

Teorem o pakiranju krugova

Rašić, Nikolina

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:407291>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Rašić

TEOREM O PAKIRANJU KRUGOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, prosinac 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

„Svi naši snovi se mogu ostvariti, samo ako imamo dovoljno hrabrosti ići za njima.“

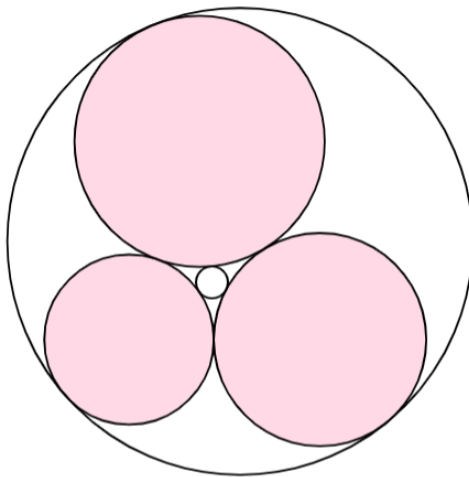
Walt Disney

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Preslikavanja ravnine	3
2 Apolonijev teorem	9
3 Teorija grafova	16
3.1 Osnovni pojmovi i tvrdnje	16
3.2 Planarni grafovi	22
4 Teorem o pakiranju krugova	29
4.1 Problem pakiranja krugova	29
4.2 Iskaz teorema o pakiranju krugova	30
4.3 Dokaz teorema o pakiranju krugova	33
Bibliografija	48

Uvod

Priča o kružnicama koje se međusobno dodiruju ima bogatu povijest koja seže sve do 3. stoljeća prije Krista kada je Apolonije iz Perge iznio problem koji danas nosi njegovo ime, a u kojem se pita o konstruiranju kružnice koja dira tri zadane kružnice. Također, značajan je i Apolonijev teorem, koji je upravo jedan primjer pakiranja krugova. U prvom poglavlju rada predstaviti ćemo ona preslikavanja ravnine koja će nam biti potrebna u dokazu Apolonijevog teorema i u dokazu teorema o pakiranju krugova. Iskaz i dokaz Apolonijevog teorema obradit ćemo u drugom poglavlju kao jedan primjer pakiranja krugova prije nego li se uopće promatrao taj problem.



Slika 0.1: Dvije kružnice koje dodiruju tri zadana različita kruga

Problem pakiranja važan je problem diskretne geometrije. Neka je C konačna familija konveksnih skupova čije su unutrašnjosti disjunktne. Definiramo $G(C)$ kao kontaktni graf familije C , čiji vrhovi odgovaraju članovima od C , a dva su vrha susjedna ako i samo ako se pripadni članovi od C dodiruju [10]. Ovdje je, dakle, osnovni problem karakterizacija klase grafova koji su kontaktni grafovi pakiranja kongruentnih kopija konveksnog skupa K . Zbog toga ćemo, u trećem poglavlju ovog rada obraditi ključne pojmove teorije grafova.

Prva netrivialna karakterizacija kontaktnog grafa pakiranja krugova u ravnini je Koebeov teorem o reprezentaciji te je upravo on veza između planarnih grafova i pakiranja krugova. Teorem njemačkog matematičara Paula Koebea iz 1936. godine kaže da je jednostavni graf G kontaktni graf pakiranja krugova u ravnini ako i samo ako je G planaran. No teorem o pakiranju krugova, poznat i pod imenom Koebe-Andreev-Thurstonov teorem, ostao je nezapažen i zaboravljen sve dok ga američki matematičar William Paul Thurston nije ponovno otkrio i popularizirao 1970-ih kroz Andreevljev rad o hiperboličnim poliedrima. Koebe je svoj teorem dokazao rabeći kompleksnu analizu, ali su Andreev (1970.) i Thurston (1985.) našli kombinatorni dokaz rabeći Eulerovu formulu. U četvrtom poglavlju ovog rada ćemo dati Colin de Verdièrov (1989.) i Marden-Rodinov dokaz (1990.) koji je pojednostavljenje Thurstonova dokaza. Thurston je dokazao da je do na inverzije i izometrije, reprezentacija dodirnim krugovima bilo kojeg trokutnog planarnog grafa jedinstvena, stoga ćemo u prvom poglavlju predstaviti navedena preslikavanja ravnine.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

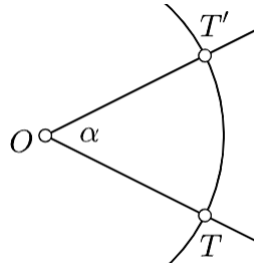
Poglavlje 1

Preslikavanja ravnine

Neka je M skup svih točaka ravnine.

Definicija 1.1. Kažemo da je preslikavanje $f : M \rightarrow M$ izometrija ravnine M ako za sve točke A i B ravnine M vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje je $A' = f(A)$ i $B' = f(B)$.

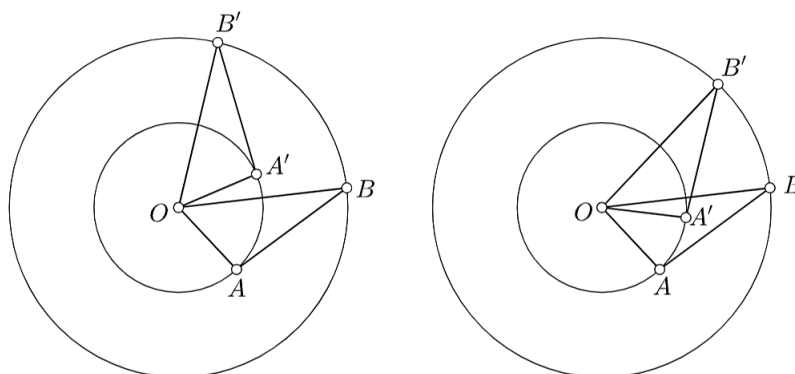
Definicija 1.2. Rotacija ravnine M oko čvrste točke O (središta rotacije) za kut α (kut rotacije) u pozitivnom smjeru je preslikavanje $r : M \rightarrow M$ definirano sljedećim postupkom.



Slika 1.1: Rotacija točke T oko točke O za kut α

Neka je $r(O) = O$. Ako je točka T različita od O , neka je $k = k(O, |OT|)$ kružnica. Neka je T' točka na kružnici k takva da luku $\widehat{TT'}$, kojim se od T do T' dolazi gibanjem u pozitivnom smjeru, pripada središnji kut α . Takva točka T' je jedinstvena. Definiramo $r(T) = T'$.

Teorem 1.3. Rotacija $r : M \rightarrow M$ je izometrija ravnine M .

Slika 1.2: Rotacija trokuta $\triangle OAB$ oko točke O za kut α

Dokaz. Neka je točka O središte rotacije i α kut rotacije. Neka su točke A i B u ravnini M te neka je $A' = r(A)$ i $B' = r(B)$. Ukoliko točka B leži unutar kuta $\angle AOA'$, imamo

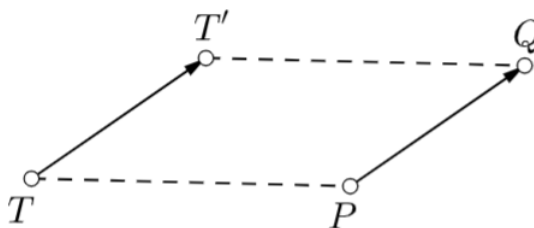
$$\angle AOB = \angle AOA' - \angle A'OB = \alpha - \angle A'OB = \angle BOB' - \angle A'OB = \angle A'OB'.$$

Dodatno, vrijedi da je $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$. Stoga su, prema S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta, trokuti $\triangle AOB$ i $\triangle A'OB'$ sukladni. Zaključujemo da je $|AB| = |A'B'|$.

Slično se tvrdnja dokazuje i u drugom slučaju [2]. $\square$

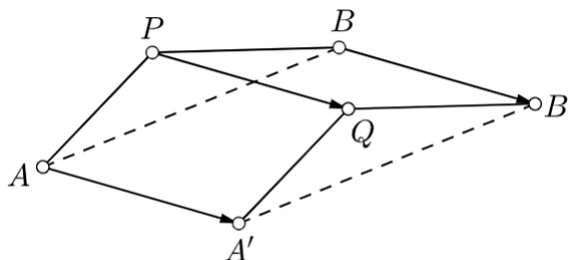
Definicija 1.4. *Usmjerena dužina je uređen par točaka. Označavamo ju s $\overrightarrow{AB}$, pri čemu je točka A početak, a točka B kraj usmjerene dužine. Usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne ako se polovišta dužina $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$ podudaraju. Vektor je klasa ekvivalencije usmjerenih dužina. Najčešće ne pravimo razliku između vektora i orijentirane dužine koja ga reprezentira.*

Neka su P i Q točke u ravnini M te neka je $\vec{a}$ vektor s predstavnikom $\overrightarrow{PQ}$.

Slika 1.3: Translacija točke T za vektor $\overrightarrow{PQ}$

Definicija 1.5. Za svaku točku T ravnine M postoji jedinstvena točka T' takva da je četverokut $TPQT'$ paralelogram. Translacija ravnine M za vektor $\vec{d} = [\overrightarrow{PQ}]$ je preslikavanje $t_{\vec{d}} : M \rightarrow M$ definirano s $t_{\vec{d}}(T) = T'$.

Teorem 1.6. Translacija $t_{\vec{d}} : M \rightarrow M$ je izometrija ravnine M .



Slika 1.4: Translacija dužine $\overline{AB}$ za vektor $\overrightarrow{PQ}$

Dokaz. Neka su A i B dvije točke i A' i B' njihove slike pri translaciji $t_{\vec{d}}$. Tada su četverokuti $APQA'$ i $BPQB'$ paralelogrami, pa je

$$|AA'| = |PQ|, \quad AA' \parallel PQ,$$

$$|BB'| = |PQ|, \quad BB' \parallel PQ.$$

Odatle slijedi da je

$$|AA'| = |BB'|, \quad AA' \parallel BB',$$

pa je i četverokut $ABB'A'$ paralelogram. Zaključujemo da je $|AB| = |A'B'|$ [2]. $\square$

Od izometrije postoje još osne simetrije, centralne simetrije (rotacije za 180°) i klizne simetrije, ali njih nećemo navoditi jer nam u nastavku neće biti potrebne.

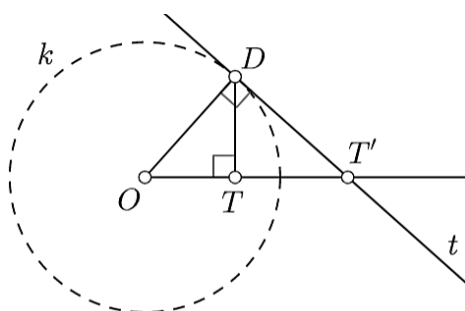
Podsjetimo se još jednog važnog preslikavanja koje ne čuva udaljenosti.

Definicija 1.7. Neka je O čvrsta točka ravnine M i neka je R pozitivan broj. Preslikavanje $\sigma : M \setminus \{O\} \rightarrow M \setminus \{O\}$ koje točku T preslika u T' zove se inverzija sa središtem u O i polumjerom R ako vrijedi

- točke O , T i T' su kolinearne,
- T i T' su s iste strane točke O ,
- $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Pokažimo kako se konstruira inverzna slika točke T u ovisnosti o položaju te točke.

1. T je unutar kružnice inverzije $k = k(O, R)$.

Slika 1.5: Točka T je unutar kružnice inverzije k

Povučemo okomicu iz T na OT . Neka je D sjecište te okomice s k . U točki D povučemo tangentu t na k i neka je T' presjek t s OT .

Kako je

$$\angle OTD = \angle OT'D = 90^\circ \quad \text{i}$$

$$\angle DOT = \angle T'OD,$$

to su, prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta, trokuti $\triangle OTD$ i $\triangle OT'D$ slični. Odatle slijedi

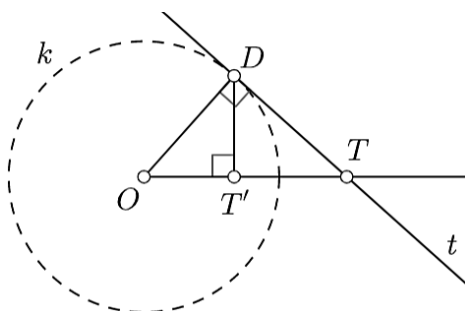
$$\frac{|OT|}{|OD|} = \frac{|OD|}{|OT'|},$$

pa zaključujemo $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

2. T leži na kružnici inverzije $k = k(O, R)$.

Dovoljno je uzeti $T' = T$.

3. T je izvan kružnice inverzije $k = k(O, R)$.

Slika 1.6: Točka T je izvan kružnice inverzije k

Povučemo tangentu t iz T na k . Neka je točka D diralište tangente t i kružnice k . Iz D povučemo okomicu na OT i neka je T' presjek te okomice s OT .

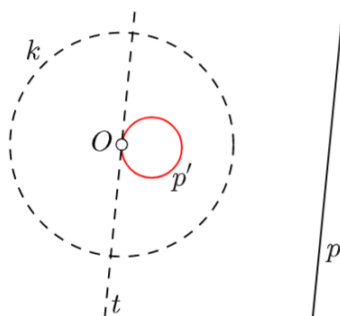
Sada potpuno isto kao u prvom slučaju zaključujemo da je $|OT| \cdot |OT'| = R^2$, to jest T' je slika točke T po zadanoj inverziji.

Očito inverzija unutrašnjost kružnice k preslikava u njenu vanjštinu i obrnuto.

Navedimo još bez dokaza sljedeća važna svojstva inverzije koja su obrazložena i dokazana u [11] u poglavlju 3.5.

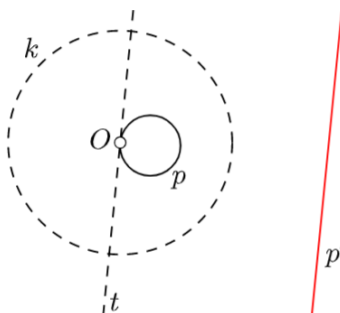
Teorem 1.8. *Neka je k kružnica inverzije sa središtem u O i polumjerom R .*

a) *Slika pravca p koji ne prolazi točkom O pri zadanoj inverziji je kružnica koja prolazi točkom O i u toj točki ima tangentu paralelnu s pravcem p .*



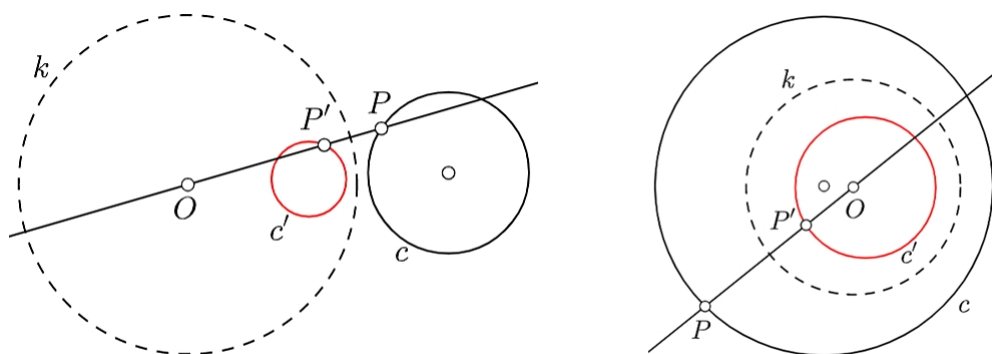
Slika 1.7: Slika pravca koji ne prolazi središtem inverzije je kružnica

b) *Slika kružnice koja prolazi točkom O pri zadanoj inverziji je pravac paralelan s tangentom te kružnice u točki O .*



Slika 1.8: Slika kružnice koja prolazi središtem inverzije je pravac

- c) Slika kružnice c koja ne prolazi točkom O pri zadanoj inverziji je kružnica c' takva da je O centar sličnosti kružnica c i c' i to vanjski ako je O izvan, a unutrašnji ako je O unutar kružnice c .



