

# Dinamika kompleksnih analitičkih funkcija

---

**Božić, Dubravka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2013**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:060676>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-07**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dubravka Božić

**DINAMIKA KOMPLEKSNIH**  
**ANALITIČKIH FUNKCIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc. Sonja Štimac

Zagreb, 2013.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Elementarni pojmovi</b>	<b>3</b>
1.1 Analitičke funkcije . . . . .	3
1.2 Dinamika . . . . .	6
1.3 Riemannova sfera . . . . .	11
<b>2 Kvadratna familija</b>	<b>13</b>
<b>3 Normalna familija i točke izuzetka</b>	<b>19</b>
<b>4 Periodičke točke</b>	<b>23</b>
<b>5 Juliaov skup</b>	<b>29</b>
<b>6 Geometrija Juliaovih skupova</b>	<b>35</b>
<b>7 Neutralne periodičke točke</b>	<b>43</b>
7.1 Racionalne neutralne fiksne točke . . . . .	43
7.2 Iracionalne neutralne fiksne točke . . . . .	49
<b>8 Mandelbrotov skup</b>	<b>55</b>
<b>Slike</b>	<b>66</b>
<b>Zahvale</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>69</b>
<b>Sažetak</b>	<b>74</b>

**Summary**

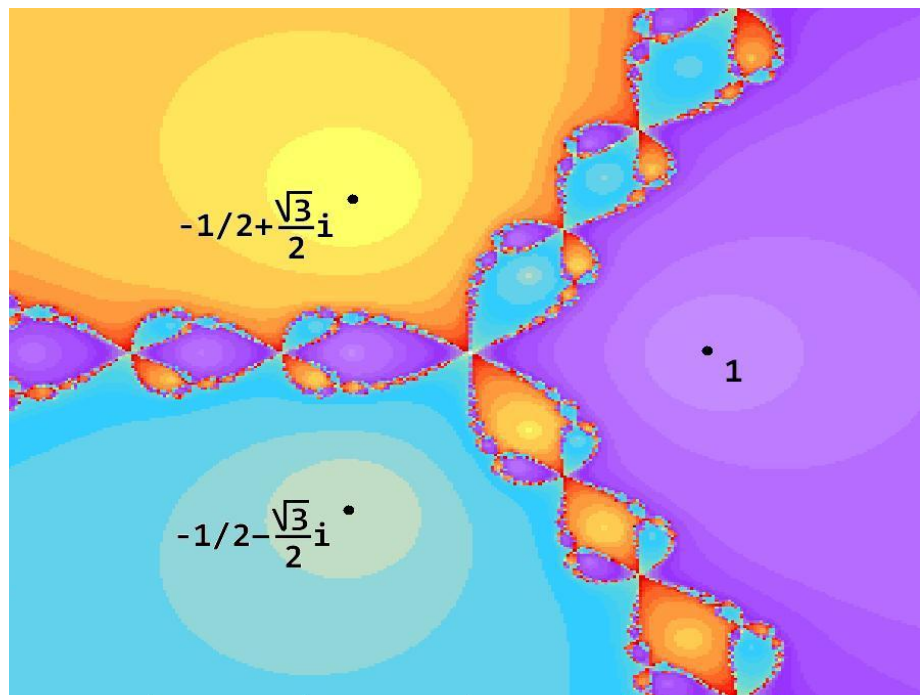
**76**

**Životopis**

**77**

# Uvod

Kompleksna dinamika bavi se iteracijama funkcija koje kompleksnu ravninu preslikavaju na samu sebe. Općenito je dinamika takvih funkcija teška i komplicirana. Čak i iteracije jednostavnih funkcija, naprimjer polinoma, daju fascinantne i zanimljive rezultate.



Slika 0.1: Bazeni atrakcije za korijene jednadžbe  $z^3 - 1 = 0$

Iteracijama kompleksnih funkcija prvi se bavio engleski matematičar Arthur Cayley. On je, 1879. godine (vidi [19], [20] i [7]) Newtonovom metodom odredio bazene atrakcije nul točaka polinoma  $F(z) = z^2 - 1$ . No, nije uspio riješiti isti problem za funkciju  $F(z) = z^3 - 1$ .

Francuski matematičar i astronom, Pierre Fatou, 1906. godine, opisuje dinamiku funkcije  $F(z) = (z + z^2)/2$  (vidi [18], [30]). Gotovo istovremeno, još jedan francuski matematičar, Gaston Julia, piše iscrpan rad na temu iteracija racionalnih funkcija. Za taj je rad ([23]) 1918. godine dobio nagradu "Grand Prix des Sciences mathématiques", Pariške akademije znanosti ([29]).

Unatoč velikom početnom interesu radovi ove dvojice matematičara ubrzo su zaboravljeni. Tek 1970. godine, Benoît Mandelbrot postavlja temelje nove grane matematike, fraktalne geometrije (u [24]), i iznova popularizira već zaboravljenu tematiku Juliaovih, a time i Fatouovih radova.

Razvoj računalne grafike u mnogome je utjecao na daljnja, intenzivna istraživanja u ovom području. Upravo su slike Juliaovih i Mandelbrotovog skupa postale sinonim moderne matematike, te izazvale velik interes ne samo matematičara nego i šire javnosti.

Cijela se plejada znanstvenika nastavila baviti raznim problemima iz ovog područja. Tako su naprimjer Adrien Douady i John Hamal Hubbard razvili posebnu teoriju ([16]) kako bi dokazali da je Mandelbrotov skup povezan. Michal Misiurewicz je 1981. godine rješio problem kojeg je postavio još Fatou - pokazao je da je Juliaov skup funkcije  $E(z) = e^z$  jednak cijeloj kompleksnoj ravnini.

Spomenimo još neke poznate matematičare koji su danas u samome vrhu: John Milnor ([25]), Dennis Sullivan, Jean-Christophe Yoccoz, Paul Blanchard ([3]), Mitsuhiro Shishikura, Xavier Buff ([6]), Saeed Zakeri ([33]). I mnogi drugi.

Ovaj se rad zasniva na zadnjem poglavlju knjige iz nelinearnih dinamičkih sustava Roberta Devaneyja ([14]).

Uz dužnu pažnju koju ćemo posvetiti vizualnom predstavljanju iteriranih funkcija, ovdje ćemo se ponajprije baviti dinamikom koja stoji u pozadini ovih prekrasnih grafova, a koja je često i ljepša od samih grafova.

# Poglavlje 1

## Elementarni pojmovi

### 1.1 Analitičke funkcije

U ovome će nas radu zanimati ponašanje niza iteracija neke funkcije  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , neke točke  $z \in \mathbb{C}$ , tj. zanimati će nas niz

$$z, F(z), (F \circ F)(z), \dots, \underbrace{(F \circ F \cdots \circ F)(z)}_{n \text{ puta}}, \dots$$

pri povećanju broja  $n$ . Općenito,  $F$  može biti bilo kakva funkcija. No, ovdje se posebno bavimo iteracijama kompleksnih analitičkih funkcija.

Radi jednostavnije notacije kompoziciju od  $n$  funkcija označiti ćemo sa

$$F^n = F \circ F^{n-1} = \underbrace{(F \circ F \cdots \circ F)}_{n \text{ puta}}, \quad n \geq 2.$$

Definirajmo, najprije, kompleksnu analitičku funkciju:

**Definicija 1.1.** ([28], str. 198) *Neka je  $U \subseteq \mathbb{C}$  otvoren, neprazan skup i neka je  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Ako je  $z_0 \in U$  i ako*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

*postoji, označavamo ga sa  $F'(z_0)$  i nazivamo derivacijom funkcije  $F$  u točki  $z_0$ . Ako  $F'(z_0)$  postoji u svakoj točki  $z_0 \in U$  tada kažemo da je funkcija  $F$  analitička (holomorfna) na  $U$ .*

**Propozicija 1.2.** *Neka je  $F$  analitička u točki  $z_0$ . Tada postoji  $r > 0$  takav da je*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

*za  $|z - z_0| < r$ .*



Dakle, svaku analitičku funkciju možemo, barem lokalno, razviti u red potencija. Osim polinoma, racionalne funkcije oblika  $P(z)/Q(z)$ , gdje su  $P$  i  $Q$  polinomi sa kompleksnim koeficijentima, također su analitičke funkcije na svojoj domeni. Funkcije analitičke u svakoj točki kompleksne ravnine nazivamo *cijele funkcije*. Takve su, naprimjer, kompleksna eksponencijalna funkcija te sinus i kosinus.

Umjesto posve precizne definicije jednostavno povezanog skupa usvojiti ćemo sljedeću nestandardnu definiciju, ali dovoljnu za naše potrebe.

**Definicija 1.3.** *Neka je  $U$  otvoren skup u  $\mathbb{C}$ , i neka je  $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ . Kažemo da je  $U$  jednostavno povezan skup ako je ili  $U = \mathbb{C}$ , ili ako postoji analitička funkcija  $F : D \rightarrow U$  koja je bijekcija.*

**Primjer 1.4.** *Svaka poluravnina oblika  $\operatorname{Re}(z) > a$ , ili  $\operatorname{Im}(z) > a$  je jednostavno povezan skup. Zaista, funkcija*

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

*preslikava skup  $D$  na desnu poluravninu  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Dok naprimjer funkcija*

$$G(z) = \frac{(1+z)i}{1-z}$$

*preslikava skup  $D$  na poluravninu  $\operatorname{Im}(z) > 0$ .*

Spomenimo sada neka osnovna svojstva analitičkih funkcija.

**Propozicija 1.5.** *Neka je  $U \subset \mathbb{C}$  otvoren i  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitička funkcija.*

*Tada vrijedi:*

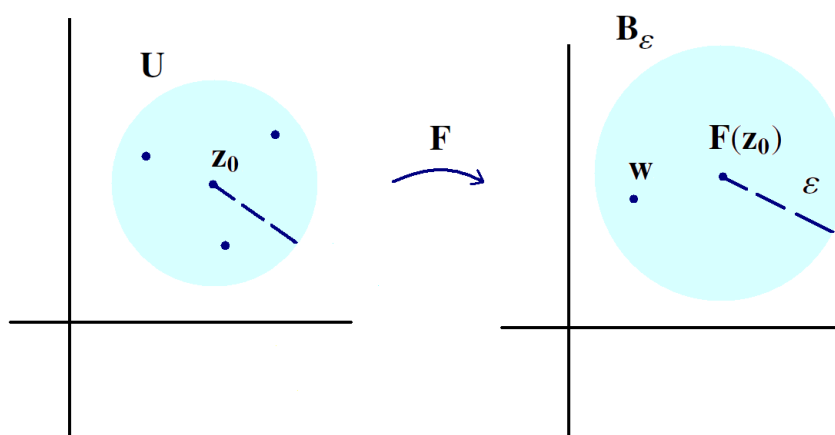
1.  *$n$ -ta derivacija funkcije  $F$ ,  $F^{(n)} : U \rightarrow \mathbb{C}$  je analitička funkcija.*
2.  *$F(U)$  je otvoren skup u  $\mathbb{C}$ , uz uvjet da  $F$  nije konstantna funkcija.*
3. *(Princip maksimuma modula) Neka je  $\bar{U}$  omeđen skup i  $F$  funkcija različita od konstante. Tada  $|F(z)|$  poprima maksimum samo u nekoj točki ruba  $\partial\bar{U} = \bar{U} \setminus \operatorname{Int}\bar{U}$ .*

Sljedeći teorem govori o lokalnoj egzistenciji analitičkog inverza.

**Teorem 1.6. (Teorem o lokalnoj invertibilnosti analitičke funkcije)** *Neka je funkcija  $F$  analitička u točki  $z_0$  i neka je  $F'(z_0) \neq 0$ . Tada postoje otvoreni skupovi  $U$  oko  $z_0$  i  $V$  oko  $F(z_0)$  takvi da je  $F : U \rightarrow V$  bijekcija čiji je inverz analitička funkcija na  $V$ .*

Od velike važnosti biti će nam i ponašanje analitičkih funkcija u blizini kritične točke.

**Propozicija 1.7.** *Neka je  $F$  analitička funkcija takva da je  $F^{(j)}(z_0) = 0$  za  $1 \leq j < n$  i  $F^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Tada postoji  $\epsilon > 0$  i okolina  $U$  oko točke  $z_0$  takva da ako je  $0 < |w - F(z_0)| < \epsilon$ , onda postoji točno  $n$  rješenja jednadžbe  $F(z) = w$  unutar okoline  $U$ .*



Slika 1.1: Nul točke funkcije  $F$  unutar okoline  $U$

Objasnit ćemo sadržaj ove propozicije geometrijski. Označimo krug radijusa  $\epsilon$  oko  $F(z_0)$  sa  $B_\epsilon(F(z_0))$ . Neka je  $\gamma$  zraka koja spaja  $F(z_0)$  sa rubom kruga  $B_\epsilon$ . Tada različite praslike zrake  $\gamma$  dijele okolinu  $U$  na  $n$  dijelova. Funkcija  $F$  preslikava interior svakog dijela homeomorfno na  $B_\epsilon - \gamma$ . Naprimjer, pogledajmo funkciju  $F(z) = z^n$ , za  $n \geq 2$ . Ona preslikava kut  $\frac{2\pi}{n}$  s vrhom u 0, na cijelu kompleksnu ravninu  $\mathbb{C}$ , tj. ravninu "namota"  $n$  puta oko ishodišta. Osim 0 sve su ostale točke kompleksne ravnine slike od po točno  $n$  različitih točaka,  $n$  različitih  $n$ -tih korijena. Drugim riječima, jednadžba  $F(z) = 0$  ima jedinstveno rješenje, ali jednadžba  $F(z) = w$ , za  $w \neq 0$  ima točno  $n$  rješenja odnosno  $n$   $n$ -tih korijena iz  $w$ . Ovaj lijepi primjer može se naći u [32] str. 165.

**Teorem 1.8. (Teorem o analitičkom izomorfizmu)** *Neka je  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitička i injektivna funkcija. Tada je  $F'(z) \neq 0$  za svako  $z \in U$  i inverz funkcije  $F$  je analitička funkcija.*

**Teorem 1.9. (Teorem o Riemannovom preslikavanju)** *Neka je  $U$  otvoren, jednostavno povezan skup, podskup skupa  $\mathbb{C}$  takav da je  $U \neq \mathbb{C}$ . Tada postoji analitička bijekcija  $\phi$  sa  $U$  na otvoreni jedinični krug  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ . Preslikavanje  $\phi$  nazivamo Riemannovo preslikavanje.*

Teorem o Riemannovom preslikavanju omogućuje nam da dinamiku sa otvorenog, jednostavno povezanog skupa prenesemo na otvoreni jedinični krug, a većina značajnih rezultata kompleksne analize upravo počinje definiranjem preslikavanja na skupu  $D$ . Naprimjer, imamo:

**Teorem 1.10. (Schwarzova lema)** *Neka je  $F$  analitička funkcija na otvorenom jediničnom krugu  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , te neka je  $F(0) = 0$  i  $|F(z)| \leq 1, \forall z \in D$ . Tada vrijedi  $|F(z)| \leq |z|, \forall z \in D$  i  $|F'(0)| \leq 1$ . Ako je  $|F(z)| = |z|$  za neku točku  $z \neq 0$  ili ako je  $|F'(0)| = 1$  onda je  $F(z) = ze^{i\theta}$ .*

Jedna jednostavna posljedica ove leme (vidi [31]) je jedinstvenost Riemannovog preslikavanja  $\phi$  iz teorema 1.9, u sljedećem smislu. Naime, ako je  $z_0 \in U$ , gdje je  $U$  otvoren, jednostavno povezan skup, podskup skupa  $\mathbb{C}$  i  $U \neq \mathbb{C}$ , te ako je  $\varphi$  proizvoljno zadan kut, onda postoji jedinstveno preslikavanje  $\phi$  kao u teoremu 1.9 takvo da je  $\phi(z_0) = 0$  i takvo da je argument od  $\phi'(z_0)$  jednak kutu  $\varphi$ .

Sljedeći korolar korisna je verzija Schwarzove leme.

**Korolar 1.11.** *Neka je  $U$  otvoreni, jednostavno povezan podskup skupa  $\mathbb{C}$  i  $U \neq \mathbb{C}$ , te neka je  $F: U \rightarrow U$  analitička funkcija. Ako  $F$  ima fiksnu točku  $z_0 \in U$  tada vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

1.  $|F'(z_0)| < 1$  i  $F^n(z) \rightarrow z_0, \forall z \in U$  ili
2.  $F'(z_0) = e^{i\theta}$  i  $F$  je analitički konjugirana rotaciji na otvorenom jediničnom krugu po konjugaciji  $e^{i\theta}$ .

**Napomena 1.12.** *Neka je  $F(z) = az$ , i neka je  $|a| > 1$ . Funkcija  $F$  je translacija pa zbog toga ne vrijedi tvrdnja 2. Kako je  $F'(z) = a$  ne vrijedi niti tvrdnja 1. Zbog toga moramo isključiti slučaj kada je  $U = \mathbb{C}$ .*

## 1.2 Dinamika

Izdvojimo sada osnovne činjenice iz teorije diskretnih dinamičkih sustava sa kojima ćemo se nadalje stalno susretati. Već smo spominjali niz iteracija  $z, F(z), F^2(z), \dots$  funkcije  $F$  u točki  $z \in \mathbb{C}$ . Sada ćemo preciznije objasniti što nas zapravo zanima.

**Definicija 1.13.** Neka su  $U$  i  $V$  otvoreni skupovi u  $\mathbb{C}$ . Za funkciju  $F : U \rightarrow V$  kažemo da je homeomorfizam ako je  $F$  neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidna funkcija.

**Definicija 1.14.** Prednja orbita (engl. the forward orbit) točke  $z$  je skup  $\{z, F(z), F^2(z), \dots\}$  koji označavamo sa  $O^+(z)$ . Ako je  $f$  homeomorfizam tada definiramo punu orbitu (engl. the full orbit) od  $z$ , u oznaci  $O(z)$ , kao skup  $\{F^n(z), n \in \mathbb{Z}\}$ . Stražnja orbita (engl. the backward orbit),  $O^-(z)$ , točke  $z$  je skup  $\{z, F^{-1}(z), F^{-2}(z), \dots\}$ .

Cilj nam je razumjeti sve orbite nekog preslikavanja. No, već i za jednostavne funkcije prednje orbite nekih točaka mogu biti komplicirani skupovi. Zato proučavamo orbite samo onih točaka koje imaju centralnu ulogu u dinamici kompleksnih analitičkih funkcija.

**Definicija 1.15.** Neka je  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Točka  $z$  je fiksna točka funkcije  $F$  ako je  $F(z) = z$ . Točka  $z$  je periodička točka perioda  $n$ , funkcije  $F$  ako je  $F^n(z) = z$ . Najmanji pozitivni  $n$  za kojega je  $F^n(z) = z$  nazivamo osnovnim periodom od  $z$ .

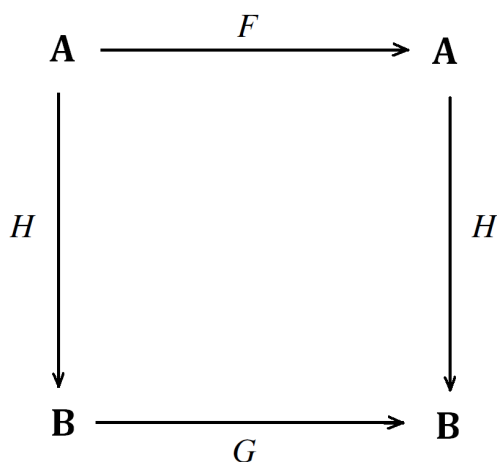
Skup periodičkih točaka, perioda  $n$ , ne nužno osnovnog, označit ćemo sa  $Per(F)$ , a skup svih fiksnih točaka sa  $Fix(F)$ . Očito je  $Fix(F) \subseteq Per_n(F)$ .

**Definicija 1.16.** Neka je  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Fiksna točka  $z_0$  je:

1. privlačna ako je  $0 < |F'(z_0)| < 1$ ;
2. super privlačna ako je  $F'(z_0) = 0$ ;
3. odbojna ako je  $|F'(z_0)| > 1$ ;
4. neutralna ili indiferentna ako je  $|F'(z_0)| = |e^{2\pi i\theta}| = 1$ . Ako je  $\theta$  racionalan broj kažemo da je  $z_0$  racionalna neutralna, odnosno parabolička fiksna točka. Ako je  $\theta$  iracionalan broj kažemo da je  $z_0$  iracionalna neutralna fiksna točka.

**Definicija 1.17.** Neka su  $F : A \rightarrow A$  i  $G : B \rightarrow B$  dva preslikavanja. Kažemo da su  $F$  i  $G$  topološki konjugirana preslikavanja ako postoji homeomorfizam  $H : A \rightarrow B$  takav da je  $H \circ F = G \circ H$ , tj. ako dijagram na slici 1.2 komutira. Homeomorfizam  $H$  nazivamo topološka konjugacija.

Ako su  $F$  i  $G$  topološki konjugirana preslikavanja, za  $n$ -tu iteraciju funkcije  $F$  vrijedi  $F^n = H^{-1} \circ G^n \circ H$ . Stoga topološki konjugirana preslikavanja imaju potpuno ekvivalentne dinamike. Ako imamo dvije topološki konjugirane funkcije od kojih je jedna komplicirana, a druga u obliku jednostavnijem za proučavanje, naprosto promatramo jednostavniju funkciju. Svi rezultati koje dobijemo vrijede za obje funkcije.



Slika 1.2: Topološko konjugiranje

Definirajmo sada kaotično preslikavanje u smislu Devaneya:

**Definicija 1.18.** Neka je  $X$  topološki prostor i  $F : X \rightarrow X$  neprekidna funkcija. Kažemo da je preslikavanje  $F$  topološki tranzitivno preslikavanje ako za svaki par nepraznih, otvorenih skupova  $U, V \subset X$  postoji  $k > 0$  takav da je  $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definicija 1.19.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Kažemo da je preslikavanje  $F : X \rightarrow X$  osjetljivo na početne uvjete ako postoji  $\delta > 0$  takav da za svako  $x \in X$  i za svaku okolinu  $N$  oko  $x$  postoji  $y \in N$  i  $n \geq 0$  takav da je  $d(F^n(x) - F^n(y)) > \delta$ .

