:

RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH JEDNADŽBI GAUSS-JORDANOVOM METODOM

Zadatak ([11]):Pretpostavimo da gospodarstvo ima četiri sektora: poljoprivreda, energetika, industrija i promet. Svaki sektor dio svojih resursa prodaje ostalim sektorima, a ostatak zadržava za sebe.

- Sektor poljoprivrede koristi 30% resursa sektora energetike, 30% resursa sektora industrije, 20% resursa prometa i 65% vlastitih resursa.
- Sektor energetike koristi 10% resursa sektora poljoprivrede, 15% resursa sektora industrije, 10% resursa prometa i 10% vlastitih resursa.
- Sektor industrije koristi 25% resursa sektora poljoprivrede, 35% resursa sektora industrije, 30% resursa prometa i 15% vlastitih resursa.
- Sektor prometa koristi 25% resursa sektora energetike, 40% resursa sektora industrije i 40% vlastitih resursa.

Ukupne prihode sektora označimo redom s x_1, x_2, x_3 i x_4.

a) Koliko iznose ukupni troškovi svakog sektora?

b) Odredite ukupne prihode takve da su troškovi svakog sektora jednaki njegovim prihodima. Možete li komentirati rješenja sustava prije nego ga riješite? Riješite sustav Gauss-Jordanovom metodom.

c) Koliko rješenja ima sustav? Interpretirajte dobiveno rješenje.

d) Neka su ukupni prihodi sektora prometa 100 milijuna eura. Odredite prihode ostalih sektora.

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Osim postavljanja sustava i rješavanja istog koristeći Gauss-Jordanovu metodu učenici će na ovaj način vidjeti primjer iz stvarnog života u kojem se prirodno pojavljaje sustav line-

arnih jednadžbi s beskonačno mnogo rješenja. Učenici za početak trebaju izraziti troškove svakog od sektora i dobivaju da su:

- troškovi poljoprivrede: $0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 + 0.65x_1$,
- troškovi energetike: $0.1x_2 + 0.15x_3 + 0.1x_4 + 0.1x_2$,
- troškovi industrije: $0.25x_1 + 0.35x_2 + 0.3x_4 + 0.15x_3$,
- troškovi prometa: $0.25x_2 + 0.4x_3 + 0.4x_4$.

Kako bi odredili ukupne prihode za koje će troškovi svakog sektora biti jednaki njegovim prihodima učenici zapisuju sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 0.65x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 = x_1 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.15x_3 + 0.1x_4 = x_2 \\ 0.25x_1 + 0.35x_2 + 0.15x_3 + 0.3x_4 = x_3 \\ 0.25x_2 + 0.4x_3 + 0.4x_4 = x_4 \end{cases},$$

čiji je opći zapis:

$$\begin{cases} 0.35x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 - 0.2x_4 = 0 \\ 0.1x_1 - 0.9x_2 + 0.15x_3 + 0.1x_4 = 0 \\ 0.25x_1 + 0.35x_2 - 0.85x_3 + 0.3x_4 = 0 \\ 0.25x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Promatrajući opći zapis sustava učenici mogu prepoznati da je riječ o homogenom sustavu i zaključiti da rješenje sustava sigurno postoji. Budući da sustav trebaju riješiti Gauss-Jordanovom metodom, za početak trebaju zapisati proširenu matricu sustava, a nakon toga dopuštenim elementarnim transformacijama riješiti dobiveni sustav.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0.35 & -0.3 & -0.3 & -0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.9 & 0.15 & 0.1 & 0 \\ 0.25 & 0.35 & -0.85 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.4 & -0.6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0.1 & -0.9 & 0.15 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0.25 & 0.35 & -0.85 & 0.3 & 0 \\ 0.35 & -0.3 & -0.3 & -0.2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & -2.4 & 0 \\ 0.25 & 0.35 & -0.85 & 0.3 & 0 \\ 0.35 & -0.3 & -0.3 & -0.2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & -2.4 & 0 \\ 0 & 10.4 & -4.9 & 0.2 & 0 \\ 0 & \frac{57}{7} & -\frac{33}{14} & -\frac{11}{7} & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 15.9 & -20.6 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & -2.4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1077}{520} & \frac{629}{260} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{359}{190} & \frac{629}{285} & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 15.9 & -20.6 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & -2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1258}{1077} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1258}{1077} & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{728}{359} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{572}{1077} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1258}{1077} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Iz posljednje matrice učenici zaključuju da je rješenje sustava: $x_1 = \frac{728}{359}x_4$, $x_2 = \frac{572}{1077}x_4$ i $x_3 = \frac{1258}{1077}x_4$. Konačno rješenje može se zapisati i u decimalnom obliku (zaokruženo na dvije decimale). Tada je $x_1 = 2.03x_4$, $x_2 = 0.53x_4$ i $x_3 = 1.17x_4$. Odnosno, sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o ukupnim prihodima sektora prometa. Koristeći tu činjenicu učenici će riješiti posljednji dio zadatka. Ako su ukupni sektora prometa 100 milijuna eura tada su prihodi sektora poljoprivrede 203 milijuna eura, sektora energetike 53 milijuna eura, a sektora industrije 117 milijuna eura.