Slika 1.9: Slika kružnice koja ne prolazi kroz O i nalazi se izvan, odnosno unutar kružnice k je kružnica

Teorem 1.9. Ako su k' i ℓ' slike krivulja k i ℓ po inverziji i ako je M sjecište krivulja k i ℓ te M' slika točke M , to jest odgovarajuće sjecište krivulja k' i ℓ' , onda vrijedi

$$\angle_{M'}(k', \ell') = \angle_M(k, \ell),$$

to jest, inverzija čuva kutove parova krivulja.

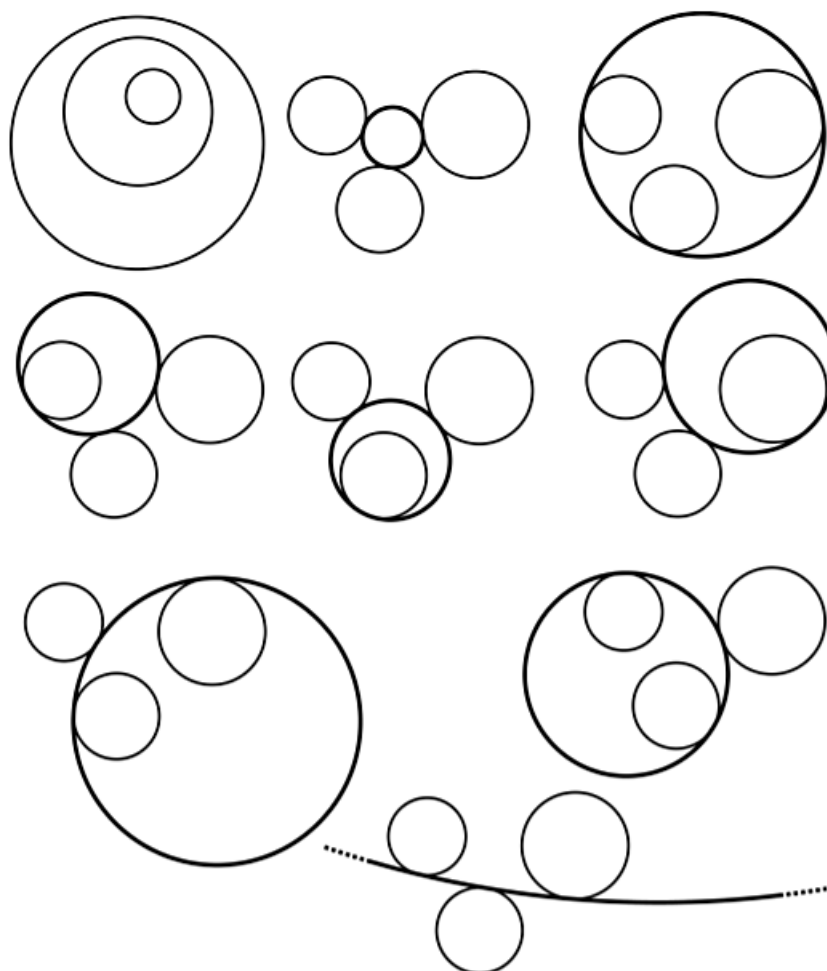
Poglavlje 2

Apolonijev teorem



Slika 2.1: Apolonije iz Perge

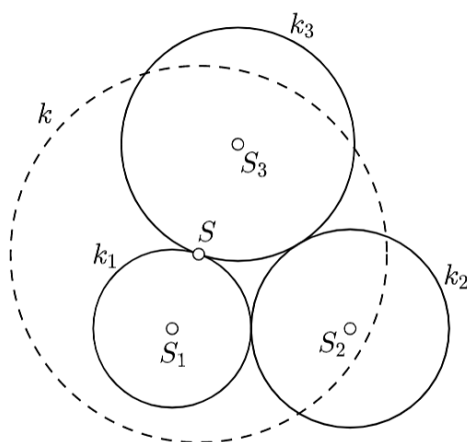
Apolonije iz Perge (262. pr. Kr. – 190. pr. Kr.) je grčki matematičar poznat po razvoju teorije konika. U svom djelu *Elementi konika* je osim teorije presjeka stošca i ravnine postavio i riješio Apolonijev problem koji se sastoji u konstrukciji kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice. Pritom jedna od kružnica može imati beskonačan polumjer ili polumjer nula. Zbog toga se problem svodi na 10 slučajeva, ali ćemo mi promatrati slučaj kada su zbilja zadane tri kružnice. Budući da ovisno o položaju zadanih kružnica može postojati od 0 do 8 rješenja, mi ćemo se zbog određenosti zadržati na slučaju kada se tri zadane kružnice u parovima dodiruju. O tome govori Teorem 2.1.



Slika 2.2: Mogući položaji kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice

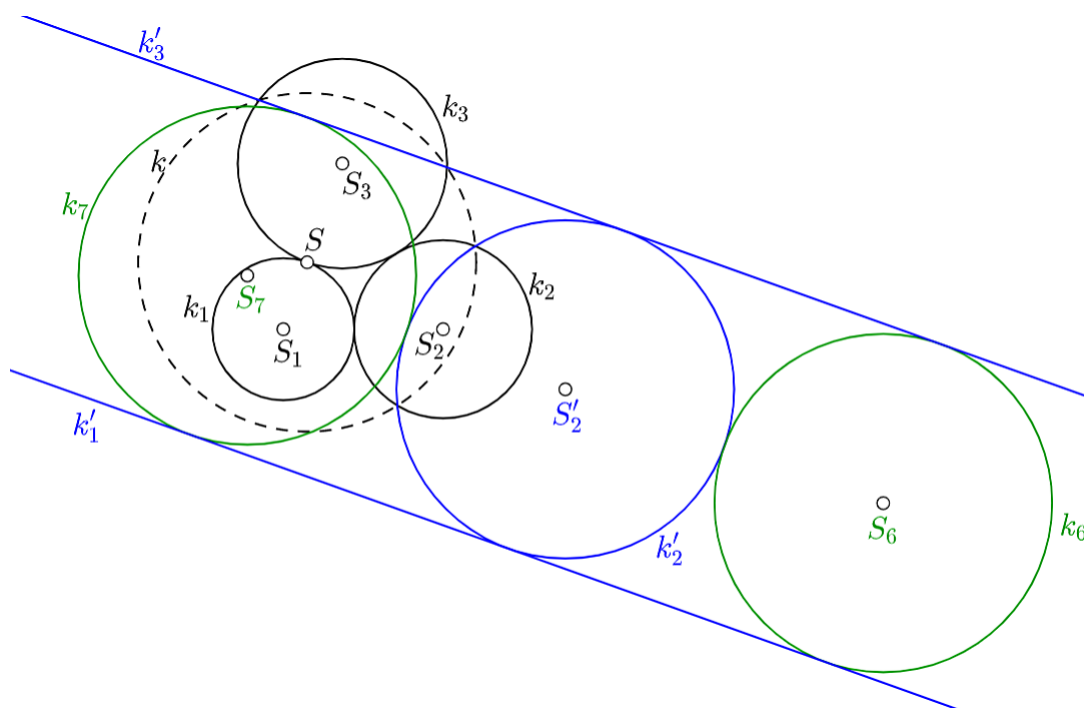
Teorem 2.1 (Apolonijev teorem). *Neka su dane kružnice k_1 , k_2 i k_3 koje se međusobno u parovima dodiruju. Tada postoje točno dvije kružnice k_4 i k_5 koje diraju sve tri zadane kružnice.*

Dokaz. Neka su $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$ kružnice koje se međusobno u parovima dodiruju te neka je $k(S, r)$ kružnica inverzije σ , pri čemu je točka S diralište kružnica k_1 i k_3 , a r proizvoljan.



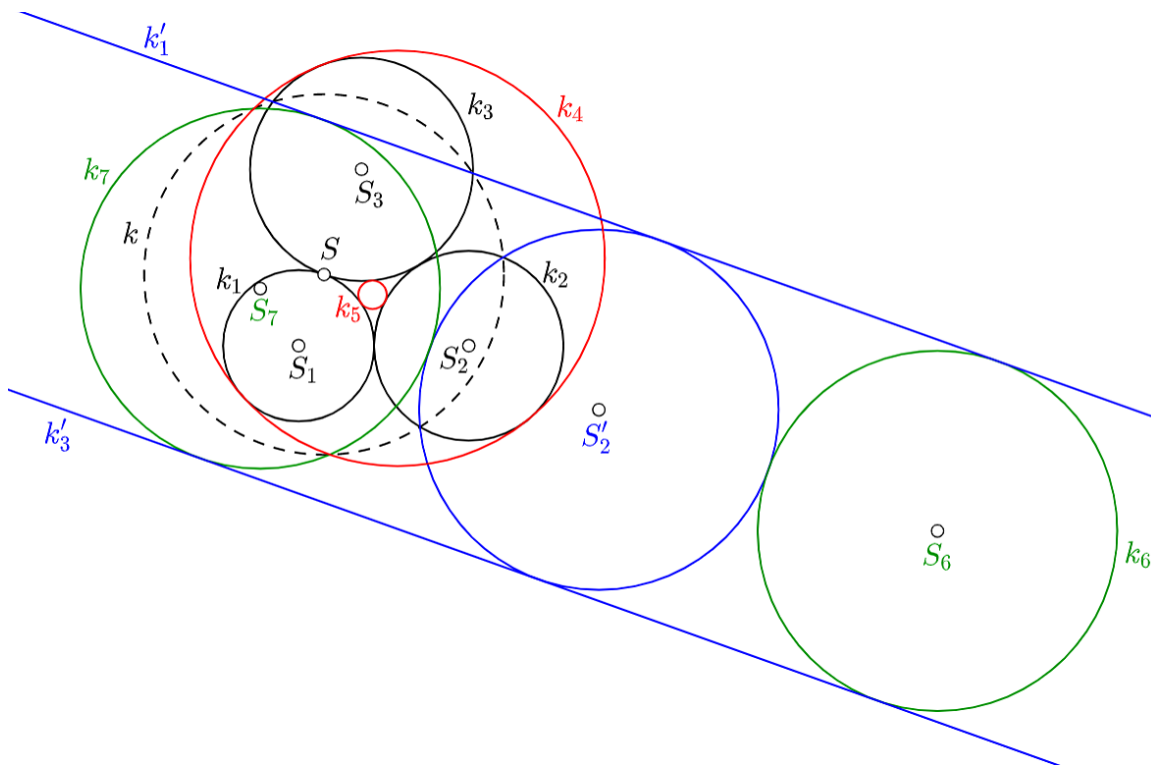
Slika 2.3: Kružnice k , k_1 , k_2 i k_3

Kružnice k_1 i k_3 se inverzijom σ preslikaju u redom paralelne pravce k'_1 i k'_3 , a kružnica k_2 u kružnicu $k'_2(S'_2, r'_2)$ koja ih dodiruje.



Slika 2.4: Pravci k'_1 i k'_3 i kružnice k_6 i k_7

Na Slici 2.4 vidimo da postoje dvije kružnice $k_6(S_6, r'_2)$ i $k_7(S_7, r'_2)$ koje dodiruju pravce k'_1 i k'_3 i kružnicu k'_2 , pri čemu točke S_6 i S_7 leže na simetrali pruge između pravaca k'_1 i k'_3 te je $d(S'_2, S_6) = d(S'_2, S_7) = 2r'_2$. Konačno, kružnice k_4 i k_5 koje diraju kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$ dobijemo tako da kružnice k_6 i k_7 preslikamo inverzijom σ .

Slika 2.5: Kružnice k_4 i k_5

□

Označimo li polumjere kružnica k_1 , k_2 , k_3 i k_4 iz Teorema 2.1 redom s r_1 , r_2 , r_3 i r_4 , imamo sljedeću vezu među tim veličinama.

Teorem 2.2 (Descartes, 1643.). *Polumjeri r_1 , r_2 , r_3 i r_4 četiriju kružnica koje se u parovima dodiruju zadovoljavaju jednakost*

$$2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2.$$

Budući da nije poznato kako je Descartes dokazao ovaj teorem koji je spomenuo u svom pismu kneginji Elizabeti Falačkoj, mi ćemo izložiti prema članku [5] jedan direktan dokaz u kojem se koristi Heronova formula [9].

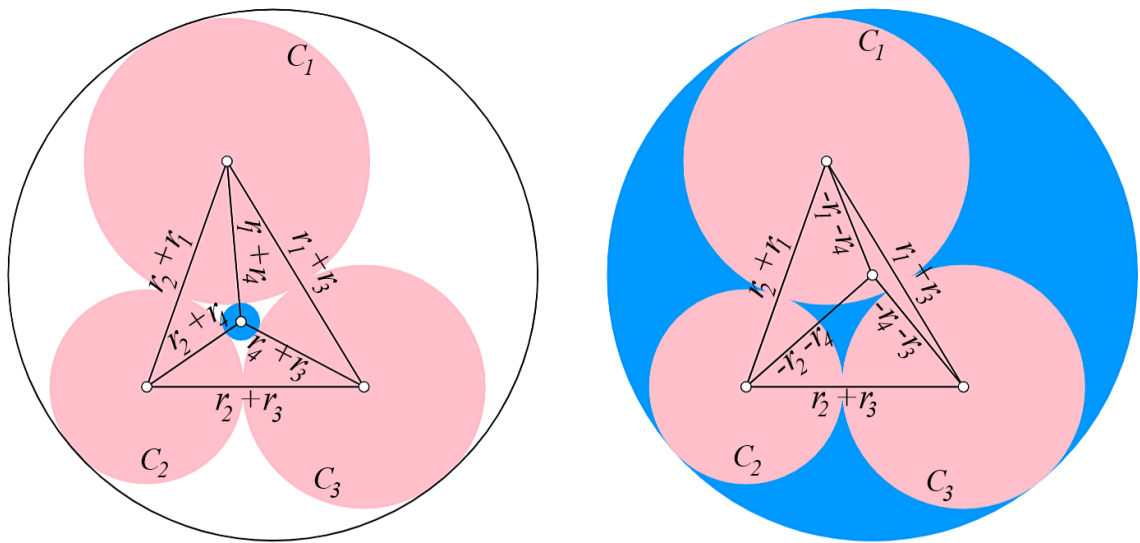
Dokaz. Neka su a, b i c stranice, s poluopseg i P površina trokuta $\triangle ABC$. Prema Heronovoj formuli, vrijedi da je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

pri čemu je

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ako spojimo središta četiriju kružnica kao što je prikazano na Slici 2.6, dobivamo četiri trokuta, pri čemu je površina najvećeg trokuta jednaka zbroju površina preostala tri trokuta.



Slika 2.6: Dvije kružnice koje dodiruju tri međusobno dodirna kruga

Sada prema Heronovoj formuli imamo da je

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} &= \sqrt{r_1 r_2 r_4 (r_1 + r_2 + r_4)} \\ &+ \sqrt{r_1 r_3 r_4 (r_1 + r_3 + r_4)} + \sqrt{r_2 r_3 r_4 (r_2 + r_3 + r_4)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Primijetimo da kružnica može i izvana dodirivati tri međusobno dodirna kruga. Uzmemo li polumjer te kružnice kao negativan broj, tada jednakost (2.1) također vrijedi kako vidimo na desnom dijelu Slike 2.6.