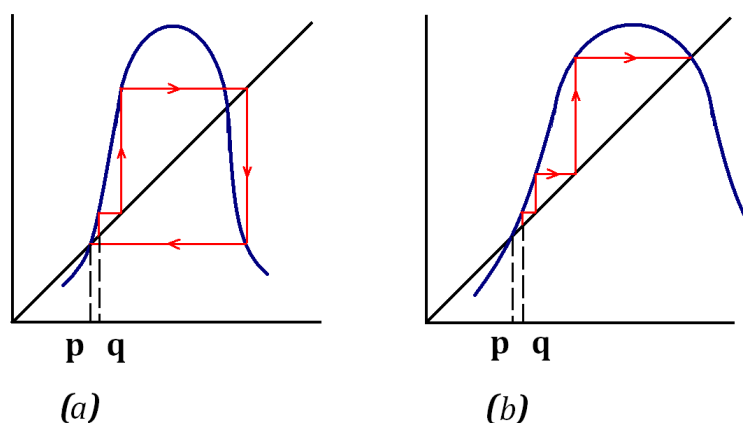
**Definicija 1.20.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor, te neka je  $V \subseteq X$ . Kažemo da je preslikavanje  $F : V \rightarrow V$  kaotično na  $V$  ako vrijedi:

1.  $F$  je topološki tranzitivno preslikavanje.
2. periodičke točke funkcije  $F$  su guste u  $V$ .
3. preslikavanje  $F$  je osjetljivo na početne uvjete.

Neka je  $p$  odbojna fiksna točka funkcije  $F$ . Tada postoji okolina  $U$  oko  $p$  takva da vrijedi

$$|F(z) - F(p)| = |F(z) - p| > |z - p|, \quad \forall z \in U \quad (1.1)$$

Najveću otvorenu okolinu točke  $p$  za koju vrijedi 1.1 nazivamo *lokalno nestabilni skup* točke  $p$  i označavamo ga sa  $W_{loc}^u(p)$ .



Slika 1.3: (a) Homoklinička točka, (b) Heteroklinička točka

**Definicija 1.21.** Neka je  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , te neka je  $p$  odbojna fiksna točka funkcije  $F$ . Kažemo da je točka  $q$  homoklinička točki  $p$  ako je  $q \in W_{loc}^u(p)$  i ako postoji  $n > 0$  takav da je  $F^n(q) = p$ . Kažemo da je točka  $q$  heteroklinička ako je  $q \in W_{loc}^u(p)$  i ako postoji  $n > 0$  takav da  $F^n(q)$  pripada nekoj drugoj periodičkoj orbiti.

Homoklinička točka  $q$  po definiciji leži u lokalno nestabilnom skupu točke  $p$ . Stoga možemo definirati niz prasluka točke  $q$ , koje se približavaju točki  $p$ . Budući je  $F$  na  $W_{loc}^u(p)$  injekcija te su praslike jedinstvene. Homoklinička točka zajedno sa svojom stražnjom i konačnom prednjom orbitom čini *homokliničku orbitu*.

**Definicija 1.22.** Neka je  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Skup  $S \subseteq \mathbb{C}$  je:

1. Prednje invarijantan ako je  $F(S) = S$ ;
2. Stražnje invarijantan ako je  $F^{-1}(S) = S$ ;
3. Potpuno invarijantan ako je  $F(S) = S = F^{-1}(S)$ .

Ako je  $F$  surjekcija, tj.  $F(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ , tada se prednja, stražnja i potpuna invarijantnost podudaraju.

Biti će nam važni i neki osnovni pojmovi simboličke dinamike.

**Definicija 1.23.** *Prostor nizova dva simbola, u oznaci  $\Sigma_2$ , definiramo sa*

$$\Sigma_2 = \{s \mid s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots), s_j \in \{0, 1\}, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

Za svako  $s, t \in \Sigma_2$  gdje je

$$s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots), \quad t = (t_0 t_1 \dots t_n \dots),$$

definiramo

$$d(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j}.$$

Lako se pokaže da je  $d$  metrika na  $\Sigma_2$ , tj. da je  $(\Sigma_2, d)$  metrički prostor.

**Definicija 1.24.** *Preslikavanje  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  definirano sa*

$$\sigma(s_0 s_1 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$$

*nazivamo pomak ili šift.*

Može se pokazati da je preslikavanje  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  neprekidno. Također, pomak je topološki tranzitivno preslikavanje, osjetljivo na početne uvjete i vrijedi da je skup svih periodičkih točaka od  $\sigma$ , u oznaci  $Per(\sigma)$  gust podskup od  $\Sigma_2$ . Iz navedenih svojstava, prema definiciji 1.20 slijedi da je pomak kaotično preslikavanje.

Kako bismo definirali pomak na  $N$  simbola najprije definiramo skup svih mogućih nizova na  $N$  simbola. Stavimo

$$\Sigma_N = \{s \mid s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots), s_j \in \{1, 2, \dots, N\}, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

Kao i prije, možemo definirati metriku

$$d_N(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{N^j},$$

gdje su  $s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots)$  i  $t = (t_0 t_1 \dots t_n \dots)$  iz  $\Sigma_N$ .

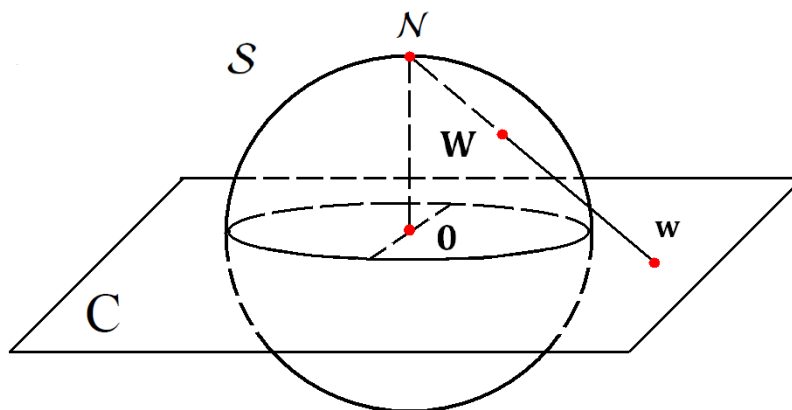
**Definicija 1.25.** *Preslikavanje  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  definirano sa*

$$\sigma(s_0 s_1 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$$

*nazivamo pomak na  $N$  simbola.*

### 1.3 Riemannova sfera

Promatrajmo funkciju  $Q(z) = z^2$ . Ako je  $|z| < 1$  onda  $Q^n(z) \rightarrow 0$ , a ako je  $|z| > 1$  onda  $Q^n(z) \rightarrow \infty$ . Zbog toga na 0 i na  $\infty$  možemo gledati kao na privlačne fiksne točke. Promotrimo sada funkciju  $H(z) = \frac{1}{z}$ .  $H$  preslikava 0 u  $\infty$  i obratno.  $H$  je analitička bijekcija i vrijedi  $H \circ Q \circ H^{-1} = Q$ . Stoga je ponašanje preslikavanja  $Q$  u okolini  $\infty$  jednako ponašanju iste funkcije u okolini 0. Kako će nas zanimati i ponašanje analitičkih funkcija u  $\infty$ , definiramo proširenu kompleksnu ravninu  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  i pojam *Riemannove sfere*.



Slika 1.4: Riemannova sfera

Neka je  $\mathcal{S}$  jedinična sfera zadana sa  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Prema [1] (str. 18), svakoj točki na  $\mathcal{S}$ , izuzev točke  $(0, 0, 1)$ , koju nazivamo sjeverni pol, možemo pridružiti kompleksni broj

$$z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}.$$

Uzmimo još da je točka u "beskonačnosti" korespondentna točki  $\mathcal{N} = (0, 0, 1)$ . Sada na sferu  $\mathcal{S}$  možemo gledati kao na reprezentaciju proširene kompleksne ravnine, odnosno



svaku točku iz  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  možemo identificirati sa jedinstvenom točkom na sferi  $\mathcal{S}$  na sljedeći način:

Neka je  $W$  točka na sferi  $\mathcal{S}$ , različita od sjevernog pola  $\mathcal{N}$ . Pravac koji prolazi točkama  $W$  i  $\mathcal{N}$  presjeca kompleksnu ravninu  $\mathbb{C}$  u točki  $w$  koju nazivamo *stereografska projekcija* točke  $W$ . Obratno, ako je zadana točka  $w \in \mathbb{C}$ , pravac koji spaja sjeverni pol  $\mathcal{N}$  i točku  $w$  presjeca sferu  $\mathcal{S}$  u točki  $W$ . Sferu  $\mathcal{S}$  zovemo Riemannova sfera.

Preostaje nam opisati analitičke funkcije na Riemannovoj sferi. Neka je  $F: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  i  $F(\infty) = z_0$ . Pretpostavimo da je  $z_0 \neq 0$ . Kažemo da je  $F$  analitička u  $\infty$  ako je  $H \circ F \circ H^{-1}$  analitička u  $0$ , pri tome je, kao i prije,  $H(z) = \frac{1}{z}$ . Ako je  $F(\infty) = 0$ ,  $H$  ćemo definirati sa  $H(z) = \frac{1}{z-a}$  za  $a \neq 0, \infty$ .

**Primjer 1.26.** Neka je  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  polinom stupnja  $n \geq 2$ . Očito je  $P(\infty) = \infty$ , te je  $\infty$  fiksna točka polinoma  $P$ . Kako je

$$\begin{aligned} H \circ P \circ H^{-1}(z) &= \frac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \dots + a_0 z^n} \end{aligned}$$

analitička u  $0$ , to je  $P$  analitička funkcija u  $\infty$ . Zbog  $(H \circ P \circ H^{-1})'(0) = 0$  vrijedi i da je  $P'(\infty) = 0$ . Stoga je  $\infty$  super privlačna fiksna točka za  $P$ .

Točka  $\infty$  može biti ili fiksna, kao u slučaju polinoma, ili periodička kao u slučaju funkcije  $R(z) = 1/z^n$ . I zapravo se ponaša kao i bilo koja druga točka pod iteracijama analitičke funkcije.

**Primjer 1.27.** Neka je

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , i  $ad - bc \neq 0$ . Preslikavanje  $M$  nazivamo Möbiusova transformacija. Ako je  $c \neq 0$ , onda je  $M(\infty) = a/c \neq \infty$ . Ako je  $a \neq 0$ , konjugiranjem sa funkcijom  $H(z) = 1/z$  dobivamo

$$F(z) = H \circ M \circ H^{-1}(z) = \frac{c + dz}{a + bz}.$$

$F'(0) = (ad - bc)/a^2 \neq 0$ , tj.  $F$  je analitička u  $0$ . Odavde slijedi da je  $M$  analitička u  $\infty$ .

Pogodnom Möbiusovom transformacijom možemo fiksnu točku "prebaciti" u točku nula, a njezinu dinamiku nam je jednostavnije promatrati. Naprimjer, korisna je i više puta će nam trebati, transformacija oblika  $H(z) = 1/z$  koja  $\infty$  prevodi u nulu i obratno.

## Poglavlje 2

### Kvadratna familija

Promatrajmo polinome  $R(z) = az^2 + 2bz + d$  i  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Ti su polinomi topološki konjugirani, tj. za  $M(z) = az + b$ , uz uvjet  $c = ad + b - b^2$  vrijedi

$$\begin{aligned}(M^{-1} \circ Q_c \circ M)(z) &= M^{-1}((az + b)^2 + c) \\ &= M^{-1}(a^2z^2 + 2abz + b^2 + c) \\ &= \frac{(a^2z^2 + 2abz + b^2 + c) - b}{a} = R(z).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dakle, kako bismo razumjeli dinamiku svih kvadratnih polinoma dovoljno je proučavati dinamiku samo onih polinoma koji su oblika  $Q_c(z) = z^2 + c$ , za  $c \in \mathbb{C}$ . Familiju svih takvih polinoma nazivamo *kvadratna familija* i označavamo je sa  $\{Q_c\}$ .

Posebno nas zanimaju odbojne periodičke točke.

**Definicija 2.1.** *Neka je  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinom. Juliaov skup polinoma  $P$ , u oznaci  $J(P)$ , definiramo kao zatvarač skupa odbojnih periodičkih točaka.*

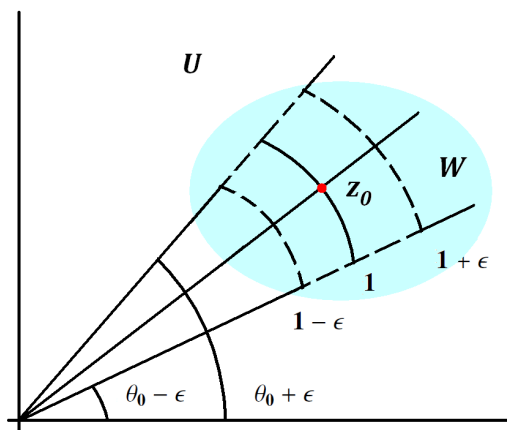
**Definicija 2.2.** *Stabilni skup polinoma  $P$ , u oznaci  $F(P)$ , jednak je komplementu Juliaova skupa.*

Skup  $F(P)$  u literaturi je poznat kao Fatouov skup. Za razliku od Juliaovog skupa kod kojeg infinitesimalno mala promijena početne vrijednosti koju iteriramo uzrokuju drastične promjene niza iteriranih vrijednosti, "bliski" elementi Fatouovog skupa ponašaju se, pod iteracijama, na sličan način. Uporedo ćemo proučavati i jedan i drugi skup.

Neka je  $Q_0(z) = z^2$ . Ako je  $|z| < 1$  onda  $Q_0^n(z) \rightarrow 0$ , a ako je  $|z| > 1$  onda  $Q_0^n(z) \rightarrow \infty$ . Prema definiciji 2.1 preslikavanje  $Q_0$  je kaotično na  $J(Q_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Pod iteracijama funkcije  $Q_0$ , okolina svake točke iz  $J(Q_0)$  proširi se na cijelu kompleksnu ravninu. Ta je činjenica rezultat naredne propozicije:

**Propozicija 2.3.** Neka je  $|z_0| = 1$  i  $U$  neka okolina točke  $z_0$ . Za svako  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  postoji  $m$  takav da je  $z \in Q_0^m(U)$ .

*Dokaz:* Neka je  $z_0 = e^{2\pi i \theta_0}$ . Tada postoji  $\epsilon > 0$  takav da isječak klina  $W$ , koji se nalazi između  $|\theta - \theta_0| < \epsilon$  i  $|r - 1| < \epsilon$ , leži unutar  $U$ .  $Q_0$  expandira  $W$  i u smjeru  $\theta$  i u smjeru radijusa  $r$ . Zapravo, postoji  $n$  takav da za  $r = 1$ ,  $Q_0^n$  preslika luk  $|\theta - \theta_0| < \epsilon$  na cijelu jediničnu kružnicu  $S^1$ . Iz toga slijedi da  $Q_0^n(W)$  sadrži odsječak  $1 - \epsilon < r < 1 + \epsilon$ . Očito je da tada  $Q_0^{n+k}(W)$  sadrži kružni vijenac  $(1 - \epsilon)^k < r < (1 + \epsilon)^k$ . Odavde slijedi tvrdnja propozicije.  $\square$



Slika 2.1: Ekspanzija okoline  $U$  oko točke  $z_0$  iz Juliaova skupa

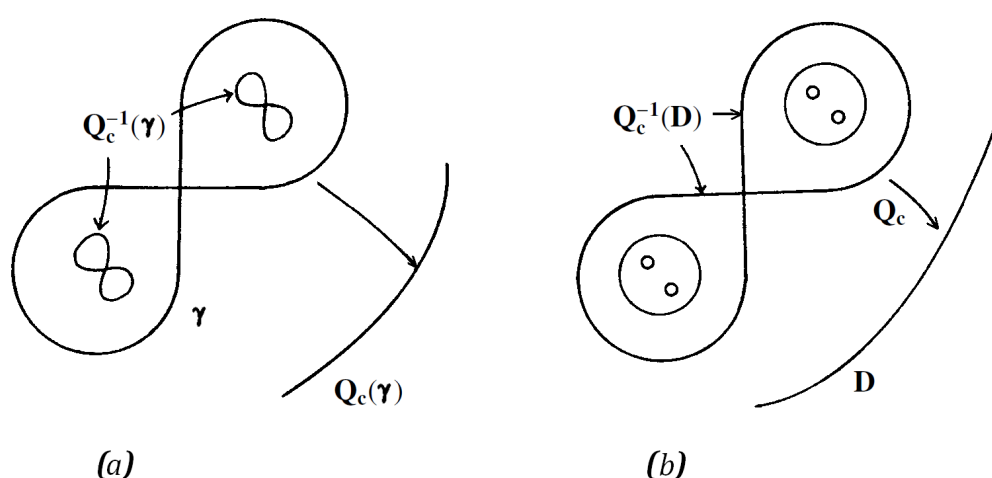
Gledano "unazad", svaka točka, izuzev nule, ima niz prasluka koje pod iteracijama funkcije  $Q_0$  konvergiraju ka Juliaovom skupu. To izuzimanje nule bit će od velike važnosti u poglavlju §3.

Geometrijski, Juliaov skup nije uvijek glatka krivulja kao u slučaju  $Q_0$ . On može biti i Cantorov skup.

**Propozicija 2.4.** Neka je  $|c| > 2$ . Pretpostavimo da je  $|z| \geq |c|$ . Tada  $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

*Dokaz:* Neka je  $|z| = r \geq |c| > 2$ .  $Q_c$  preslikava kružnicu radijusa  $r$  sa središtem u nuli, na kružnicu radijusa  $r^2$  sa središtem u  $c$ . Budući da je  $r^2 > 2r$ , slika ove kružnice leži u eksterioru kružnice radijusa  $r$ . Odavde, za svako  $z$  za kojeg je  $|z| \geq |c|$  vrijedi  $|Q_c(z)| > |z|$ . Očito,  $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$ .  $\square$

Eksterior kružnice  $|z| = |c|$  ne sadrži periodičke točke funkcije  $Q_c$ . Stoga cijelo to područje leži u  $F(Q_c)$ . Štoviše, svaka točka koja se završno preslika u ovo područje, također leži u  $F(Q_c)$ . Označimo sa  $\Lambda$  skup svih točaka čija cijela prednja orbita leži unutar kružnice  $|z| = |c|$ . Sljedeća propozicija govori o osnovnim svojstvima skupa  $\Lambda$ .



Slika 2.2: Konstrukcija skupa  $\Lambda$

**Propozicija 2.5.** *Ako je  $|c|$  dovoljno velik,  $\Lambda$  je  $Q_c$ -invarijantan Cantorov skup na kojem je  $Q_c$  topološki konjugiran pomaku na dva simbola. Sve točke u  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  teže ka beskonačno pod iteracijama funkcije  $Q_c$ .*

*Dokaz:* Neka je  $\gamma$  praslika kružnice  $|z| = |c|$ . Kako je 0 jedina praslika parametra  $c$ , dok sve ostale točke na  $|z| = |c|$  imaju dvije praslike, zaključujemo da je  $\gamma$  krivulja u obliku osmice kao na slici 2.2(a). Primijetimo da se točke između krivulje  $\gamma$  i kružnice  $|z| = |c|$  preslikavaju na eksterior od  $|z| = |c|$ , te zbog toga leže u stabilnom skupu.

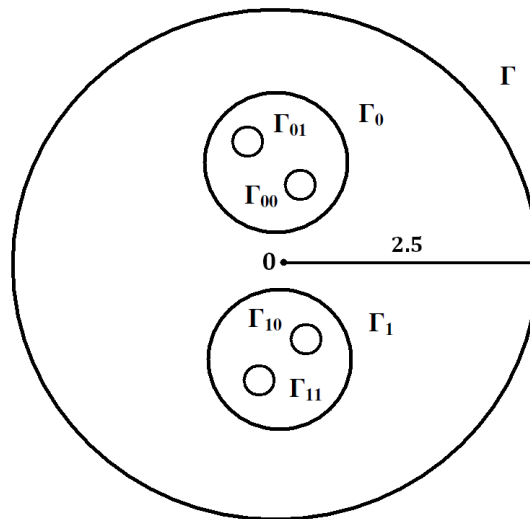
Izaberimo  $r < |c|$  tako da je krivulja  $\gamma$  sadržana u krugu  $D = \{z; |z| \leq r\}$ . Praslika kruga  $D$  sastoji se od dva jednostavno povezana skupa. Svaki od njih smješten je unutar jednog "uha" krivulje  $\gamma$  i svaki od njih se difeomorfno preslikava na  $|z| \leq r$ . Očito,

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_c^{-n}(D).$$

Također, očito je da se svaka praslika  $Q_c^{-n}$  sastoji od  $2^n$  krugova, te da je  $Q_c^{-n} \subset Q_c^{-n+1}$ . Na desnoj strani slike 2.2 je prikaz praslika skupa  $D$ .

Svaki niz ugnježenih krugova siječe se u jedinstvenoj točki. Kako bismo ovo dokazali promatramo krug  $B$  radijusa  $1/2$  sa središtem u ishodištu.  $Q_c(B)$  je krug radijusa  $1/4$  sa središtem u  $c$ . Pretpostavimo da je  $Q_c(B) \cap \gamma = \emptyset$ . Primijetimo da ako je  $|Q'_c(z)| < 1$  onda je  $z \in B$ . Prema prvom dijelu dokaza, znamo da se svaka točka u kojoj je derivacija funkcije  $Q_c$  manja od 1 mora preslikati van  $D$ . Odavde slijedi da je  $|Q'_c(z)| > 1$  za svako  $z \in \Lambda$ , te je  $\Lambda$  (prema konstrukciji) Cantorov skup.  $\square$

Prema gornjem dokazu, odbojne periodičke točke su guste u  $\Lambda$ . Stoga je  $\Lambda$  Juliaov skup polinoma  $Q_c$ , za  $|c| > 2$ .



Slika 2.3: Konstrukcija Cantorova skupa

**Primjer 2.6.** ([15], str. 71) Neka je  $Q_3(z) = z^2 + 3$ . Iskoristimo dokaz prethodnog teorema za konstrukciju Juliaovog skupa ovog polinoma. Promatrajmo orbitu točke  $c = 3$ .

$$3 \rightarrow 12 \rightarrow 147 \rightarrow \dots$$

Ta orbita, očito, teži ka super privlačnoj fiksnoj točki  $\infty$ . Juliaov skup za  $Q_3$  je skup točaka koje pod iteracijama ne teže ka  $\infty$ . Stavimo  $\Gamma = \{z; |z| = 2.5\}$ . Orbita svake točke van skupa  $\Gamma$  teži ka  $\infty$ . Skup  $\Gamma$  ima dvije disjunktne praslike  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  koje ne sadrže kritičnu točku nula. Područje ograničeno krivuljama  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  preslikava se van kružnice  $\Gamma$ , te sve točke iz tog područja teže ka  $\infty$ . Nastavimo na isti način i konstruiramo praslike krivulja  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  i označimo ih sa  $\Gamma_{00}$ ,  $\Gamma_{01}$ ,  $\Gamma_{10}$ ,  $\Gamma_{11}$ , itd. Juliaov skup je Cantorov skup kojeg dobijemo kao presjek ovog niza praslika.