4.2 Aktivnost 2.: *Osna simetrija*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti i opisati svojstva osne simetrije, dokazati da je osna simetrija izometrija te crtati osnosimetrične točke i odrediti njihove koordinate.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

OSNA SIMETRIJA

Neka je u ravnini zadan pravac s. Preslikavanje o koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' takvu da je pravac s simetrala dužine $\overline{TT'}$ naziva se **osna simetrija** s obzirom na pravac s.

Zadatak 1.:

- Zadajte točku A_1 na osi apscisa, točku B_1 u četvrtom kvadrantu i točku C_1 u prvom kvadrantu.
- Konstruirajte točke A_1', B_1' i C_1' koje su osnosimetrične točkama A_1, B_1 i C_1 s obzirom na os apscisa.
- Odredite koordinate točaka A_1, B_1 i C_1 te točaka A_1', B_1' i C_1'. Usporedite ih. Što uočavate?
- Odaberite proizvoljnu točku T u ravnini i njoj osnosimetričnu točku T' s obzirom na os apscisa. Mijenjajte položaj točke T. Vrijedi li i dalje svojstvo koje ste uočili u prethodnom podzadatku? Općenito, vrijedi li to svojstvo za sve točke u ravnini?
- Zapišite osnu simetriju s obzirom na os apscisa pomoću koordinata.

- Konstruirajte dužine $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{A_1C_1}$ te dužine $\overline{A_1'B_1'}$, $\overline{B_1'C_1'}$ i $\overline{A_1'C_1'}$. Odredite duljine tih dužina. Što uočavate? Mijenjate položaj točaka A_1, B_1 i C_1? Vrijedi li i dalje svojstvo koje ste uočili? Dokažite!
- Što je slika trokuta $A_1B_1C_1$ pri toj osnoj simetriji? U kakvom su odnosu trokut $A_1B_1C_1$ i njegova slika? Možete li poopćiti svoj zaključak na bilo koji mnogokut?

Zadatak 2.: Otvorite novi dokument. Zadajte točku A_2 na osi ordinata, točku B_2 u prvom kvadrantu te točku C_2 u drugom kvadrantu. Konstruirajte točke A_2', B_2' i C_2' koje su osnosimetrične točkama A_2, B_2 i C_2 s obzirom na os ordinata. Provedite postupak opisan u prvom zadatku. Dolazite li do istih zaljučaka? Zapišite osnu simetriju s obzirom na os ordinata pomoću koordinata.

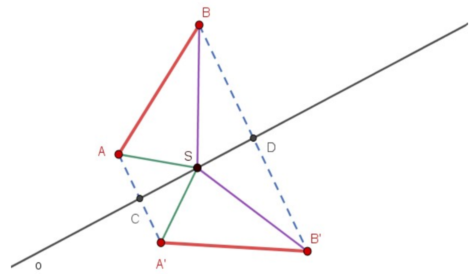
Zadatak 3.: Otvorite novi dokument. Nacrtajte pravac $y = x$. Zadajte točke A_3, B_3 i C_3 koje ne leže na pravcu $y = x$ te konstruirajte točke A_3', B_3' i C_3' koje su osnosimetrične točkama A_3, B_3 i C_3 s obzirom na taj pravac. Provedite postupak opisan u prvom zadatku. Dolazite li do istih zaljučaka? Što taj pravac predstavlja u koordinatnom sustavu. Zapišite osnu simetriju s obzirom na pravac $y = x$ pomoću koordinata.

Zadatak 4.: Otvorite novi dokument. Nacrtajte pravac $y = -x$. Zadajte točke A_4, B_4 i C_4 koje ne leže na pravcu $y = -x$ te konstruirajte točke A_4', B_4' i C_4' koje su osnosimetrične točkama A_4, B_4 i C_4 s obzirom na taj pravac. Provedite postupak opisan u prvom zadatku. Dolazite li do istih zaljučaka? Što taj pravac predstavlja u koordinatnom sustavu. Zapišite osnu simetriju s obzirom na pravac $y = -x$ pomoću koordinata.