Uvedimo nove oznake. Neka je

$$p = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \quad q = r_1 r_2 r_3 r_4, \quad t = \frac{q}{p}, \quad u = \frac{1}{p},$$

te neka je

$$\alpha = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}.$$

Koristeći novu notaciju, jednakost (2.1) zapisujemo kao

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 p - q} = \sqrt{r_1 r_2 r_4 p - q} + \sqrt{r_1 r_3 r_4 p - q} + \sqrt{r_2 r_3 r_4 p - q}. \quad (2.2)$$

Dijeljenjem jednakosti (2.2) s $\sqrt{p}$ i sređivanjem dobivamo

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 - t} - \sqrt{r_1 r_2 r_4 - t} = \sqrt{r_1 r_3 r_4 - t} + \sqrt{r_2 r_3 r_4 - t}. \quad (2.3)$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti (2.4) i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} & r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 - r_1 r_3 r_4 - r_2 r_3 r_4 \\ &= 2 \left(\sqrt{r_1 r_2 r_3 - t} \cdot \sqrt{r_1 r_2 r_4 - t} + \sqrt{r_1 r_3 r_4 - t} \cdot \sqrt{r_2 r_3 r_4 - t} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dijeljenjem jednakosti (2.4) s q dobivamo

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = 2 \left(\sqrt{\frac{1}{r_4} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_3} - u} + \sqrt{\frac{1}{r_2} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1} - u} \right). \quad (2.5)$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti (2.5) dobivamo

$$\begin{aligned} & \beta + \frac{2}{r_3 r_4} - \frac{2}{r_2 r_4} - \frac{2}{r_1 r_4} - \frac{2}{r_2 r_3} - \frac{2}{r_1 r_3} + \frac{2}{r_1 r_2} \\ &= \frac{4}{r_3 r_4} + \frac{4}{r_1 r_2} - 4\alpha u + 8u^2 + 8\sqrt{\frac{1}{r_4} - u} \\ & \quad \cdot \sqrt{\frac{1}{r_3} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_2} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1} - u}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

odakle sređivanjem slijedi da je

$$\begin{aligned} & \beta - \frac{2}{r_3 r_4} - \frac{2}{r_2 r_4} - \frac{2}{r_1 r_4} - \frac{2}{r_2 r_3} - \frac{2}{r_1 r_3} - \frac{2}{r_1 r_2} + 4\alpha u - 8u^2 \\ &= 8\sqrt{\frac{1}{r_4} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_3} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_2} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1} - u}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Budući da je

$$\alpha^2 - \beta = \frac{2}{r_3 r_4} + \frac{2}{r_2 r_4} + \frac{2}{r_1 r_4} + \frac{2}{r_2 r_3} + \frac{2}{r_1 r_3} + \frac{2}{r_1 r_2}, \quad (2.8)$$

jednakost (2.8) možemo napisati kao

$$(2\beta - \alpha^2) + 4\alpha u - 8u^2 = 8 \sqrt{\frac{1}{r_4} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_3} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_2} - u} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1} - u}. \quad (2.9)$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned} & (2\beta - \alpha^2)^2 + 8(2\beta - \alpha^2)\alpha u - 16(2\beta - \alpha^2)u^2 + 16\alpha^2 u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4 \\ &= \frac{64}{r_1 r_2 r_3 r_4} - 64 \left(\frac{1}{r_1 r_2 r_3} + \frac{1}{r_1 r_2 r_4} + \frac{1}{r_1 r_3 r_4} + \frac{1}{r_2 r_3 r_4} \right) u \\ &+ 32(\alpha^2 - \beta)u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Primijetimo da se prvo dva člana na desnoj strani jednakosti poništavaju. Nakon sređivanja jednakosti (2.10) dobivamo

$$(2\beta - \alpha^2)^2 + 8(2\beta - \alpha^2)\alpha u = 0, \quad (2.11)$$

ili ekvivalentno,

$$(2\beta - \alpha^2) \cdot (2\beta - \alpha^2 + 8\alpha u) = 0. \quad (2.12)$$

Ako bi $2\beta - \alpha^2 + 8\alpha u$ bilo jednako nuli, tada bi bilo $2\beta - \alpha^2 = -8\alpha u$, što bi značilo da je lijeva strana jednakosti (2.9) negativna što desna očito nije. Stoga je $2\beta = \alpha^2$, odnosno

$$2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2. \quad (2.13)$$

Napomenimo da je (2.13) kvadratna jednadžba po r_4 s dva rješenja, što objašnjava postojanje unutrašnje i vanjske kružnice na Slici 2.6. $\square$

Poglavlje 3

Teorija grafova

3.1 Osnovni pojmovi i tvrdnje

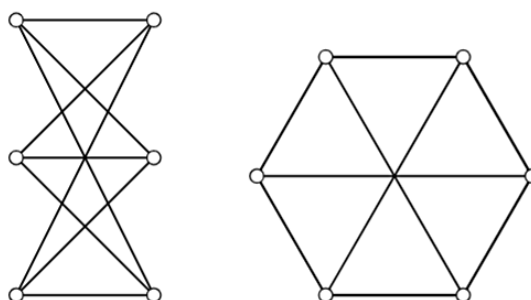
Problem pakiranja vežemo za diskretnu geometriju, točnije za teoriju grafova. Za temu ovog rada potrebno je opisati planarne grafove jer o vezi između planarnih grafova i pakiranja krugova govori Koebeov teorem o reprezentaciji koji kaže da je konačni graf G kontakti graf pakiranja krugova u ravnini ako i samo ako je graf G planaran.

Definicija 3.1. Graf je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $\emptyset \neq V = V(G)$ skup vrhova, $E = E(G)$ skup bridova koji su disjunktni s V , a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koje nazivamo krajevi od e . Kažemo još da su tada vrhovi u i v incidentni s e , a vrhovi u i v susjedni.

Dakle, graf se sastoji od skupa vrhova i skupa bridova te je to osnovna kombinatorna konfiguracija. Smatrat ćemo, ako ne kažemo drugačije, da je graf *konačan*, to jest V i E su konačni skupovi.

Definicija 3.2. Dva brida sa zajedničkim vrhom zovu se susjedni bridovi.

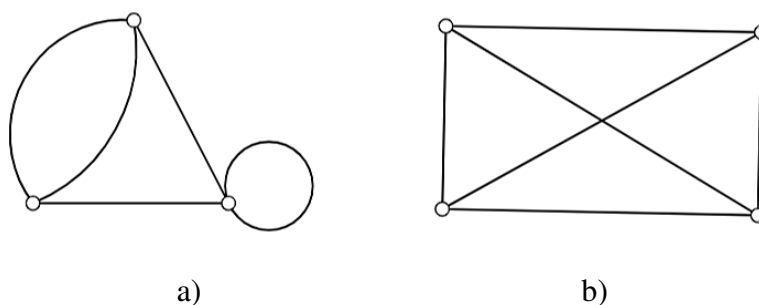
Definicija 3.3. Grafovi G i H su izomorfni (u oznaci $G \approx H$) ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ i $\rho : E(G) \rightarrow E(H)$ tako da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\rho(e)$ u H . Izomorfizam iz G u H je uređeni par $f = (\theta, \rho) : G \rightarrow H$ te čuva susjednost i incidenciju.



Slika 3.1: Primjer dva međusobno izomorfna grafa

Definicija 3.4. Graf je jednostavan ako nema ni petlja (bridova koji spajaju vrh sa samim sobom) ni višestrukih bridova (bridova incidentnih s istim parom vrhova).

Na Slici 3.2 a) tako vidimo graf koji nije jednostavan, a na slici b) jedan jednostavan graf.

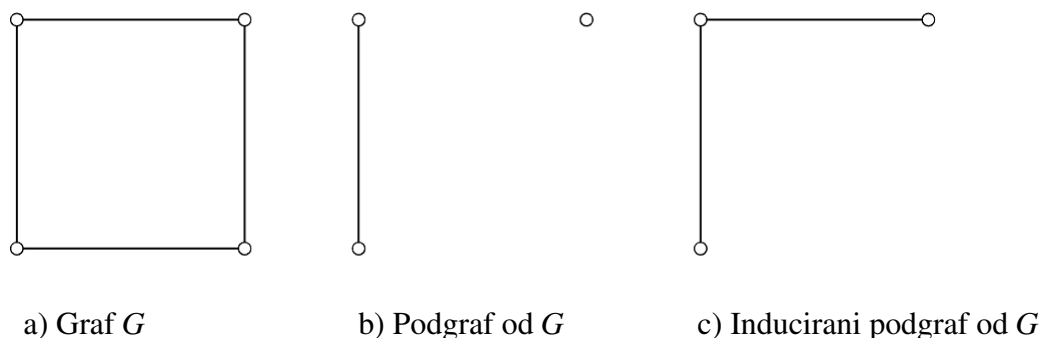


Slika 3.2: Primjer grafa koji nije, odnosno koji jest jednostavan

Definicija 3.5. Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom zove se potpun graf.

Definicija 3.6. Neka su G i H grafovi. Ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, a svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G , onda kažemo da je H podgraf od G i pišemo $H \subseteq G$.

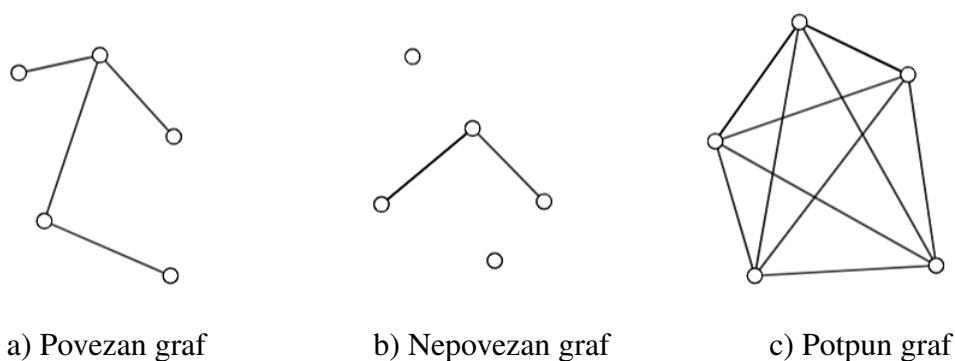
Definicija 3.7. Neka je $G(V, E)$ graf. Ako je $\emptyset \neq V' \subseteq V$, onda se podgraf od G čiji je skup vrhova V' , a skup bridova je podskup od E čija su oba kraja u V' zove podgraf induciran s V' i označava s $G[V']$.



Slika 3.3: Graf i njegovi podgrafovi

Vrhove nekog grafa G možemo zapisati u niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i , $1 \leq i \leq k$. Tako zapisani niz nazivamo *šetnjom* u grafu G . Šetnja W je *zatvorena* ako je $v_0 = v_k$. Kažemo da vrh v_i *prethodi* vrhu v_j u šetnji W ako je $i < j$. Nadalje, ukoliko su svi bridovi šetnje W međusobno različiti, onda se W zove *staza*, a ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se zove *put*. Zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi (osim krajeva) međusobno različiti zove se *ciklus*.

Definicija 3.8. Graf je *povezan* ako između svaka dva vrha postoji put, u suprotnom graf je *nepovezan*.



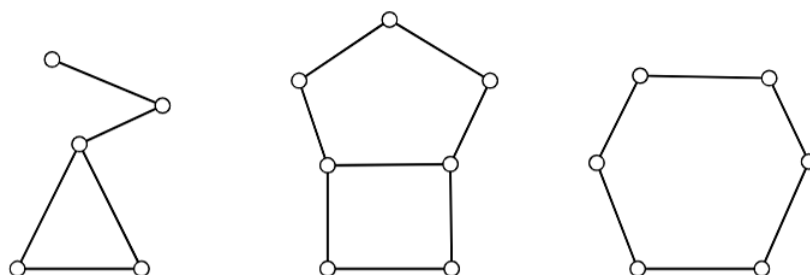
Slika 3.4: Ilustracija povezanosti i potpunosti grafa

Definicija 3.9. Komponenta povezanosti grafa G je maksimalni povezan podgraf od G , to jest, povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom većem povezanom podgrafu.

Povezanost grafa možemo definirati na još jedan način.

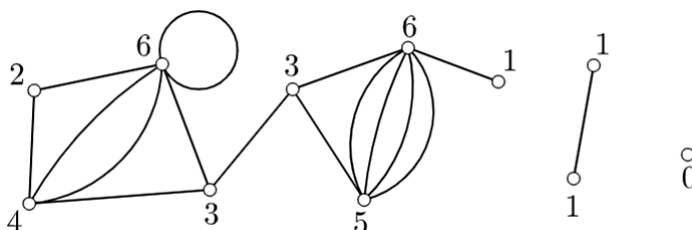
Definicija 3.10. *Povezanost među vrhovima je relacija ekvivalencije, pa stoga postoji particija skupa vrhova V na klase ekvivalencije i podgrafovi inducirani tim klasama su komponente povezanosti. Ako graf sadrži samo jednu komponentu povezanosti, onda je povezan, u suprotnom je nepovezan.*

Definicija 3.11. *Graf koji sadrži barem jedan ciklus zove se ciklički graf.*



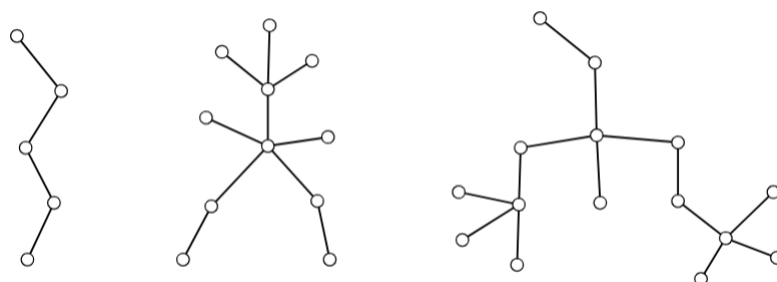
Slika 3.5: Primjer cikličkih grafova

Definicija 3.12. *Stupanj vrha $v \in V(G)$ u grafu G je broj bridova s kojima je v incidentan.*



Slika 3.6: Graf na kojem je kod svakog vrha označen njegov stupanj

Definicija 3.13. *Stablo je povezani graf bez ciklusa.*



Slika 3.7: Primjer tri stabla

Definicija 3.14. *Izolirani vrh je vrh stupnja 0. List je vrh stupnja 1.*

Lema 3.15. *Stablo s više od jednog vrha ima barem jedan list.*

Dokaz. Kako je stablo povezano, ono nema izoliranih vrhova. Pretpostavimo da je svaki vrh stabla stupnja barem dva. Tada postoje proizvoljno duge šetnje čiji su susjedni bridovi različiti. Kako je graf konačan, doći ćemo do vrha kod kojeg smo već bili. Međutim, to je nemoguće jer stablo nema cikluse. $\square$

Teorem 3.16. *Stablo s n vrhova ima $n - 1$ bridova.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju vrhova stabla.

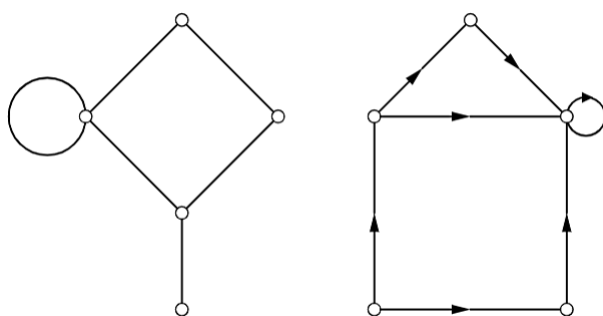
1. Baza indukcije: stablo s jednim vrhom nema bridova.
2. Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da stablo s $n - 1$ vrhova ima $n - 2$ bridova.
3. Korak indukcije: prema Lemi 3.15, u stablu T s n vrhova postoji list v . Tada je $T - v$, graf dobiven izbacivanjem iz T vrha v i s njime incidentnog brida, povezan graf bez ciklusa s $n - 1$ vrhova. Zaista, put u stablu T između vrhova v_1 i v_2 , $v_1, v_2 \neq v$, ne može prolaziti kroz v . Zaključujemo da je $T - v$ stablo. Iz pretpostavke indukcije slijedi da stablo $T - v$ ima $n - 2$ bridova, pa T ima $n - 1$ bridova.