## Poglavlje 3

# Normalna familija i točke izuzetka

Teorija normalnih familija koju iznosimo u ovom poglavlju, ključna je za proučavanje kompleksne dinamike.

**Definicija 3.1.** Neka je  $\{F_n\}$  familija kompleksnih analitičkih funkcija definiranih na nekom otvorenom skupu  $U$ . Kažemo da je  $\{F_n\}$  normalna familija na  $U$  ako svaki niz  $(F_{n_k}, k \in \mathbb{N})$  ima podniz koji, ili

1. konvergira uniformno na kompaktnom podskupu skupa  $U$ , ili
2. konvergira uniformno ka  $\infty$  na  $U$ .

**Primjer 3.2.** Neka je  $F(z) = az$ . Označimo sa  $F_n(z) = F^n(z)$   $n$ -tu iteraciju funkcije  $F$ . Ako je  $|a| < 1$  onda niz  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  konvergira uniformno na kompaktnom podskupu prema konstantnoj funkciji 0, pa je po prethodnoj definiciji  $\{F_n\}$  normalna familija na bilo kojoj domeni u  $\mathbb{C}$ .

Ako je  $|a| > 1$ , onda je familija  $\{F^n\}$  normalna familija na bilo kojoj domeni koja ne uključuje nulu. U protivnom, ako domena uključuje nulu, to nije normalna familija. Zaista, u svakoj okolini oko nule postoji točka  $z$  za koju  $|F^n(z)| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Za svaku takvu okolinu  $U$  vrijedi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C}.$$

Kako smo vidjeli, Juliaovi skupovi za preslikavanja oblika  $F(z) = az$  ili, općenitije, preslikavanja oblika  $F(z) = az + b$  posve su jednostavni. Zato nadalje promatramo samo polinome stupnja  $\geq 2$ .

**Definicija 3.3.** Familija  $\{F_n\}$  nije normalna u točki  $z_0$  ako nije normalna u svakoj okolini točke  $z_0$ .



Navedimo jedno od važnih i korisnih svojstava niza analitičkih funkcija.

**Propozicija 3.4.** *Neka je  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  niz analitičkih funkcija koji konvergira uniformno na domeni  $U$  ka funkciji  $F$ . Tada je  $F$  analitička na  $U$  i vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(k)}(z) = F^{(k)}(z), \quad \forall z \in U.$$

Sljedeća propozicija nam daje kriterij pomoću kojega možemo procijeniti je li familija analitičkih funkcija normalna familija u danoj točki ili ne.

**Propozicija 3.5.** *Neka je  $F$  analitička funkcija i neka je  $z_0$  odbojna periodička točka za  $F$ . Tada familija iteracija funkcije  $F$  nije normalna u točki  $z_0$ .*

*Dokaz:* Propoziciju dokazujemo u slučaju kada je  $z_0$  fiksna točka. Pretpostavimo da je  $\{F^n\}$  normalna familija na okolini  $U$  točke  $z_0$ . Znamo da za svako  $n$  vrijedi  $F^n(z_0) = z_0$ . Iz toga slijedi da  $F^n(z_0)$  ne konvergira ka  $\infty$  na  $U$ . Prema tome, neki niz familije iteracija  $\{F^n\}$  ima podniz  $\{F^{n_i}\}$  koji konvergira uniformno na  $U$  prema funkciji  $F$ . Iz prethodne propozicije imamo da  $|(F^{n_i})'(z_0)| \rightarrow |F'(z_0)|$ . S druge strane,  $z_0$  je odbojna točka pa vrijedi  $|(F^{n_i})'(z_0)| \rightarrow \infty$ , što je kontradikcija. Dakle, familija iteracija  $\{F^n\}$  nije normalna familija u  $z_0$ .  $\square$

Sada imamo sljedeće svojstvo Juliaovih skupova:

**Korolar 3.6.** *Neka je  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksna analitička funkcija. Familija iteracija  $\{F^n\}$  nije normalna familija u svakoj točki Juliaovog skupa  $J(F)$ .*

Najvažnija posljedica činjenice da neka familija nije normalna familija u danoj točki je ta, da takva familija funkcija mora poprimati svaku vrijednost u bilo kojoj okolini te točke, osim najviše jedne vrijednosti. Taj je rezultat posljedica sljedećeg teorema:

**Teorem 3.7. (Montelov teorem)** *Neka je  $\{F_n\}$  familija analitičkih funkcija definiranih na domeni  $U$  i neka su  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$  takve da je  $F_n(z) \neq a$  ili  $F_n(z) \neq b$ , za svako  $n$  i za svako  $z \in U$ . Tada je  $\{F_n\}$  normalna familija na  $U$ .*

Za nas je važniji sljedeći korolar:

**Korolar 3.8.** *Neka je  $F$  analitička funkcija,  $z_0 \in J(F)$  i  $U$  okolina točke  $z_0$ . Tada najviše jedna točka iz  $\mathbb{C}$  nije sadržana u skupu*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U).$$

*Dokaz:* Kada bi iz  $F^n(U)$  bile izostavljene dvije točke onda bi  $\{F^n\}$  bila normalna familija na  $U$ .  $\square$

**Primjer 3.9.** Neka je  $F(z) = z^2$ . Juliaov skup za ovo preslikavanje je jedinična kružnica  $S^1$ . Ako je  $U$  otvorena okolina koja sječe  $S^1$  i ne uključuje nulu, tada je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dakle, najgore moguće ponašanje familije iteracija funkcije  $F$  na okolini neke točke iz Juliaovog skupa je izostavljanje jedne točke skupa  $\mathbb{C}$ . Takve točke nazivamo *točkama izuzetka* (engl. exceptional points). Sljedeći teorem govori o tome kako izgledaju svi oni polinomi koji imaju točku izuzetka.

**Teorem 3.10.** Neka je  $P$  polinom. Pretpostavimo da postoje  $a \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in J(P)$  i okolina  $U$  oko točke  $z_0$  takva da je

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$

Tada je  $P(z) = a + \lambda(z - a)^k$ , za neko  $\lambda \in \mathbb{C}$  i neko  $k \in \mathbb{N}$ .

*Dokaz:* Pretpostavimo da je  $P(b) = a$ . Za one  $z \in U$  koji se ne preslikavaju u  $b$ , a potom u  $a$ , točka  $b$  je točka izuzetka polinoma  $P$ . Tada je, prema korolaru 3.8,  $b = a$ . Odavde slijedi da je  $a$  fiksna točka za  $P$ . Štoviše,  $a$  je sam sebi jedina praslika. Sada, za neko  $k \in \mathbb{N}$ , možemo staviti

$$\frac{P(z) - a}{(z - a)^k} = G(z),$$

gdje je  $G$  polinom i  $G(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$  jer bi protivnom bi imali dodatnu prasliku za  $a$ . Očito,  $G(z)$  je konstanta.  $\square$

**Propozicija 3.11.** Neka je  $P$  polinom stupnja  $n \geq 2$  kojemu je točka  $a$ , točka izuzetka. Tada je  $P$  topološki konjugiran sa  $z \rightarrow z^n$ .

*Dokaz:* Neka je  $Q(z) = z^n$ . Prema prethodnom je teoremu, za neko  $\lambda \neq 0$

$$P(z) = a + \lambda(z - a)^n.$$

Izaberimo bilo koji  $(n - 1)$ -korijen od  $\lambda$  i označimo ga sa  $\mu$ . Definiramo  $H(z) = \mu(z - a)$ . Sada je

$$H(P(z)) = \mu(a + \lambda(z - a)^n - a) = \mu\lambda(z - a)^n = \mu^n(z - a)^n = Q(H(z)).$$

$\square$

Iz gornje propozicije zaključujemo da je Juliaov skup za polinome koji imaju točku izuzetka, kružnica. Budući da smo takvu jednostavnu dinamiku već opisali dalje proučavamo samo one polinome koji nemaju točke izuzetka.



# Poglavlje 4

## Periodičke točke

Neka je  $F$  analitička funkcija. Razlikujemo dva tipa privlačnih fiksnih točaka: super privlačnu fiksnu točku  $z_0$ , za koju vrijedi  $F'(z_0) = 0$ , i privlačnu fiksnu točku, kada je  $0 < |F'(z_0)| < 1$ . Iako se radi o različitim privlačnim točkama one imaju sličnu dinamiku.

Prvo opisujemo dinamiku u okolini privlačnih fiksnih točaka. Pokazat ćemo da postoji analitička topološka konjugacija između analitičke funkcije  $F$  i linearne funkcije. Drugim riječima, kompleksnu analitičku funkciju možemo lokalno linearizirati, u okolini privlačne fiksne točke. Dokaz ima puno tehničkih detalja, ali to će nam pomoći da razumijemo zašto istu tehniku ne možemo primjeniti kod neutralnih fiksnih točaka.

**Teorem 4.1. (Teorem o linearizaciji)** *Neka je  $F$  analitička funkcija za koju vrijedi da je  $F(0) = 0$  i  $F'(0) = \lambda$ , za  $0 < |\lambda| < 1$ . Tada postoji okolina  $U$  oko  $0$  i analitička funkcija  $H: U \rightarrow \mathbb{C}$  takva da je*

$$(F \circ H)(z) = (H \circ L)(z),$$

gdje je  $L(z) = \lambda z$ .

**Napomena 4.2.** *Funkcionalnu jednadžbu  $F \circ H = H \circ L$  nazivamo Schröderova funkcionalna jednadžba. Uobičajena oznaka u literaturi je (SFE).*

*Dokaz:*  $F$  možemo napisati u obliku reda potencija

$$F(z) = \lambda z + \sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l.$$

Ovakav  $F$ , očito ispunjava uvjete teorema i konvergira u nekoj okolini  $0$ . Najprije nađimo formalno rješenje funkcionalne jednadžbe  $F \circ H = H \circ L$ , tj. analitičku funkciju  $H$  koja rješava danu jednadžbu.

Zahtjevamo analitičnost, stoga  $H$  mora biti oblika

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l.$$

Budući da je 0 fiksna točka funkcije  $F$  i funkcije  $L$ , isto vrijedi i za  $H$ , te je  $c_0 = 0$ . Usporedbom koeficijenata uz potencije prvog stupnja u  $F(H(z))$  i  $H(\lambda z)$  lako je zaključiti kako  $c_1$  možemo proizvoljno izabrati, uz uvjet  $c_1 \neq 0$ . Stavimo da je  $c_1 = 1$ . Sada je

$$H(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l.$$

Preostale koeficijente definirat ćemo rekurzivno. Našu funkcionalnu jednadžbu napišemo u obliku

$$\begin{aligned} \lambda H(z) + \sum_{l=2}^{\infty} a_l (H(z))^l &= \lambda z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l \lambda^l z^l \\ \sum_{l=2}^{\infty} c_l \lambda^l z^l + \lambda z - \lambda H(z) &= \sum_{l=2}^{\infty} a_l (H(z))^l \\ \sum_{l=2}^{\infty} c_l \lambda^l z^l + \lambda z - \lambda z - \lambda \sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l &= \sum_{l=2}^{\infty} a_l (H(z))^l \\ \sum_{l=2}^{\infty} c_l z^l (\lambda^l - \lambda) &= \sum_{l=2}^{\infty} a_l (H(z))^l \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pretpostavimo da su koeficijenti  $c_2, \dots, c_{k-1}$  poznati. Koeficijent uz  $z^k$ , na desnoj strani jednadžbe 4.1 ovisi i o varijablama  $a_2, \dots, a_k$  i o varijablama  $c_2, \dots, c_{k-1}$ . Označimo ga sa  $K_k(a_2, \dots, a_k, c_2, \dots, c_{k-1})$ . Budući da su koeficijenti  $c_2, \dots, c_{k-1}$  poznati,  $K_k$  možemo odrediti. Usporedbom koeficijenata uz  $z^k$  na lijevoj i desnoj strani jednadžbe 4.1 dobijemo

$$c_k = \frac{K_k(a_2, \dots, a_k, c_2, \dots, c_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}, \quad \lambda^k \neq \lambda \quad (4.2)$$

Uočimo da koeficijenti  $c_k$  nisu definirani za  $\lambda = 0$  i ako je  $\lambda = (k-1)$ -korijen iz jedinice. Na ovaj smo način rekurzivno definirali koeficijente  $c_k$ . Ostaje još pokazati da red potencija

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$$

konvergira u nekoj okolini 0. Najprije moramo dokazati niz lema.

**Lema 4.3.** *Neka je*

$$F(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l.$$

*Preslikavanje  $F$  je linearno konjugiran sa preslikavanjem*

$$R(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} b_l z^l,$$

*gdje je  $|b_l| < 1$ , za svako  $l$ .*

*Dokaz:* Budući da red  $\sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l$  konvergira, postoji  $A > 0$  takav da je  $|a_{l+1}| < A^l$ , za svako  $l \geq 1$ . Neka je

$$R(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} b_l z^l,$$

gdje je  $b_l = a_l/A^{l-1}$ . Očito je  $|b_l| < 1$  za svako  $l$ . Stavimo  $h(z) = Az$ . Imamo

$$(R \circ h)(z) = Az + \sum_{l=2}^{\infty} b_l A^l z^l = Az + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{a_l}{A^{l-1}} A^l z^l = A(z + \sum_{l=2}^{\infty} a_l z^l) = (h \circ F)(z).$$

□

**Lema 4.4.** *Neka je  $0 < |\lambda| < 1$ . Tada postoji  $c > 0$  takav da je  $|\lambda^k - \lambda| > c$ , za svako  $k > 1$ .*

*Dokaz:* Iz  $0 < |\lambda| < 1$ , slijedi  $|\lambda^k| < |\lambda^2| < |\lambda|$ , za sve  $k \geq 2$ . Odavde imamo  $|\lambda^k - \lambda| \geq |\lambda| - |\lambda|^2 > 0$ .

□

Promotrimo red potencija

$$z = z(\omega) = \omega - \frac{1}{c} \sum_{l=2}^{\infty} \omega^l.$$

Taj red, za  $|\omega| < 1$ , i za svako  $c \in \mathbb{R}$  konvergira, te je

$$z = z(\omega) = \omega - \frac{1}{c} \left( \frac{\omega^2}{1 - \omega} \right) = \omega - \frac{1}{c} \left( \frac{1}{1 - \omega} - 1 - \omega \right).$$

Budući je  $z(0) = 0$  i  $z'(0) = 1$ , prema teoremu 1.6  $z(\omega)$  ima inverz. Taj je inverz analitički, definiran u okolini 0 i možemo ga zapisati u obliku

$$\omega = \omega(z) = z + \sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l z^l, \tag{4.3}$$

gdje je poznato da red

$$\sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l z^l$$

konvergira. Dokazat ćemo da on dominira formalni red potencija kojeg smo odredili za  $H$ , uz pretpostavku da je  $c$  dovoljno malo.

**Lema 4.5.** *Neka je  $c$  kao iz leme 4.4. Tada za svako  $k \geq 2$  vrijedi*

$$0 < |c_k| < \alpha_k.$$

*Dokaz:* Primijetimo da je red potencija  $\omega = \omega(z)$  rješenje funkcionalne jednadžbe

$$c\omega(z) - cz = \sum_{l=2}^{\infty} (\omega(z))^l \quad (4.4)$$

Riješimo tu jednadžbu točno onako kako smo riješili Schröderovu funkcionalnu jednadžbu. Iz 4.3 i 4.4 slijedi

$$\sum_{k=2}^{\infty} c\alpha_k z^k = \sum_{l=2}^{\infty} (\omega(z))^l.$$

Usporedimo prethodnu jednadžbu sa jednadžbom 4.1. Zamijenimo  $\lambda^k - \lambda$  sa  $c$ ,  $a_l$  sa 1, i  $c_l$  sa  $\alpha_k$ . Imajući to u vidu, na već opisan način definiramo koeficijente  $\alpha_k$  sa

$$\alpha_k = \frac{K_k(1, \dots, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})}{c},$$

gdje je  $K_k$  kao u 4.2. Koeficijenti  $K_k$  su pozitivni cijeli brojevi, te indukcijom slijedi  $\alpha_k > 0$ . Kako je  $|a_k| < 1$  imamo

$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \frac{|K_k(a_2, \dots, a_k, c_2, \dots, c_{k-1})|}{c} \\ &\leq \frac{1}{c} K_k(1, \dots, 1, |c_2|, \dots, |c_{k-1}|) \\ &\leq \frac{1}{c} K_k(1, \dots, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}) \\ &= \alpha_k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

□

To dokazuje Teorem 4.1. □

Istaknimo da gornji rezultati vrijede općenito za sve analitičke funkcije definirane lokalno oko privlačne fiksne točke.

**Napomena 4.6.** Isti dokaz vrijedi i kada je  $|\lambda| > 1$ . Prema teoremu 1.6 inverz  $F^{-1}$  je lokalno dobro definirana, analitička funkcija kojoj je nula (uz  $L(z) = \lambda^{-1}z$ ), privlačna fiksna točka. Dakle, analitičku funkciju možemo linearizirati i u okolini odbojne periodičke točke.

**Napomena 4.7.** Slični rezultati vrijede i za super privlačnu periodičku točku. Tada je  $F$  analitički konjuugirano preslikavanju  $z \rightarrow z^k$ . Eksponent  $k$  određen je redom prve derivacije funkcije  $F$  koja ne iščezava u 0. Detaljan dokaz može se naći u [3] str. 95.

**Napomena 4.8.** Ako je  $|\lambda| = 1$ , i ako je  $\lambda^k \neq 1$  za svako  $k$ , onda je  $|\lambda^k - \lambda| \neq 0$ , pa su koeficijenti  $c_k$  dobro definirani, a Schröderova funkcionalna jednadžba ima rješenje i u ovom slučaju. Ovaj problem poznat pod imenom problem malih nazivnika proučavamo u poglavlju §7.2.

Vratimo se sada na globalno ponašanje analitičkih funkcija u okolini privlačne periodičke točke.

**Definicija 4.9.** Neka je  $z_0$  privlačna fiksna točka analitičke funkcije  $F$ . Bazen atrakcije točke  $z_0$  (stabilan skup) je skup

$$W^s(z_0) = \{z \mid F^n(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty\}.$$

Izravni bazen atrakcije, u oznaci  $A(z_0)$  je maksimalna domena koja sadrži  $z_0$  i na kojoj je familija  $\{F^n\}$  normalna.

**Primjer 4.10.** Neka je  $Q_0(z) = z^2$ . Prema definiciji 4.9 imamo:

$$W^s(0) = \{z \mid Q_0^n(z) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = \{z \mid |z| < 1\}.$$

Izravni bazen atrakcije za točku 0 je cijeli bazen atrakcije, tj.  $A(0) = W^s(0)$ .

Svaka privlačna periodička orbita privlači najmanje jednu kritičnu orbitu. Kako bismo to dokazali najprije moramo definirati klasu analitičkih homeomorfizama na otvorenom jediničnom krugu  $D$ .

**Propozicija 4.11.** Neka je  $|a| < 1$ . Definirajmo

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Tada je  $T_a: D \rightarrow D$ , te vrijedi da je  $T_a^{-1} = T_{-a}$ , za  $|z| < 1$ , i da je  $T_a$  analitička funkcija, za  $|z| < |a|^{-1}$ .

Propozicija se jednostavno dokazuje direktnim računom pa dokaz ispuštamo.



**Teorem 4.12.** *Neka je  $P$  polinom i  $z_0$  privlačna periodička točka polinoma  $P$ . Tada postoji kritična točka koja leži u bazenu atrakcije točke  $z_0$ .*

*Dokaz:* Zbog jednostavnosti, teorem dokazujemo samo za privlačnu fiksnu točku  $z_0$ . Prema prethodnim rezultatima, postoji okolina  $U$  oko  $z_0$  i analitički homeomorfizam  $H: U \rightarrow D$  koji linearizira  $P$ . Neka je  $V$  otvoren skup koji sadrži  $U$ , i takav da je  $P: V \rightarrow U$  surjekcija. Dvije su mogućnosti: ili  $P$  ima kritičnu točku u  $V$ , ili  $P$  ima analitički inverz  $P^{-1}: U \rightarrow V$ .

Pretpostavimo da  $P$  nema analitički inverz na  $U$ . No,  $P$  je analitička funkcija, i prema pretpostavci je surjekcija. Odavde slijedi da  $P$  nije injekcija. Dakle, postoje  $z_1, z_2 \in V$  takvi da je  $P(z_1) = P(z_2) = q$ .

Pretpostavimo da je  $H(q) = a$ , i da je  $T_a: D \rightarrow D$  kao u propoziciji 4.11. Neka je  $C_r$  kružnica radijusa  $r < 1$  sa središtem u  $0 \in D$ . Funkcija  $T_a^{-1}$  preslikava familiju ovih kružnica nazad na ugnježden niz jednostavnih zatvorenih krivulja koje okružuju  $a$ . Budući da je  $P: V \rightarrow U$  analitička funkcija, i  $P'(z_i) \neq 0$ , za svaki  $i$ , za dovoljno mali  $r$  je,  $P^{-1}(H^{-1} \circ T_a^{-1}(C_r))$  par familija ugnježdenih kružnica. Jedna familija kružnica je oko  $z_1$ , a druga oko  $z_2$ . (Ovdje je  $P^{-1}$  prasluka.) Povećavamo li  $r$  možemo naći najmanji  $r_*$  takav da se ove dvije familije kružnica prvi put sijeku. Neka je  $p$  zajednička točka za obje ove jednostavne zatvorene krivulje oblika  $P^{-1}(H^{-1} \circ T_a^{-1}(C_{r_*}))$ . Prema teoremu 1.8,  $p$  je kritična točka polinoma  $P$ .

Konstruiramo niz  $k$ -tih iteracija inverza polinoma  $P^{-k}: U \rightarrow \mathbb{C}$ , za svako pozitivno  $k$ , na sukcesivno uvećanim domenama atrakcije točke  $z_0$ , dok ne dođemo do kritične točke, ili dok ne iscrpimo izravni bazen atrakcije. Primjetimo da  $P^{-k}(U)$  ne može prekriti cijeli  $\mathbb{C}$ , i to vrijedi za svaki  $k$ . Izostavljen je bazen atrakcije za  $\infty$ , koji sadrži skup  $\{z \mid |z| > R\}$ , za neki dovoljno velik  $R$ . Kako familija preslikavanja  $P^{-k}$  nije normalna familija na  $U$ , tj.  $z_0$  je odbojna fiksna točka za svaku od iteracija  $P^{-k}$ , a prema korolaru 3.8 mora vrijediti da  $\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(U)$  prekriva cijeli  $C$ , osim eventualno jedne točke, imamo kontradikciju.  $\square$

Činjenicu da je  $P$  polinom u dokazu smo iskoristili na samo jednom mjestu, kada smo pokazali da bazen atrakcije točke  $z_0$  izostavlja najmanje dvije točke. To nam je omogućilo da iskoristimo Montelov teorem. Isti teorem vrijedi i za racionalne funkcije, a dokaz se može naći u [5] str. 228.