Zadatak 5.: Otvorite novi dokument. Nacrtajte kružnicu te ju preslikajte osnom simetrijom s obzirom na os apscisa, os ordinata, pravac $y = x$ i pravac $y = -x$. Mijenjajte položaj kružnice. Što zaključujete?

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Učenici će rješavanjem prvog zadatka uočiti da se osnom simetrijom s obzirom na os apscisa svaka točka $T\,(x, y)$ preslikava se u točku $T'\,(x, -y)$, a ako točka leži na osi apscisa, tj. na osi simetrije, tada se preslikava sama u sebe.
Nadalje, uočit će da se osnom simetrijom s obzirom na bilo koju os simetrije dužina preslikava u dužinu iste duljine, tj. da je osna simetrija izometrija:

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu točku S koja pripada pravcu s. Vrijedi da je $|AC| = |A'C|$ i $\angle SCA = \angle SCA'$, a kako je $\overline{SC}$ zajednička stranica zaključujemo da su trokuti SCA i SCA' sukladni. Iz toga slijedi da je $|SA| = |SA'|$ i $\angle CSA = \angle CSA'$. Analogno, vrijedi da je $|SB| = |SB'|$ i $\angle DSB = \angle DSB'$ jer su trokuti SDB i SDB' sukladni. Sada iz navedenog slijedi zaključak da su trokuti ASB i $A'SB'$ sukladni, tj. vrijedi $|AB| = |A'B'|$. □



Slika 4.1: Osna simetrija je izometrija

Osim toga, zaključit će da se osnom simetrijom trokut preslikava u njemu sukladan trokut, a mnogokut u njemu sukladan mnogokut. Do sasvim analognih zaljučaka dolaze i u ostalim zadacima. U svakom će zadatku promatrati i koordinatni zapis danog preslikavanja pri čemu će zaključiti sljedeće:

- osnom simetrijom s obzirom na os ordinata svaka točka $T(x, y)$ preslikava se u točku $T'(-x, y)$,
- osnom simetrijom s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, tj. s obzirom na pravac $y = x$ svaka točka $T(x, y)$ preslikava se u točku $T'(y, x)$),
- osnom simetrijom s obzirom na simetralu drugog i četvrtog kvadranta, tj. s obzirom na pravac $y = -x$ svaka točka $T(x, y)$ preslikava se u točku $T'(-y, -x)$),

Rješavajući posljednji zadatak učenici zaključuju da osna simetrija preslikava kružnicu u kružnicu istog radijusa.

4.3 Aktivnost 3.: *Centralna simetrija*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti i opisati svojstva centralne simetrije, dokazati da je centralna simetrija izometrija te crtati centralnosimetrične točke i odrediti njihove koordinate.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

CENTRALNA SIMETRIJA

Neka je tadana točke O. Preslikavanje c koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' takvu da je O polovište dužine $\overline{TT'}$ naziva se **centralna simetrija** s obzirom na točku O.

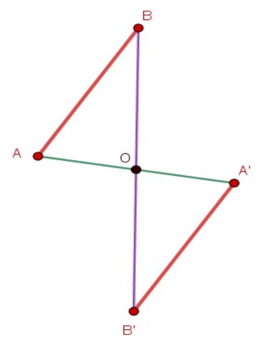
Zadatak 1.:

- Zadajte točku O i točke A, B i C.
- Konstruirajte točke A', B' i C' koje su centralnosimetrične točke točkama A, B i C s obzirom na točku O.
- Odredite duljine dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ te duljine dužina $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ i $\overline{A'C'}$. Mijenjajte položaj točaka A, B i C.Vrijedi li i dalje svojstvo koje ste uočili? Dokažite!
- Što je slika trokuta ABC pri toj centralnoj simetriji? U kakvom su odnosu trokut ABC i njegova slika? Možete li poopćiti svoj zaključak na bilo koji mnogokut?

Zadatak 2.: Otvorite novi dokument. Neka su točke A, B i C proizvoljne točke ravnine. Konstruirajte točke A', B' i C' koje su centralnosimetrične točke točkama A, B i C s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Mijenjajte položaj točaka A, B i C te usporedite njihove koordinate s koordinatama točaka A', B' i C'. Što uočavate? Zapišite centralnu simetriju s obzirom na ishodište koordinatnog sustava pomoću koordinata.