Dakle, prema principu matematičke indukcije zaključujemo da stablo s n vrhova ima $n - 1$ brid. $\square$

Definicija 3.17. *Usmjereni (orijentirani) graf D je graf G u kojem svaki brid ima smjer od početka prema kraju. Brid s početkom u , a krajem v je uređeni par (u, v) . Na crtežu stavljamo strelicu koja pokazuje od u prema v . Kažemo da je $a = uv$ lûk od u prema v .*

Prilikom crtanja grafova možemo uočiti da nekim grafovima ucrtavamo strelice, a nekim ne. Dakle, graf možemo predstaviti crtežom na sljedeći način. Vrhove $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ grafa $G(V, E)$ predstavljamo proizvoljnim međusobno različitim točkama u ravni ili prostoru. Ako je $(v_i, v_j) \in E$, točku koja predstavlja vrh v_i spajamo neprekidnom glatkom krivuljom s točkom koja predstavlja vrh v_j . Kao što smo već definirali, navedena krivulja naziva se bridom. Brid se na crtežu može orijentirati strelicom u smjeru od v_i prema v_j i ona ne prolazi kroz neki treći vrh grafa. Ovim postupkom dobivamo usmjerene grafove.

Sljedeće pitanje koje se postavlja je što ako paru vrhova v_i i v_j pripadaju dva brida (v_i, v_j) i (v_j, v_i) ? Tada se na crtežu uglavnom ne crtaju dva brida između vrhova v_i i v_j nego se jedinstveni brid dvostrano orijentira ili se uopće ne orijentira. Dakle, takve grafove nazivamo *neusmjerenim* grafovima. Kod neusmjerenih grafova svi bridovi su dvostrano orijentirani, pa se strelice na crtežu izostavljaju.

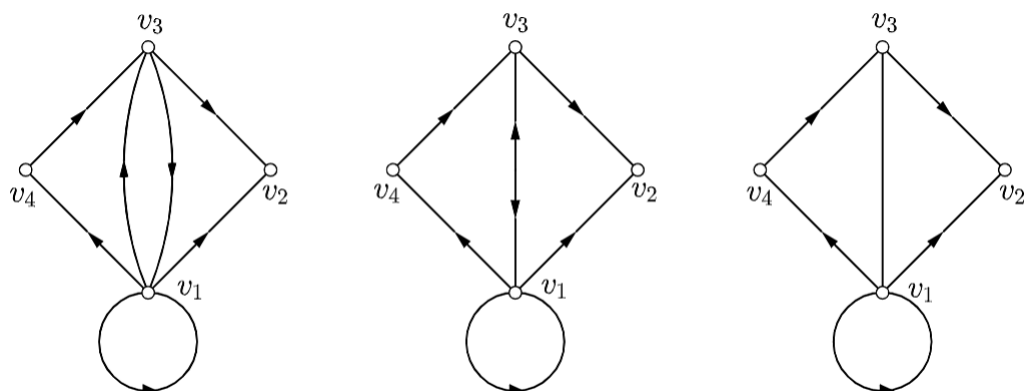


a) Neusmjereni graf

b) Usmjereni graf

Slika 3.8: Primjer usmjerenog i neusmjerenog grafa

Primjer 3.18. Neka je $G(V, E)$ graf, pri čemu je zadan skup vrhova $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i skup bridova $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_3)\}$. Tada graf G možemo nacrtati na tri ekvivalentna načina, što je prikazano na Slici 3.9.

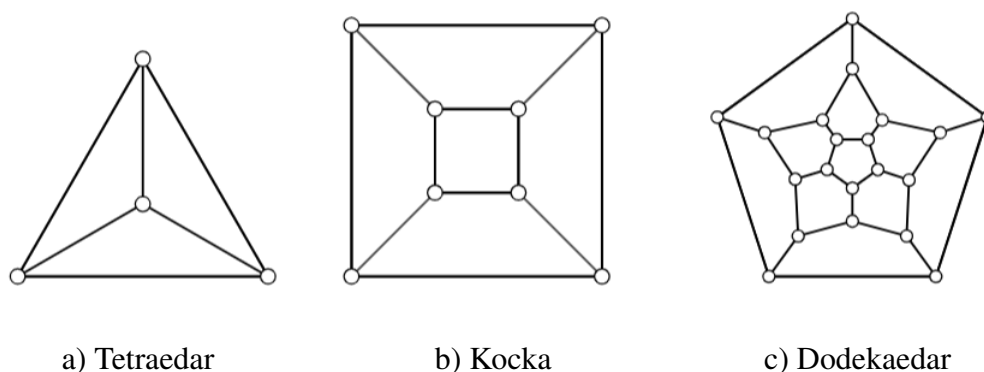


Slika 3.9: Prikaz istog grafa na tri ekvivalentna načina

Na Slici 3.8 i u prethodnom primjeru uočimo petlju. Naime, orijentacija petlje nema posebnog značaja, jer u kojem god smjeru postavimo strelicu, petlja počinje i završava u istom vrhu. Iz navedenog razloga, strelicu u tom slučaju možemo izostaviti. Također, primijetimo da na Slici 3.9 imamo jedan primjer grafa koji nije niti usmjeren niti neusmjeren. Razlog tomu je brid koji spaja vrhove v_1 i v_3 , on je dvostrano orijentiran, dok su svi ostali jednostrano orijentirani.

3.2 Planarni grafovi

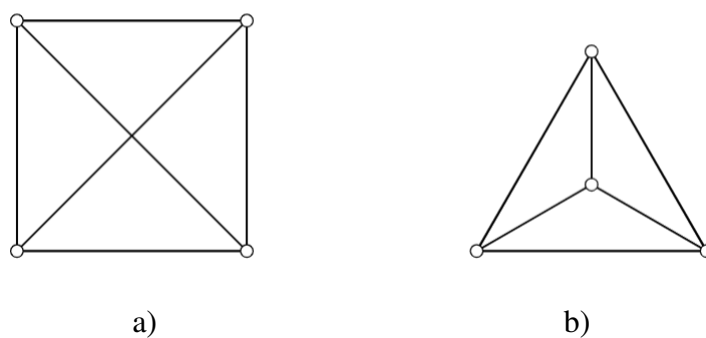
Nadalje ćemo promatrati neusmjerene grafove bez petlji, a primjer takvih grafova su planarni grafovi. Planarne grafove možemo prepoznati primjerice kod grafa pridruženog geografskoj karti i kod grafova pridruženih Platonovim tijelima, a neke od njih možemo vidjeti na Slici 3.10.



Slika 3.10: Grafovi pridruženi nekim Platonovim tijelima

Definicija 3.19. *Graf je planaran ako se može nacrtati u ravнини $\mathbb{R}^2$ tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima s kojima su incidentni, u protivnom graf je neplanaran.*

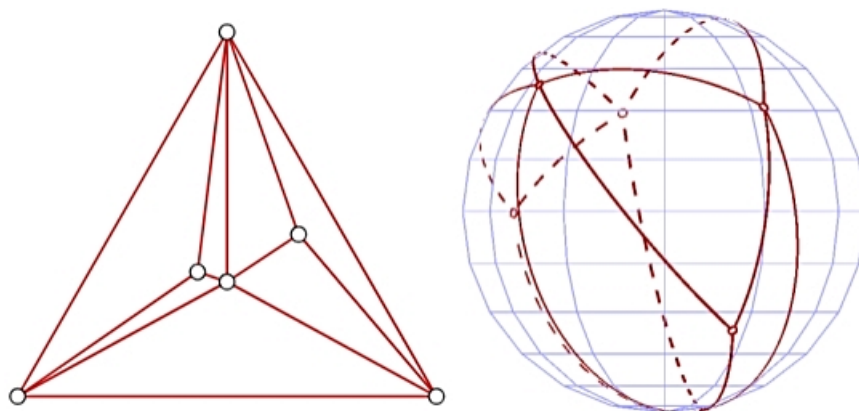
Drugim riječima, graf G je planaran, ako dopušta smješćavanje u ravninu. To znači da postoji funkcija f koja svakom vrhu grafa G pridružuje točku u ravнини $\mathbb{R}^2$ i svakom bridu e jednostavnu krivulju $f(e) \subset \mathbb{R}^2$ tako da se $f(e_1)$ i $f(e_2)$ sijeku u točki T ako i samo ako je $T = f(v)$ za neki vrh v incidentan s e_1 i e_2 u grafu G . Za graf koji je već tako smješćen u ravninu kažemo da je *ravninski*, odnosno to je uređeni par (G, f) gdje je G planarni graf, a funkcija f smješćavanje grafa G u ravninu.



Slika 3.11: Planarni graf i njegova ravninska realizacija

Na Slici 3.11 a) možemo vidjeti jedan planarni graf, a na slici b) jedno njegovo ravninsko smješćavanje.

Ravnina nije jedini ambijentni prostor u koji možemo smjestiti graf. Analogna je definicija smještanja grafa G u bilo koji topološki prostor X . Pišemo $G \hookrightarrow X$. Na primjer, ako je $X = \mathbb{R}^3$, tada lako zaključujemo da se svaki jednostavni graf može smjestiti u $\mathbb{R}^3$ tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima i štoviše, bridovi su mu ravni segmenti. Primjerice, vrhove stavimo na krivulju parametarski zadanu s (t, t^2, t^3) , $t \in \mathbb{R}$. Zanimljivije je smještanje grafova u plohe poput sfere, torusa, Möbiusove trake, Kleinove boce i drugih.

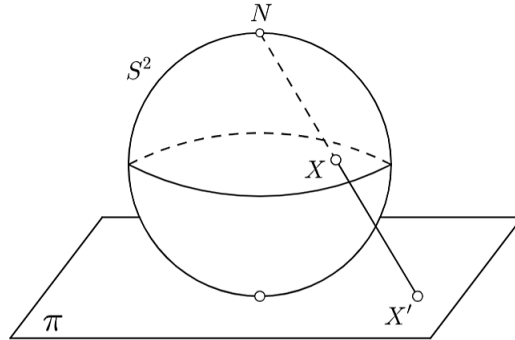


Slika 3.12: Smještanje grafa na sferu

Sljedeća propozicija je veza između planarnosti i mogućnosti smještanja u sferu.

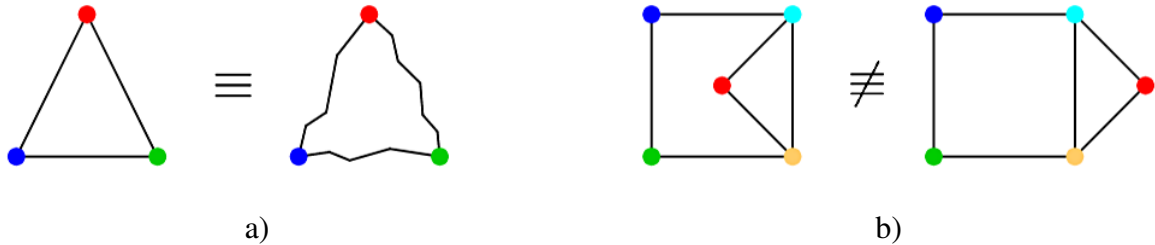
Propozicija 3.20. *Graf G je planaran ako i samo ako se može smjestiti na sferu S^2 .*

Dokaz. Promotrimo sferu S^2 , njezinu tangencijalnu ravninu π u „južnom polu“ i stereografsku projekciju sfere bez „sjevernog pola“ N na ravninu π . Stereografska projekcija je preslikavanje $\tau_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \pi$, koje točki $X \in S^2 \setminus \{N\}$, pridružuje presjek X' pravca NX s ravninom π . τ_N je homeomorfizam, to jest neprekidna funkcija s topološkoga prostora na topološki prostor kojoj je i inverzna funkcija neprekidna.

Slika 3.13: Stereografska projekcija sfere S^2 na ravninu π

Dakle, ako je $G \hookrightarrow S^2$, onda s odgovarajućom stereografskom projekcijom dobivamo $G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, a inverznim preslikavanjem dobivamo i obrat. $\square$

Vratimo se planarnim grafovima. Jedan planarni graf može imati beskonačno mnogo ravninskih prikaza. Ravninsko smještanje jedinstveno određuje kružni poredak bridova, stoga neke ravninske realizacije planarnih grafova mogu biti međusobno slične ili različite.

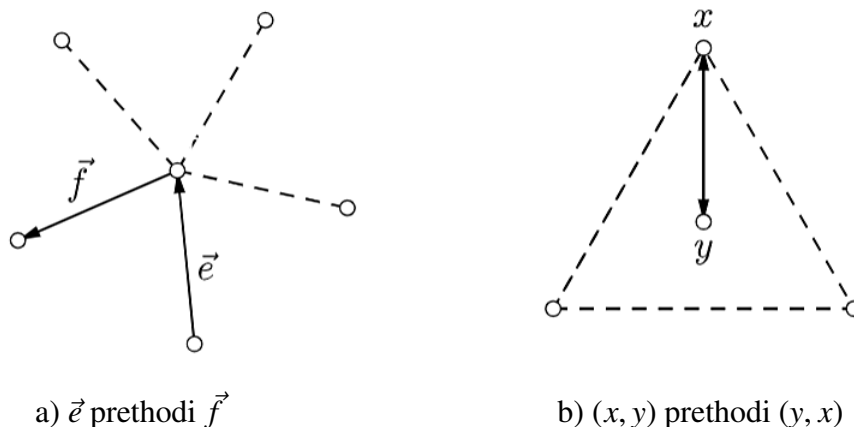


Slika 3.14: Primjeri ravninske realizacija planarnih grafova

Na Slici 3.14 a) vidimo dvije ravninske realizacije koje su ekvivalentne, dok na slici b) vidimo dvije ravninske realizacije koje nisu ekvivalentne. Za primjerice žuti vrh, kružni poredak susjednih vrhova je (zeleni, crveni, tirkizni) za lijevi graf, a za desni (zeleni, tirkizni, crveni). Kako bi izbjegli nedoumicu vezanu za ekvivalentnost ravninskih grafova, definirat ćemo ravninske grafove na još jedan način.

Definicija 3.21. *Ravninski graf je graf u kojem svakom vrhu pridružujemo kružni poredak incidentnih bridova. Kružni poredci su takvi da postoji smještanje u kojem poredak krivulja koje spajaju slike vrhova u smjeru kazaljke na satu odgovara kružnom poredku.*

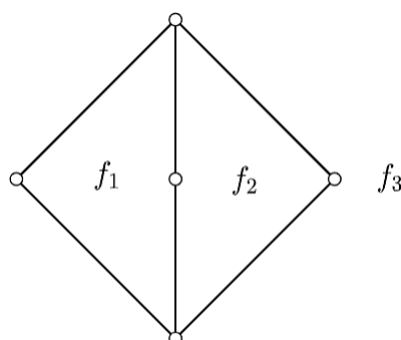
Ova kombinatorna struktura ravninskih grafova omogućuje direktno definiranje strane grafa. Uzmemo li u obzir da je svaki brid grafa dvostrano orijentiran, tada kažemo da usmjereni brid $\vec{e}$ *prethodi* $\vec{f}$ (ili ekvivalentno, $\vec{f}$ slijedi iza $\vec{e}$) ako postoje vrhovi v , x i y takvi da je $\vec{e} = (x, v)$, $\vec{f} = (v, y)$ i vrh y je sljedbenik vrha x u kružnom poretку vrhova susjednih v .



Slika 3.15: Primjer veze između bridova grafa

Kažemo da bridovi $\vec{e}$ i $\vec{f}$ *pripadaju istoj strani* grafa ako postoji konačni usmjereni put $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ u grafu u kojem $\vec{e}_i$ prethodi $\vec{e}_{i+1}$ za $i = 1, \dots, m-1$ i ako je ili $\vec{e} = \vec{e}_1$ i $\vec{f} = \vec{e}_m$ ili $\vec{f} = \vec{e}_1$ i $\vec{e} = \vec{e}_m$. Lako vidimo da je ovo relacija ekvivalencije, stoga svaku takvu klasu ekvivalencije nazivamo *stranom* grafa. Iako je strana skup usmjerenih bridova, mi ćemo zanemariti orijentaciju i promatrat ćemo stranu kao skup odgovarajućih neusmjerenih bridova.