**Napomena 4.13.** *U slučaju polinoma, na  $\infty$  možemo gledati kao na privlačnu fiksnu točku. Prema propoziciji 2.5 bazen atrakcije za  $\infty$  nije nužno jednostavno povezano područje. U poglavlju §8 ćemo pokazati da ako sve orbite kritičnih točaka ostaju ograničene tada je bazen atrakcije za  $\infty$  jednostavno povezan skup.*

## Poglavlje 5

### Juliaov skup

U ovom poglavlju izvodimo osnovna svojstva Juliaovih skupa za polinome u kompleksnoj ravnini. Gotovo svi rezultati do kojih ćemo doći vrijede i za općenitije klase analitičkih funkcija, tj. za racionalne i cijele funkcije. Najprije ćemo pokazati da je Juliaov skup neprazan za polinome koji imaju odbojnu fiksnu točku.

**Lema 5.1.** *Neka je  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinom stupnja  $n \geq 2$ , i neka su  $z_1, \dots, z_n$  međusobno različite nul točke polinoma  $R$ . Tada je*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(z_i)} = 0.$$

*Dokaz:* Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom. Neka je  $R(z) = az^2 + bz + c$  polinom stupnja 2 sa kompleksnim koeficijentima  $a, b, c$ , te neka su  $z_1$  i  $z_2$  korijeni polinoma  $R$ . Iz  $R'(z_1) = 2az_1 + b$ ,  $R'(z_2) = 2az_2 + b$  i  $z_1 + z_2 = -b/a$  slijedi

$$\frac{1}{R'(z_1)} + \frac{1}{R'(z_2)} = \frac{1}{2az_1 + b} + \frac{1}{2az_2 + b} = \frac{2a(z_1 + z_2) + 2b}{(2az_1 + b)(2az_2 + b)} = 0.$$

Neka je sada  $n > 2$ , te neka je  $R(z) = (z - z_n)Q(z)$ , gdje je  $Q$  polinom stupnja  $n - 1$  sa korijenima  $z_1, \dots, z_{n-1}$ , pri čemu su  $z_i$  međusobno različiti za sve  $i = 1, \dots, n - 1$ . Iz rastava na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(Q'(z_i))(z - z_i)}$$

za  $z = z_n$  imamo

$$\frac{1}{Q(z_n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(Q'(z_i))(z_n - z_i)}.$$

Iz  $R'(z_n) = Q(z_n)$  i  $R'(z_i) = (z_i - z_n)Q'(z_i)$ , za  $i < n$ , te iz prethodnog izraza imamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(z_i)} = \frac{1}{Q(z_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(z_i - z_n)Q'(z_i)} = 0$$

□

**Propozicija 5.2.** *Neka je  $P$  polinom stupnja  $n \geq 2$ . Tada ili*

1.  *$P$  ima fiksnu točku  $q$ , takvu da vrijedi  $P'(q) = 1$ , ili*
2.  *$P$  ima fiksnu točku  $q$ , takvu da vrijedi  $|P'(q)| > 1$ .*

*Dokaz:* Neka je  $R(z) = P(z) - z$ . Tada su korijeni polinoma  $R$  fiksne točke polinoma  $P$ . Zaista, za  $R(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ , pri čemu su korijeni  $z_1, \dots, z_n$  međusobno različiti, imamo  $0 = R(z_i) = P(z_i) - z_i$ , za sve  $i = 1, \dots, n$ . Ako korijeni  $z_1, \dots, z_n$  nisu svi međusobno različiti, tada postoji neki  $z_k$  takav da je  $R(z_k) = 0$  i  $R'(z_k) = 0$ . No, tada je  $P(z_k) = z_k$ , i  $P'(z_k) = 1$ .

Neka su sada svi korijeni  $z_1, \dots, z_n$  polinoma  $R$  međusobno različiti. Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja suprotna tvrdnji iz propozicije, tj. da je  $|P'(z_i)| < 1$ , za svako  $i$ . Tada  $P'(z_i) - 1$  leži unutar kruga  $|z + 1| \leq 1$  iz koje smo izbacili ishodište (jer je  $|P'(z_i)| \neq 1$ ). Stoga je  $1/(P'(z_i) - 1)$  dobro definirano i leži u lijevoj poluravnini, tj.

$$\frac{1}{P'(z_i) - 1} < 0.$$

Znamo da je prema lemi 5.1

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(z_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(z_i) - 1} = 0,$$

te za bar jedno  $i$  vrijedi da  $P'(z_i) - 1$  leži u poluravnini  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , što je kontradikcija. □

Dakle, ako  $P$  ima odbojnu fiksnu točku onda je  $J(P) \neq \emptyset$ . Primijetimo, također, da postoje polinomi koji nemaju niti jednu odbojnu fiksnu točku, imaju jedinstvenu neutralnu fiksnu točku, ali imaju i odbojne periodičke točke. Takav je naprimjer polinom  $P(z) = z + z^2$  koji ima odbojne periodičke točke  $-1 \pm i$ , perioda 2.

Vrijedi sljedeća propozicija, čiji ćemo dokaz za slučaj paraboličke fiksne točke dati u poglavlju §7.

**Propozicija 5.3.** *Neka je  $P$  polinom stupnja  $n \geq 2$ . Tada je  $J(P) \neq \emptyset$ .*

**Teorem 5.4.**  $J(P) = \{z \mid \{P^n\} \text{ nije normalna familija u } z\}$ .

*Dokaz:* Prema korolaru 3.6 familija  $\{P^n\}$  nije normalna familija u svakoj točki iz  $J(P)$ . Pretpostavimo da  $\{P^n\}$  nije normalna u  $p$  i neka je  $W$  okolina točke  $p$ . Dokazat ćemo da postoji odbojna periodička točka unutar okoline  $W$ .

Budući je  $J(P) \neq \emptyset$  slijedi da  $P$  ima odbojnu periodičku točku. Označimo je sa  $z_0$ . Koristeći očitu činjenicu da je  $J(P) = J(P^n)$  možemo pretpostaviti da je  $z_0$  fiksna točka za  $P$ . Znamo da je kompleksnu analitičku funkciju moguće linearizirati u okolini odbojne periodičke točke (vidi Napomenu 4.6). Dakle, postoji okolina  $U_0$  oko  $z_0$  takva da je  $P: U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  difeomorfizam. Stoga je  $P^{-1}$  dobro definirana na  $U_0$  i preslikava  $U_0$  na samog sebe. Neka je  $U_i = P^{-i}(U_0)$ . Primjetimo da je  $U_{i+1} \subset U_i$  i da je  $\bigcap U_i = \{z_0\}$ .

Familija  $\{P^n\}$  nije normalna u  $p$  te postoji točka  $z_1 \in W$  i cijeli broj  $n$  takav da je  $P^n(z_1) = z_0$ . Isto tako, jer  $\{P^n\}$  nije normalna u  $z_0$  postoji  $z_2 \in U_0$  i cijeli broj  $m$  tako da vrijedi  $P^m(z_2) = z_1$  (jer  $z_1$  nije točka izuzetka). Očito je  $P^{m+n}(z_2) = z_0$ . Uočimo da je  $z_2$  homoklinička točka. Pretpostavimo, zbog jednostavnosti dokaza, da  $z_2$  nije kritična točka za  $P^{m+n}$ , tj.  $(P^{m+n})'(z_2) \neq 0$ . U tom slučaju postoji okolina  $V$  oko  $z_2$  koja je sadržana u  $U_0$ , i koja se po preslikavanju  $P^{m+n}$  difeomorfno preslikava na okolinu oko  $z_0$ . Možemo uzeti da je  $P^m(V) \subset W$  i da  $P^{m+n}$  difeomorfno preslikava  $V$  na  $U_j$ , za neko  $j$ . Stoga je  $P^{m+n+j}$  difeomorfizam koji preslikava  $V$  na  $U_0$ . Dakle, ovo preslikavanje ima inverz koji je kontrakcija sa  $U_0$  na  $V$ . Zato  $P^{m+n+j}$  ima fiksnu točku u skupu  $V$ , koja prema Shwartzovoj lemi 1.10 mora biti odbojna. Orbita ove odbojne fiksne točke siječe  $W$  jer je  $P^m(V) \subset W$ .  $\square$

Ovaj teorem ima niz posljedica koje opisuju strukturu i dinamiku Juliaovih skupova. Prema dokazu teorema, svaka je točka u kojoj familija  $\{P^n\}$  nije normalna familija, granična točka odbojnih periodičkih točaka. Odavde slijedi:

**Korolar 5.5.**  $J(P)$  je perfektan skup.

Skup odbojnih periodičkih točaka očito je invarijantan, tj ako je  $z \in J(P)$  tada je, prema gornjem teoremu i  $P(z) \in J(P)$ . Nije tako očito da to vrijedi i za praslike polinoma  $P$ . No, ako  $\{P^n\}$  nije normalna familija u  $z_0$ , tada nije normalna niti u praslici točke  $z_0$ . Sada iz teorema 5.4 slijedi, ako je  $z_0 \in J(P)$  onda je i  $P^{-1}(z_0) \in J(P)$ . Time smo dokazali da vrijedi sljedeće:

**Korolar 5.6.**  $J(P)$  je potpuno invarijantan skup.

Prema definiciji 1.21, homoklinička točka  $z$  za odbojnu fiksnu točku  $z_0$  je ona za koju postoji  $n > 0$  takav da je  $P^n(z) = z_0$  i za koju niz praslika  $P^{-i}(z)$  konvergira prema  $z_0$ . Sada opet iz dokaza teorema 5.4 slijedi:

**Korolar 5.7.** Svaka odbojna periodička točka polinoma  $P$  dopušta homokliničku točku. Skup homokliničkih točaka je gust u  $J(P)$ .

**Napomena 5.8.** *Ako su  $z_1$  i  $z_2$  odbojne periodičke točke tada postoji heteroklinička orbita koja ih spaja. Dakle, postoji točka  $z$  koja se završno preslikava na  $z_2$ , a čiji niz iteracija unazad konververgira ka  $z_1$ .*

Vidjeli smo da prednja orbita okoline svake točke u  $J(P)$  završno prekriva svaku točku u  $\mathbb{C}$  osim točka izuzetka. Iz ove činjenice slijedi da su praslike svake točke u  $J(P)$  guste u  $J$ . Sada imamo:

**Propozicija 5.9.** *Neka je  $z_0 \in J(P)$ . Vrijedi*

$$J(P) = Cl\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(z_0)\right).$$

**Korolar 5.10.**  *$J(P)$  ima prazan interior.*

*Dokaz:* Ako pretpostavimo da  $J(P)$  sadrži otvoren skup  $U$ , tada prema korolaru 3.8 najviše jedna točka iz  $\mathbb{C}$  nije sadržana u skupu

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P^n(U).$$

Budući da bazen atrakcije za  $\infty$  ne leži u Juliaovom skupu imamo kontradikciju.  $\square$

Gornji rezultat jedini je rezultat u ovom poglavlju koji ne vrijedi za racionalne i cijele funkcije.

**Propozicija 5.11.** *Ne postoji zatvoreni, potpuno invarijantan skup koji je pravi podskup Juliaovog skupa.*

*Dokaz:* Pretpostavimo suprotno, tj. da je  $K \subset J$ , zatvoren i potpuno invarijantan skup. Ako je  $\omega \in K$  onda je inverzna orbita točke  $\omega$  gusta u Juliaovom skupu  $J$ , te je zbog invarijantnosti skupa  $K$  sadržana u  $K$ . Budući da je  $K$  zatvoren slijedi  $K = J$ .  $\square$

Prisjetimo se (definicija 4.9) da smo za analitičku funkciju  $F$ , stabilni skup, odnosno bazen atrakcije privlačne fiksne točke  $z_0$ , definirali sa:

$$W^s(z_0) = \{z \mid F^n(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty\}.$$

Sa  $A(z_0)$  označili smo izravni bazen atrakcije, tj. maksimalnu domenu koja sadrži  $z_0$ , a na kojoj je familija  $\{F^n\}$  normalna familija. Sada imamo sljedeću posljedicu gornje propozicije:

**Propozicija 5.12.** *Rub skupa  $A(z_0)$  sadržan je u  $J(F)$ , a rub od  $W^s(z_0)$  je jednak  $J(F)$ .*

**Primjer 5.13.**  $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$  primjer je polinoma čiji je Juliaov skup zatvoreni interval. Interval  $[-2, 2]$  je zatvoren, potpuno invarijantan, te sadrži odbojnu fiksnu točku  $x = 2$  i njenu prasliku  $x = -2$ . Zato je  $J(Q_{-2}) \subseteq [-2, 2]$ . Kako bi pokazali da je  $J(Q_{-2})$  jednak ovom intervalu, iskoristimo činjenicu da rub bazena atrakcije točke  $\infty$  leži u  $J(Q_{-2})$  (propozicija 5.12). Orbita kritične točke nula ostaje ograničena, tj. ostaje unutar intervala  $-2 \leq x \leq 2$ . Prema napomeni 4.13 bazen atrakcije za  $\infty$  je jednostavno povezan. Dakle,  $J(Q_{-2})$  se ne može sastojati od dva disjunktna skupa. Stoga je  $J(Q_{-2})$  interval.

**Teorem 5.14.** Polinom  $P$  je kaotičan na  $J(P)$ .

*Dokaz:* Iz propozicije 5.9 zaključujemo da su periodičke točke su guste u  $J(P)$ . Ostaje dokazati toplošku tranzitivnost i osjetljivost na početne uvjete. Neka su  $z_1, z_2 \in J(P)$  i  $U_1, U_2$  njihove okoline. Možemo pretpostaviti da su  $z_1$  i  $z_2$  odbojne periodičke točke. Prema napomeni 5.8 postoji heteroklinička orbita koja spaja  $z_1$  i  $z_2$ . Odavde odmah slijedi topološka tranzitivnost polinoma  $P$ . Kako heteroklinička orbita leži u  $J(P)$ , zaključujemo da je  $P$  osjetljiv na početne uvjete.  $\square$



## Poglavlje 6

# Geometrija Juliaovih skupova

Za različite vrijednosti parametra  $c$  dobivamo različite Juliaove skupove, sa različitim svojstvima. Neke od njih: interval, jediničnu kružnicu, Cantorov skup, već smo opisali. Ovdje ćemo predstaviti još neke poznate, ali i neobične primjere, te se upoznati sa dinamikom koja stoji iza njih.

**Primjer 6.1.** *Znamo da  $Q_0$  ima privlačnu fiksnu točku u 0 i da je  $J(Q_0)$  jedinična kružnica. Ova kružnica je granica bazena atrakcije za 0 i za  $\infty$ . Slično vrijedi i za  $Q_c(z) = z^2 + c$ , kada je  $c$  blizu nule. Za dovoljno malo  $|c|$  polinom  $Q_c$  u blizini 0 ima privlačnu fiksnu točku. Kao i prije, rub bazena atrakcije te fiksne točke leži u  $J(Q_c)$ . Taj rub je jednostavna zatvorena krivulja, ali nije glatka krivulja, i uopće ne sadrži glatke lukove.*

Tvrđnje iz gornjeg primjera dokazat ćemo u naredne dvije propozicije.

**Propozicija 6.2.** *Neka je  $|c| < 1/4$ . Tada je Juliaov skup polinoma  $Q_c$  jednostavna zatvorena krivulja.*

*Dokaz:* Neka je  $\Gamma_0$  kružnica radijusa  $1/2$  sa središtem u 0. Privlačna fiksna točka i kritična točka funkcije  $Q_c$  nalaze se unutar kružnice  $\Gamma_0$ . Za one  $z$  koji su van  $\Gamma_0$  vrijedi  $|Q'_c(z)| > 1$ .

Za svako  $\theta \in S^1$ , definirat ćemo neprekidnu krivulju

$$\gamma_\theta: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C},$$

sa svojstvom da je  $z(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t)$  neprekidna parametrizacija skupa  $J(Q_c)$ . Najprije definirajmo  $z(\theta)$ . Neka je  $\Gamma_1$  praslika kružnice  $\Gamma_0$  po preslikavanju  $Q_c$ . Kritična točka funkcije  $Q_c$ , i njene praslike, leže unutar  $\Gamma_0$ . Odavde slijedi da je  $\Gamma_1$  jednostavna zatvorena krivulja koja u svom interioru sadrži  $\Gamma_0$ .  $\Gamma_1$  se na  $\Gamma_0$  preslikava surjektivno tako da se dvije točke preslikaju u jednu.

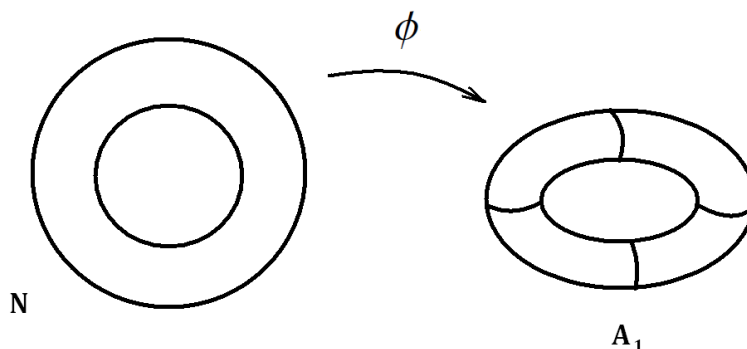


Krivulje  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_0$  su rubovi prstenastog područja kojeg označimo sa  $A_1$  ( $A_1$  možemo shvatiti kao fundamentalnu domenu privlačne fiksne točke  $z_0 = (1 - \sqrt{1 - 4c})/2$  polinoma  $Q_c$ ).

Neka je  $N$  kružni vijenac definiran sa

$$N = \{re^{i\theta} \mid 1 \leq r \leq 2, \theta \text{ proizvoljno}\}.$$

Izaberimo bilo koji difeomorfizam  $\phi: N \rightarrow A_1$  koji preslikava unutarnji i vanjski rub od  $N$  na korespondentne rubove u  $A_1$ .



Slika 6.1: Difeomorfizam  $\phi: N \rightarrow A_1$

Definiramo  $\gamma_\theta: [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$  sa

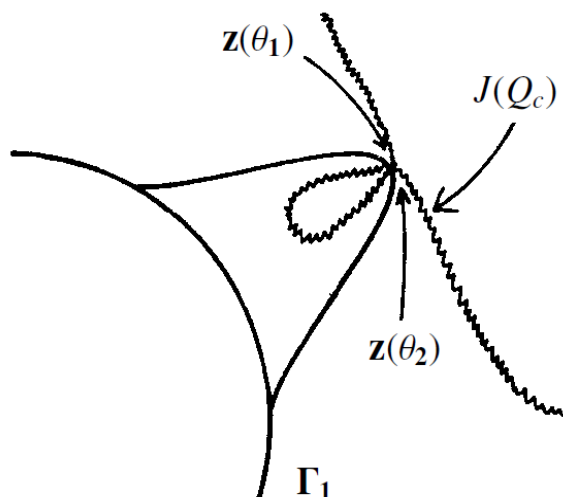
$$\gamma_\theta(r) = \phi(re^{i\theta}).$$

Za  $r \in [1, 2]$  imamo  $re^{i\theta} \in [\cos \theta + i \sin \theta, 2 \cos \theta + 2i \sin \theta]$ , te je  $\gamma_\theta$  slika zrake iz  $N$  po preslikavanju  $\phi$ . Proširimo sada  $\gamma_\theta$  i na  $r \geq 2$ . Polinom  $Q_c$  nema kritičnih točaka u eksterioru zatvorene krivulje  $\Gamma_1$ . Dakle, postoji jednostavna zatvorena krivulja  $\Gamma_2$  koja se po preslikavanju  $Q_c$  preslika na  $\Gamma_1$  tako da se dvije točke preslikaju u jednu. Štoviše,  $Q_c$  prstenasto područje  $A_2$  između  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , preslikava na  $A_1$ . Zato je prasluka od  $\gamma_\theta$  u  $A_1$  par krivulja iz  $A_2$  koje se ne sijeku.

Dakle, postoji jedinstvena krivulja u  $A_2$  koja siječe unutarnju krivulju  $\Gamma_1$ , i postoji jedinstvena krivulja u  $A_2$  koja sadrži točku  $\gamma_\theta(2)$ , za svako  $\theta$ . Spojimo ove dvije krivulje u točki  $\gamma_\theta(2)$ . Time smo dobili jednu krivulju definiranu na intervalu  $[1, 3]$ . Nastavljajući taj postupak, svako  $\gamma_\theta$  možemo proširiti na cijeli interval  $[0, \infty)$ . Sjetimo se da  $|Q'_c(z)| > k > 1$  znači da  $z$  leži u eksterioru  $\Gamma_1$ . Zato dužina svake ekstenzije  $\gamma_\theta$  opada geometrijski, te slijedi da  $\gamma_\theta(t)$  konvergira uniformno u  $\theta$  i da je

$$z(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t),$$

jedinstvena točka u  $\mathbb{C}$ , za svako  $\theta$ .