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Učenici će rješavanjem prvog zadatka uočiti da se centralnom simetrijom dužina preslikava u njoj paralelnu dužinu iste duljine, tj. da je centralna simetrija izometrija:

Dokaz. Vrijedi da je $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$ i $\angle AOB = \angle A'OB'$. Iz toga zaključujemo da su trokuti AOB i $A'OB'$ sukladni pa slijedi da je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Također, slijedi i da je $\angle ABO = \angle A'B'O$ pa su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ međusobno paralelne. □



Slika 4.2: Centralna simetrija je izometrija

Osim toga, zaključit će da se centralnom simetrijom trokut preslikava u njemu sukladan trokut, a mnogokut u njemu sukladan mnogokut. Rješavajući drugi zadatak uočit će da se centralnom simetrijom s obzirom na ishodište svaka točka $T(x, y)$ preslikava u točku $T'(-x, -y)$.

4.4 Aktivnost 4.: *Translacija*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti i opisati svojstva translacije, dokazati da je translacija izometrija i odrediti koordinate translatiranih točaka.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

TRANSLACIJA

Neka je u ravnini zadan $\vec{a}$. Preslikavanje t koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' sa svojstvom da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ naziva se **translacija** za vektor $\vec{a}$.

Zadatak 1.:

- Nacrtajte točke A i B te zadajte vektor $\overrightarrow{UV}$. Konstruirajte točke A' i B' koje nastaju translacijom točaka A i B za vektor $\overrightarrow{UV}$.
- Odredite duljinu dužine $\overline{AB}$ i duljinu dužine $\overline{A'B'}$. Što uočavate? Mijenjajte položaj točaka A i B. Vrijedi li i dalje svojstvo koje ste uočili? Dokažite!

Zadatak 2.: Otvorite novi dokument. Definirajte točke $U(0,0)$ i $V(0,3)$. Neka su točke A i B proizvoljne točke ravnine. Konstruirajte točke A' i B' koje su nastale translacijom točka A i B za vektor $\overrightarrow{UV}$. Mijenjajte vektor translacije i položaj točaka A i B te usporedite njihove koordinate s koordinatama točaka A' i B'. Što uočavate? Zapišite translaciju pomoću koordinata.

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.

Učenici će uočiti da se dužina $\overline{AB}$ translacijom za vektor $\overrightarrow{UV}$ preslikava u dužinu $\overline{A'B'}$ pri čemu su te dužine jednakih duljina. Općenito, zaključit će da se dužina preslikava u njoj paralelnu dužinu te će dokazati da je translacija izometrija:

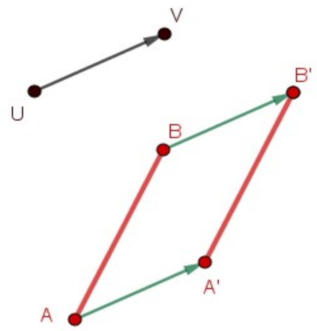
Dokaz. Vrijedi da je $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ i $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{0}$ iz čega slijedi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{B'A'} - \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Odnosno, slijedi da je $|AB| = |A'B'|$. □



Slika 4.3: Translacija je izometrija

Rješavajući drugi zadatak učenici će zaključiti da se translacijom za vektor $\overrightarrow{UV}$ svaka točka $T\,(x, y)$ preslikava u točku $T'\,(x + x_V - x_U, y + y_V - y_U)$.

4.5 Aktivnost 5.: *Rotacija*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti i opisati svojstva rotacije te dokazati da je rotacija izometrija.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

ROTACIJA

Neka je u ravnini zadana točka O i kut veličine α. Preslikavanje r koje svakoj točki T ravnine pridružuje točku T' takvu da je $\angle TOT' = \alpha$ i $|OT| = |OT'|$ naziva se **rotacija** oko točke O za kut α. Točka O naziva se središte (centar) rotacije, a kut α kut rotacije.

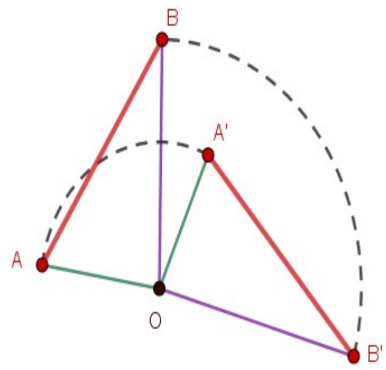
Zadatak:

- Nacrtajte točke A i B te zadajte centar rotacije O i kut rotacije α. Konstruirajte točke A' i B' koje nastaju rotacijom točaka A i B oko točke O za kut α.
- Odredite duljinu dužine $\overline{AB}$ i duljinu dužine $\overline{A'B'}$. Što uočavate? Vrijedi li isto svojstvo ako mijenjate položaj točaka A i B? Dokažite!
- Vrijede li ista svojstva ako radite rotaciju u suprotnom smjeru? A ako mijenjate veličinu kuta α?