Uvedimo još neke pojmove. Neka je G konačni ravninski graf (planarni graf već smješten u ravninu $\mathbb{R}^2$) koji dijeli komplement od G u ravnini na područja (otvorene povezane skupove). Rubovi zatvarača tih područja zapravo su *strane* grafa G . Brid ili vrh je *incidentan* sa stranom ako je sadržan u toj strani. Oni bridovi koji su incidentni s tom stranom i još nekom drugom stranom čine *rub* strane. Dvije strane su *susjedne* ako imaju zajednički incidentan brid. Svi bridovi (i njihovi krajevi) incidentni sa stranom f čine *zatvorenu šetnju* u kojoj su rezni bridovi (oni čijim se izbacivanjem inducirani graf raspada na više komponenti povezanosti) prijeđeni dvaput. Duljina te šetnje zove se *stupanj strane* f , a ako je ta šetnja ciklus, strana je *ciklička*. Svaka ciklička strana određuje unutrašnje i vanjsko područje te svaki ravninski graf ima točno jedno neomeđeno područje, čiji rub nazivamo *vanjskom stranom*, a sve ostale strane *unutrašnjom stranom* grafa.



Slika 3.16: Ravninski graf

Na Slici 3.16 vidimo jedan ravninski graf koji ima tri cikličke strane f_1 , f_2 i f_3 (vanjska strana) svaka stupnja 4.

Broj vrhova, bridova i strana ravninskog grafa povezuje Eulerova formula.

Teorem 3.22 (Eulerov teorem). *Svako smještanje planarnog grafa s v vrhova i e bridova u ravnini dijeli ravninu u f područja, gdje vrijedi*

$$v - e + f = 2.$$

Dokaz. Ako graf ima ciklus, izbacivanjem jednog brida iz ciklusa smanjujemo broj bridova za jedan, kao i broj područja (budući da smo dva područja spojili u jedno), a broj vrhova ostaje isti. Tako dobiveni novi graf ima $v' = v$ vrhova, $e' = e - 1$ bridova i $f' = f - 1$ područja, te je

$$v' - e' + f' = v - (e - 1) + f - 1 = v - e + 1 + f - 1 = v - e + f.$$

Ovaj proces ponavljamo sve dok postoje ciklusi. Na kraju ćemo doći do stabla koje će imati $v'' = v$ vrhova, $e'' = v - 1$ bridova i $f'' = 1$ područja. Stoga je

$$v'' - e'' + f'' = v - (v - 1) + 1 = v - v + 1 + 1 = 2.$$

Kako se procesom izbacivanja jednog brida iz ciklusa iznos izraza $v - e + f$ ne mijenja, možemo zaključiti da je vrijednost tog izraza jednaka 2 i za početni graf. $\square$

Postoje mnoge posljedice Eulerovog teorema. Tako primjerice Eulerovu formulu koristimo u dokazima nekih općih svojstava planarnih grafova, koja ćemo navesti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.23. a) Sva ravninska smještavanja danog povezanog planarnog grafa imaju isti broj strana.

b) Jednostavni planarni graf G s $n \geq 3$ vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.

c) Jednostavni planarni graf G ima vrh stupnja najviše 5.

Dokaz. Dokaz možete pronaći u [10] na stranici 313. □

Definicija 3.24. Triangulacijom dijela ravnine dobivamo jednostavni ravninski graf u kojem je svaka strana omeđena s točno tri brida. Tada graf zovemo trokutni.

Propozicija 3.25. Neka je $G(V, E)$ trokutni graf s v vrhova, e bridova i f strana. Tada vrijedi

$$f = 2v - 4.$$

Općenito, za svaki ravninski graf je $f \leq 2v - 4$.

Dokaz. Kako je svaka strana omeđena s tri brida i svaki brid pripada točno dvije strane, to je $3f = 2e$. Uvrštavanjem jednakosti $e = \frac{3}{2}f$ u Eulerovu formulu dobivamo

$$v - e + f = 2 \quad \Leftrightarrow \quad v - \frac{3}{2}f + f = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2}f = 2 - v \quad \Leftrightarrow \quad f = 2v - 4.$$

Za proizvoljni ravninski graf je $3f \leq 2e$ jer strane mogu biti omeđene s više od tri brida, pa analogno dobivamo odgovarajuću nejednakost. □

I u problemu pakiranja koristi se Eulerova formula.

Poglavlje 4

Teorem o pakiranju krugova

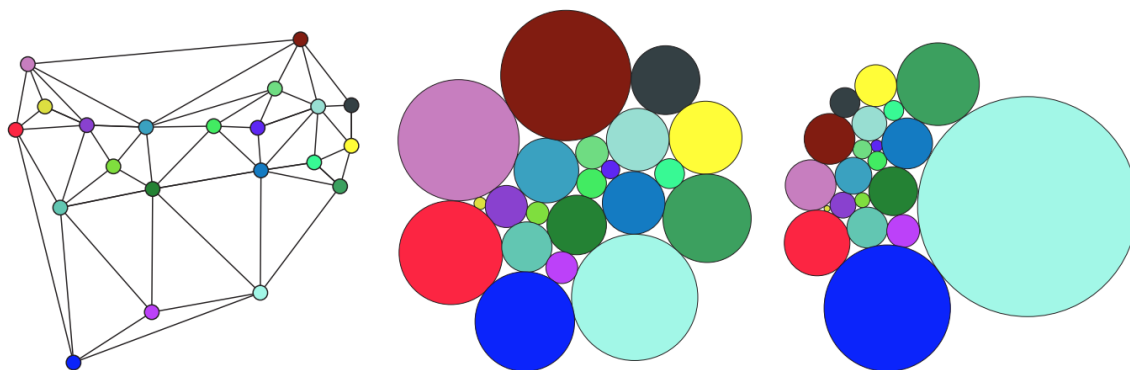
4.1 Problem pakiranja krugova

Definicija 4.1. Za skup K točaka ravnine kažemo da je konveksan ako u njemu leži čitava dužina $\overline{T_1 T_2}$ pri čemu je $T_1, T_2 \in K$.

Definicija 4.2. Za skupove A i B kažemo da su disjunktni ako im je presjek prazan skup.

Definicija 4.3. Neka je C konačna familija konveksnih skupova čije su unutrašnjosti disjunktna. Definiramo $G(C)$ kao kontaktni graf familije C , čiji vrhovi odgovaraju članovima od C , a dva su vrha susjedna ako i samo ako se pripadni članovi od C dodiruju.

Dakle, osnovni je problem karakterizacija klase grafova koji su kontaktni grafovi pakiranja kongruentnih kopija konveksnog skupa K . Prva netrivialna karakterizacija kontaktnog grafa pakiranja krugova u ravnini je Koebeov teorem o reprezentaciji koji kaže da je jednostavni graf G kontaktni graf pakiranja krugova u ravnini ako i samo ako je G planaran. Upravo navedeni teorem je veza između planarnih grafova i pakiranja krugova.



Slika 4.1: Graf i njegove dvije reprezentacije dodirnim krugovima

Promotrimo na primjer kontaktni graf G u ravnini tako da vrhovi v_i budu središta krugova. Kako svaka dva dodirna kruga imaju točno jednu točku dodira d , možemo nacrtati odgovarajući brid $\{v_i, v_j\}$ koji spaja v_i , d i v_j , redom. Budući da točka d ne može biti točka nekog trećeg kruga jer su krugovi pakirani u ravninu, tako smješteni graf je ravninski, odakle zaključujemo da je graf G planaran. Dakle, svaki kontaktni graf pakiranja krugova u ravnini je planaran.

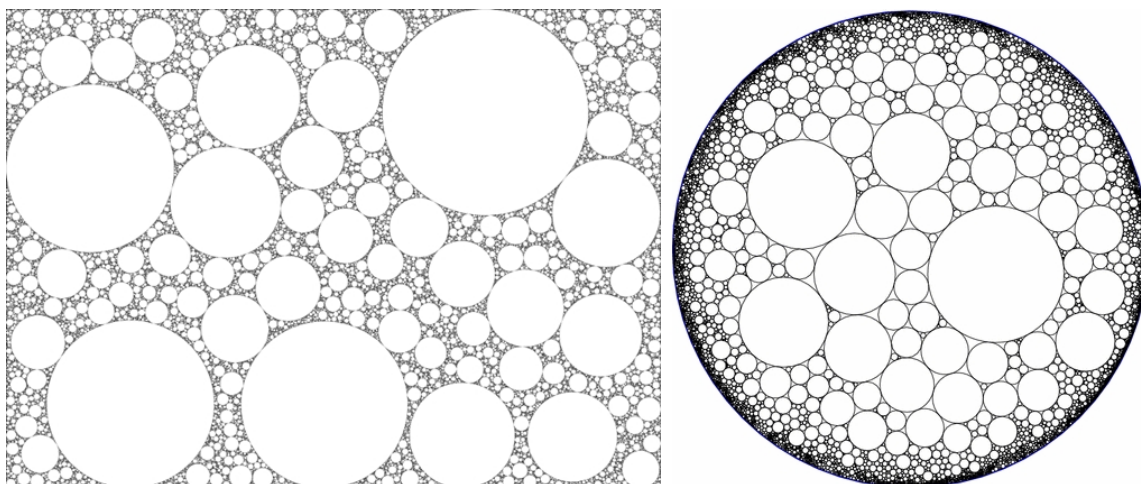
Koebe je svoj teorem dokazao uz pomoć kompleksne analize 1936. godine, dok su Andreev i Thurston pronašli kombinatorni dokaz u kojem koriste upravo Eulerovu formulu. Koebeov teorem je bio proširen te je temelj za danas poznati Koebe-Andreev-Thurstonov teorem, još znan pod imenom Teorem o pakiranju krugova.

4.2 Iskaz teorema o pakiranju krugova

Definicija 4.4. *Zatvoren krug sa središtem $z_0 \in \mathbb{C}$ polumjera $r > 0$ je skup $\overline{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.*

Definicija 4.5. *Konačna familija krugova u kompleksnoj ravnini za koju vrijedi da su unutrašnjosti svaka dva kruga disjunktne naziva se pakiranje krugova.*

Neke zanimljive primjere pakiranja krugova možemo vidjeti na Slici 4.2.



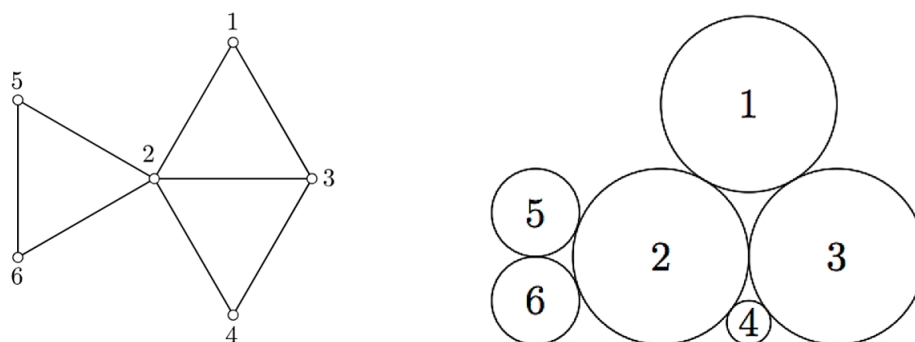
Slika 4.2: Primjeri pakiranja krugova

Sada kada smo se upoznali sa svom potrebnom terminologijom, možemo iskazati teorem o pakiranju krugova.

Teorem 4.6 (Teorem o pakiranju krugova). *Za svaki planarni graf G sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ i skupom bridova $E(G)$, postoji pakiranje $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ od n (ne nužno sukladnih) krugova u ravnini sa svojstvom da se C_i i C_j dodiruju ako i samo ako je $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, za svaki $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.*

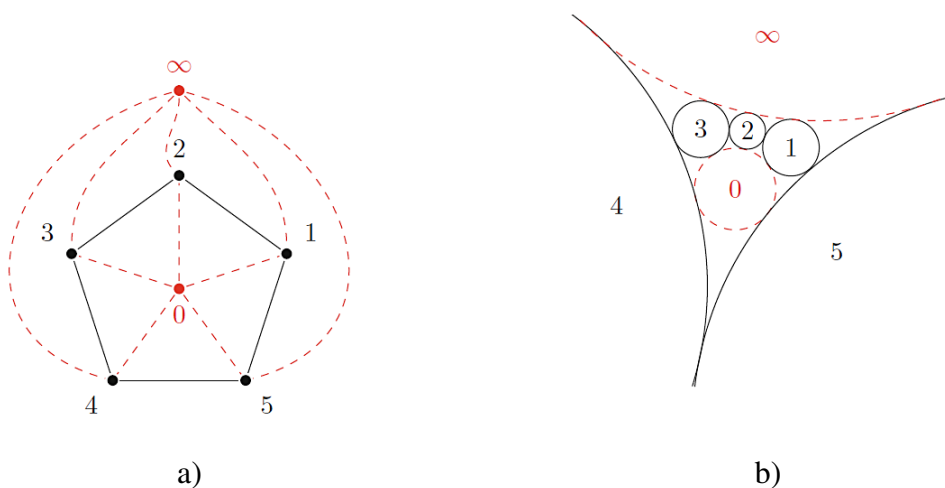
Ukoliko za planarni graf G pronađemo jednu takvu reprezentaciju dodirnim krugovima, tada pomoću inverzije ravnine s obzirom na kružnicu čije središte nije sadržano u rubovima tih krugova, možemo konstruirati druge reprezentacije. Tako se kružnice preslikaju opet u kružnice, a inverzija čuva susjednost i incidenciju. Thurston je dokazao da je do na inverzije i izometrije, reprezentacija dodirnim krugovima bilo kojeg trokutnog planarnog grafa jedinstvena.

Kako bi dobili jedinstvenu reprezentaciju planarnog grafa dodirnim krugovima, nužno je da planarni graf bude trokutni. Na Slici 4.3 vidimo kako jedinstvenost prikaza ne vrijedi za planarne grafove koji nisu trokutni. Lijevo možemo vidjeti graf koji nije trokutni, a desno njegovu reprezentaciju dodirnim krugovima. Dok krugovi 2 i 3 ostaju nepromijenjeni, krugovima 1, 5, 6 i 4 možemo mijenjati polumjer pri čemu tangencijalnost krugova ostaje očuvana. Navedene promjene se ne mogu opisati pomoću izometrija i inverzija, pa jedinstvenost ne vrijedi za netrokutne grafove.



Slika 4.3: Ravninski graf i jedna njegova reprezentacija pakiranjem krugova

Primijetimo da je teorem dovoljno dokazati za trokutne planarne grafove. Ukoliko bi planarni graf G imao neke netrokutne strane, tada bi stavili po jedan dodatni vrh unutar svake od njih te ga spojili s vrhovima te strane što možemo vidjeti na Slici 4.4 a). Ako se tako dobiveni trokutni graf može reprezentirati krugovima koji udovoljavaju uvjete teorema, tada brisanjem krugova koji odgovaraju dodanim vrhovima dobivamo reprezentaciju početnog grafa što možemo vidjeti na Slici 4.4 b).



Slika 4.4: Triangulacija grafa i pridruženo pakiranje krugova

Kako je teorem dovoljno dokazati za trokutne grafove, mi ćemo dokazati sljedeću još precizniju tvrdnju.

Teorem 4.7. *Neka je $G = (V, E)$ trokutni graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ i neka skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ čini vanjsku stranu. Tada za proizvoljna tri pozitivna broja ρ_1, ρ_2 i ρ_3 , postoji pakiranje krugova $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ kao u Teoremu 4.6 s dodatnim svojstvom da se krugovi C_1, C_2 i C_3 međusobno dodiruju, čine vanjsku stranu i imaju polumjere ρ_1, ρ_2 i ρ_3 tim redom. Nadalje, takvo pakiranje krugova je jedinstveno do na translacije i rotacije ravnine.*

4.3 Dokaz teorema o pakiranju krugova

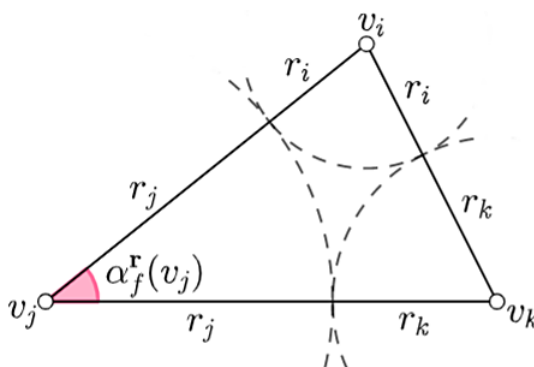
Dokazat ćemo Teorem 4.7 koji povlači Teorem 4.6. Stoga od sada pa nadalje smatramo da je graf G trokutni graf.