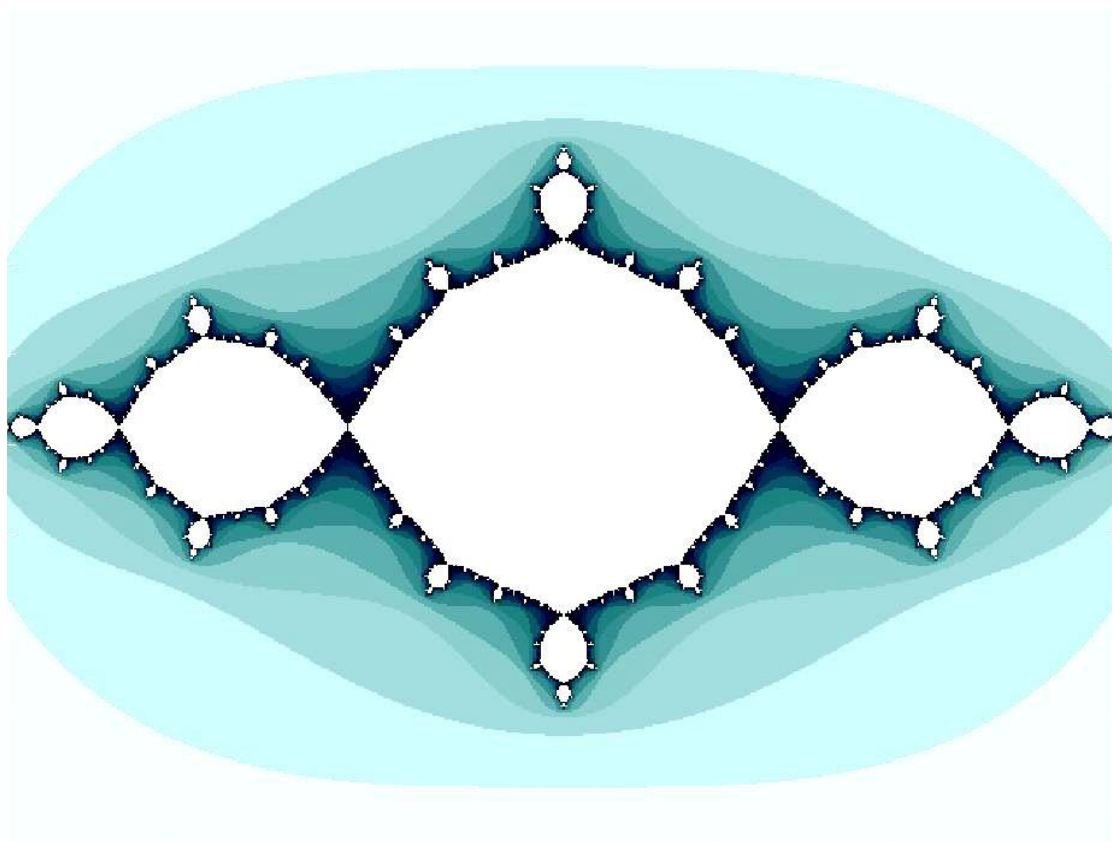
Slika 6.2: Jednostavno zatvoreno područje omeđeno sa  $\gamma_{\theta_1}(t)$ ,  $\gamma_{\theta_2}(t)$  i  $\Gamma_1$

Zahtjevamo da  $z(\theta)$  parametrizira jednostavnu zatvorenu krivulju u  $\mathbb{C}$ . Zbog uniformne konvergencije  $\gamma_\theta(t)$  u  $\theta$ , očito je  $z(\theta)$  neprekidno. Kako bi dokazali da je slika krivulje jednostavna, moramo dokazati, ako vrijedi  $z(\theta_1) = z(\theta_2)$ , da je tada  $z(\theta) = z(\theta_1)$ , za svako  $\theta$  za koje vrijedi  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ . Ako to nije slučaj, tada  $\gamma_{\theta_1}(t)$ ,  $\gamma_{\theta_2}(t)$  i dio krivulje  $\Gamma_1$  zatvaraju jednostavno povezano područje obuhvaćajući svako  $z(\theta)$  u svom interioru. Stoga postoji okolina oko  $z(\theta)$  čije slike pod iteracijama  $Q_c^n$  ostaju ograničene. Slijedi da  $z(\theta) \notin J(Q_c)$ . Time smo dobili kontradikciju.

□

**Propozicija 6.3.** *Neka je  $c \in \mathbb{C}$ , i neka je  $|c| < 1/4$ . Tada je  $J(Q_c)$  jednostavna zatvorena krivulja koja nema glatke lukove.*

*Dokaz:*  $Q_c$  ima odbojnu fiksnu točku u  $z_0 = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$ . Očito,  $Q'_c(z_0)$  nije pravi imaginarni broj. Slijedi da  $z_0$  ne leži na glatkom luku u  $z(\theta)$ . Ako bi to bio slučaj, tada bi i slika od  $z(\theta)$  bila gladak luk u  $J(Q_c)$ , i prolazila bi točkom  $z_0$ . Budući je  $Q'_c(z_0) \in \mathbb{C}$ , tangente na ove dvije krivulje ne bi bile paralelne. Zbog toga  $z(\theta)$  ne bi bila jednostavna u  $z_0$ . Prema propoziciji 5.9 praslike  $z_0$  su guste u  $J(Q_c)$ , te  $J(Q_c)$  ne sadrži glatke lukove.  $\square$



Slika 6.3: Juliaov skup za  $P(z) = z^2 - 1$

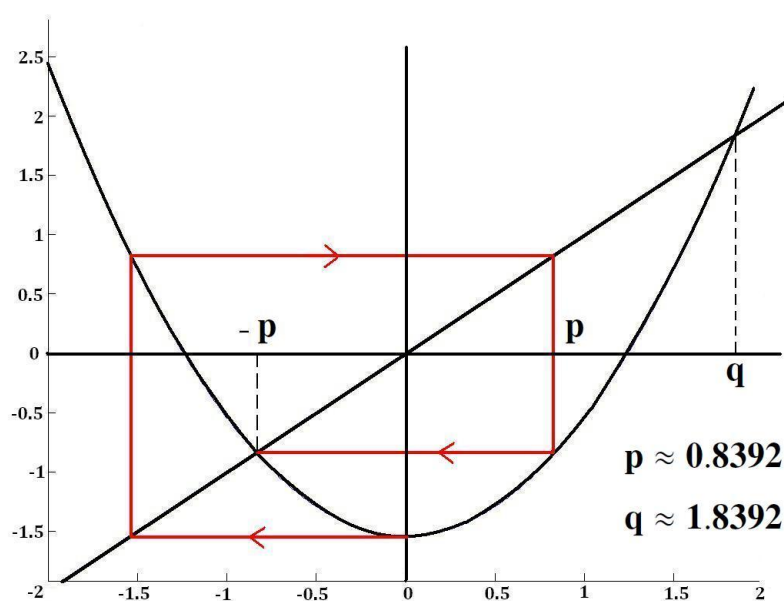
**Primjer 6.4.** *Promotrimo polinom  $P(z) = z^2 - 1$ . Primjetimo da je  $P(0) = -1$  i  $P(-1) = 0$ . Budući da je  $P'(0) = 0$  točke  $0$  i  $-1$  pripadaju privlačnoj periodičkoj orbiti perioda 2. Na realnoj je osi dinamika ovog polinoma posve jednostavna.  $P$  ima dvije odbojne fiksne točke  $(1 \pm \sqrt{5})/2$ . Fiksna točka  $(1 - \sqrt{5})/2$  dijeli bazen atrakcije između  $0$  i  $-1$ . Kao u*

dokazu propozicije 6.2, postoje dvije jednostavne zatvorene krivulje  $\gamma_0$  i  $\gamma_{-1}$  u  $J(P)$  koje redom okružuju 0 i  $-1$ . One omeđuju izravni bazen atrakcije točaka 0 i  $-1$  i sijeku se u fiksnoj točki  $(1 - \sqrt{5})/2$ . Točka 0 je jedina praslika za  $-1$ , te je krivulja  $\gamma_0$  jedina praslika krivulje  $\gamma_{-1}$ . Očito, 0 ima dvije praslike 1 i  $-1$ . Stoga  $\gamma_0$  ima dvije praslike, krivulju  $\gamma_{-1}$  i zatvorenu krivulju  $\gamma_1$  koja okružuje točku 1. Nastavimo li na isti način, koristeći svojstvo potpune invarijantnosti Juliaova skupa (korolar 5.6) zaključujemo da se  $J(P)$  sastoji od beskonačno mnogo različitih, jednostavnih zatvorenih krivulja. Interiori tih krivulja su komponente Fatouovog skupa.

Stabilni skup polinoma  $P$ , iz gornjeg primjera, sastoji se od beskonačno mnogo povezanih komponenti. To nam garantira sljedeća propozicija:

**Propozicija 6.5.** *Neka je  $P$  polinom stupnja 2. Stabilni skup polinoma  $P$  sastoji se ili od jedne, ili od dvije, ili od beskonačno mnogo povezanih komponenti.*

Slučaj kada je  $|c| \geq 2$  opisan je u propoziciji 2.4, odnosno primjeru 5.13. Za  $|c| < 1/4$  vratimo se u 6.3, a za  $c = -1$  pogledamo 6.4. Tu su redom opisani primjeri čiji se stabilni skup sastoji od jedne, dvije, te beskonačno mnogo povezanih komponenti.



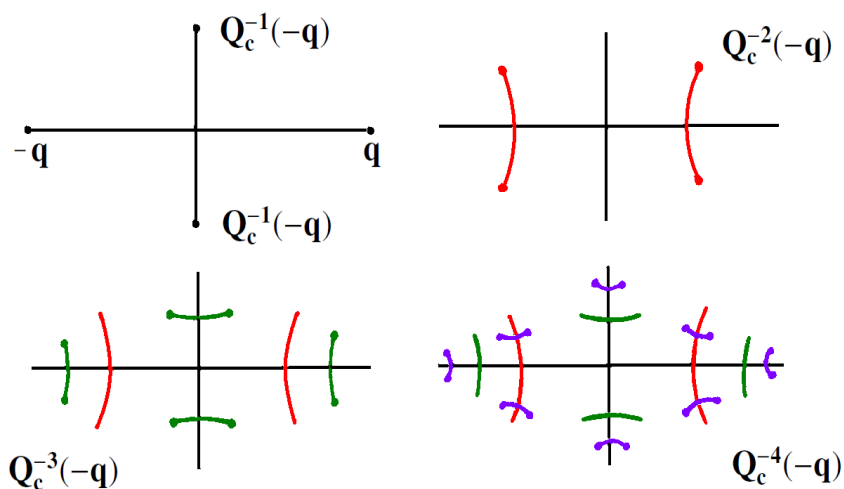
Slika 6.4:  $Q_c$  za  $c \approx -1.543689$

**Primjer 6.6.** Promatramo polinom  $Q_c(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , u jednom specijalnom slučaju. Naime, postoji  $c < 0$  takav da:

1. Za kritičnu točku 0 vrijedi da je  $Q_c^3(0) = -p$ , gdje je  $-p$  odbojna fiksna točka (dakle, 0 je završno periodička točka).
2. Odbojne periodičke točke polinoma  $Q_c$  su guste na intervalu  $[-p, p]$ .

Numerički se pokaže kako je  $c \approx -1.543689$ ,  $p \approx 0.839268 \dots$

Inteval  $[-p, p]$  sadržan je u  $J(Q_c)$ . Sve praslike ovog intervala također leže u  $J(Q_c)$ . Polinom  $Q_c$  ima još jednu odbojnu fiksnu točku. Označimo je sa  $q$ . Iz grafa 6.4 se lako vidi da je  $[-q, q] \subset J(Q_c)$ . Budući je  $c \in \langle -q, q \rangle$ , praslika ovog intervala sastoji se od dva intervala. Čine ju, sam interval  $[-q, q]$  i još jedan interval simetričan oko 0, ali na imaginarnoj osi. Taj interval je praslika intervala  $[-q, c]$ . Praslika ovog para intervala sastoji se od četiri krivlje prikazane na donjoj slici. Nastavimo li taj postupak, možemo



Slika 6.5: Konstrukcija dendrita

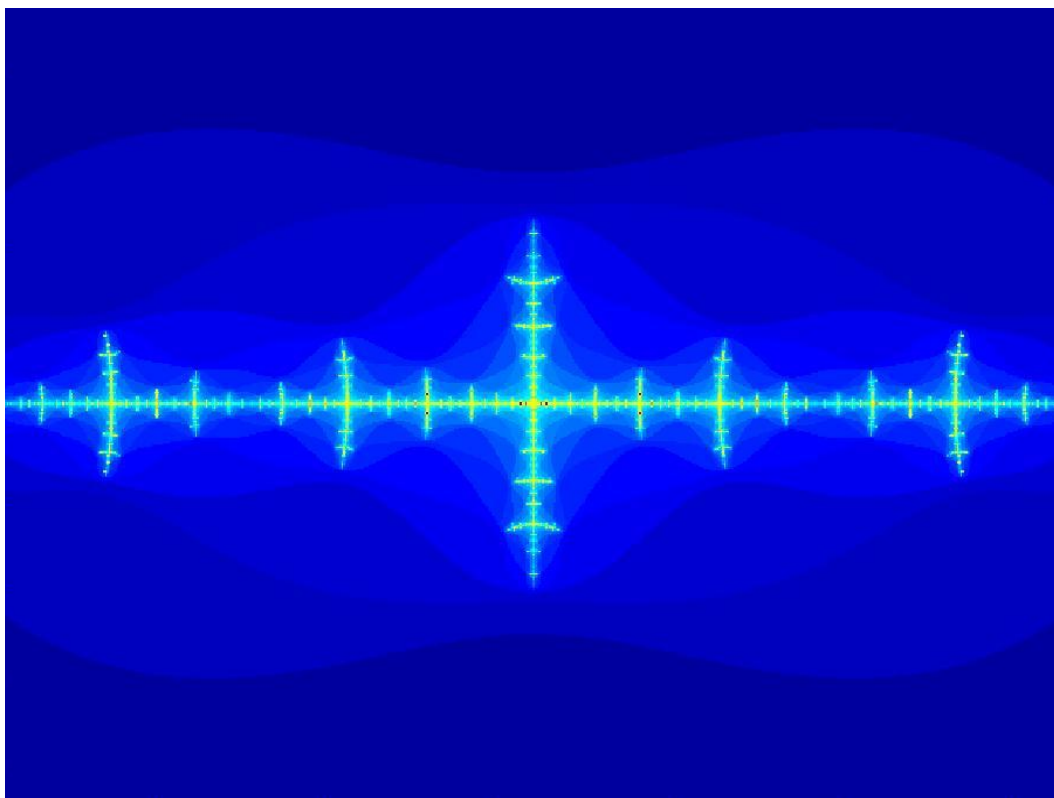
zaključiti da se  $Q_c^{-n}([-q, q])$  sastoji od  $2^n$  zakrivljenih segmenata, koji jedan drugog sijeku u praslici točke 0. Krajnje točke ovih segmenata praslike su fiksne točke  $q$ . Prema propoziciji 5.9,  $J(Q_c)$  je zatvorenje ovog skupa praslika. Za razliku od prethodnog primjera, ovdje  $Q_c^{-n}([-q, q])$  ne omeđuje područje u  $\mathbb{C}$ .

Strukturu skupa

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^{-n}([-q, q])$$

nazivamo *dendrit*. Juliaov skup ovog preslikavanja prikazan je na slici 6.6.

Opisani primjeri ilustriraju ovisnost Juliaovih skupova o orbiti kritične točke. Kada kritična točka pod iteracijama polinoma  $Q_c$  teži ka  $\infty$ , Juliaov skup je Cantorov skup. Kada kritična točka teži ka privlačnoj fiksnoj ili periodičkoj točki, Juliaov skup je zatvarač jedne ili više jednostavnih zatvorenih krivulja. Ako je kritična točka završno periodička, ali nije periodička, Juliaov skup je dendrit, a parametar  $c$  u tom se slučaju naziva *Misiurewiczeva točka*.



Slika 6.6: Dendrit



# Poglavlje 7

## Neutralne periodičke točke

U ovom poglavlju proučavamo ponašanje analitičkih funkcija u okolini neutralne fiksne točke. Znamo da za neutralnu fiksnu točku  $z_0$  polinoma  $P$  vrijedi  $|P'(z_0)| = 1$ . Zapišimo to ovako:  $|P'(z_0)| = |e^{2\pi i\theta}| = 1$ . Ako je  $\theta$  racionalan broj kažemo da je  $z_0$  racionalna (parabolička) fiksna točka. Ako je  $\theta$  iracionalna broj, govorimo o iracionalnoj fiksnoj točki.

Uočimo da polinomi oblika  $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$ , gdje je  $|\lambda| = 1$  i gdje je  $\lambda$  korijen iz jedinice, imaju racionalnu neutralnu fiksnu točku u nuli. Najprije se bavimo dinamikom takvih polinoma.

### 7.1 Racionalne neutralne fiksne točke

Promatramo polinom  $P(x) = x + x^2$  u realnom slučaju. Nula je privlačna fiksna točka za one točke koje su joj sa lijeve strane, unutar intervala  $\langle -1, 0 \rangle$ , a odbojna fiksna točka za točke koje su joj sa desne strane. Sličan fenomen javlja se i u kompleksnoj ravnini.

**Propozicija 7.1.** *Neka je  $P(z) = z + z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$ . Tada postoji  $\mu > 0$  takav da je nula*

1. *privlačna fiksna točka za sve točke interiora kružnice sa središtem u  $-\mu$ , radijusa  $\mu$ .*
2. *odbojna fiksna točka za sve točke interiora kružnice sa središtem u  $\mu$ , radijusa  $\mu$ .*

*Dokaz:* Najprije, konjugacijom polinoma  $P$  sa Möbiusovom transformacijom  $H(z) = 1/z$  eliminiramo fiksnu točku nula, "šaljući je u beskonačnost". Na taj način dobijemo funkciju

$$G(z) = (H \circ P \circ H^{-1})(z) = \frac{z^n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \dots + a_n}.$$



Dijeljenjem dobijemo  $G(z) = z - 1 + G_0(z)$ , gdje je

$$G_0(z) = \frac{b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_3 z^{n-3} + \dots + a_n}$$

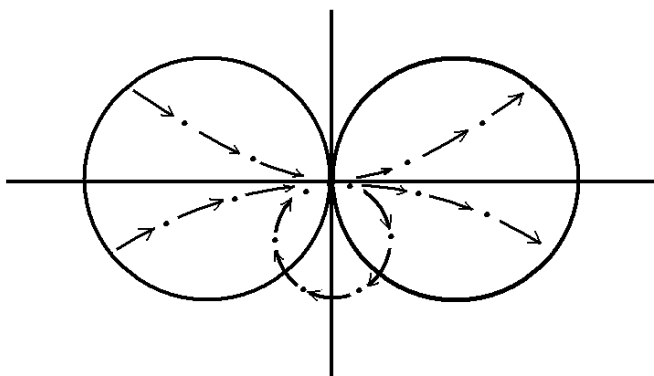
$$b_2 = 1 - a_3, \quad b_i = a_i - a_{i+1}, \quad i = 3, \dots, n-1, \quad b_n = a_n.$$

Primijetimo da je

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G_0(z) = 0.$$

U točkama blizu beskonačnosti funkcija  $G$  se ponaša kao translacija za jedan u lijevo. Posebno, postoji  $\delta > 0$  takav da ako je  $\eta > \delta$  i  $Re(z) < -\eta$  onda je  $Re(G(z)) < -\eta$ . Dakle,  $G$  svaku točku poluravnine  $Re(z) < -\eta$  preslika na točku koja se ponovo nalazi u toj istoj poluravnini.

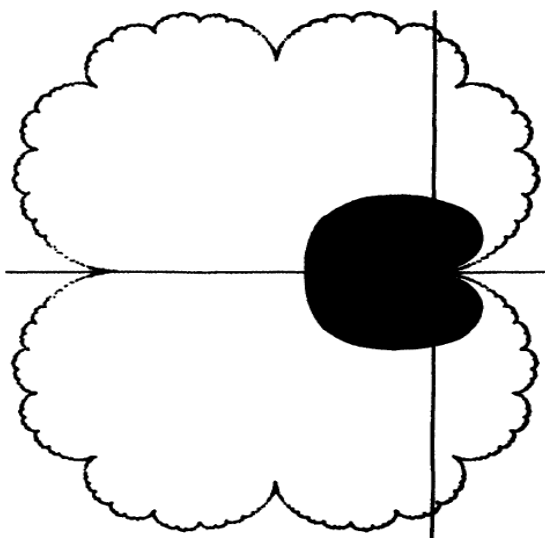
Neka je  $\omega = a + bi$ , te neka je  $\omega$  u poluravnini  $Re(z) < -\eta$ . Tada je  $a \in \langle -\infty, -\eta \rangle$ . Funkcija  $H$  realni dio  $a = Re(\omega)$  preslika u interval  $\langle -\frac{1}{\eta}, 0 \rangle$ . Odavde lako slijedi da  $H$ , točke poluravnine  $Re(z) < -\eta$  preslika na točke koje se nalaze unutar kružnice radijusa  $1/2\eta$  sa središtem u  $-1/2\eta$ . Nula je, pod iteracijama polinoma  $P$  privlačna fiksna točka za sve točke unutar te kružnice. Time smo dokazali da za  $\mu = -1/2\delta$  vrijedi prva tvrdnja propozicije. Drugu tvrdnju dokazujemo slično, promatranjem poluravnine  $Re(z) > \eta$ . Geometrijski smisao propozicije vidljiv je na donjoj slici.  $\square$



Slika 7.1: Privlačna i odbojna latica

Neka je  $P(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n$ . Prema [22] str. 2500 *privlačna latica* (engl. attracting petal)  $L^+$  polinoma  $P$  u nuli je otvoreno, jednostavno povezano, prednje invarijantno područje takvo da je  $0 \in \partial L^+$ . Preciznije  $L^+$  je privlačna latica ako je  $P(\overline{L^+}) \subset \overline{L^+} \cup \{0\}$  i  $\bigcap_{n \geq 0} P^n(\overline{L^+}) = \{0\}$ . Dakle, svaka se orbita unutar privlačne latice pod iteracijama polinoma  $P$  asimptotski približava ishodištu. *Odbojna latica* (engl. repelling petal)  $L^-$ , privlačna je latica za  $P^{-1}$ , koja postoji lokalno jer je  $P'(0) = 1$ . Privlačne, odnosno odbojne latice su u parovima disjunktne.

Promatrajmo polupravce (zrake) iz 0 pod kutem  $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , gdje je  $n$  stupanj polinoma  $P(z) = z + z^{n+1}$ . Ako je  $k$  neparan broj onda je zraka  $\theta_k$  lokalno privlačna u smislu da orbite točkaka duž te zrake teže ka 0. Ako je  $k$  paran broj ili 0, zraka  $\theta_k$  je lokalno odbojna, a orbite točkaka duž takve zrake bježe u  $\infty$ .



Slika 7.2: Juliaov skup za  $P(z) = z + z^2$  i pridružena latica

Objasnimo ove pojmove na primjerima:

**Primjer 7.2.** Neka je  $P(z) = z + z^2$ . U ovom slučaju privlačna i odbojna latica se poklapaju, a rub te latice je kardioida. Većina točkaka koje leže u blizini točke nula, ali ne sve, pređu sa odbojne na privlačnu stranu, te se vrate nazad. Točke desno od nule, na pozitivnom dijelu realne osi teže ka  $\infty$ .

**Primjer 7.3.** Neka je  $P(z) = z + z^3$ . Ako je  $z \in \mathbb{R}$  i  $z \neq 0$  tada  $P^n(z) \rightarrow \infty$ . Budući da je  $P(iy) = i(y-y^3)$ , gdje je  $y = \text{Im } z$ , možemo reći kako  $P$  "čuva" imaginarnu os, tj. točke koje leže na imaginarnoj osi preslikava na imaginarnu os. Grafička analiza funkcije  $y \rightarrow y - y^3$  pokazuje da za  $|y| < \sqrt{2}$  vrijedi  $P^n(iy) \rightarrow 0$ . Točke  $\pm i\sqrt{2}$  su odbojne periodičke točke sa orbitom perioda 2. Stoga  $P$  ima najmanje dvije privlačne i dvije odbojne latice. Kasnije ćemo dokazati da  $P$  ima točno dvije privlačne i dvije odbojne latice.

**Primjer 7.4.** Neka je  $P(z) = z + z^{n+1}$ , te neka je  $\lambda$   $n$ -ti korijen jedinice. Budući da je  $P(t\lambda) = \lambda t(1 + t^n)$ ,  $P$  čuva pravac  $t \rightarrow t\lambda$ . Iteriranjem dobijemo da  $P^j(\lambda t) \rightarrow \infty$ , za svako  $t \neq 0$ . Stoga su svi takvi pravci odbojni. Pravci  $t \rightarrow t\lambda$  su zapravo naše zrake  $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ , kada je  $k$  paran broj ili 0. Slično, ako je  $\omega$   $n$ -ti korijen iz  $-1$  lako je provjeriti da su pravci  $t \rightarrow \omega t$  lokalno privlačni, tj. to su zrake  $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ , za  $k$  neparan.

Promatrajmo općeniti slučaj kada je  $P(z) = z + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n$ ,  $a_k \neq 0$ . Neka je  $H(z) = 1/z^{k-1}$  i neka je  $H^{-1}(z) = 1/z^{1/(k-1)}$  analitički inverz funkcije  $H$  definiran u poluravnini  $\text{Re } z < -\eta$  (propozicija 7.1), uz uzimanje glavne grane  $(k-1)$ -korijena iz  $z$ .

Izračunajmo  $G = H \circ P \circ H^{-1}$ .

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{k-1}}} + a_k \frac{1}{z^{\frac{k}{k-1}}} + a_{k+1} \frac{1}{z^{\frac{k+1}{k-1}}} + \dots + a_n \frac{1}{z^{\frac{n}{k-1}}}\right)^{k-1}} \\ &= \frac{(z^{\frac{n}{k-1}})^{k-1}}{\left(z^{\frac{n-1}{k-1}} + a_k z^{\frac{n-k}{k-1}} + a_{k+1} z^{\frac{n-k-1}{k-1}} + \dots + a_{n-1} z^{\frac{1}{k-1}} + a_n\right)^{k-1}}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Stavimo da je  $A(z) = a_k z^{\frac{n-k}{k-1}} + a_{k+1} z^{\frac{n-k-1}{k-1}} + \dots + a_{n-1} z^{\frac{1}{k-1}} + a_n$ . Primjenom binomnog poučka nazivnik gornjeg izraza poprima oblik:

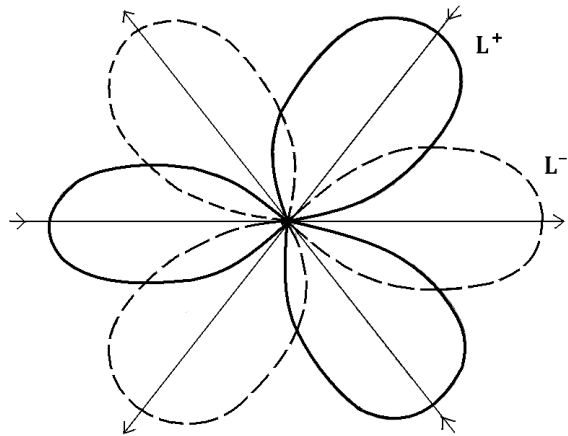
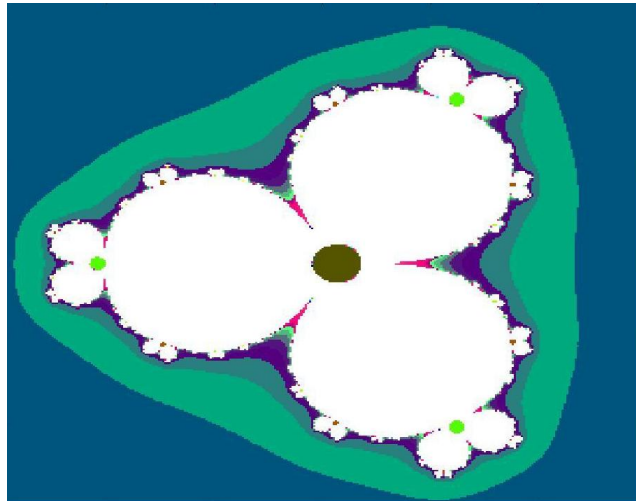
$$\begin{aligned} (z^{\frac{n-1}{k-1}} + A(z))^{k-1} &= z^{n-1} + (k-1)z^{\frac{(n-1)(k-2)}{k-1}} \left(a_k z^{\frac{n-k}{k-1}} + a_{k+1} z^{\frac{n-k-1}{k-1}} + \dots + a_{n-1} z^{\frac{1}{k-1}} + a_n\right) + \dots + (A(z))^{k-1} \\ &= z^{n-1} + (k-1)a_k z^{n-2} + K(z). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Stoga možemo pisati

$$G(z) = \frac{z^n}{z^{n-1} + c z^{n-2} + K(z)},$$

gdje je  $c = (k-1)a_k$  i

$$K(z) = (k-1)z^{\frac{(n-1)(k-2)}{k-1}} \left(a_{k+1} z^{\frac{n-k-1}{k-1}} + \dots + a_{n-1} z^{\frac{1}{k-1}} + a_n\right) + \dots + (A(z))^{k-1}.$$

Slika 7.3: Privlačne i odbojne latice za  $P(z) = z + z^4$ Slika 7.4: Juliaov skup za  $P(z) = z + z^4$

Iz propozicije 7.1 i navedenih primjera zaključujemo kako polinom  $P$  ima  $k-1$  privlačnih i  $k-1$  odbojnih latica. Dakle, vrijedi:

**Korolar 7.5.** *Neka je*

$$P(z) = z + a_k z^k + \dots + a_n z^n, \quad a_k \neq 0.$$

*Tada postoji točno  $k-1$  privlačnih i  $k-1$  odbojnih latica polinoma  $P$  u nuli.*

Neka je  $\lambda^m = 1$  i neka je  $\lambda^j \neq 1$  za  $1 \leq j < m$ . Tada preslikavanje

$$P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

ima racionalnu neutralnu fiksnu točku u ishodištu. Prethodna diskusija omogućit će nam da opišemo dinamiku na nekoj okolini oko nule i za ovakav oblik polinoma  $P$ .

**Lema 7.6.** *Neka je*

$$P(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^n a_k z^k,$$

*gdje je  $\lambda^m = 1$ , i  $\lambda^j \neq 1$ , za  $1 \leq j < m$ . Tada za neko  $l > 0$  postoji okolina  $U$  oko 0 i analitička funkcija  $H: U \rightarrow \mathbb{C}$  takva da  $H^{-1} \circ P \circ H$  ima oblik  $\lambda z + b_{ml+1} z^{ml+1} + \dots$*

*Dokaz:* Da bismo dokazali lemu moramo reducirati potencije stupnja  $\leq ml$ . Prvo ćemo eliminirati potencije stupnja dva u  $P$ . Neka je

$$P_2(z) = \lambda z + b_3 z^3 + \dots$$

i neka je  $H(z) = z + Az^2$ . Cilj nam je definirati  $A$  tako da vrijedi  $H \circ P_2 = P \circ H$ . Uspoređivanjem koeficijenata uz potencija drugog stupnja, na lijevoj i desnoj strani u gornjoj jednadžbi dobijemo da je

$$A = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda}.$$

Očito, potenciju drugog stupnja možemo eliminirati ako je  $a_2 = 0$  ili ako je  $\lambda \neq 0, 1$ . Na isti način, uzastopno eliminiramo potencije višeg reda koristeći konjugaciju  $H(z) = z + Az^k$ . U tom je slučaju  $A = \frac{a_k}{\lambda^k - \lambda}$ .

□

Neka je koeficijent uz  $z^{ml+1}$  jednak jedan, tj.  $P(z) = \lambda z + z^{ml+1} + \dots$ . Može se pokazati da je

$$P^m(z) = z + m\lambda^{m-1} z^{ml+1} + \dots$$

Ovakav oblik imaju baš ona preslikavanja koja smo promatrali u prvom dijelu, kada smo zaključili da  $P^m$  ima točno  $ml$  privlačnih i  $ml$  odbojnih latica. Time smo dokazali:

**Teorem 7.7. (Leau-Fatouov cvjetni teorem)** *Neka je  $P(z) = \lambda z + \dots$ , pri čemu je  $\lambda^m = 1$ , te  $\lambda^j \neq 1$ , za  $1 \leq j < m$ . Tada postoji  $l > 0$  takav da  $P$  ima  $ml$  privlačnih i  $ml$  odbojnih latica u 0. Svaka latica je fiksna sa  $P^m(z)$ .*

Vratimo se na poglavlje o Juliaovim skupovima i na propoziciju 5.2. Dokazali smo da  $P$  ili ima odbojnu ili ima neutralnu fiksnu točku. Ako  $P$  ima odbojnu fiksnu točku onda iz definicije 2.1 slijedi da je  $J(P) \neq \emptyset$ . No, ostali smo dužni tu tvrdnju dokazati i za neutralne fiksne točke.

Kao i obično, pretpostavimo da je nula neutralna fiksna točka polinoma  $P$ . To znači da je

$$P(z) = z + a_k z^k + \dots,$$

gdje je  $a_k \neq 0$ . Zapišimo  $n$ -tu iteraciju prethodnog polinoma u obliku  $P^n(z) = z + na_k z^k + \dots$ . Sada je  $(P^n)^{[k]}(0) = na_k k!$ , pa slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(P^n)^{[k]}(0)| \rightarrow \infty.$$

Dakle, ne postoji podniz niza  $P^n$  koji konvergira prema analitičkoj funkciji u 0, tj.  $\{P^n\}$  nije normalna familija niti na jednoj okolini oko 0.

Budući da nula nije točka izuzetka, postoji  $z_0 \neq 0$  takav da je  $P(z_0) = 0$ . Neka je  $U$  okolina oko 0 koja ne sadrži  $z_0$ . Možemo pretpostaviti kako je  $U$  sadržana u uniji privlačnih i odbojnih latica. Ako je  $z \in U$ , tada  $P^n(z) \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$  ili kada  $n \rightarrow -\infty$ . Kako  $\{P^n\}$  nije normalna familija na  $U$ , postoje prirodan broj  $k$  i  $z_1 \in U$  takvi da je  $P^k(z_1) = z_0$ . Očito se  $z_1$  ne nalazi unutar privlačne latice. Stoga mora ležati unutar odbojne latice. Zaključujemo kako je  $z_1$  homoklinička točka za  $P$ . Ostatak dokaza je potpuno isti kao u teoremu 5.4 te ispuštamo detalje. Time je dokazana propozicija 5.3.

## 7.2 Iracionalne neutralne fiksne točke

Promatrajmo sada analitičku funkciju oblika  $F(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ , definiranu na nekoj okolini oko 0, pri čemu je  $|\lambda| = 1$ , ali  $\lambda$  nije korijen iz jedinice. Broj  $\lambda$  možemo pisati u obliku  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ , gdje je  $\theta$  iracionalan broj kojeg zovemo *rotacioni broj* (engl. rotation number).

Očito je 0 iracionalna neutralna fiksna točka funkcije  $F$ . Postavlja se pitanje kakav mora biti rotacioni broj  $\theta$  da bismo funkciju  $F$  mogli linearizirati na nekoj okolini oko nule.

**Definicija 7.8.** ([15], str. 67) *Kažemo da je  $\theta$  diofantski broj ako postoje konstante  $a > 0$  i  $b \geq 2$  takve da za svaki racionalan broj  $p/q$  vrijedi  $|\theta - p/q| > a/q^b$ .*

**Teorem 7.9. (Siegel)** *Pretpostavimo da je  $F(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$  i  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ , pri čemu je  $\theta$  iracionalan broj. Ako je  $\theta$  diofantski broj tada postoji okolina  $U$  oko 0 na kojoj je  $F$  analitički konjugirana iracionalnoj rotaciji  $L(z) = \lambda z$ .*

Područje na kojem je  $F$  konjugiran iracionalnoj rotaciji naziva se *Siegelov disk*, a točku 0 nazivamo *Siegelova točka*. Budući da u Siegelovom disku nema drugih periodičkih točaka ( $\theta$  je iracionalni broj), ovo područje leži u stabilnom skupu funkcije  $F$ , tj. leži u Fatouovom skupu. Iracionalnu neutralnu fiksnu točku za koju linearizacija nije provediva nazivamo *Cremerova točka*. Takva točka pripada Juliaovom skupu. Navodimo jedan takav primjer kada je rotacioni broj  $\theta$  iracionalan ali nije diofantski te u tom slučaju Siegelov teorem ne vrijedi.

**Primjer 7.10.** *Pretpostavimo da je  $P(z) = \lambda z + \dots + z^d$ , gdje je  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ , te da je  $\theta$  iracionalni broj. Pretpostavimo također da za beskonačno mnogo prirodnih brojeva  $n$  vrijedi*

$$|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}.$$

*Jednadžbu  $P^n(z) - z = 0$  zapišimo u obliku*

$$z^{d^n} + \dots + (\lambda^n - 1)z = 0.$$

*Jedan od korijen ove jednadžbe je nula. Ostale korijene ove jednadžbe označimo sa  $z_1, \dots, z_{d^n-1}$ . Iz Vièteovih formula slijedi*

$$|z_1| \cdot \dots \cdot |z_{d^n-1}| = |\lambda^n - 1|.$$

*Neka je  $m = \min\{|z_i|, i = 1, \dots, d^n - 1\}$ . Sada je*

$$0 \leq m^{d^{n-1}} \leq |\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}.$$

*Dakle, beskonačno mnogo periodičkih točaka konvergira ka 0 kada  $n \rightarrow \infty$ . Kako iracionalna rotacija nema drugih periodičkih točaka osim točke 0, slijedi da je 0 u Juliaovom skupu.*

Može se pokazati da zaista postoji iracionalan broj  $\lambda$  takav da za beskonačno mnogo  $n$ -ova vrijedi

$$|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}.$$

Dokaz gornje tvrdnje zahtijeva zalazak u područje diofantskih aproksimacija. Više o tome, kao i o narednim navodima može se naći u [17], str. 59.

Iracionalni broj  $\theta$  možemo aproksimirati racionalnim brojem. Promotrimo jednostavni verižni neprekidni razlomak

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Pri tome su brojevi  $a_n$  za  $n = 1, 2, \dots$  prirodni brojevi. Broj  $a_0$  može poprimiti i vrijednost nula. Racionalnu konvergentu broja  $\theta$  definiramo sa

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

i označavamo je sa

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n].$$

Brojevi  $p_n, q_n$  zadovoljavaju rekurzije

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + 1; \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1. \end{aligned}$$

Iz  $q_n > q_{n-1}$  i  $q_n > 2q_{n-2}$  slijedi  $q_n \rightarrow \infty$ . Prema [17], str. 59 vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_{n+1} q_n} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Oдавде zaključujemo da  $p_n/q_n \rightarrow \theta$ . Posebno, za iracionalni broj  $\theta$  uvodimo oznaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

.

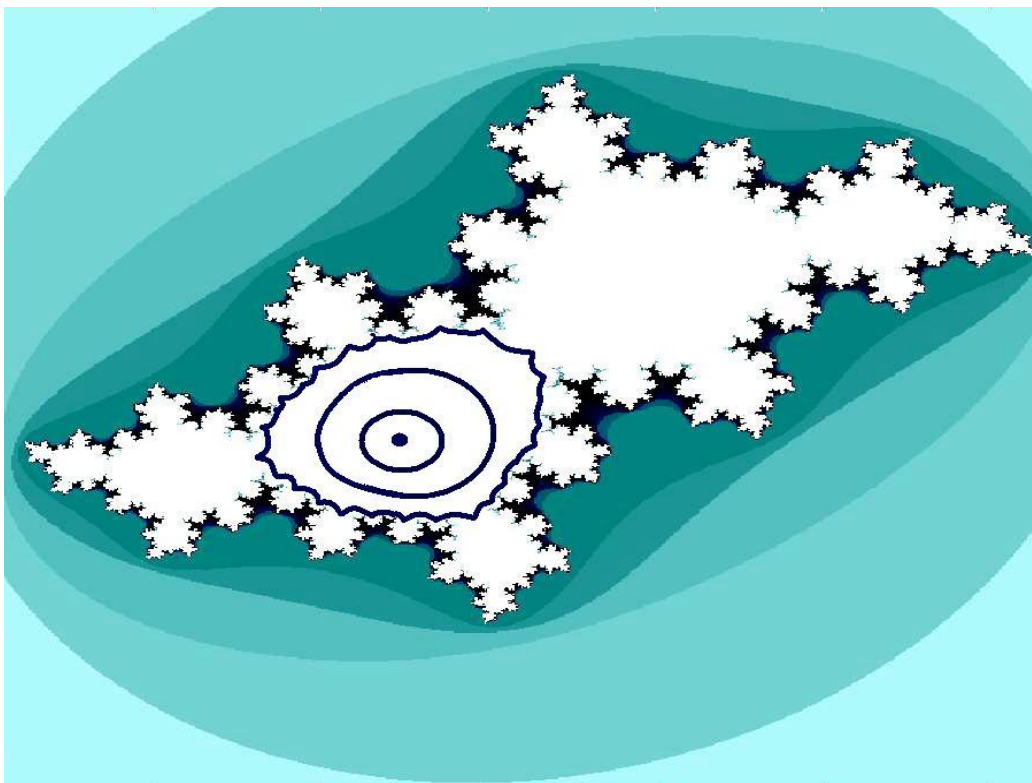
Navedimo sada neke novije rezultate (bez dokaza) koji generaliziraju Siegelov teorem.

**Definicija 7.11.** Kažemo da je iracionalni broj  $\theta$  Bryunov broj ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n}$$

konvergira.





Slika 7.5: Popunjen Juliaov skup za slučaj kada je rotacioni broj jednak zlatnoj sredini, tj.  $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2 = [0, 1, 1, \dots]$ , sa Siegelovim diskom i nekoliko ucrtanih orbita

**Teorem 7.12. (Bryuno)** Ako rotacioni broj  $\theta$  zadovoljava uvjet  $\sum \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < \infty$  tada funkciju oblika

$$F(z) = e^{2\pi i\theta} z + a_2 z^2 + \dots$$

možemo linearizirati lokalno na nekoj okolini oko 0..

**Teorem 7.13. (Yoccoz)** Ako je  $\sum \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = \infty$  tada funkcija

$$F(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta} z$$

ima svojstvo da svaka okolina oko 0 sadrži beskonačno mnogo periodičkih orbita. U ovom slučaju 0 je Cremerova točka.

Više o ovome može se naći u [26] (pogl. Cremer points and Siegel Disks), odnosno na web adresi iste knjige [25].

Općenito,  $\theta$  je Bryunov broj ako i samo ako je funkcija

$$F(z) = e^{2\pi i\theta} z + a_2 z^2 + \dots$$

linearizabilna na nekoj okolini neutrane fiksne točke 0 ([27], pogl. Dynamics of polynomial maps, str. 20).



## Poglavlje 8

# Mandelbrotov skup

Promatranje kritične orbite, tj. orbite kritične točke kvadratne funkcije  $Q_c$  dovest će nas do jednog od najljepših teorema kompleksne dinamike: teorema o fundamentalnoj dihotomiji. Prije nego iskažemo taj teorem moramo definirati neke nove pojmove:

**Definicija 8.1.** *Popunjen (engl. filled-in) Juliaov skup, funkcije  $Q_c$ , u oznaci  $K_c$ , je skup točaka čije su orbite ograničene tj.*

$$K_c = \{z \mid Q_c^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

**Primjer 8.2.** *Za  $c = 0$  lako možemo odrediti popunjen Juliaov skup,  $K_0$ . Neka je  $z_0$  početna iteracija i  $z_0 = re^{i\theta}$  zapis točke  $z_0$  u polarnim koordinatama, gdje je  $\theta$  polarni kut, a  $r$  radijvektor. Točke orbite  $z_0$  su:*

$$z_0 = re^{i\theta}, z_1 = r^2e^{2i\theta}, z_2 = r^4e^{4i\theta}, \dots, z_n = r^{2^n}e^{2^n i\theta}, \dots$$

*Za  $r > 1$  orbita točke  $z_0$  teži ka  $\infty$ . Za  $r < 1$  orbita konvergira ka 0, a za  $r = 1$  orbita točke  $z_0$ , za svako  $n$ , ostaje zarobljena unutar jedinične kružnice. Stoga je  $K_0$  zatvoren krug radijusa 1 sa središtem u 0, (vidi [11]).*

**Napomena 8.3.** *Često se u literaturi pojam Juliaova skupa funkcije  $Q_c$  poistovijećuje sa pojmom popunjenog Juliaovog skupa. No, ti pojmovi nisu isti i može se pokazati da je  $K_c$  zatvoren i potpuno invarijantan, te da je  $J(Q_c)$  rub skupa  $K_c$ .*

**Teorem 8.4. (Teorem o fundamentalnoj dihotomiji)** *Pretpostavimo da je  $0 \in K_c$ . Tada je  $K_c$  povezan skup. Ako  $0 \notin K_c$ , tada je  $K_c$  Cantorov skup.*

Teorem, dakle, tvrdi da popunjen Juliaov skup funkcije  $Q_c(z) = z^2 + c$  može biti ili povezan skup, te se sastoji od jedne komponente ili Cantorov skup, pa se sastoji od beskonačno mnogo komponenti. Drugim riječima, ne postoji parametar  $c$  za kojeg se  $K_c$  sastoji od, naprimjer, 23, 46 ili 677 komponenti.

*Dokaz:* Dokaz teorema provesti ćemo postupno, kroz niz propozicija. Primijetimo najprije da prema primjeru 1.26 funkcija  $Q_c$  na Riemannovoj sferi ima fiksnu točku u  $\infty$  za koju vrijedi  $Q'_c(\infty) = 0$ . Lako se vidi da je  $Q''_c(\infty) \neq 0$ . Stoga, prema napomeni 4.7, odnosno prema Teoremu o linearizaciji, Teorem 4.1, postoji  $R > 0$  i okolina  $U_R$  oko  $\infty$  na kojoj postoji analitički homeomorfizam  $\phi_c: U_R \rightarrow D_R = \{z \mid |z| > R\}$ , koji topološki konjugira  $Q_c$  i preslikavanje  $Q_0(z) = z^2$ , tj. vrijedi:

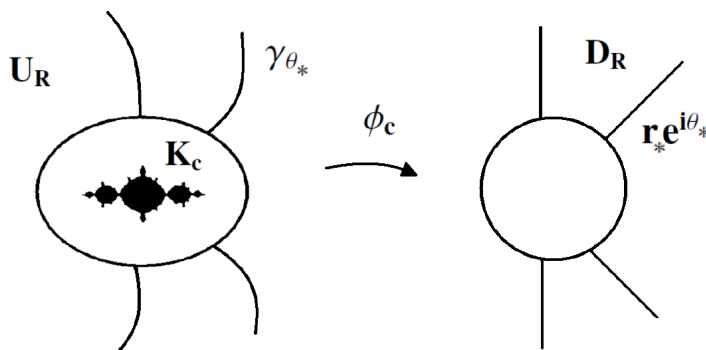
$$\phi_c(Q_c(z)) = Q_0(\phi_c(z)) = (\phi_c(z))^2, \quad z \in U_R. \quad (8.1)$$

To znači da je dinamika funkcije  $Q_c$  u okolini točke  $\infty$  ekvivalentna dinamici funkcije  $Q_0$ .

Pomoću preslikavanja  $\phi_c$  možemo otvorenom skupu  $U_R$  pridružiti polarne koordinate. Za fiksni kut  $\theta_*$  promatrajmo zraku oblika  $\arg z = \theta_*$ , i  $r > R$ . Označimo presliku  $\phi_c^{-1}(re^{i\theta_*})$  sa  $\gamma_{\theta_*}$ . Krivulju  $\gamma_{\theta_*}$  nazivamo *vanjska zraka* (engl. external ray). Zbog 8.1 imamo

$$\phi_c(Q_c(\gamma_{\theta_*})) = (\phi_c(\gamma_{\theta_*}))^2 = r^2 e^{2i\theta_*}, \quad (8.2)$$

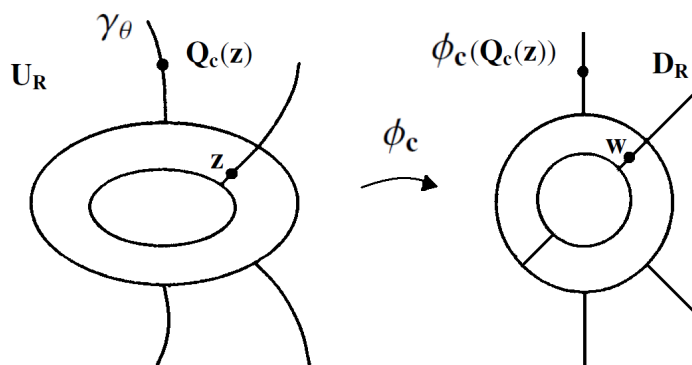
pa vrijedi da je  $Q_c(\gamma_{\theta_*}) = \gamma_{2\theta_*}$ , (vidi [4], str. 2). Neka je  $\rho_{r_*} = \phi_c^{-1}(|z| = r_*)$ , za  $r_* > R$ . Sada su  $r_*$  i  $\theta_*$  polarne koordinate pridružene skupu  $U_R$ , što je prikazano na sljedećoj slici:



Slika 8.1: Polarne koordinate pridružene skupu  $U_R$

Cilj nam je  $\phi_c$  proširiti na cijeli eksterior skupa  $K_c$  koristeći opisani polarni koordinatni sustav. Pretpostavimo da za  $z \in \mathbb{C} \setminus U_R$  vrijedi  $Q_c(z) \in U_R$ . To znači da je  $|\phi_c(Q_c(z))| > R$ , tj. da je  $|\phi_c(Q_c(z))| \in D_R$ . Pretpostavimo još i da je  $\arg \phi_c(Q_c(z)) = \theta$ , te da je  $|\phi_c(Q_c(z))| = r$ .

Postoje dvije točke  $\pm\omega$  iz  $\mathbb{C}$  koje kvadrirane daju  $\phi_c(Q_c(z))$ . Neka je  $\omega$  takav da vrijedi  $\omega^2 = \phi_c(Q_c(z))$  i  $\arg \omega = \theta/2$ . Zbog toga je  $\arg(-\omega) = \theta/2 + \pi$ . Moramo odlučiti hoćemo li staviti  $\phi_c(z) = \omega$  ili  $\phi_c(z) = -\omega$ .



Slika 8.2: Proširenje konjugacije  $\phi_c$

Pretpostavimo prvo da  $c \notin \gamma_\theta$  što znači da je orbita točke 0 ograničena pod iteracijama polinoma  $Q_c$ , tj. da je  $c$  u skupu  $K_c$ . Svaka točka u skupu  $U_R$  ima točno dvije praslike u  $Q_c^{-1}(U_R)$ . Slično, ako gledamo kodomenu funkcije  $\phi_c$ , svaka točka u  $\{z \mid |z| > R\}$  ima točno dvije praslike po preslikavanju  $Q_0(z) = z^2$ , u skupu  $\{z \mid |z| > \sqrt{R}\}$ . Pokazat ćemo da se  $Q_c^{-1}(\gamma_\theta)$  sastoji od dvije disjunktne krivulje i da su to upravo krivulje  $\gamma_{\theta/2}$ , i  $\gamma_{\pi+\theta/2}$ . Zaista, iz 8.1 je

$$\phi_c(Q_c(\gamma_{\theta/2})) = (\phi_c(\gamma_{\theta/2}))^2 = r^2 e^{2i\theta},$$

te je stoga  $Q_c(\gamma_{\theta/2}) = \gamma_\theta$ . Također, vrijedi

$$\phi_c(Q_c(\gamma_{\pi+\theta/2})) = (\phi_c(\gamma_{\pi+\theta/2}))^2 = r^2 e^{i(2\pi+\theta)} = r^2 e^{i\theta},$$

pa je  $Q_c(\gamma_{\pi+\theta/2}) = \gamma_\theta$ .

Primijetimo da naš  $z$ , za kojeg smo na početku pretpostavili da pripada skupu  $\mathbb{C} \setminus U_R$  i da je  $Q_c(z) \in U_R$ , pripada jednoj od ovih dviju krivulja, (pogledati sliku 8.2). Staviti ćemo da je  $\phi_c(z) = \omega$ , za  $z \in \gamma_{\theta/2}$ , i  $\phi_c(z) = -\omega$ , ako je  $z \in \gamma_{\pi+\theta/2}$ .

Sada preslikavanje  $\phi_c$ , (prema [10], str. 3) na prirodan način možemo proširiti tako da za domenu te funkcije uzmemo skup  $Q_c^{-1}(U_R)$ . U tom je slučaju kodomena funkcije  $\phi_c$  skup  $\{z \mid |z| > \sqrt{R}\}$ , tj. imamo:

$$\phi_c : Q_c^{-1}(U_R) \rightarrow \{z \mid |z| > \sqrt{R}\},$$

pri čemu je  $\phi_c$  ponovo topološka konjugacija koja konjugira  $Q_c$  i  $Q_0$ . Uz početnu pretpostavku da orbita točke 0 ne teži ka  $\infty$  ovaj proces možemo nastaviti dok domenu funkcije ne proširimo na skup  $U_1 = \{z \mid Q_c^n(z) \rightarrow \infty\}$  koji je zapravo (prema definiciji 4.9) bazen atrakcije točke  $\infty$ . Pokažimo sada da svaka *odbjegla orbita* (engl. escape orbit), odnosno orbita koja teži ka  $\infty$ , leži u  $U_1$ . No, ako  $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$ , onda možemo naći najmanji  $N$  takav da je  $Q_c^N(z) \in U_R$ . Kako bi definirali  $\phi_c(z)$  opisanu konstrukciju primijenimo  $N$  puta na orbitu točke  $z$ . Primijetimo da je  $J(Q_c)$  rub, kako za  $K_c$  tako i za skup odbjeglih orbita. Na taj smo način dokazali sljedeću propoziciju.

**Propozicija 8.5.** *Pretpostavimo da  $Q_c^n(0) \rightarrow \infty$ . Neka je  $U_1 = \{z \mid Q_c^n(z) \rightarrow \infty\}$ . Tada postoji analitički homeomorfizam*

$$\phi_c : U_1 \rightarrow \{z \mid |z| > 1\}$$

*takav da je  $\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ . Štoviše,  $J(Q_c)$  je rub skupa  $U_1$ .*

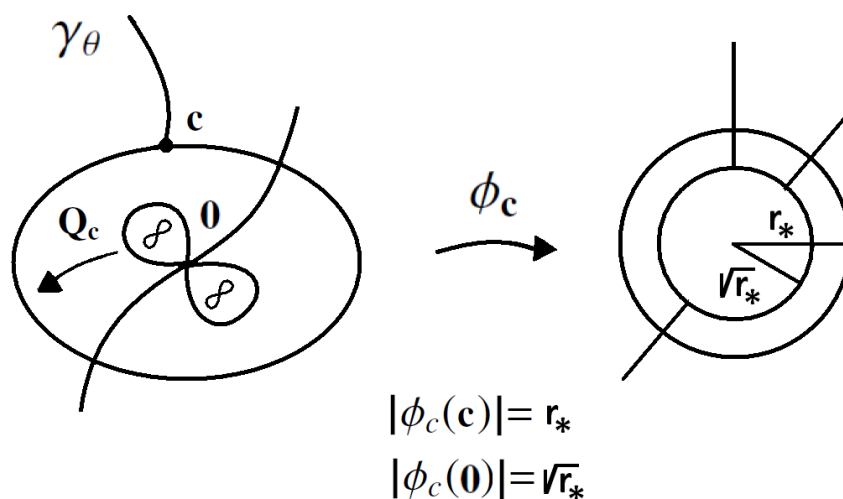
Sada nije teško dokazati prvi dio Teorema 8.4.

**Korolar 8.6.** *Neka je  $0 \in K_c$ . Tada je  $K_c$  povezan skup.*

*Dokaz:*  $U_1$  je jednostavno povezano područje pa njegov komplement mora biti povezan skup. □

Ostaje još dokazati drugi dio Teorema 8.4.

Pretpostavimo sada da je  $c \in \gamma_{\theta_*}$  (tj. da je  $c \in U_R$ ) i da je  $|\phi_c(c)| = r_*$ . Vrijednost  $r_*$  nazivamo *stopom bježanja* (engl. escape rate) kritične vrijednosti. Također, možemo pretpostaviti da  $c$  leži na rubu skupa  $U_R$ . Znamo da je  $Q_c(z) = c$  ako i samo ako je  $z = 0$ . Iz te činjenice i izraza 8.1 dobivamo  $\phi_c(c) = (\phi_c(z))^2 = (\phi_c(0))^2 = r_*$ . Odavde imamo da je  $|\phi_c(0)| = \sqrt{r_*}$ . Zanima nas što je  $Q_c^{-1}(U_R)$ ? Svaka točka skupa  $U_R$  ima dvije praslike simetrično locirane oko nule, osim točke  $c$  čija je jedina praslika točka 0. Stoga je praslika ruba skupa  $U_R$  krivulja u obliku osmice kao na gornjoj slici. Praslika samog skupa  $U_R$  je eksterior te "osmice". Procedura koju smo opisali u prvom slučaju kada  $c \notin U_R$  vrijedi ako uzmemo da je  $R = \sqrt{r_*}$ , odnosno ako definiramo  $\phi_c : U_{\sqrt{r_*}} \rightarrow \{z \mid |\phi_c(z)| > \sqrt{r_*}\}$ . Komplement skupa  $Q_c^{-1}(U_{\sqrt{r_*}})$  sastoji se od dva diska koje označimo sa  $V_0$  i  $V_1$ . Promatrajmo skupove  $V_0$  i  $V_1$ . Komplement skupa  $\overline{U_{\sqrt{r_*}}}$  u svom interioru sadrži i skup  $V_0$  i skup  $V_1$ . Kako se i  $V_0$  i  $V_1$  homeomorfno preslikavaju na komplement skupa  $\overline{U_{r_*}}$ , slijedi da je

Slika 8.3: Slučaj kada je  $c \in U_R$ 

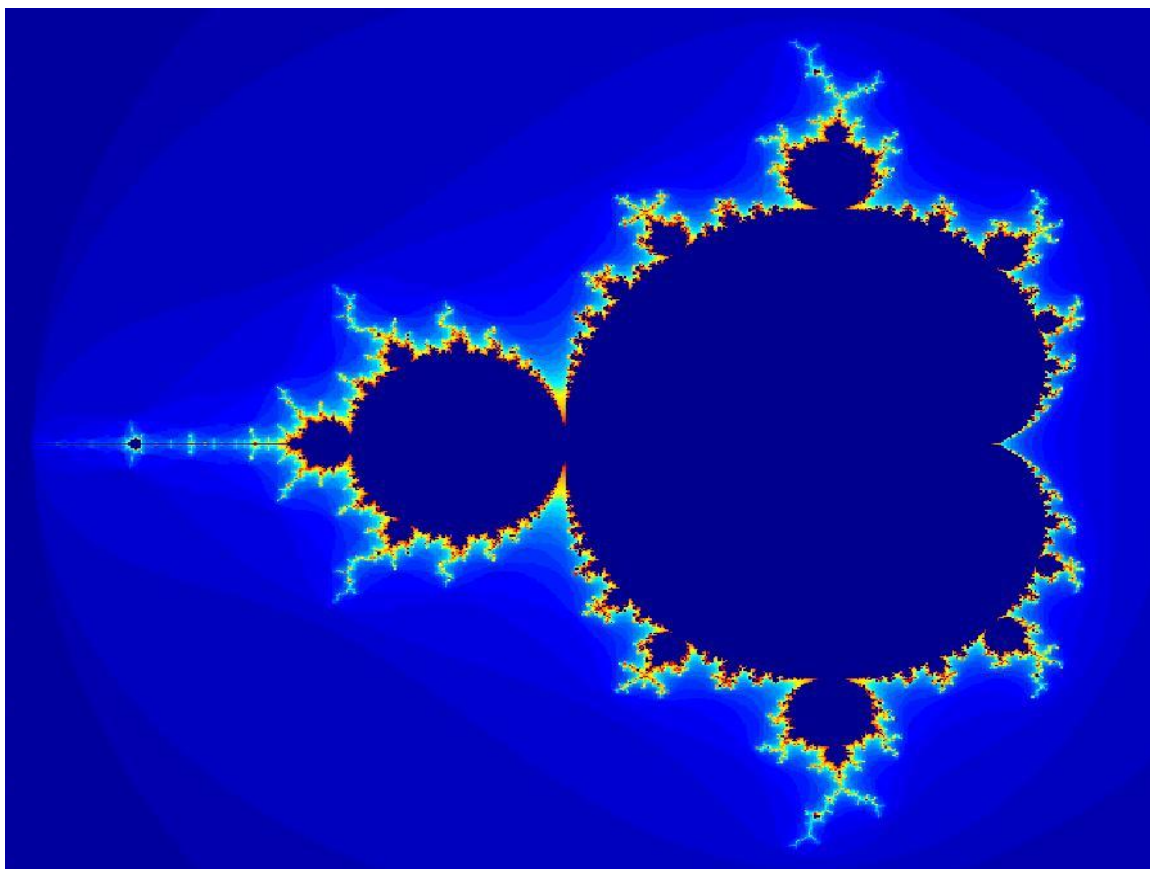
$J(Q_c) \subset V_0 \cup V_1$ . Štoviše, postoji Juliaov skup u svakom od skupova  $V_0$  i  $V_1$ . Uzimanjem uzastopnih praslika skupova  $V_0$  i  $V_1$  (slično kao u dokazu propozicije 2.5) dekomponiramo  $J(Q_c)$  na beskonačno mnogo disjunktih dijelova. Na taj smo način dokazali sljedeću propoziciju:

**Propozicija 8.7.** *Pretpostavimo da  $Q_c^n(0) \rightarrow \infty$ . Tada se  $J(Q_c)$  sastoji od beskonačno mnogo disjunktih komponenti.*

Pokazali smo da je za svaku vrijednost parametra  $c$ , popunjen Juliaov skup,  $K_c$ , ili povezan skup ili Cantorov skup. Kriterij na osnovu kojega ćemo odlučiti o kojem se od ova dva slučaja radi je orbita kritične točke. Ako orbita točke  $0$  teži ka  $\infty$  pod iteracijama funkcije  $Q_c$  onda je  $K_c$  Cantorov skup. Ako orbita točke  $0$  ne teži ka  $\infty$  onda je  $K_c$  povezan skup, ([13]). Time je teorem 8.4 dokazan.  $\square$

Ovu ćemo dihotomiju iskoristiti kako bi definirali Mandelbrotov skup. Izračunati ćemo orbitu točke  $0$  za svaku vrijednost parametra  $c$ . Vrijednost  $c$  leži u Mandelbrotovom skupu  $\mathcal{M}$  ako orbita točke  $0$  ne bježi u  $\infty$ . Sliku skupa  $\mathcal{M}$  prikazati ćemo u parametarskoj ravnini koju ćemo zvati  $c$ -ravnina.





Slika 8.4: Mandelbrotov skup

**Definicija 8.8.** Mandelbrotov skup je podskup  $c$ -ravnine definiran sa

$$\mathcal{M} = \{c \mid Q_c^n(0) \rightarrow \infty\}$$

Ekvivalent ove definicije, prema propoziciji 8.7 i korolaru 8.6 je

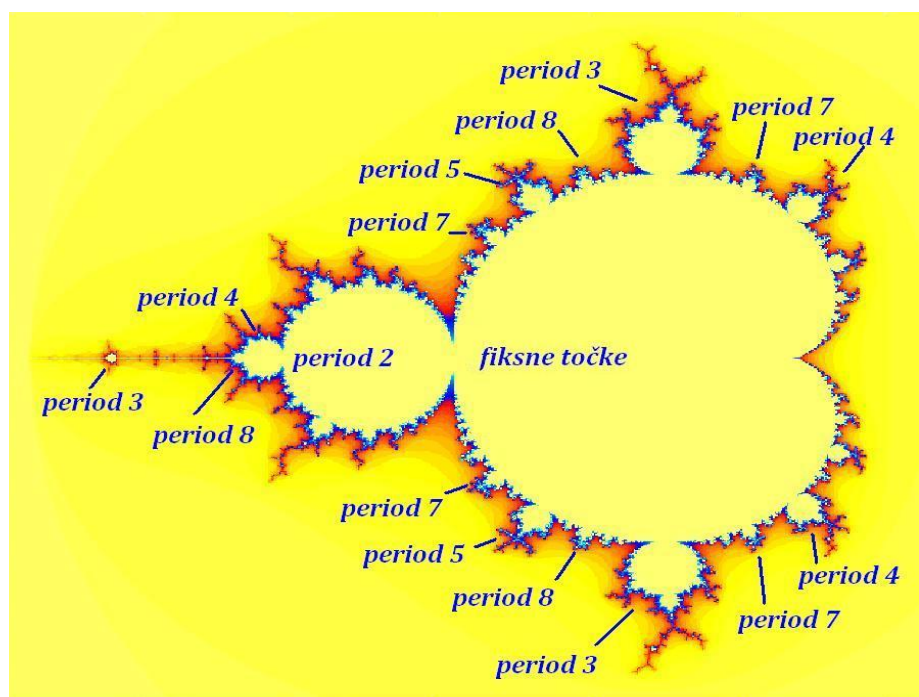
$$\mathcal{M} = \{c \mid K_c \text{ je povezan skup}\}$$

Iz propozicije 2.4 direktno slijedi da je  $\mathcal{M}$  sadržan unutar kruga radijusa 2 u  $c$ -ravnini. Orbitu točke 0 kvadratne funkcije  $Q_c$  možemo shvatiti kao orbitu parametra  $c$ . Ako je  $|c| > 2$  tada  $Q_c^n(c) \rightarrow \infty$ . Stoga  $c \notin \mathcal{M}$ .

Time smo dobili algoritam za određivanje skupa  $\mathcal{M}$ . Za zadani  $c \in \mathbb{C}$ , izračunamo prvih  $N$  točaka orbite točke  $c$ , pod iteracijama funkcije  $Q_c$ . Ako za neko  $k < N$  vrijedi

$|Q_c^k(c)| > 2$ , zaustavljamo iteracije jer  $c \notin \mathcal{M}$ . Ako je  $|Q_c^i(c)| \leq 2$ , za sve  $i \leq N$ , tada je  $c \in \mathcal{M}$ .

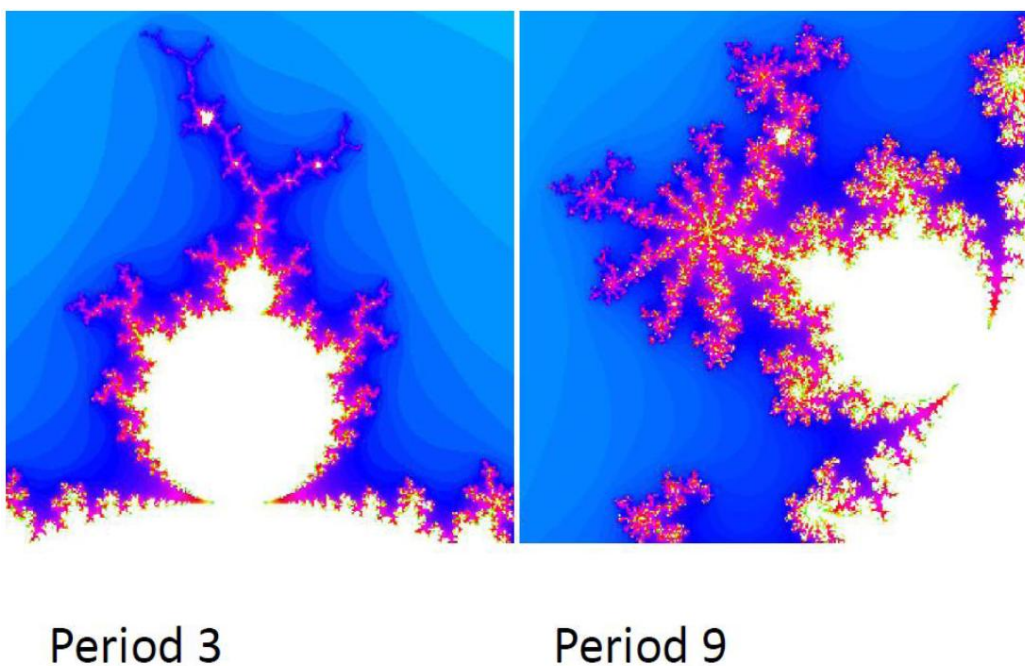
Slika 8.4 zapravo je samo aproksimacija Mandelbrotovog skupa. Generirana je za konačan broj iteracija ( $N = 64$ ). Sasvim sigurno postoje i takve točke koje su za ovaj broj iteracija unutar skupa  $\mathcal{M}$ , a koje bježe u  $\infty$  tek nakon velikog broja iteracija.



Slika 8.5: Periodi

Područje unutar glavne kardioida sastoji od svih onih vrijednosti parametra  $c$  za koje  $Q_c$  ima privlačnu fiksnu točku. Dekorativne dijelove oko glavne kardioida u Mandelbrotovom skupu nazivamo *primarni pupoljci* (engl. primary bud). Kružno područje lijevo od kardioida sastoji se od onih vrijednosti  $c$  za koje  $Q_c$  ima privlačnu orbitu perioda 2. Općenito, ako se  $c$  nalazi u nekom pupoljku, tada orbita točke 0 ima neki period  $n$ , i on je isti za sve  $c$  unutar tog pupoljka. Više se može pogledati na slici 8.5.

Ne moramo znati period svakog pupoljka. Dovoljno je poznavati samo neke periode, a ostali se vrlo lako odrede po sljedećem pravilu: Neka su  $b_1$  i  $b_3$  dva pupoljka sa periodima  $p$  i  $q$ . Period najvećeg pupoljka  $b_2$ , koji je manji od  $b_1$  i  $b_3$ , a koji je na kardioidi između njih jednak je  $p + q$ .

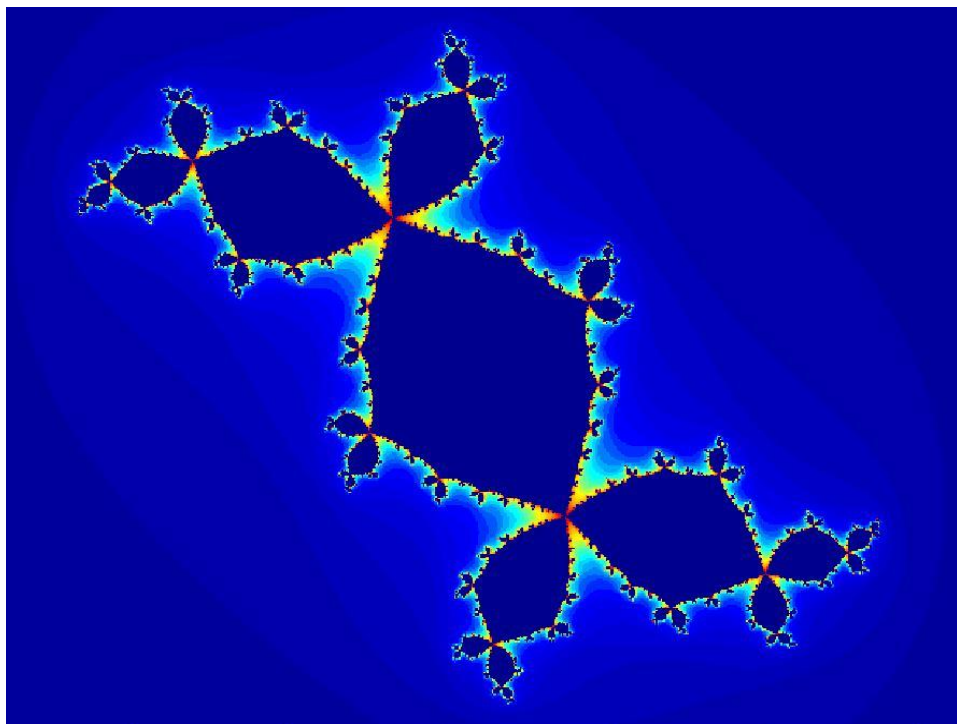


Slika 8.6: Pupiljci

Period  $n$  možemo odrediti direktnim računom, ali i vizualno. Prema [12], na svakom od pupiljaka je antena na kojoj se nalazi točno  $n - 1$  žičica. Pri tome je  $n$  period svih onih parametara  $c$  koji leže unutar danog pupiljaka. Na slici 8.6 prikazani su primjeri pupiljaka različitih perioda.

Postoji i drugi način da vizualno odredimo period primarnog pupiljaka. Izaberemo  $c$  unutar odabranog pupiljaka i promatramo graf skupa  $K_c$ . Skup  $K_c$  je povezan. Stoga, u  $K_c$  postoji beskonačno mnogo točaka koje nazivamo *točke spoja* (engl. junction point), a koje imaju svojstvo da ako izbacimo neku od njih,  $K_c$  postaje nepovezan. Broj područja "priklijučenih" na točku spoja jednak je periodu pupiljaka iz kojeg smo izabrali  $c$ , (vidi [9]).

Na donjoj slici je primjer popunjenog Juliaovog skupa poznatog pod imenom Douadyjev zec. Parametar  $c = -0.12 + 0.75i$  leži u primarnom pupoljku perioda 3, a iz svake točke spoja "vire" dva uha.



Slika 8.7: Douadyjev zec



# Slike

Ovo područje matematike prepoznatljivo je po grafovima Juliaovih skupova kao i po grafu Mandelbrotova skupa. Upravo je zbog toga velika pažnja posvećena izradi programa koji generiraju slike navedenih skupova. Nastojali smo prikazati primjere koji se spominju u teorijskom dijelu, a pri tome ipak ne pretjerivati. Također, kad god je to bilo potrebno, u radu se geometrijski objašnjava smisao nekog teorema ili propozicije.

Najpoznatija metoda koju možemo iskoristiti kako bi pronašli realne ili kompleksne korijene funkcije  $F(z)$  je Newtonova metoda. Tom metodom iteriramo funkciju

$$N_F(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)}$$

uz odabir neke početne vrijednosti  $z_0$ , te uzimajući da je  $(n + 1)$ -a aproksimacija metode jednaka  $z_{n+1} = N_F(z_n)$ .

Orbita  $\{z_0, N_F(z_0), N_F^2(z_0), \dots\}$ , točke  $z_0$ , ponaša se na dva načina: Može konvergirati ka korijenu funkcije  $F$ , ali ako je  $z_0 \in J(F)$ , zbog potpune invarijantnosti Juliaova skupa nikad ne konvergira ka korijenu funkcije  $F$ , te se ponaša kaotično. Tu smo metodu iskoristili kako bismo dobili sliku 0.1. Slika je dobivena pomoću programa izrađenog u Matlabu, a prikazuje bazene atrakcije za korijene jednadžbe  $z^3 - 1 = 0$ , odnosno Juliaov skup polinoma  $F(z) = z^3 - 1$ .

Slika 7.4 također je dobivena Newtonovom metodom. Najprije riješimo diferencijalnu jednadžbu:

$$z - \frac{F(z)}{F'(z)} = z + z^4,$$

tj. nađemo funkciju  $F$  čijim uvrštavanjem u korak Newtonove metode zapravo iteriramo polinom  $P(z) = z + z^4$ . Rješenje gornje jednadžbe je funkcija

$$F(z) = C e^{\frac{1}{3}z^{-3}},$$

gdje je  $C$  proizvoljna konstanta. Općenito, ako želimo nacrtati Juliaov skup polinoma  $P(z) = z + z^k$ , gdje je  $k \geq 2$ , za  $F$  uzmemo

$$F(z) = C e^{\frac{1}{(k-1)z^{-k+1}}}.$$

Za polinom gornjeg oblika lako riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$z - \frac{F(z)}{F'(z)} = P(z).$$

No, to ne mora uvijek biti slučaj.

Slike 6.3, 6.6, 8.7 Juliaovih skupova dobili smo na puno jednostavniji način. Testirali smo vrijedi li da je  $|z| < 2$ , u skladu sa propozicijom 2.4. Slično radi i program za izradu Mandelbrotova skupa 8.4. Originalni programi u Octavei mogu se naći na [21]. Na isti smo način dobili i slike 7.5 i 8.5, te ih naknadno obradili u Paintu.

Svi programi izrađeni su u Matlabu i nalaze se na cd-u priloženom uz diplomski rad.

Slika 6.4 je izrađena u Matlabu i dodatno obrađena u Paintu.

Slike 1.2 i 2.1 izrađene su u Paintu.

Slike 2.2, 6.2, 6.5, 8.1, 8.2 i 8.3 preuzete su iz [14] i dodatno obrađene u Paintu. Sliku 8.6 uzeli smo iz [12] i dodatno je obradili u Paintu, a isto vrijedi i za sliku 7.3 preuzetu iz [2].

Slika 7.2 direktno je preuzeta iz [3] bez dodatne obrade.

Slika 1.1 izrađena je u Paintu po uzoru na sliku koja se nalazi u [32], a 1.4 je izrađena po uzoru na sliku iz [1]. Slika 1.3 izrađena je po uzoru na sliku iz [8]. Po uzoru na sliku iz [15] izrađena je, također u Paintu, slika 2.3. U istom programu izrađene su i slike 6.1, 7.1 koje se mogu naći u [14].

# Zahvale

Zahvaljujem se svojim roditeljima koji su financirali moj studij. Plaćali mi stan, hranu, odjeću, knjige,... Kao i na tome što su me u svemu podržavali.

Posebno zahvaljujem svojim kolegama i dragim prijateljima, Ivani Budiji i Dini Malperi što su trošili svoje vrijeme tražeći na net-u literaturu iz ovog područja i što su me podigli svaki put kada me  $L^A T_E X$  nokautirao. Bez njih ne bi bilo ni 8, a ni **masnih slova** :).

Ako ste ikada odslušali neko predavanje iz bilo kojeg predmeta kojeg predaje moja mentorica, doc. dr. sc. Sonja Štimac, jasno Vam je zašto je jedan statističar upao u ovakvu nevolju. Nelinearni dinamički sustavi trebali su biti jedan od predmet za popunjavanje kvote. Zahvaljujući predavanjima sa srcem i dušom postali su puno više.

Zahvaljujem joj se na odličnoj temi, na stručnoj i nesebičnoj pomoći i trudu koji je uložila pomažući mi da savladam meni potpuno strano područje matematike. I nadalje zahvaljujem se na strpljenju.





# Bibliografija

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [2] H. Akter. *Relaxed Newton's Method of Complex Exponential Function*. Master's thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2005. [www.math.uni-goeettingen.de/~ha0068/](http://www.math.uni-goeettingen.de/~ha0068/).
- [3] P. Blanchard. *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*. Bull. Amer. Math. Soc., 11(1):85–141, 1984. <http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1984-15240-6>.
- [4] C. Bodelón, R. L. Devaney, M. Hayes, G. Roberts, L. R. Goldberg, and J. H. Hubbard. *Hairs for the complex exponential family*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 9(8):1517–1534, 1999. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127499001061>.
- [5] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] X. Buff and A. Chéritat. *Siegel disks*. 2009. <http://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/Exposes/Rome.pdf>.
- [7] A. Cayley. *Desiderata and Suggestions: No. 3. The Newton-Fourier Imaginary Problem*. Amer. J. Math., 2(1):97, 1879. <http://dx.doi.org/10.2307/2369201>.
- [8] G. Chen and Y. Huang. *Chaotic maps: Dynamics, Fractals, and Rapid Fluctuations*, volume 11 of Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Morgan and Claypool Publishers, Williston, VT, 2011. [http://carlossicoli.free.fr/C/Chen\\_G.,\\_Huang\\_Y.,\\_Krantz\\_S.G.-Chaotic\\_Maps\\_\\_Dynamics,\\_Fractals,\\_and\\_Rapid\\_Fluctuations\\_-Morgan%282011%29.pdf](http://carlossicoli.free.fr/C/Chen_G.,_Huang_Y.,_Krantz_S.G.-Chaotic_Maps__Dynamics,_Fractals,_and_Rapid_Fluctuations_-Morgan%282011%29.pdf).
- [9] R. L. Devaney. *Back to M*. <http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/node6.html>.

- [10] R. L. Devaney. *Complex Complex Saddle-Node Bifurcations*. <http://math.bu.edu/people/bob/papers/takens.pdf>.
- [11] R. L. Devaney. *Filled Julia Sets*. <http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/node4.html>.
- [12] R. L. Devaney. *Periods of the Bulbs*. <http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/node3.html>.
- [13] R. L. Devaney. *Role of the Critical Orbit*. <http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/node2.html>.
- [14] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.
- [15] R. L. Devaney and L. Keen, editors. *Chaos and fractals*, volume 39 of Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. The mathematics behind the computer graphics, Lecture notes prepared for the American Mathematical Society Short Course held in Providence, Rhode Island, August 6–7, 1988, AMS Short Course Lecture Notes.
- [16] A. Douady and H. J. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 18(2):287–343, 1985. [http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1985\\_4\\_18\\_2\\_287\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1985_4_18_2_287_0).
- [17] A. Dujella. *Uvod u teoriju brojeva*. <http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf>.
- [18] P. Fatou. *Sur l'itération des fonctions transcendentes Entières*. Acta Math., 47(4):337–370, 1926. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02559517>.
- [19] M. Frame, B. Mandelbrot, and N. Neger. *Newton's Method Basins of Attraction, Basins of  $z^2 - 1$* . <http://classes.yale.edu/fractals/mandelset/complexnewton/newtonbasins/Basins2.html>.
- [20] M. Frame, B. Mandelbrot, and N. Neger. *Newton's Method Basins of Attraction, Basins of  $z^3 - 1$* . <http://classes.yale.edu/fractals/mandelset/complexnewton/newtonbasins/Basins3.html>.
- [21] B. Girin. *Fractals with Octave*. <http://www.brunogirin.blogspot.com/2008/12/fractals-with-octave-classic-mandelbrot.html>.

- [22] M. E. Haruta. *Newton's method on the complex exponential function*. Trans. Amer. Math. Soc., 351(6):2499–2513, 1999. <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-99-01927-3>.
- [23] G. M. Julia. *Mémoire sur l'itération des fonction rationnelles*. J. Math., 8:47–245, 1918.
- [24] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1977.
- [25] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. <ftp://ftp.math.sunysb.edu/preprints/ims90-5.pdf>.
- [26] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Introductory lectures.
- [27] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. *Holomorphic dynamics*, volume 66 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. <http://catdir.loc.gov/catdir/samples/cam032/99014417.pdf>.
- [28] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1970. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [29] From Wikipedia, the free encyclopedia. *Gaston Julia*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Gaston\\_Julia](http://en.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia).
- [30] From Wikipedia, the free encyclopedia. *Pierre Fatou*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_Fatou](http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fatou).
- [31] From Wikipedia, the free encyclopedia. *Riemann mapping theorem*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann\\_mapping\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_mapping_theorem).
- [32] Š. Ungar. *Matematička Analiza 4*. <http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/nastava.html/MA/Analiza4.pdf>.
- [33] S. Zakeri. *Old and New on Quadratic Siegel Disks*. <http://www.math.qc.edu/~zakeri/papers/survey.pdf>.



# Sažetak

U prvom dijelu rada definiramo kompleksnu analitičku funkciju, navodimo osnovne rezultate kompleksne analize, topološke dinamike i upoznajemo se sa pojmom Riemannove sfere. Također, klasificiramo fiksne, odnosno periodičke točke čije orbite proučavamo u narednim poglavljima.

Najvažniju ulogu u dinamici kompleksnih analitičkih funkcija imaju orbite odbojnih periodičkih točaka. Juliaov skup definiramo kao zatvorenje skupa svih odbojnih periodičkih točaka polinoma  $P$ , te dokazujemo da je on skup svih točaka u kojima familija iteracija polinoma  $P$  nije normalna familija. Iz dokaza tog teorem slijede gotovo sva svojstva Juliaovih skupova. Tako naprimjer vrijedi da je Juliaov skup polinoma  $P$  perfektan, potpuno invarijantan, neprazan skup, te da  $J(P)$  ima prazan interior. Vrijedi i da je  $J(P)$  zatvarač skupa svih prasluka točke  $z_0$  iz  $J(P)$ . Posebno, Juliaov skup je taj na kojemu polinom  $P$  ima kaotičnu dinamiku.

Proučavali smo i kvadratnu familiju  $\{Q_c\}$ , svih polinoma oblika  $Q_c(z) = z^2 + c$ , gdje je  $c$  kompleksni broj. Iteriramo li  $Q_c$ , za različite vrijednosti parametra  $c$  dobit ćemo različite Juliaove skupove. Opisali smo neke od njih: jediničnu kružnicu, Cantorov skup, zatvoreni interval, baziliku, dendrit,...

Dokazali smo da kompleksnu analitičku funkciju prikazanu u obliku konvergentnog reda potencija  $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  možemo linearizirati lokalno, u okolini privlačne fiksne točke 0, tj. ako je  $0 < |\lambda| < 1$ . Odredili smo i rekurzivnu formulu za koeficijente topološke konjugacije  $H$  koja konjugira  $P$  i linearnu funkciju  $L(z) = \lambda z$ . Isti rezultat vrijedi i za odbojne kao i za super privlačne fiksne točke.

Za  $|\lambda| = 1$  situacija je kompliciranija. Zapišimo  $\lambda$  u obliku  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ . Promatramo dva slučaja: kada je  $\theta$  racionalan broj i kada je  $\theta$  iracionalan broj. Za  $\theta$  racionalan broj (ako je  $\lambda$  jednak korijenu iz jedinice), uz uvođenje pojma privlačnih i odbojnih latica, te kroz niz primjera dokazujemo Leau-Fatouov cvjetni teorem. Time smo pokazali da Schröderova funkcionalna jednačina za  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$  gdje je  $\theta$  racionalan broj nema rješenje.

Ako je rotacioni broj  $\theta$ , iracionalan broj, prema Siegelovom teoremu analitičku funkciju  $F(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  možemo linearizirati lokalno, u okolini neutralne fiksne točke 0 jedino ako je  $\theta$  diofantski broj. Općenito vrijedi da je  $F$  linearizabilna u okolini točke nula ako i samo ako je  $\theta$  Bryunov broj.

Promatrali smo i orbitu kritične točke 0 pod djelovanjem kvadratnog iteratora  $Q_c$ . Ako je orbita kritične točke 0 ograničena, popunjen Juliaov skup  $K_c$  je povezan skup. U protivnom je  $K_c$  Cantorov skup. Ovu smo dihotomiju iskoristili kako bi definirali i opisali Mandelbrotov skup, odnosno skup koji se sastoji od onih vrijednosti parametra  $c$  za koje je  $K_c$  povezan.

Uporedo sa Juliaovim skupom obradili smo i Fatouov skup na kojem je ponašanje iteriranog polinoma stabilno. Uočili smo finu dualnost između ova dva komplementarna skupa (za polinome stupnja 2). Naime, ako Fatouov skup ima beskonačno mnogo komponenti tada je Juliaov skup povezana krivulja, ( $Q_{-1}(z) = z^2 - 1$ ), a kada je Juliaov skup potpuno nepovezan, ( $|c| > 2$ ), Fatouov skup je povezan. Osim toga, pokazali smo da u bazenu atrakcije privlačne periodičke točke polinoma  $P$  postoji najmanje jedna kritična orbita.

# Summary

In the first part of this paper we defined the complex analytic function, we outline the basic results of complex analysis, topological dynamics, and we are introduced to the concept of Riemann sphere. Also, we classify fixed (periodic) points whose orbits are studied in the following chapters.

The most important role in the dynamics of complex analytic functions is played by the orbits of repelling periodic points. We defined the Julia set as the closure of the set of repelling periodic points of a polynomial  $P$  and give a proof that this set is a set of points at which the family of iterates of  $P$  fails to be normal family. Almost all of the properties of the Julia sets follow from that theorem. Thus, for example, the Julia set of a polynomial  $P$  is a perfect, completely invariant, nonempty set which has an empty interior. It is valid that  $J(P)$  is the closure of all preimages for point  $z_0$  from  $J(P)$ . In particular, the Julia set is the set which carries the chaotic dynamics of polynomial  $P$ .

We have also studied the quadratic family  $Q_c$  of all polynomials in form  $Q_c(z) = z^2 + c$ , where  $c$  is a complex number. If we iterate  $Q_c$ , for different values of the parameter  $c$  we will get different types of the Julia sets. Some of them have been described: the unit circle, a closed interval, a Cantor set, a basilica, a dendrite, ...

We have prove that the complex analytic function represented by a convergent power series  $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  may be linearized near an attracting fixed point 0, i.e. if  $0 < |\lambda| < 1$ . We have determined a recursive formula for the coefficients of the topological conjugacy  $H$  between  $P$  and the linear function  $L(z) = \lambda z$ . The same result holds for repelling as well as for super-attracting fixed points.

For  $|\lambda| = 1$  the situation is more complicated. We could write  $\lambda$  in the form  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ . Now, we observe two cases: when  $\theta$  is rational number and when  $\theta$  is an irrational number. For  $\theta$  rational (if  $\lambda$  is equal to the square root of the unit), with the introduction of a concept of attracting and repelling petals, and through a series of examples, we have proved the Leau-Fatou flower theorem. Thus we have shown that the Schröder functional equation for  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ , where  $\theta$  is a rational number, has no solution.

If the rotation number  $\theta$  is an irrational number, according to the Siegel's theorem, the analytical function  $F(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  may be linearized locally, near the neutral fixed point 0 only if  $\theta$  is Diophantine number. In general,  $F$  is linearizable at 0 if and only



if  $\theta$  is a Bryuno's number.

We have observed an orbit of the critical point 0 under the square iterator  $Q_c$ . If that orbit is bounded then filled-in Julia set  $K_c$  is connected set. Otherwise,  $K_c$  is a Cantor set. We used that dichotomy to define and describe the Mandelbrot set, the set of the  $c$ -values for which  $K_c$  is connected.

Parallel to the Julia set we discussed the Fatou set where the dynamics of iterated polynomial is stable. There is a nice duality between these two complementary sets (if  $P$  is a polynomial of degree 2). Namely, if the Fatou set has infinitely many components, then the Julia set is a connected curve, ( $Q_{-1}(z) = z^2 - 1$ ), and when the Julia set is totally disconnected then the Fatou set is connected, ( $|c| > 2$ ). Also, we have proved that every attracting periodic orbit attracts at least one critical orbit.

# Životopis

Rođena sam 1. lipnja 1968 u Vukovaru, gdje sam završila osnovnu i srednju, matematičko-informatičku školu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematike završila sam 2010. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu i time stekla akademsko zvanje sveučilišne prvostupnice matematike. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike pri PMF-u u Zagrebu.