Uputa: Kako rotirati u *GeoGebri*?
U skupini alata *Transformacijski alati* odaberite alat *Rotacija oko točke*. Rotaciju vršite odabirom objekta kojega želite rotirati i odabirom točke oko koje vršite rotaciju. U dijaloški okvir upisujete veličinu kuta.

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Učenici će uočiti da se dužina $\overline{AB}$ rotacijom oko točke O za kut α preslikava u dužinu $\overline{A'B'}$ pri čemu su te dužine jednakih duljina. Općenito, zaključit će da se dužina preslikava u dužinu te će dokazati da je rotacija izometrija:

Dokaz. Vrijedi da je $|OA| = |OA'|$, $|OB| = |OB'|$ i $\angle AOB = \alpha - \angle BOA' = \angle A'OB'$. Iz toga zaključujemo da su trokuti AOB i $A'OB'$ sukladni i slijedi da je $|AB| = |A'B'|$ □



Slika 4.4: Rotacija je izometrija

4.6 Aktivnost 6.: *Kompozicija osnih simetrija*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti što sve može biti kompozicija dvije osne simetrije.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

KOMPOZICIJA OSNIH SIMETRIJA

1.dio:

- Nacrtajte trokut ABC i pravac p koji ne siječe stranice tog trokuta.
- Konstruirajte trokut $A'B'C'$ koji je osnosimetričan trokutu ABC s obzirom na pravac p.
- Nacrtajte pravac q koji je paralelan s pravcem p tako da trokut $A'B'C'$ leži između ta dva pravca.
- Konstruirajte trokut $A''B''C''$ koji je osnosimetričan trokutu $A'B'C'$ s obzirom na pravac q.
- Odredite duljine dužina $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ i $\overline{CC''}$ te udaljenost između pravaca p i q. Postoji li veza između te dvije duljine?
- Postoji li izometrija koja preslikava trokut ABC u trokut $A''B''C''$?
- Što je kompozicija dvije osne simetrije kojima su osi paralelne?

2.dio:

- Otvorite novi dokument i nacrtajte trokut ABC te pravac p koji ne siječe stranice tog trokuta.
- Konstruirajte trokut $A'B'C'$ koji je osnosimetričan trokutu ABC s obzirom na pravac p.

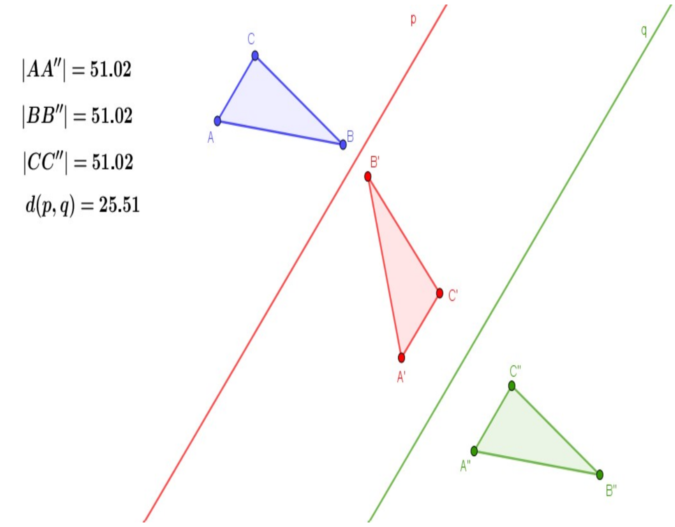
- Nacrtajte pravac q koji je okomit na pravac p. Točku presjeka označite s O.
- Konstruirajte trokut $A''B''C''$ koji je osnosimetričan trokutu $A'B'C'$ s obzirom na pravac q.
- Konstruirajte dužine $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ i $\overline{CC''}$. Što uočavate?
- Odredite duljine dužina $\overline{AO}$ i $\overline{OA'}$ i usporedite ih s duljinom dužine $\overline{AA''}$. Što uočavate? Provjerite svoj zaključak i s točkama B,B'' te C,C''.
- Postoji li izometrija koja preslikava trokut ABC u trokut $A''B''C''$?
- Što je kompozicija dvije osne simetrije kojima su osi okomite?

3.dio:

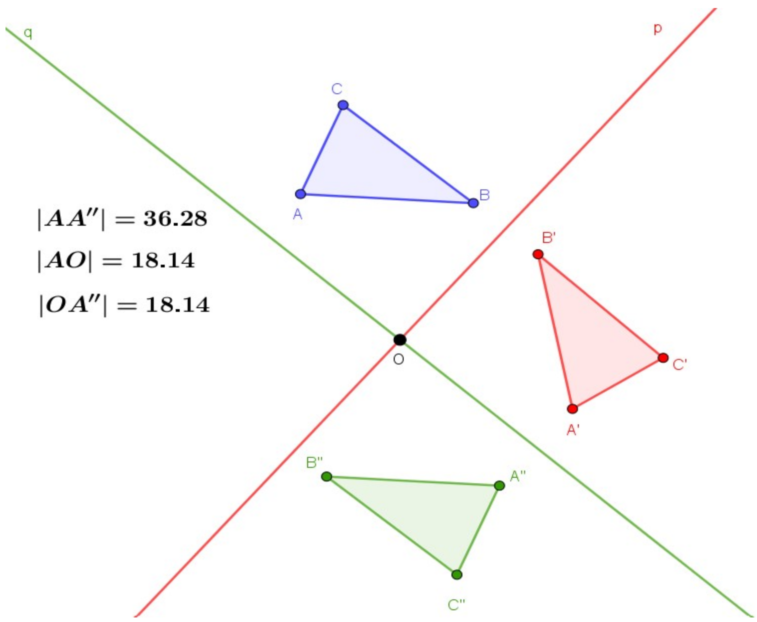
- Otvorite novi dokument i nacrtajte trokut ABC te pravac p koji ne siječe stranice tog trokuta.
- Konstruirajte trokut $A'B'C'$ koji je osnosimetričan trokutu ABC s obzirom na pravac p.
- Nacrtajte pravac q koji nije okomit niti paralelan s pravcem p. Točku presjeka označite s O.
- Konstruirajte trokut $A''B''C''$ koji je osnosimetričan trokutu $A'B'C'$ s obzirom na pravac q.
- Odredite mjeru kuta $\angle A'OA$,$\angle A''OA'$ i $\angle A''OA$. Mijenjajte položaj točke A. Što uočavate?
- Postoji li izometrija koja preslikava trokut ABC u trokut $A''B''C''$?
- Što je kompozicija dvije osne simetrije kojima se osi sijeku?

Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Učenici će rješavanjem prvog dijela nastavnog listića uočiti da je kompozicija dvije osne simetrije kojima su osi paralelne translacija za vektor čija je duljina jednaka dvostrukoj udaljenosti osi simetrija tih osnih simetrija. Rješavajući drugi dio nastavnog listića učenici će uočiti da je kompozicija dvije osne simetrije kojima su osi okomite centralna simetrija

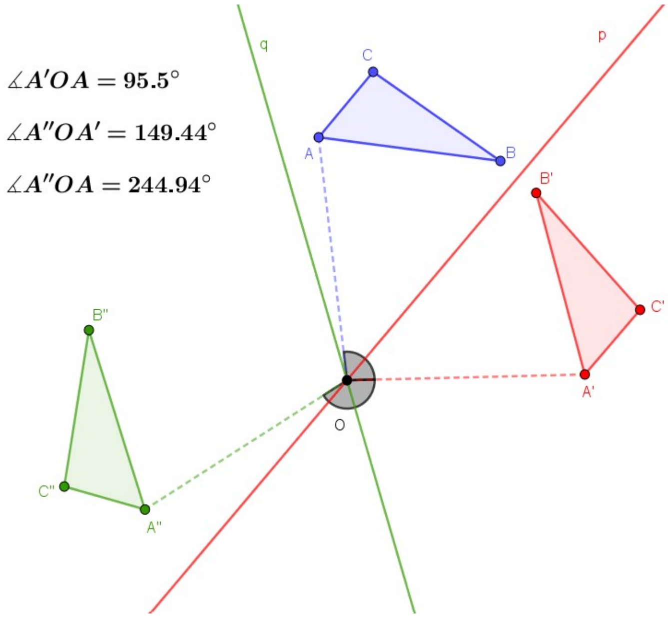
čije je središte u točki u kojima se osi sijeku. U trećem dijelu nastavnog listića učenici će uočiti da je kompozicija dvije osne simetrije kojima se osi sijeku rotacija.



Slika 4.5: Kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi paralelne je translacija



Slika 4.6: Kompozicija dviju osnih simetrija kojima su osi okomite je centralna simetrija



Slika 4.7: Kompozicija dviju osnih simetrija kojima se osi sijeku je rotacija

4.7 Aktivnost 7.: *Matrični prikaz homotetije*

Cilj aktivnosti: učenici će koristeći tehnologiju istražiti utjecaj pojedinih koeficijenata matričnog prikaza homotetije.

Nastavni oblik: individualni rad.

Nastavna metoda: problemska nastava.

Potreban materijal: nastavni listić, program dinamične geometrije *GeoGebra*.

Nastavni listić:

MATRIČNI PRIKAZ HOMOTETIJE

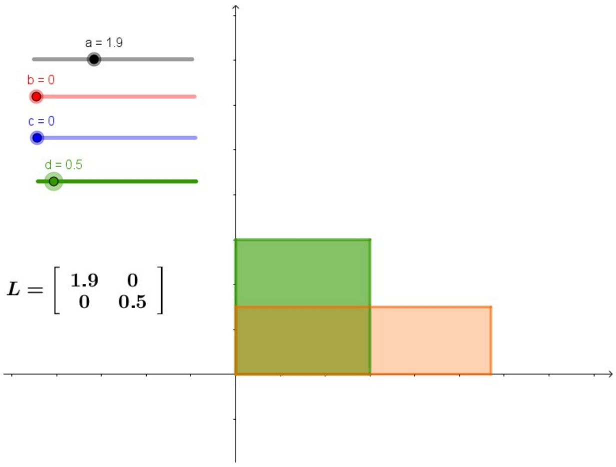
Zadatak 1.:

- Definirajte klizače a, b, c i d koji će predstavljati koeficijente linearnog preslikavanja. Vrijednosti tih klizača neka se nalaze u intervalu $[0, 5]$.
- Definirajte matricu $L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ čiji su elementi gore definirani klizači koja predstavlja matricu nekog linearnog preslikavanja f.
- Nacrtajte proizvoljan kvadrat kojemu je jedan vrh u ishodištu koordinatnog sustava.
- Odredite sliku kvadrata pri preslikavanju f.

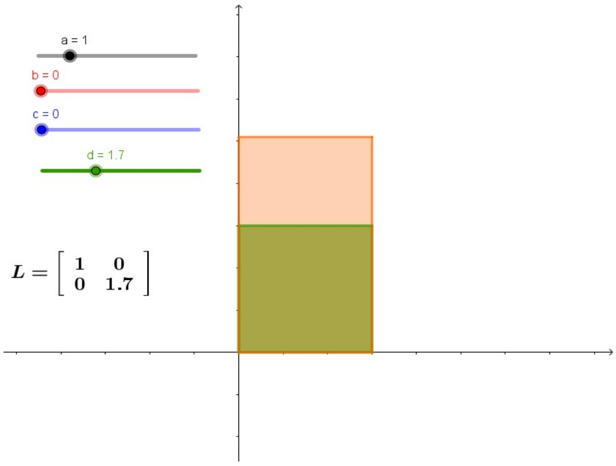
Zadatak 2.:

- Neka je $b = c = 0$ i $d = 1$. Mijenjajte vrijednost koeficijenta a. Što uočavate? Kako nazivamo takvo preslikavanje? Koje svojstvo ima to preslikavanje?
- Neka je $b = c = 0$ i $a = 1$. Mijenjajte vrijednost koeficijenta d. Što uočavate? Kako nazivamo takvo preslikavanje? Koje svojstvo ima to preslikavanje?
- O kojem je preslikavanju riječ ako je $b = c = 0$, a vrijednosti koeficijenata a i d mijenjamo?
- O kojem je preslikavanju riječ ako je $b = c = 0$ i $a = d = 1$?

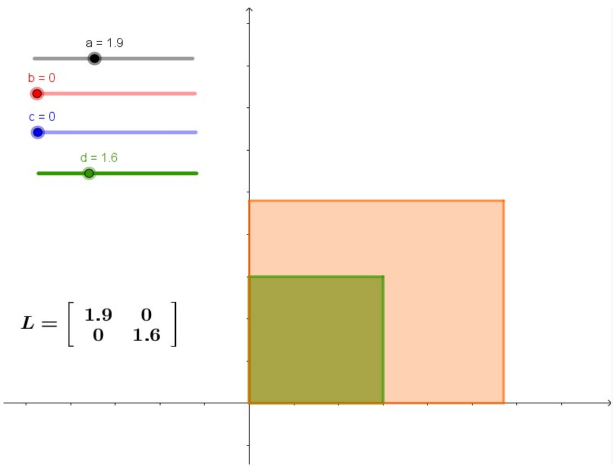
Detaljan tijek aktivnosti:
Nastavnik svakome od učenika dijeli nastavni listić sa zadacima. Učenici samostalno rješavaju dane zadatke, a potom diskutiraju rješenja s nastavnikom.
Učenici će za početak definirati četiri klizača a,b,c i d koji predstavljaju koeficijente linearnog preslikavanja te matricu L čiji su elementi definirani klizači. Tako definirana matrica predstavljat će matricu linearnog preslikavanja f.
Kako bi riješili dane zadatke učenici se za početak trebaju sjetiti da linearno preslikavanje svakoj točki (x, y) pridružuje točku $(ax + bx, cx + dy)$. Na temelju toga određuju sliku kvadrata, tj. dovoljno je da preslikaju svaki vrh kvadrata pomnoživši ga matricom L.
Vrijednosti koeficijenata b i c u drugom zadatku su fiksne, tj. $b = c = 0$. Mijenjanjem vrijednosti koeficijenta a, pri čemu je $d = 1$, učenici će uočiti da to preslikavanje rasteže/steže svaki vektor u smjeru x-osi dok vektore u smjeru y-osi ostavlja nepromijenjenima. Zapravo je riječ o homotetiji duž x-osi. Analogno, mijenjanjem vrijednosti koeficijenta d, pri čemu je $a = 1$ učenici uočavaju da je riječ o homotetiji duž y-osi koja ima svojstvo da vektori u smjeru x-osi ostaju nepromijenjeni, a vektori u smjeru y-osi se rastežu/stežu. Istovremenim mijenjanjem vrijednosti koeficijenta a i d dolazi do homotetije duž koordinatnih osi, a ako je $a = d = 1$ riječ je o identičnom preslikavanju.



Slika 4.8: Homotetija duž x osi



Slika 4.9: Homotetija duž *y* osi



Slika 4.10: Homotetija duž koordinatnih osi

Bibliografija

[1] Z. Šikić, V. D. Žitko, I. G. Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 5, 2. svezak: udžbenik za peti razred osnovne škole*, Profil Klett, 2020.

[2] Z. Šikić, V. D. Žitko, I. G. Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 7, 1. svezak: udžbenik za sedmi razred osnovne škole*, Profil Klett, 2020.

[3] Z. Šikić, V. D. Žitko, I. G. Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Milić, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 8, 2. svezak: udžbenik za osmi razred osnovne škole*, Profil Klett, 2020.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, 2. dio: udžbenik i zbirka zadataka za 1.razred gimnazije*, Element, 2008.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1: dodatak za 1.razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, 2009.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, 2. dio: udžbenik i zbirka zadataka za 2.razred gimnazije*, Element, 2008.

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3: dodatak za 3.razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, 2009.

[8] `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10728_Preslikavanja_prostora.html`, zadnji pristup 23. rujna 2021.

[9] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2: udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje*, Školska knjiga, 2020.

[10] Š. Šuljić, *GeoGebra 3.2 - više algebre: Matrice i determinante*, MiŠ (2008/2009), br. 49, 178-184.

[11] D. C. Lay, S. R. Lay, J. J: McDonald, *Linear Algebra and its Application*, Pearson, 2015.

[12] N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec, *Matematika 3, 2.dio: udžbenik za 3.razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, 2008.

[13] J. Anić et al. *1. vježbenica: Geometrija 1 i Geometrija 2*, XV. gimnazija, 2016., `https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/1_vjezbenica_USB.pdf`, zadnji pristup 23. rujna 2021.

[14] J. Anić et al. *2. vježbenica: Matrice i vektori, modeliranje, statistika i vjerojatnost*, XV. gimnazija, 2016., `https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/3_vjezbenica_USB.pdf`, zadnji pristup 23. rujna 2021.

[15] `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`, zadnji pristup 23. rujna 2021.

Sažetak

U ovom diplomskom radu spominju se geometrijska preslikavanja s kojima se učenici susreću u osnovnoj i srednjoj školi, ali i pojam matrice koji se uvodi u gimnazijski program. Iako se matrice unutar matematike najčešće povezuju sa sustavima linearnih jednadžbi, u ovom se radu spominje i veza s geometrijskim preslikavanjima. Iz tog su razloga u ovom radu opisane aktivnosti kroz koje učenici, osim istraživanja svojstva geometrijskih preslikavanja, otkrivaju i njihov matrični prikaz.
Rad je podijeljen u četiri glavna poglavlja: Geometrijska preslikavanja, Matrice, Veza geometrijskih preslikavanja i matrica te Aktivnosti.

Summary

The focus of this master's thesis are geometric transformations which students learn both in primary and secondary school. Additionaly, the notion of matrices, which are being introduced to the curriculum of the gymnasium, is another focus of the thesis. The matrices are mostly associated with systems of linear equations, however in this thesis the connection with geometric transformations is more emphasized. For this reason, the described activities enable students to research the properties of geometric transformations and their matrix representation.
The thesis is divided into four chapters: Geometric transformations, Matrices, The link between geometric transformations and matrices and Students' activities.

Životopis

Rođena sam 30.04.1994. u Varaždinu. Odrasla sam u Vrbnu, gdje 2001. godine upisujem Područnu školu Josipa Jedvaja, a nakon završetka obrazovanje nastavljam u općoj gimnaziji u Srednjoj školi Ivanec. 2013. godine započinjem fakultetsko obrazovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.