Neka je G trokutni graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, skupom bridova $E(G)$ i skupom strana $F(G)$ (uključujući i vanjsku stranu). Prema Propoziciji 3.25 koja je posljedica Eulerove formule, imamo

$$|F| = 2n - 4. \quad (4.1)$$

Neka skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ čini vanjsku stranu grafa G i neka su ρ_1, ρ_2 i ρ_3 tri pozitivna realna broja. Neka je F° skup unutrašnjih strana grafa te neka je za $A \subset V(G)$, $F(A)$ skup unutrašnjih strana grafa s barem jednim vrhom iz skupa A . Pisat ćemo $F(v)$ misleći pritom na $F(\{v\})$ i označit ćemo s $V(f)$ skup vrhova grafa koji tvore stranu f grafa.

Neka su C_i, C_j i C_k tri kruga koji se međusobno dodiruju sa središtima v_i, v_j i v_k (koja su ujedno i vrhovi strane $f \in F^\circ$) i polumjerima $r_i, r_j, r_k \in \mathbb{R}^+$. Ukoliko spojimo vrhove v_i, v_j i v_k dobivamo trokut $\Delta v_i v_j v_k$ sa stranicama duljine $r_i + r_j, r_i + r_k$ i $r_j + r_k$.



Slika 4.5: Trokut $\Delta v_i v_j v_k$

Nadalje definiramo $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j) = \angle v_i v_j v_k \in (0, \pi)$ kao kut pri vrhu v_j trokuta $\Delta v_i v_j v_k$, pri čemu je $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (0, \infty)^n$ vektor koji sadrži polumjere krugova sa središtima u $v_1, v_2, \dots, v_n$ tim redom.

Teorem 4.8 (Teorem o kosinusu). *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, tada je*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$$

Dokaz. Dokaz možete pronaći u [2] na stranicama 66 i 67. □

Primijenimo sada kosinusoav teorem na trokut $\Delta v_i v_j v_k$, kojeg vidimo na Slici 4.5. Uočimo da je kut $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$ između stranica trokuta duljine $r_j + r_k$ i $r_i + r_j$ i da je nasuprotan stranici trokuta duljine $r_i + r_k$. Primjenom kosinusoavog teorema, dobivamo

$$\cos \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j) = \frac{(r_j + r_k)^2 - (r_i + r_k)^2 + (r_i + r_j)^2}{2(r_j + r_k)(r_i + r_j)}. \quad (4.2)$$

Sređivanjem jednakosti (4.2) dobivamo

$$\cos \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j) = 1 - \frac{2r_i r_k}{(r_j + r_k)(r_i + r_j)}. \quad (4.3)$$

Međutim, jednakost (4.3) nećemo koristiti direktno, stoga uvedimo novu oznaku.

Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ definiramo sumu kutova prvi vrhu $v_j \in V$ kao

$$\sigma_{\mathbf{r}}(v_j) = \sum_{f \in F(v_j)} \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j). \quad (4.4)$$

Neka su θ_1, θ_2 i θ_3 kutovi pri središtima tri međusobno dodirna kruga C_1, C_2 i C_3 polumjera ρ_1, ρ_2 i ρ_3 . Ekvivalentno, to su kutovi trokuta sa stranicama duljine $\rho_1 + \rho_2, \rho_2 + \rho_3$ i $\rho_1 + \rho_3$. Kada bi vektor $\mathbf{r}$ bio vektor polumjerâ pakiranja krugova pridruženog ravninskom grafu koji ispunjava Teorem 4.7, tada bi vrijedilo

$$\sigma_{\mathbf{r}}(v_i) = \begin{cases} \theta_i & i \in \{1, 2, 3\}, \\ 2\pi & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Dodatno, vrijedilo bi i da je $(r_1, r_2, r_3) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$. Stoga dokaz Teorema 4.7 provodimo u tri dijela:

1. Dokazati da postoji vektor $\mathbf{r} \in (0, \infty)^n$ koji ispunjava (4.5).

2. Ukoliko postoji takav $\mathbf{r}$, dokazati da postoji pakiranje krugova čiji su polumjeri zapisani u vektoru $\mathbf{r}$ i da je (r_1, r_2, r_3) dobiven iz (ρ_1, ρ_2, ρ_3) množenjem pozitivnim skalarom. Dodatno, dokazati da je ovakvo pakiranje krugova jedinstveno do na translacije i rotacije.
3. Dokazati da je $\mathbf{r}$ jedinstven do na množenje svih komponenti konstantnim skalarom.

1. dio dokaza Teorema 4.7: Pronalaženje vektora polumjerâ $\mathbf{r}$

Najvažniji dio dokaza Teorema 4.7 je pronalazak vektora polumjerâ takvog da možemo nacrtati pakiranje krugova koji imaju polumjere koji su zapisani u vektoru $\mathbf{r}$.

Lema 4.9. *Za svaki $\mathbf{r}$ je*

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{\mathbf{r}}(v_i) = |F^\circ| \cdot \pi = (2n - 5) \cdot \pi.$$

Dokaz. Svaka unutrašnja strana f ima vrhove v_i, v_j i v_k i tri kuta $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_i), \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$ i $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_k)$ koji u zbroju daju π . Prema (4.1), postoji $2n - 5$ unutrašnjih strana. $\square$

Neka je

$$\delta_{\mathbf{r}}(v_i) = \begin{cases} \sigma_{\mathbf{r}}(v_i) - \theta_i & i \in \{1, 2, 3\}, \\ \sigma_{\mathbf{r}}(v_i) - 2\pi & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Koristeći notaciju (4.6), naš cilj je pronaći vektor $\mathbf{r}$ za koji je $\delta_{\mathbf{r}} \equiv 0$. Iz Leme 4.9 slijedi da je za svaki $\mathbf{r}$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{\mathbf{r}}(v_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_{\mathbf{r}}(v_i) - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - (n - 3) \cdot 2\pi = 0. \quad (4.7)$$

Definiramo

$$\varepsilon_{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n \delta_{\mathbf{r}}(v_i)^2.$$

Sada želimo dokazati da postoji $\mathbf{r}$ za koji je $\varepsilon_{\mathbf{r}} = 0$. Za dokaz ćemo koristiti sljedeću geometrijsku činjenicu.

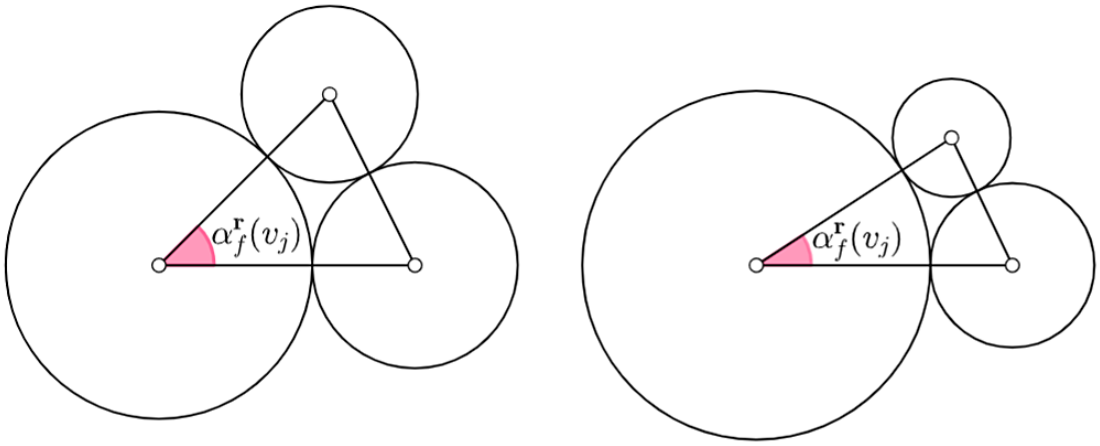
Lema 4.10. *Neka je $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_n)$ i neka $f \in F^\circ$ ima vrhove v_i, v_j i v_k .*

- i) *Ako je $r'_i \leq r_i$, $r'_k \leq r_k$ i $r'_j \geq r_j$, tada je $\alpha_f^{\mathbf{r}'}(v_j) \leq \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$.*
- ii) *Ako je $r'_i \geq r_i$, $r'_k \geq r_k$ i $r'_j \leq r_j$, tada je $\alpha_f^{\mathbf{r}'}(v_j) \geq \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$.*
- iii) *$\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$ je neprekidna funkcija u $\mathbf{r}$.*

Dokaz. Iz (4.3) je

$$\cos \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j) = 1 - \frac{2}{\left(1 + \frac{r_j}{r_k}\right)\left(1 + \frac{r_j}{r_i}\right)}. \quad (4.8)$$

Povećavanjem r_i i r_k i smanjivanjem r_j smanjujemo iznos kosinusa. Time se povećava mjera kuta $\alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$, pa je tvrdnja (ii) dokazana. Na Slici 4.6 upravo vidimo kako promjena polumjera utječe na mjeru kuta. Slično dokazujemo tvrdnju (i), a tvrdnja (iii) je neposredna posljedica jednakosti (4.3). $\square$

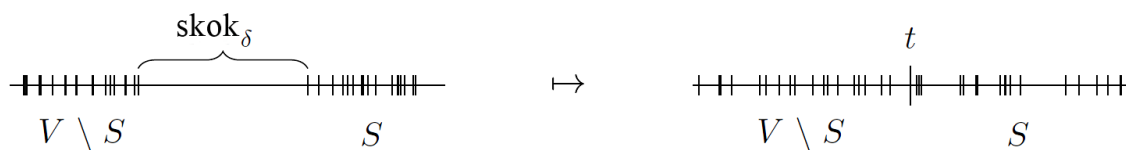


Slika 4.6: Međusobna ovisnost polumjera i kuta

Opišimo jedan iterativni algoritam kojemu su i ulaz i izlaz vektori polumjera normirani tako da im je ℓ_1 norma (suma apsolutnih vrijednosti koordinata) jednaka 1. Započnimo s vektorom $\mathbf{r}^{(0)} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ i za dani $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(t)}$ konstruiramo $\mathbf{r}' = \mathbf{r}^{(t+1)}$. Pisat ćemo $\delta = \delta_{\mathbf{r}}$ i $\delta' = \delta_{\mathbf{r}'}$ te $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{r}}$ i $\varepsilon' = \varepsilon_{\mathbf{r}'}$. Algoritam počinje tako da uredimo skup $\{\delta(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ po veličini. Ako je $\delta \equiv 0$, gotovi smo. U suprotnom, možemo odabrati $s \in \mathbb{R}$ takav da skup $S = \{v \in V \mid \delta(v) > s\}$ i njegov komplement $V \setminus S$ nisu prazni i takav da je skok

$$\text{skok}_{\delta}(S) := \min_{v \in S} \delta(v) - \max_{v \notin S} \delta(v) > 0$$

maksimalan po svim takvim s .



Slika 4.7: Lijevo smo particionirali skup vrijednosti u skup S i njegov komplement tako da je skok maksimalan, a desno je prikazano smanjivanje skoka između S i S' pri prelasku s $\mathbf{r}$ u $\mathbf{r}'$.

Jednom kada odaberemo S , korak algoritma se sastoji od dva podkoraka.

1. Za neki $\lambda \in (0, 1)$ koji ćemo kasnije precizirati, definiramo

$$(\mathbf{r}_\lambda)_i = \begin{cases} r_i & v_i \in S \\ \lambda r_i & v_i \notin S. \end{cases}$$

2. Normiramo $\mathbf{r}_\lambda$ tako da je zbroj koordinata jednak 1. Označimo s $\bar{\mathbf{r}}_\lambda$ normirani vektor $\mathbf{r}_\lambda$. Primijetimo da ovaj podkorak ne mijenja vrijednosti vektora δ .

Želimo odabrati λ koji će smanjiti vrijednosti $\delta(v)$ za $v \in S$, povećati vrijednosti $\delta(v)$ za $v \notin S$ i za koji će skok(S) postati 0. O navedenom govore Lema 4.11 i Lema 4.13.

Lema 4.11. Za svaki $\lambda \in (0, 1)$, uzmemo li $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}_\lambda$, imamo da je $\delta'(v) \leq \delta(v)$ za svaki $v \in S$ i $\delta'(v) \geq \delta(v)$ za svaki $v \notin S$.

Dokaz. Neka je $v_j \notin S$ i $f \in F^\circ$ unutrašnja strana s vrhovima v_i, v_j i v_k .

- i) Ako $v_i, v_k \notin S$, tada su polumjeri krugova C_i, C_j i C_k pomnoženi s istim brojem λ , pa je $\alpha_{f'}^{\mathbf{r}'}(v_j) = \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$.
- ii) Ako su $v_i, v_k \in S$, tada polumjeri krugova C_i i C_k ostaju nepromijenjeni, a polumjer kruga C_j se smanjuje, pa prema Lemi 4.10 vrijedi da je $\alpha_{f'}^{\mathbf{r}'}(v_j) \geq \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$.
- iii) Ako $v_i \notin S$ i $v_k \in S$, tada su polumjeri krugova C_i i C_j pomnoženi s λ i polumjer kruga C_k ostaje nepromijenjen. Kutovi trokuta $\Delta v_i v_j v_k$ ostaju nepromijenjeni ako pomnožimo sve polumjere krugova s λ^{-1} , stoga smo mogli polumjere krugova C_i i C_j ostaviti nepromijenjene i povećati polumjer kruga C_k . Prema Lemi 4.10 vrijedi da je $\alpha_{f'}^{\mathbf{r}'}(v_j) \geq \alpha_f^{\mathbf{r}}(v_j)$.

Dakle, slijedi da je $\delta'(v) \geq \delta(v)$ za svaki $v \notin S$. Na isti način možemo pokazati da je $\delta'(v) \leq \delta(v)$ za svaki $v \in S$. $\square$

Lema 4.12.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{v \notin S} \delta_{r_\lambda}(v) > 0.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva dijela. Prvo dokazujemo da za svaku stranu $f \in F(V \setminus S)$ s vrhovima v_i, v_j i v_k , zbroj kutova pri vrhovima koji pripadaju $V \setminus S$ konvergira k π kada λ teži u 0 zdesna. Promotrimo moguće slučajeve.

i) Ako $v_i, v_j, v_k \notin S$, tada, kako je strana trokut, vrijedi da je

$$\alpha_f^{r_\lambda}(v_i) + \alpha_f^{r_\lambda}(v_j) + \alpha_f^{r_\lambda}(v_k) = \pi, \text{ za sve } \lambda \in (0, 1).$$

ii) Ako $v_i, v_j \notin S$ i $v_k \in S$, tada iz (4.8) uz odgovarajuću permutaciju indeksa slijedi $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha_f^{r_\lambda}(v_k) = 0$, pa je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha_f^{r_\lambda}(v_i) + \alpha_f^{r_\lambda}(v_j) = \pi.$$

iii) Ako $v_i \notin S$ i $v_j, v_k \in S$, tada $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha_f^{r_\lambda}(v_j) + \alpha_f^{r_\lambda}(v_k) = 0$, pa je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \alpha_f^{r_\lambda}(v_i) = \pi.$$

Dakle, slijedi da je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{v \notin S} \sigma_{r_\lambda}(v) = |F(V \setminus S)| \cdot \pi. \quad (4.9)$$

Neka je

$$\theta(v_i) = \begin{cases} \theta_i & i \in \{1, 2, 3\}, \\ 2\pi & \text{inače,} \end{cases}$$

kako bi mogli pisati $\delta_r(v) = \sigma_r - \theta(v)$, za sve $v \in V$. Tada je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{v \notin S} \delta_{r_\lambda}(v) = |F(V \setminus S)| \cdot \pi - \sum_{v \notin S} \theta(v). \quad (4.10)$$

Neka je $\bar{F} = F \setminus F(V \setminus S)$, tako da svaka strana u $\bar{F}$ sadrži samo vrhove iz S . Sada ćemo pokazati da je

$$|\bar{F}| \cdot \pi < \sum_{v \in S} \theta(v). \quad (4.11)$$

Ako nejednakost (4.11) vrijedi, tada je vrijednost $|\bar{F}| \cdot \pi - \sum_{v \in S} \theta(v)$ negativna. Dodamo li ju desnoj strani jednakosti (4.10), dobivamo

$$\begin{aligned}
|F(V \setminus S)| \cdot \pi - \sum_{v \notin S} \theta(v) + |\bar{F}| \cdot \pi - \sum_{v \in S} \theta(v) &= |F^\circ| \cdot \pi - \sum_{v \in V} \theta(v) \\
&= (2n - 5) \cdot \pi - (2n - 5) \cdot \pi = 0.
\end{aligned}$$

Slijedi da je lijeva strana jednakosti (4.10) strogo pozitivna, čime smo dokazali lemu. Preostaje još dokazati (4.11).

U ostatku dokaza, fiksiramo ravninski graf od G tako da je skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ vanjska strana. Neka je $G[S]$ podgraf od G induciran s S . Nadalje, napravimo particiju skupa S na klase ekvivalencije, $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$, pri čemu su dva vrha ekvivalentna ako pripadaju istoj komponenti povezanosti od $G[S]$. Tada je

$$G[S] = G[S_1] \cup \dots \cup G[S_k].$$

Neka je $\bar{F}_j$ skup strana u $\bar{F}$ koje se pojavljuju kao strane u $G[S_j]$ tako da imamo disjunktnu uniju

$$\bar{F} = \bar{F}_1 \cup \dots \cup \bar{F}_k.$$

Kako je skup S neprazan, dovoljno je dokazati da za svaki $1 \leq j \leq k$ vrijedi

$$|\bar{F}_j| \cdot \pi < \sum_{v \in S_j} \theta(v). \quad (4.12)$$

Označimo s f_j broj strana od $G[S_j]$. Primijetimo da je $|\bar{F}_j| \leq f_j - 1$ jer se u $\bar{F}_j$ ne nalazi barem jedna strana od $G[S_j]$.

Ako je $|\bar{F}_j| = 0$, tada je tvrdnja (4.12) očita.

Ako je $|\bar{F}_j| \geq 1$, tada $G[S_j]$ ima barem jednu unutrašnju stranu. Prema Propoziciji 3.25 je

$$f_j \leq 2 \cdot |S_j| - 4. \quad (4.13)$$

Sada lijeva strana nejednakosti (4.12) ispunjava

$$|\bar{F}_j| \cdot \pi \leq (2 \cdot |S_j| - 5) \cdot \pi. \quad (4.14)$$

Ako S_j sadrži vrhove v_1, v_2 i v_3 , tada je desna strana nejednakosti (4.12) jednaka

$$\sum_{v \in S_j} \theta(v) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + (|S_j| - 3) \cdot 2\pi = (2 \cdot |S_j| - 5) \cdot \pi. \quad (4.15)$$

Tada je

$$|\bar{F}_j| \cdot \pi \leq (2 \cdot |S_j| - 5) \cdot \pi = \sum_{v \in S_j} \theta(v).$$

Sljedećom analizom pokazujemo kada vrijedi stroga nejednakost (4.12).

- i) Ako $\{v_1, v_2, v_3\} \not\subset S_j$, tada barem jedan od θ_i u (4.15) možemo zamijeniti s 2π , stoga je desna strana nejednakosti (4.12) strogo veća od lijeve strane.
- ii) Ako je $|\bar{F}_j| < f_j - 1$, tada iz (4.13) slijedi $|\bar{F}_j| < 2 \cdot |S_j| - 5$, pa imamo strogu nejednakost u (4.14) i (4.12) vrijedi.
- iii) Slučaj u kojem je $\{v_1, v_2, v_3\} \subset S_j$ i $|\bar{F}_j| = f_j - 1 = 2 \cdot |S_j| - 5$ se ne može dogoditi. Naime, jednakost $|\bar{F}_j| = f_j - 1$ znači da je svaka unutrašnja strana od $G[S_j]$ sadržana u $\bar{F}_j$, pa je prema tome i strana od G . Kako je $v_1, v_2, v_3 \in S_j$, to je $\{v_1, v_2, v_3\}$ vanjska strana od $G[S_j]$, ali ujedno i vanjska strana od G . Znači svaka strana od $G[S_j]$ je i strana od G , što je nemoguće. Ukoliko izaberemo neki $v \in V \setminus S$, tada taj v mora biti dio neke strane od $G[S_j]$, koja onda ne može biti strana od G . Zaključujemo da $\{v_1, v_2, v_3\} \subset S_j$ i $|\bar{F}_j| = f_j - 1 = 2 \cdot |S_j| - 5$ ne može vrijediti istovremeno, stoga (4.12) uvijek vrijedi. $\square$

Lema 4.13. Postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da uzevši $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}_\lambda$ imamo $\text{skok}_{\delta'}(S) = 0$.

Dokaz. Funkcija $\lambda \mapsto \text{skok}_{\delta_{\mathbf{r}_\lambda}}(S)$ je neprekidna na $(0, 1]$ prema trećoj točki Leme 4.10 te je njezina vrijednost $\text{skok}_\delta(S)$ za $\lambda = 1$ strogo pozitivna. Prema Lemi 4.12, ako je $\mu > 0$ dovoljno mali, tada je

$$\sum_{v \notin S} \delta_{\mathbf{r}_\mu}(v) > 0,$$

odakle slijedi da je $\max_{v \notin S} \delta_{\mathbf{r}_\mu}(v) > 0$. Prema (4.7), imamo

$$\sum_{v \in S} \delta_{\mathbf{r}_\mu}(v) < 0,$$

što znači da je $\min_{v \in S} \delta_{\mathbf{r}_\mu}(v) < 0$, stoga je $\text{skok}_{\delta_{\mathbf{r}_\mu}}(S) < 0$. Zbog neprekidnosti iz Bolzano-Weierstrassovog teorema znamo da postoji $\lambda \in (\mu, 1)$ takav da je $\text{skok}_{\delta_{\mathbf{r}_\lambda}}(S) = 0$. $\square$

Analizirajmo sada algoritam. Neka je $\lambda \in (0, 1)$ onaj za koji znamo da postoji zbog Leme 4.13, te neka je $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}_\lambda$.

Lema 4.14. Vrijedi

$$\varepsilon' \leq \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^3}\right).$$

Dokaz. Kako je ilustrirano na Slici 4.7, definiramo

$$t = \min_{v \in S} \delta'(v) = \max_{v \notin S} \delta'(v).$$

Prema (4.7), imamo

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = \sum_{i=1}^n \delta'(v_i) = 0,$$

stoga je

$$\varepsilon - \varepsilon' = \sum_{i=1}^n \delta(v_i)^2 - \sum_{i=1}^n \delta'(v_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\delta(v_i) - \delta'(v_i))^2 + 2 \sum_{i=1}^n (t - \delta'(v_i)) \cdot (\delta'(v_i) - \delta(v_i)).$$

- Ako je $v \in S$, tada je $t \leq \delta'(v) \leq \delta(v)$.
- Ako je $v \notin S$, tada je $t \geq \delta'(v) \geq \delta(v)$.

U oba slučaja imat ćemo $(t - \delta'(v_i)) \cdot (\delta'(v_i) - \delta(v_i)) \geq 0$.

Neka su $u \in S$ i $v \notin S$ takvi da je $\delta'(u) = \delta'(v) = t$. Tada imamo

$$\varepsilon - \varepsilon' \geq (\delta(u) - t)^2 + (\delta(v) - t)^2 \geq \frac{(\delta(u) - \delta(v))^2}{2} \geq \frac{\text{skok}_\delta(S)^2}{2}.$$

Kako je $\text{skok}_\delta(S)$ odabran kao najveći mogući skok, to je

$$\text{skok}_\delta(S) \geq \frac{1}{n} \cdot \left(\max_{v \in V} \delta(v) - \min_{v \in V} \delta(v) \right).$$

Za svaki $v \in V$ imamo

$$\max_{w \in V} \delta(w) - \min_{w \in V} \delta(w) \geq |\delta(v)|,$$

stoga je

$$n \cdot \left(\max_{v \in V} \delta(v) - \min_{v \in V} \delta(v) \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \delta(v_i)^2 = \varepsilon.$$

Slijedi da je

$$\varepsilon - \varepsilon' \geq \frac{1}{2n^2} \cdot \left(\max_{v \in V} \delta(v) - \min_{v \in V} \delta(v) \right)^2 \geq \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{\varepsilon}{n},$$

odakle zaključujemo

$$\varepsilon' \leq \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^3} \right).$$

□

Neka je $\varepsilon^{(t)} = \varepsilon_{\mathbf{r}^{(t)}}$. Ponavljanjem opisanog algoritma, iz Leme 4.14 slijedi

$$\varepsilon^{(t)} \leq \varepsilon^{(0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^3} \right)^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Za svaki t je $\|\mathbf{r}^{(t)}\|_{\ell_1} = 1$, pa zbog kompaktnosti, postoji podniz $\{t_k\}$ i vektor $\mathbf{r}^\infty$ takav da $\mathbf{r}^{(t_k)} \rightarrow \mathbf{r}^\infty$ kad $k \rightarrow \infty$. Zbog neprekidnosti od ε , imamo da je $\varepsilon(\mathbf{r}^\infty) = 0$, što znači da (4.5) vrijedi. Kako bi mogli reći da je $\mathbf{r}^\infty$ vektor polumjerâ, moramo dokazati da je pozitivan, to jest da je svaka koordinata pozitivan realan broj. Činjenica da nijedna od koordinata ne može biti ∞ slijedi iz $\|\mathbf{r}^\infty\|_{\ell_1} = 1$.

Lema 4.15. Za svaki i je $\mathbf{r}_i^\infty > 0$.

Dokaz. Neka je $S = \{v_i \in V : \mathbf{r}_i^\infty > 0\}$. Kako je vektor $\mathbf{r}$ normiran, znamo da je S neprazan skup. Pretpostavimo da je $S \subsetneq V$. Ponavljamo iste argumente koje smo koristili u dokazu Leme 4.12, pokazujući najprije analizom slučaja da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{v \notin S} \sigma_{\mathbf{r}^{(t)}}(v) = |F(V \setminus S)| \cdot \pi,$$

odakle zatim zaključujemo da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{v \notin S} \delta_{\mathbf{r}^{(t)}}(v) > 0.$$

Dobili smo kontradikciju s $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{(t)} = 0$. Dakle, pretpostavka je bila kriva, pa zaključujemo da je $S = V$. $\square$

2. dio dokaza Teorema 4.7: Crtanje pakiranja krugova opisanog s $\mathbf{r}^\infty$

Dokazujemo da za vektor polumjerâ $\mathbf{r}^\infty$, za koji smo pokazali da postoji u prvom koraku dokaza Teorema 4.7, možemo nacrtati pakiranje krugova koje je jedinstveno do na translacije i rotacije ravnine. Zapravo ćemo pokazati nešto općenitiji rezultat dvojice matematičara s Einsteinovog matematičkog instituta u Jeruzalemu, Oria Gurela-Gurevicha i Ohada Feldheima.

Neka je $G = (V, E)$ trokutni graf sa skupom vrhova $\{v_1, \dots, v_n\}$ i pretpostavimo da skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ čini vanjsku stranu. Vektor pozitivnih realnih brojeva $\ell = \{\ell_\ell\}_{\ell \in E}$ indeksiram skupom bridova E nazivamo *ostvariv* ako za svaku stranu s bridovima e_1, e_2 i e_3 , duljine ℓ_{e_1}, ℓ_{e_2} i ℓ_{e_3} tvore trokut. Drugim riječima, ove duljine moraju zadovoljavati tri nejednakosti trokuta

$$\ell_{e_i} + \ell_{e_j} > \ell_{e_k} \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Uz dani ostvariv vektor ℓ , možemo pomoću Teorema o kosinusu 4.8, za svaku stranu f izračunati kut pri vrhu trokuta kojeg tvore tri odgovarajuće duljine bridova. Označimo te kutove kao i prije s $\alpha_f^\ell(v)$, pri čemu je v vrh strane f . Slično, definiramo

$$\sigma_\ell(v) = \sum_{f \in F(v)} \alpha_f^\ell(v)$$

kao sumu kutova pri vrhu v .

Teorem 4.16. *Neka je G trokutni graf i ℓ ostvariv vektor duljine bridova. Pretpostavimo da je $\sigma_\ell(v) = 2\pi$ za svaki unutrašnji vrh v . Tada graf G možemo smjestiti u ravninu tako da je svaki brid e reprezentiran dužinom duljine ℓ_e , pri čemu se nikoja dva brida ne sijeku. Dodatno, takav prikaz je jedinstven do na translacije i rotacije ravnine.*

Prije dokaza Teorema 4.16, dokazujemo teorem koji govori o postojanju triangulacije za bilo koji poligon [6].

Teorem 4.17. *Poligon s n vrhova se može podijeliti na $n - 2$ trokuta ucrtavanjem $n - 3$ dijagonala.*

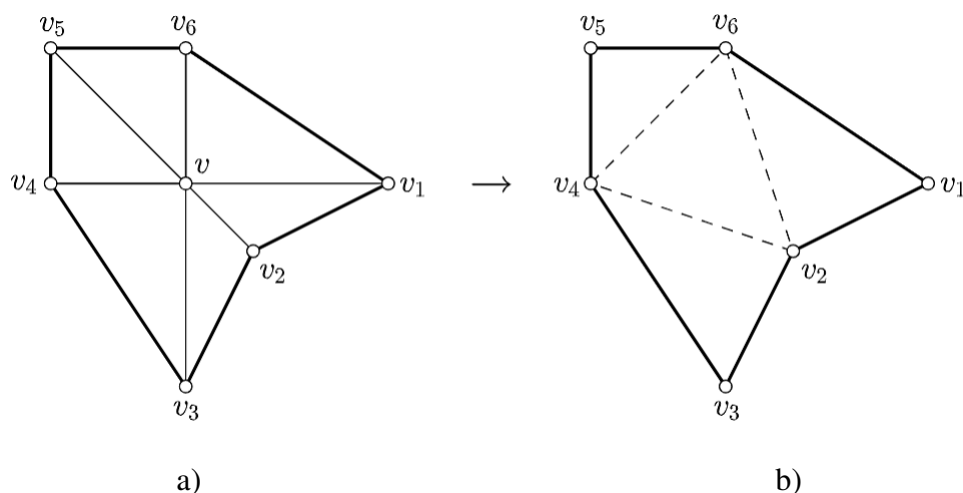
Dokaz. Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova n .

1. Baza indukcije: tvrdnja teorema za $n = 3$ je očita.
2. Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da se svaki poligon s manje od n vrhova može triangulirati na traženi način.
3. Korak indukcije: Promotrimo poligon P s n vrhova. Neka je v_2 konveksan vrh poligona P te promotrimo tri uzastopna vrha v_1, v_2 i v_3 . Tražimo dijagonalu d koja je cijela sadržana u unutrašnjosti poligona P . Ako se segment $\overline{v_1v_3}$ u cijelosti nalazi u unutrašnjosti od P , i pri tome ne presjeca rub od P , neka je $d = \overline{v_1v_3}$, inače trokut $\Delta v_1v_2v_3$ mora sadržavati barem jedan vrh od P različit od v_1, v_2 i v_3 . Neka je x takav vrh poligona P najbliži vrhu v_2 , pri čemu je udaljenost mjerena okomito iz v_2 na $\overline{v_1v_3}$ te neka je $d = \overline{v_2x}$. U oba slučaja, d dijeli poligon P na dva manja poligona P_1 i P_2 . Ako P_i ima n_i vrhova, za $i = 1, 2$, tada je $n_1 + n_2 = n + 2$ zato što se obje krajnje točke od d nalaze u P_1 i P_2 . Očito je $n_i \geq 3$, što povlači da je $n_i < n$, za $i = 1, 2$. Primjenom pretpostavke indukcije na poligone P_1 i P_2 dobivamo triangulaciju poligona P koja sadrži $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ trokuta i $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$ dijagonala, uključujući i d . □

Sada možemo dokazati Teorem 4.16.

Dokaz Teorema 4.16. Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova n .

1. Baza indukcije: za $n = 3$ tvrdnja teorema vrijedi jer ostvarivost od ℓ jamči da duljine bridova vanjske strane mogu tvoriti trokut. Svaka dva trokuta s istim duljinama bridova mogu biti rotirana i translirana do podudaranja (orijentacija je fiksirana ulaganjem grafa), pa jedinstvenost za $n = 3$ vrijedi.



Slika 4.8: Triangulacija grafa. Na slici a) prvo crtamo poligon koji okružuje vrh v . Na slici b) obrišemo vrh v i bridove s početkom u v . Te bridove zamijenimo s dijagonalama koje trianguliraju poligon i čije veličine zabilježimo u vektoru ℓ' .

2. Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi kada graf ima strogo manje od n vrhova (za neki $n > 3$).
3. Korak indukcije: Kako je $n > 3$, to postoji unutrašnji vrh v . Označimo s $v_1, \dots, v_m$ susjedne vrhove od v poredane u smjeru kazaljke na satu. Zamislimo li da smo u koordinatnom sustavu u ravnini, tada bi v smjestili u ishodište koordinatnog sustava, a zatim bi nacrtali sve strane koje sadrže v , vidi Sliku 4.8 a). Tako crtamo brid $\{v, v_i\}$ kao dužinu duljine $\ell_{\{v, v_i\}}$ na pozitivnom dijelu osi x koji započinje u ishodištu. Ovaj postupak se ponavlja, to jest za svaki $i \in \{2, \dots, m\}$ crtamo brid $\{v, v_i\}$ kao dužinu duljine $\ell_{\{v, v_i\}}$ s početkom u v , koja zatvara s prethodno ucrtanom dužinom za $\{v, v_{i-1}\}$ kut $\alpha_f^\ell(v)$ u smjeru kazaljke na satu, pri čemu je $f = \{v, v_{i-1}, v_i\}$. Ovim postupkom određujemo položaj vrhova $v_1, \dots, v_m$ u ravnini, koje međusobno spajamo i tako dobivamo trokutne strane. Te spojnice koje spajaju vrhove v_i i v_{i+1} su dužine duljine $\ell_{\{v_i, v_{i+1}\}}$, pri čemu je $i \in \{1, \dots, m\}$ i $v_{m+1} = v_1$. Označimo te bridove s $e_1, \dots, e_m$.

Kako je $\sigma_\ell(v) = 2\pi$, to m trokuta koje smo dobili imaju disjunktne unutrašnjosti i bridovi $e_1, \dots, e_m$ čine zatvoreni poligon u čijoj unutrašnjosti se nalazi ishodište. Prema Teoremu 4.17, znamo da svaki poligon s m rubova može biti trianguliran ucrtavanjem $m - 3$ dijagonala u unutrašnjosti poligona. Fiksiramo takav izbor dijagonala. Brisanjem vrha v i m bridova koji su incidentni s v te dodavanjem $m - 3$ dijagonala, vidi Sliku 4.8 b), dobivamo novi graf G' s $n - 1$ vrhova i $|E(G)| - 3$ bridova. Nadalje,

generiramo neki novi vektor duljine bridova ℓ' koji odgovara grafu G' tako da ubacimo nove duljine bridova što su duljine ucrtanih dijagonala, a ostale duljine bridova ne mijenjamo.

Očito je vektor ℓ' ostvariv i zbroj kutova pri unutrašnjim vrhovima grafa G' je 2π . Stoga možemo primijeniti pretpostavku indukcije i nacrtati graf G' s duljinama bridova iz ℓ' . Takav prikaz je jedinstven do na translacije i rotacije ravnine po pretpostavci indukcije. Napomenimo da je pri crtanju grafa G' , poligon određen bridovima $e_1, \dots, e_m$ nužno isti kao prije, do na translacije i rotacije ravnine jer ima iste duljine bridova $e_1, \dots, e_m$ i kutove između njih. Kako je to isti poligon, možemo obrisati dijagonale na slici i postaviti novi vrh na mjesto gdje je bio vrh v u prvotnom poligonu te nacrtati dužine koje spajaju taj vrh s vrhovima $v_1, \dots, v_m$. Tako smo dobili traženi prikaz grafa G . Jedinstvenost do na translaciju i rotaciju grafa G slijedi iz jedinstvenosti prikaza grafa G' i iz činjenice da je pozicija vrha v jedinstveno određena u tom prikazu. $\square$

Pomoću Teorema 4.16 lako je nacrtati pakiranje krugova s danim vektorom polumjerâ $\mathbf{r}^\infty$ koji ispunjava (4.5). Za dani $\mathbf{r}^\infty$, konstruiramo vektor ℓ stavljajući $\ell_e = \mathbf{r}_i^\infty + \mathbf{r}_j^\infty$ za svaki brid $e = \{v_i, v_j\}$ grafa. Uvjet (4.5) povlači da je vektor ℓ ostvariv. Sada primijenimo Teorem 4.16 i nacrtamo krug C_i sa središtem u v_i polumjera $\mathbf{r}_i^\infty$, za svaki i . Teorem 4.16 jamči da je za svaki brid $\{v_i, v_j\}$ udaljenost između v_i i v_j točno $\mathbf{r}_i^\infty + \mathbf{r}_j^\infty$, te se tada krugovi C_i i C_j nužno dodiruju.

Obrnuto, pretpostavimo da v_i, v_j ne tvori brid. Za svaki vrh v , neka je A_v unija trokuta koji dodiruju v , pri čemu je svaki trokut dio ravnine omeđen bridovima strane koja dodiruje v u prikazu iz Teorema 4.16. Kako je G trokutni graf i vrhovi v_i i v_j nisu susjedni, slijedi da A_{v_i} i A_{v_j} imaju disjunktne unutrašnjosti. Nadalje, kako je duljina dužine s početkom u v_i veća od $\mathbf{r}_i^\infty$, to je $C_i \subset \text{Int}(A_{v_i})$ (točnije, geometrijski argument se oslanja na ono što vidimo na Slici 4.5). Analogno, $C_j \subset \text{Int}(A_{v_j})$, pa zaključujemo da se krugovi C_i i C_j međusobno ne dodiruju.

Na kraju, zbog uvjeta (4.5), vanjski rub poligona koji smo crtali je trokut s kutovima θ_1, θ_2 i θ_3 i zbog toga je (r_1, r_2, r_3) dobiven iz (ρ_1, ρ_2, ρ_3) množenjem pozitivnim skalarom. Time smo završili 2. dio dokaza Teorema 4.7.

3. dio dokaza Teorema 4.7: Jedinstvenost

Teorem 4.18. *Neka je dan jednostavni konačni trokutni graf s vanjskom stranom koju čine vrhovi v_1, v_2 i v_3 i neka su dana tri polumjera ρ_1, ρ_2 i ρ_3 . Pakiranje krugova u kojemu C_{v_1}, C_{v_2} i C_{v_3} imaju polumjere ρ_1, ρ_2 i ρ_3 je jedinstveno do na translacije i rotacije ravnine.*

Dokaz. U 2. dijelu dokaza Teorema 4.7 smo pokazali da za dani vektor polumjerâ $\mathbf{r}$ imamo

jedinstven crtež do na translacije i rotacije ravnine. Stoga je dovoljno dokazati jedinstvenost vektora $\mathbf{r}$ uz dane ρ_1, ρ_2 i ρ_3 .

Prema tome, neka su $\mathbf{r}^a$ i $\mathbf{r}^b$ vektori koji ispunjavaju uvjet (4.5). Kako vanjska strana u oba vektora tvori trokut s kutovima θ_1, θ_2 i θ_3 , možemo jedan od vektora pomnožiti skalarom tako da je $\mathbf{r}_i^a = \mathbf{r}_i^b = \rho_i$, za $i = 1, 2, 3$. Nakon ovog skaliranja, pretpostavimo da je $\mathbf{r}^a \neq \mathbf{r}^b$ i neka je v vrh u unutrašnjosti koji maksimizira omjer $\mathbf{r}_v^a/\mathbf{r}_v^b$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je

$$\frac{\mathbf{r}_v^a}{\mathbf{r}_v^b} > 1,$$

jer inače zamijenimo $\mathbf{r}^a$ i $\mathbf{r}^b$.

Sada tvrdimo da za svaku stranu $f = \{v, u_1, u_2\} \in F(v)$, vrijedi da je

$$\alpha_{\mathbf{r}^a}^f(v) \leq \alpha_{\mathbf{r}^b}^f(v),$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\mathbf{r}_{u_1}^a}{\mathbf{r}_{u_1}^b} = \frac{\mathbf{r}_{u_2}^a}{\mathbf{r}_{u_2}^b} = \frac{\mathbf{r}_v^a}{\mathbf{r}_v^b}. \quad (4.16)$$

To je direktna posljedica Leme 4.10. Zaista, skaliramo sve polumjere u vektoru $\mathbf{r}^b$ s faktorom $\mathbf{r}_v^a/\mathbf{r}_v^b$ kako bi dobili vektor $\mathbf{r}'$ takav da je

$$\mathbf{r}_v^a = \mathbf{r}'_v \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_u^a \leq \mathbf{r}'_u, \quad \text{za sve } u \neq v.$$

Druga točka Leme 4.10 povlači da je

$$\alpha_{\mathbf{r}^a}^f(v) \leq \alpha_{\mathbf{r}'}^f(v) = \alpha_{\mathbf{r}^b}^f(v).$$

Također, ako je $\mathbf{r}_{u_1}^a < \mathbf{r}'_{u_1}$ ili $\mathbf{r}_{u_2}^a < \mathbf{r}'_{u_2}$, Teorem o kosinusu 4.8 daje strogu nejednakost

$$\alpha_{\mathbf{r}^a}^f(v) < \alpha_{\mathbf{r}'}^f(v).$$

Dakle,

$$\alpha_{\mathbf{r}^a}^f(v) = \alpha_{\mathbf{r}^b}^f(v)$$

samo ako vrijedi (4.16).

Kako je

$$\alpha_{\mathbf{r}^a}^f(v) \leq \alpha_{\mathbf{r}^b}^f(v)$$

za svaku stranu $f \in F(v)$, dok je

$$\sigma_{\mathbf{r}^a}(v) = \sigma_{\mathbf{r}^b}(v) = 2\pi,$$

jednakost

$$\alpha_f^{\mathbf{r}^a}(v) = \alpha_f^{\mathbf{r}^b}(v)$$

mora vrijediti za svaku stranu f . Stoga svaki susjedni vrh u od v ispunjava jednakost

$$\frac{\mathbf{r}_u^a}{\mathbf{r}_u^b} = \frac{\mathbf{r}_v^a}{\mathbf{r}_v^b}.$$

Budući da je graf povezan, omjer $\mathbf{r}_u^a/\mathbf{r}_u^b$ mora biti konstantan za sve vrhove $u \in V(G)$. Međutim, to je kontradikcija s $\mathbf{r}_u^a/\mathbf{r}_u^b > 1$ dok je $\mathbf{r}_{v_i}^a/\mathbf{r}_{v_i}^b = 1$, za $i = 1, 2, 3$. Zaključujemo da je $\mathbf{r}^a = \mathbf{r}^r$. $\square$

Bibliografija

- [1] I. Ya. Bakel'man, *Inversions*, Popular Lectures in Mathematics, dostupno na <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED184844.pdf> (listopad 2021.)
- [2] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (listopad 2021.)
- [3] D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd 1981.
- [4] D. Gisch, J. M. Ribando, *Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections*, American Journal of Undergraduate Research, dostupno na <http://www.ajuronline.org/uploads/Volume%203/Issue%201/31D-GischArt.pdf> (listopad 2021.)
- [5] P. Levrie, *A Straightforward Proof of Descartes's Circle Theorem*, The Mathematical Intelligencer 41 (2019.), 24-27.
- [6] G.H. Meisters, *Polygons have ears*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 6 (Jun. - Jul., 1975.), 648-651.
- [7] A. Nachmias, *Planar Maps, Random Walks and Circle packing*, Lecture Notes in Mathematics 2243 (2018.), 33-46.
- [8] I. Nakić, *Diskretna matematika*, dostupno na <https://vdocuments.mx/reader/full/diskretna-matematika-skripta> (listopad 2021.)
- [9] R. B. Nelsen, *Heron's Formula via Proofs Without Words*, College Mathematics Journal (2001.), 290-292.
- [10] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb 2001.

- [11] *Konstruktivne metode u geometriji*, skripta dostupna na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg_predavanja.pdf (studeni 2021.)

Izvori slika

- Slika 2.1, dostupno na <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1519999p.image>
- Slika 2.2, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg_predavanja.pdf
- Slika 3.12, dostupno na <http://smorph.cs.arizona.edu/>
- Slika 4.1, dostupno na <https://mathoverflow.net/questions/370064/proofs-of-circle-packing-theorem>
- Slika 4.2, dostupno na <https://mathr.co.uk/blog/2018.html>
<https://link.springer.com/article/10.1007/s00222-016-0653-9>
- Slika 4.4, preuzeta iz [7]
- Slika 4.7, preuzeta iz [7]
- Ostale slike su nacrtane u programu *GeoGebra*

Sažetak

Američki matematičar William Paul Thurston revidirao je 1970-ih teorem njemačkog matematičara Paula Koebea iz 1930-ih koji je veza između planarnih grafova i pakiranja krugova. Koebeov teorem je postao temelj za danas poznati Koebe-Andreev-Thurstonov teorem, još znan pod imenom Teorem o pakiranju krugova. Jedan od iskaza teorema o pakiranju krugova glasi: Za svaki planarni graf G sa skupom vrhova $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ i skupom bridova E , postoji pakiranje $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ od n (ne nužno sukladnih) krugova u ravnini sa svojstvom da se C_i i C_j dodiruju ako i samo ako je $\{v_i, v_j\} \in E$, za svaki $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Ovaj diplomski rad podijeljen je na četiri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo ona preslikavanja ravnine potrebna za dokaz Apolonijevog teorema i teorema o pakiranju krugova. U drugom poglavlju navodimo iskaz i dokaz Apolonijevog teorema kao jedan primjer pakiranja krugova prije nego li se uopće promatrao taj problem. Kako je Koebeov teorem poveznica planarnih grafova i pakiranja krugova, u trećem poglavlju navodimo osnovne pojmove teorije grafova. U posljednjem poglavlju navodimo nekoliko iskaza teorema o pakiranju krugova te jedan kombinatorni dokaz proveden u tri koraka.

Summary

American mathematician William Paul Thurston revised in the 1970s a theorem of German mathematician Paul Koebe from the 1930s connecting planar graphs and circle packings. Koebe's theorem became the foundation for the Koebe-Andreev-Thurston theorem, also known as The circle packing theorem. One statement of the circle packing theorem is the following. Given any finite simple planar graph $G = (V, E)$, with the set of vertices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, there exist n circles in the plane, $C_1, \dots, C_n$, with disjoint interiors, such that C_i is tangent to C_j if and only if $\{v_i, v_j\} \in E$.

This graduate thesis is divided into four chapters. In the first one, we introduce those transformations of the plane needed to prove Apollonius' theorem and the circle packing theorem. In the second chapter, we present the statement and proof of Apollonius' theorem as one example of circle packing before this problem was even observed. As Koebe's theorem is a connection between planar graphs and circle packings, in the third chapter we list some basic concepts of graph theory. In the last chapter, we present several statements of the circle packing theorem and one combinatorial proof conducted in three steps.

Životopis

Rođena sam 18.07.1994. u Zagrebu. Pohađala sam OŠ Savski Gaj do 2009. godine. Iste godine nastavila sam svoje školovanje u X. gimnaziji Ivan Supek u Zagrebu, opći smjer. Nakon završetka gimnazije, u srpnju 2013. godine, upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički, završila sam 2019. godine i iste godine upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu.