SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mario Tanfara

Kozmološki singulariteti u formalizmu integrala po putovima

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Mario Tanfara

Diplomski rad

Kozmološki singulariteti u formalizmu integrala po putovima

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2022.

Za bezuvjetnu podršku i ljubav zahvaljujem se roditeljima, majci Nikolini Koštan i ocu Leonardu Tanfari. Zahvaljujem se i mentoru Ivici Smoliću, te kolegici Ani Bokulić na pronicljivim razgovorima.

Sažetak

Uvodimo formalizam integrala po putevima na primjeru nerelativističkog sustava s jednim fizikalnim stupnjem slobode. Za model zatvorenog svemira s FRLW metrikom i pozitivnom kozmološkom konstantom, gdje je jedan stupanj slobode faktor skale, analogijom definiramo mjeru funkcionalnog integrala. Raspravljamo o hamiltonijanskim sustavima s ograničenjima, među kojima je i opća teorija relativnosti, te Fradkin–Vilkoviskyjevim teoremom dobivamo baždarno invarijantan, unitarni, uvjetno konvergentni funkcionalni integral. Po uzoru na Turoka i suradnike Picard–Lefschetzovim formalizmom identificiramo jedinstvenu relevantnu sedlenu točku akcije i jedinstvenu konturu po kojoj je apsolutna konvergencija osigurana. Postavljajući ”no-boundary” rubne uvjete, dobivamo potiskujući poluklasični faktor.

Ključne riječi: Minisuperprostor, Integrali po putevima, Hamiltonijanski sustavi s ograničenjima, Fradkin–Vilkoviskyjev teorem, Picard–Lefschetzova integracija, ”No-boundary” prijedlog

Cosmological singularities in path integral approach

Abstract

By considering a nonrelativistic system with one physical degree of freedom we introduce the path integral formalism. For a closed Universe with FLRW metric and a positive cosmological constant, where the degree of freedom is the scale factor, by analogy we define the measure of the functional integral. We disscus Hamiltonian systems with constraints, among them general relativity, and by utilizing the Fradkin–Vilkovisky theorem obtain a gauge invariant, unitary, conditionally convergent functional integral. Following the works of Turok et al. we use the Picard–Lefschetz formalism to identify a unique relevant saddle point of the action and a unique contour along which absolute convergence is certain. Imposing the "no-boundary" initial conditions, we get a semiclassical supression factor.

Keywords: Minisuperspace, Path integrals, Hamiltonian systems with constraints, Fradkin–Vilkovisky theorem, Picard–Lefschetz integration, No-boundary proposal

Sadržaj

1 Uvod

Einsteinova teorija opće relativnosti je klasična teorija. Opservable, specifično metrika g_{ab}, uvijek imaju točno definiranu vrijednost. Za opis gibanja planeta, zvijezda, galaksija i ostalih makroskopskih objekta, takva teorija je sasvim dovoljna. Ipak da bi opisali sve što se događa u svemiru, očekujemo da je potrebna njena kvantna formulacija. Klasična teorija unutar crne rupe i na početku svemira predviđa *singularitete*, mjesta u prostorvremenu gdje zakrivljenost divergira. U početku, dimenzije svemira su bile manje od Planckove duljine, drugim riječima kvantni efekti su bili dominantni na svim skalama. Nadamo se tada da će kvantna teorija gravitacije dati smisleniji, možda čak i potpuni opis početka svemira. U kvantnoj teoriji fizikalna polja predstavljamo operatorima nad Hilbertovim prostorom, definiranim u svakoj točki fiksnog prostorvremena.[1] Odmah možemo primijetiti jedan problem s formuliranjem kvantne teorije gravitacije kao kvantne teorije polja. Operatore polja definiramo nad fiksnom geometrijom, ali ona je i dinamičko polje koje želimo kvantizirati. Zaključujemo da je upravo centralna ideja opće relativnosti, da svemir nije smješten na pozadinsku geometriju, već da je ona dinamički dio svemira, jedna od glavnih prepreka kvantiziranju gravitacije. Dodatno kanonsku kvantizaciju vršimo nad fizikalnim stupnjevima slobode (q^*, p^*), koji nisu eksplicitni za teorije s ograničenjima, jedna od kojih je i gravitacija. Nasreću, kvantne teorije moguće je formulirati na način kojim zaobilazimo operatore, vektore i Hilbertov prostor, te tretiramo amplitude vjerojatnosti kao fizikalno značajne veličine. Radi se o integralima po putevima, koji imaju elegantno svojstvo da je načelo superpozicije intrinzično zadovoljeno i pritom još upošljava klasičnu akciju koju znamo definirati za Einsteinove jednadžbe. Očekujemo da će definicija mjere za funkcionalni integral biti izazovna, ali ako se zadržimo na demonstraciji ideje metode, možemo pretpostaviti ansatz za metriku koji je prikladno simetričan, tako da sustav postane sličan nerelativističkom kvantnom sustavu s jednim stupnjem slobode. Ansatz će biti metrika minisuperprostora,

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 d\Omega_3^2, \tag{1.1}$$

[1] Preciznije, definirani su kao distribucije na prostorvremenu, što je posljedica činjenice da mjerenja fizikalnih veličina ne možemo vršiti u jednoj točki prostorvremena.

a jedan stupanj slobode možemo zamisliti kao veličinu svemira, naziva se *faktorom skale* $a(t)$. Zatim analogijom definiramo mjeru integrala po putevima i na taj način, više zaobići nego riješiti, problem kvantiziranja geometrije. Preostati će nam problem ograničenja i pronalaska fizikalnih stupnjeva slobode. U općenitim teorijama s ograničenjima, s n stupnjeva slobode, nailazimo na neke proizvoljne funkcije, jer imamo višak u stupnjevima slobode. Dakle, jedan fizikalni sustav možemo opisati cijelom klasom fizikalno ekvivalentnih, ali matematički različitih rješenja. Broj proizvoljnih funkcija odgovara broju nezavisnih ograničenja m.[2] S tom slobodom smo već upoznati pod nazivom *baždarna sloboda*. U gravitaciji ona leži u invarijantnosti fizikalnog prostorvremena na difeomorfizme, što se prevodi u slobodu izbora koordinatnog sustava. Vidjet ćemo da su upravo ograničenja generatori transformacija između članova jedne klase rješenja i da je akcija invarijantna na takve transformacije. Prema tome radi se o opisu sustava koji ima $n - m$ fizikalnih stupnjeva slobode (q^*, p^*), ali ima n koordinata q_i i hamiltonijan proizvoljan do na linearnu kombinaciju ograničenja. Koeficijente ograničenja nazivamo *Lagrangeovim multiplikatorima* i upravo oni su tih m proizvoljnih funkcija. Ne želimo da integral po putevima prebrojava istu fizikalnu konfiguraciju više puta, pa je potrebno fiksirati baždarenje, odnosno iz svake klase potrebno je izabrati po jednog predstavnika. To se može postići tako da za svako prisutno ograničenje uvedemo dodatno ograničenje na način da ono ruši simetriju akcije i time fiksira proizvoljne funkcije u akciji. Biranjem specifičnog baždarenja možemo Lagrangeove multiplikatore originalnih ograničenja efektivno promaknuti u dinamičke varijable (dodatnih m stupnjeva slobode) u proširenom faznom prostoru. Tada multiplikatori dodatnih ograničenja igraju ulogu impulsa. Takva teorija nema ograničenja i možemo je slobodno kvantizirati kako želimo, ali ima $n + m$ stupnjeva slobode, dok fizikalni sustav ima $n - m$. Ovo odstupanje ukazuje na to da smo se, u pokušaju da uklonimo baždarnu slobodu, previše udaljili od originalnog sustava. Ovaj problem može se riješiti tako da uvedemo još $2m$ novih stupnjeva slobode, nazivamo ih *duhovima*, suprotne statistike i na taj način postignemo efektivno oduzimanje stupnjeva slobode $n + m - 2m = n - m$ i dobijemo opis sustava s fizikalnim brojem. Formalno, izraz za baždarno invarijantni funkcionalni integral, sadržan je u Fradkin–Vilkoviskyjevom teoremu, čiji se dokaz nalazi u dodatku C. Taj

[2]Preciznije, broju nezavisnih primarnih ograničenja prve klase. U poglavlju 5 ćemo definirati te atribute.

integral daje unitarnu $S-$matricu, što nećemo ovdje dokazivati, ali ideja je sljedeća: budući da imamo baždarno invarijantan funkcionalni integral, možemo ga transformirati u neki za čiju formu znamo da rezultira unitarnom $S-$matricom. Rezultat će se u konačnici svesti na integral faze po beskonačnoj mjeri, što znači da sigurno nije apsolutno konvergentan. Između ostalog, ovo povlači da ne možemo koristiti Fubinijev teorem. Dodatno, u općenitom slučaju faza će dramatično oscilirati, što otežava integraciju još više. Hartle i Hawking su, u svom "no-boundary" prijedlogu [15], vršili Wickovu rotaciju u imaginarno vrijeme i time dobili Euklidski integral. Ovakav izbor zapravo bira određenu integracijsku konturu za koju nema fizikalne motivacije i definira imaginarno vrijeme i kompleksne metrike kao fundamentalne. Takav integral ni ne može konvergirati, jer realna funkcija u eksponentu (imaginarni dio akcije) nije ograničena odozdo (eng. bounded below) iz dva razloga. Prvi je što Euklidske metrike uključuju neke topološki netrivijalne mnogostrukosti [11], a drugi to što gradijenti faktora skale imaju negativan doprinos akciji, tzv. *problem konformalnog faktora* [12]. Gotovo 40 godina poslije Turok i suradnici pokazali su da se korištenjem Picard–Lefschetzova formalizma integral može učiniti apsolutno konvergentnim [24]. Polazeći od Teitelboimovog[3] kauzalnog izbora integracijske konture [17], za koju je realno vrijeme fundamentalno, isti formalizam daje nam i jedinstven izbor integracijske konture s konvergentnim rezultatom. S ovim alatom integrali po putevima za gravitaciju imaju šansu da budu matematički dobro definirani. Nažalost u sljedećim radovima ista grupa, pokazala je da ovaj postupak vodi do nepotisnutih perturbacija [25], i da unatoč pokušajima novih kontura [27], ne postoji integracijska kontura koja rješava ovaj problem, implicirajući da "nema spasa" za "no-boundary" početne uvjete [26].

"No-boundary" prijedlog pojavio se kao početno kvantno stanje svemira da bi se pronašlo rješenje homogene Wheeler–de Wittove jednadžbe nazvano "valnom funkcijom svemira". U principu izbor rubnih uvjeta u Wheeler–de Wittovoj jednadžbi ima beskonačno stupnjeva slobode, pa se moraju pretpostaviti neka svojstva rješenja. "No-boundary" Hartlea i Hawkinga odgovara realnom rješenju koje je superpozicija ekspandirajućeg i kolabirajućeg svemira. Na drugu stranu imamo Vilenkinov prijedlog tunelirajuće valne funkcije [18] [21] rezultirajući kompleksnim rješenjem koje

[3] Sada C. Bunster.

predstavlja samo ekspandirajući svemir. Kada se ove ideje prevedu u formalizam integrala po putevima one postavljaju neke rubne uvjete za integraciju.

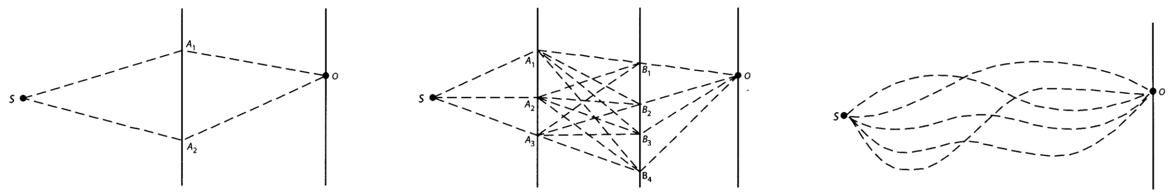
$$HH: \int^{h} \mathcal{D}g \; e^{-S_E[g]/\hbar} \qquad V: \int_{\emptyset}^{h} \mathcal{D}g \; e^{iS[g]/\hbar} \tag{1.2}$$

Unutar Hartle–Hawkingovog prijedloga integriramo po svim zatvorenim Euklidskim 4-geometrijama koje su omeđene s konačnom 3-geometrijom h, dok u Vilenkinovom integriramo po Lorentzijanskim 4-geometrijama koje su omeđene 3-geometrijama, početnom i iščezavajućom $\emptyset$, te konačnom h. Rezultati za ove integrale razlikuju se do na predznak u eksponentu poluklasičnog težinskog faktora (HH: $e^{+12\pi^2/\Lambda\hbar}$, V: $e^{-12\pi^2/\Lambda\hbar}$). Prateći postupak Turoka i suradnika, koristit ćemo Picard–Lefshetzov formalizam na Lorentzijanskom integralu pa se, barem za vrlo simetrični slučaj minisuperprostora i unatoč ”no-boundary” rubnim uvjetima, rezultat kojeg dobijemo slaže s Vilenkinovim. Uz prednost bolje definicije ovaj rezultat ima i intuitivnije ponašanje u klasičnom limesu $\hbar \to 0$.

U poglavlju 2 upoznati ćemo se s Diracovim formalizmom integrala po putevima, i motivirani time pronaći lagranžijansku formulaciju opće relativnosti u poglavlju 3. Zbog ograničenja biti će nam potrebna i hamiltonijanska formulacija koja se nalazi u poglavlju 4. U poglavlju 5 proučavamo Diracov formalizam hamiltonijanskih sustava s ograničenjima i dajemo iskaz Fradkin–Vilkoviskyjevog teorema. Konačno u poglavlju 6 ćemo primijeniti sve metode na metriku minisuperprostora i proučiti ”no-boundary” prijedlog. Naglašavam da u ovom radu nema originalnih računa, već se radi o pregledu potrebnih pojmova i metoda. Nadam da sam dao dobru odskočnu dasku za studente koje zanimaju integrali po putevima za opću teoriju relativnosti.

2 Diracov formalizam integrala po putevima

Sjetimo se eksperimenta s dvije pukotine i kako smo ga tretirali na kvantnoj mehanici. Čestica je emitirana iz nekog izvora, te prema načelu superpozicije, amplituda vjerojatnosti da je vidimo u nekoj točki na zastoru je suma amplitude da čestica prođe kroz prvu pukotinu i amplitude da prođe kroz drugu pukotinu. Ali recimo da imamo tri ili više pukotina. Dobro, samo dodajemo više članova u sumi. Što ako dodamo još pregrada od kojih svaka ima svoje pukotine? U redu, samo napravimo sumaciju i po pregradama. Tada ukupna suma ide po svim mogućim putanjama kroz pukotine na pregradama.



(a) (b) (c)

Slika 2.1: Ideja integrala po putevima. Slike preuzete iz [22].

Sada zamislimo da imamo beskonačan broj pregrada i beskonačan broj pukotina na svakoj od njih. Tada preostaje samo prazan prostor između izvora i zastora, što nas navodi na sumu, koja sada postaje integracija, po svim mogućim putanjama između izvora i zastora. Kako bismo definirali taj integral po putevima? Vratimo li se malo unazad možemo imati veliki, ali konačan, broj pregrada i rupa te onda na kraju puštati limese. Drugim riječima putanje možemo aproksimirati s ravnim segmentima. Prema unitarnosti, za amplitudu cijele putanje možemo uzeti umnožak amplituda po segmentima. Ova ideja se prvi puta pojavljuje u radovima N. Wienera, koji je rješavao probleme difuzije i Brownovog gibanja. Na lagranžijanske kvantne sustave ju je prvi put primijenio P. A. M. Dirac [1], a matematički iskaz upotpunio je R. Feynman [2].

Proučavamo slučaj nerelativističkog kvantnog sustava s jednim stupnjem slobode (q, p) i kanonskim hamiltonijanom H. U Heisenbergovoj slici za operator položaja vrijedi $\hat{q}_H(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{q}_S e^{-iHt/\hbar}$, gdje je $\hat{q}_S$ isti operator, ali u Schrödingerovoj slici. Za većinu izraza u ovom poglavlju vrijedi $\hbar = 1$, ali ćemo ga dodati u poglavljima gdje je bitan, samo zapamtimo da dijeli imaginarnu jedinicu u eksponentu. Postoji potpuni skup vektora $|q, t\rangle$ tako da $\hat{q}_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle$. Kada vrijedi $\hat{q}_S|q\rangle = q|q\rangle$, imamo

$|q,t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$. Pogledajmo sad neku valnu funkciju $\psi(q',t')$.

$$\psi(q',t') = \langle q'|\psi(t')\rangle = \langle q',t'|\psi\rangle_H$$

Iskoristimo potpunost skupa $|q',t'\rangle$,

$$\psi(q',t') = \int dq \langle q',t'|q,t\rangle\langle q,t|\psi\rangle_H = \int dq \langle q',t'|q,t\rangle\psi(q,t).$$

Objekt $\langle q',t'|q,t\rangle$ naziva se *Feynmanovom jezgrom* (propagatorom). Iz gornje jednadžbe vidimo da je poznavanje jezgre ekvivalentno poznavanju rješenja Schrödingerove jednadžbe. Vremenski interval (t,t') podijelimo u mnogo ravnih segmenta proizvoljno male duljine ε,

$$t' - t = M\varepsilon, \quad t_n = t + n\varepsilon, \quad n = 1, ..., M-1. \tag{2.1}$$

Sada u svakoj točki možemo umetnuti jedinični operator pomoću potpunih skupova $|q_n, t_n\rangle$.

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int q_{N-1} ... \int dq_1 \langle q',t'|q_{N-1},t_{N-1}\rangle ... \langle q_1,t_1|q,t\rangle \tag{2.2}$$

Segmentne amplitude $\langle q_{m+1},t_{m+1}|q_m,t_m\rangle$ nazivamo matricama prijelaza $T(m{+}1,m) \equiv T_m$. Njih je općenito puno lakše pronaći negoli Feynmanovu jezgru i to započinjemo tako da razvijamo eksponencijalu po ε,

$$T_n = \langle q_{n+1}|e^{-iH(t_{n+1}-t_n)}|q_n\rangle \approx \langle q_{n+1}|\mathbb{1} - i\varepsilon H|q_n\rangle,$$

gdje je

$$\langle q_{n+1}|H(p,q)|q_n\rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi}\langle q_{n+1}|p_n\rangle\langle p_n|H|q_n\rangle.$$

Pretpostavimo da u H nema članova miješanih u koordinatama i impulsima, pa se hamiltonijanski operator svodi na klasičnu funkciju,

$$\langle p_n|H(p,q)|q_n\rangle = \langle p_n|q_n\rangle H(p_n,q_n).$$

U slučaju da ta pretpostavka ne vrijedi, najbolji način za nošenje sa situacijom je da koristimo Weylovo uređenje u kojem uprosječujemo preko svih mogućih redoslijeda operatora. U tom slučaju dobili bismo drugačiju klasičnu funkciju, $H(p_n, \frac{1}{2}(q_{n+1}{+}q_n))$.

Pisat ćemo $\bar{q}_n$ pa možemo kasnije izabrati o kojem slučaju se radi. Uz $\langle q_m | p_n \rangle = e^{ip_n q_m}$ slijedi rezultat za matricu prijelaza T_n,

$$T_n = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)}(1 - i\varepsilon H(p_n, \bar{q}_n)). \tag{2.3}$$

Sada slijedi osjetljivi dio u kojem proizvoljno usitnjavamo particiju, drugim riječima idemo u limes $\varepsilon \to 0,\ M \to \infty$. Raspravimo prvo o integriranju. Imat ćemo $M-1$ integrala po položajima q_n. Iz (2.3) vidimo da ćemo za svaku matricu prijelaza imati i integraciju po p_n, pa će to dati M integrala po impulsima. Uvodimo pogodnu notaciju za mjeru ovakvog integrala.

$$\lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi} \equiv \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \tag{2.4}$$

Ovakve konstrukcije u fizici nazivamo *integralima po putevima*, a u matematičkim terminima radi se o *funkcionalnom integralu*. Granice svakog pojedinog integrala u pravilu nisu određene, iz čega slijedi da integral u obzir uzima jako široku klasu puteva (nema razloga da budu glatki, čak niti kontinuirani). Jedini zahtjev je da putanje ispunjavaju rubne uvjete $q(t) = q$ i $q(t') = q'$. Ubacujemo izraz za matricu prijelaza (2.3) u izraz za jezgru (2.2),

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, \exp\Big(i\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} \Big) \prod_{n=0}^{N-1} \big(1 - i\varepsilon H(p_n, \bar{q}_n)\big), \tag{2.5}$$

gdje se limes za integrand podrazumijeva, ali ga ne pišemo da izraz stane u redak. Pogledajmo pobliže desni faktor integranda. Uz $\varepsilon = (t'-t)/M$ i $x_n = -i(t'-t)H(p_n, \bar{q}_n)$ ima oblik

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \big(1 + \frac{x_n}{N}\big) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} e^{x_n/N} = \lim_{N\to\infty} \exp\big(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n\big).$$

Iskoristimo ovaj rezultat u (2.5),

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \, \exp\Big(i\varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \big(p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} - H(p_n, \bar{q}_n) \big) \Big). \tag{2.6}$$

Kada pustimo limes, ε se ponaša kao diferencijal vremena, pa suma ide u integral po vremenu, a član pod sumom prepoznajemo kao derivaciju po vremenu. Dinamičke varijable p_n i q_n tada se ponašaju kao diskretni uzorci nekih funkcija $q_n \to q(t_n)$ i $p_n \to p(t_n)$.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp\Big(i\int_t^{t'} dt[p\dot{q} - H(p,q)]\Big) \tag{2.7}$$

Očituje se još jedan mogući problem, a taj je da je integrand fazni faktor, pa će nam integral konvergirati samo ako se brzo oscilirajući dijelovi susjednih putanja međusobno ponište. Ovo je posljedica načela superpozicije, prema kojem moramo uzeti u obzir sve moguće putanje. Ako imamo sreće integral će biti uvjetno konvergentan i moći ćemo pronaći integracijsku konturu s apsolutnom konvergencijom.

Proučimo sada specifičnu situaciju u kojoj se izraz za funkcionalni integral može pojednostaviti. Ako hamiltonijan ima standardnu formu (da je kvadratičan u operatoru impulsa) $H(p,q) = p^2/2m + V(q)$, onda jezgru prikazujemo u poznatijoj formi koja se nekada naziva Feynmanovim integralom po putevima. Primijetite da smo p_n uveli nezavisno od q_n, iz čega slijedi da objekt u eksponentu $\tilde{L}(q,\dot{q},p) = p\dot{q} - H(p,q)$ zapravo nije lagranžijanska funkcija $L(q,\dot{q})$, ali možemo doći do nje u slučaju standardne forme hamiltonijana. Vraćamo se na izraz za matricu prijelaza (2.3), s kraticom $\dot{q}_n$.

$$\begin{aligned}
T_n &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(i\varepsilon[p_n\dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - V(\bar{q}_n)]\Big) \\
&= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(\frac{i\varepsilon}{2m}(2mp_n\dot{q}_n - p_n^2) - i\varepsilon V(\bar{q}_n)\Big) \\
&= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(\frac{i\varepsilon}{2m}\big(-(p_n - m\dot{q}_n)^2 + m^2\dot{q}_n^2\big) - i\varepsilon V(\bar{q}_n)\Big)
\end{aligned}$$

Napravimo li supstituciju $p_n' = p_n - m\dot{q}_n$ dobivamo Gaussijanski integral. Veliki broj integrala po putevima završi u ovom obliku, stoga ćemo ovdje razmotriti jedno zgodno rješenje tog integrala.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ax^2}$$

Ovaj integral kvadriramo i prebacimo u polarne koordinate u kojima ga možemo jednostavno riješiti.

$$I^2 = \iint dxdy\; e^{-a(x^2+y^2)} = 2\pi\int_0^{\infty} rdr\; e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a} \to I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.8}$$

U našem slučaju $a = i\varepsilon/2m$, pa slijedi rezultat. Faktor a je imaginaran pa smo prešutno napravili analitičko produljenje.

$$T_n = \Big(\frac{2i\pi\varepsilon}{m}\Big)^{-1/2} \exp\big(i\varepsilon[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)]\big) \tag{2.9}$$

Provođenjem limesa s ovim rezultatom za T_n dobijemo *Feynmanov integral po putevima*.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \exp\Big(i\int_t^{t'} d\tau\,\big(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\big)\Big) \tag{2.10}$$

Ovdje možemo prepoznati uobičajeni lagranžijan $L(q, \dot{q})$, te klasični funkcional akcije $S[q(t), \dot{q}(t)]$.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \exp(iS[q(t), \dot{q}(t)]) \tag{2.11}$$

$\mathcal{N}$ je neodređena normalizacijska konstanta, koja općenito ispada divergentna. Ova metoda, iako vrlo elegantna i intuitivna, pati od nekoliko problema. Ponajviše, što je integral faze po beskonačnoj mjeri, pa je integral samo uvjetno konvergentan. Prešutno smo napravili zamjenu integrala i limesa, što općenito nije dopušteno za uvjetno konvergentne integrale. Dodatno, ne možemo primijeniti ni Fubinijev teorem, pa će rezultat ovisiti o redoslijedu integracije i/ili o regularizaciji. Uobičajeni postupci koji rješavaju divergenciju su Feynmanova $m \to m - i\epsilon$ preskripcija i Wickova rotacija u imaginarno vrijeme. U ovom radu upotrijebiti ćemo Picard–Lefschetzovu teoriju kojom ćemo pronaći jedinstvenu integracijsku konturu preko koje je integral apsolutno konvergentan. Na toj konturi primijenit ćemo poluklasičnu aproksimaciju sedlene točke. Ipak, čak i kada se integral napravi apsolutno konvergentnim, diskretizacija vremena ostavlja druge probleme. Faktor $\mathcal{N}$ i dalje ostaje divergentan, i još bitnije, produkt mjera $\mathcal{D}q$ nije σ-mjera i stoga naš integral nije zaista integral po putevima. Unatoč svim poteškoćama veliku količinu informacija možemo izvući samo iz funkcionalne ovisnosti, pa se zasad ne zabrinjavamo apsolutnim veličinama. Primijetite da je faza pojedine putanje zadana eksponencijalnom akcije. Znamo da varijacijskim računom možemo doći do klasične mehanike, odnosno kada je akcija stacionarna za varijacije $\delta q(t)$ i $\delta\dot{q}(t)$. Zaključujemo da kvantna mehanika u aproksimaciji stacionarne faze, reproducira klasičnu mehaniku.

Idemo sada izračunati integral u (2.11) za $V(q) = 0$, jer će nam takav integral trebati kada budemo rješavali funkcionalni integral za gravitaciju. Također ubacimo sada i

$\hbar$ u razmatranje.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \exp(\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\ \frac{m}{2}\dot{q}^2)$$

Nakon diskretizacije imamo

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{2\hbar i\pi\varepsilon}{m}\Big)^{-N/2}\int dq_1...dq_{N-1}\exp\big(\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_{i=1}^{N}(q_i - q_{i-1})^2\big).$$

Trebamo riješiti integral

$$\int dq_n\ e^{-\alpha(q_{n+1}-q_n)^2}e^{-\beta(q_n-q_{n-1})^2}.$$

To možemo napraviti tako da u eksponentu izdvojimo q_n i onda izračunamo Gaussijanski integral koji preostaje.

$$\int dq_n\ e^{-(\alpha+\beta)(q_n-\frac{\alpha q_{n+1}+\beta q_{n-1}}{\alpha+\beta})^2}e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2} = e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}$$

Računamo prvi integral uz $\alpha = \beta = \frac{-im}{2\hbar\varepsilon}$.

$$\frac{m}{2\hbar i\pi\varepsilon}\int dq_1\ e^{\frac{-im}{2\hbar\varepsilon}(q_1-q_0)^2}e^{\frac{-im}{2\hbar\varepsilon}(q_2-q_1)^2} = \frac{m}{2\hbar i\pi\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi\hbar\varepsilon}{-im}}e^{\frac{m}{2\pi i\hbar 2\varepsilon}(q_2-q_0)^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar 2\varepsilon}}e^{\frac{m}{2\pi i\hbar 2\varepsilon}(q_2-q_0)^2}$$

Ostali integrali su slični pa možemo predvidjeti konačni rezultat. Identičan je gornjem rezultatu uz zamjene $2\varepsilon \to M\varepsilon$ i $q_2 \to q_N$. Slijedi propagator nerelativističkog slobodnog sustava s jednim stupnjem slobode.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar M\varepsilon}}e^{\frac{m}{2\pi i\hbar N\varepsilon}(q_N-q_0)^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t'-t)}}e^{\frac{m}{2\pi i\hbar(t'-t)}(q(t')-q(t))^2}. \tag{2.12}$$

Da bismo mogli formulirati analogan opis za gravitaciju bit će nam potrebna njena klasična akcija, pa je naš sljedeći korak pronalaženje lagranžijana gravitacije. Kako bi analogija bila moguća bit će nužno da je hamiltonijan kvadratičan u imupulsima što će nasreću biti slučaj za metriku minisuperporstora.

3 Lagranžijan opće teorije relativnosti

Ukratko ćemo raspraviti o funkcionalnom slučaju varijacijskog računa i prema tome pretpostaviti formu lagranžijana. Ta pretpostavka će se pokazati točnom do na jedan aditivni član kojeg ćemo ukloniti dodatkom korekcije u definiciju konačne akcije.

3.1 Funkcionalna derivacija

Neka je ψ tenzorsko polje na mnogostrukosti $\mathscr{M}$. Neka je $S[\psi]$ funkcional od ψ (preslikava konfiguracije polja ψ na $\mathscr{M}$ u brojeve). Neka je sada ψ_λ glatka jednoparametarska familija konfiguracija polja. Pod perturbacijom u polju $\delta\psi$ zapravo mislimo na derivaciju po parametru, nazovimo ga λ,

$$\delta\psi = \frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

Pretpostavimo da δS postoji za sve takve jednoparametarske familije. Nadalje, pretpostavimo da postoji glatko tenzorsko polje χ koje je dualno ψ, tako da za sve familije vrijedi

$$\delta S = \int_{\mathscr{M}} \chi \delta\psi,$$

gdje se podrazumijeva kontrakcija indeksa na χ i $\delta\psi$. U ovom slučaju kažemo da je S *funkcionalno diferencijabilna* u ψ_0, a χ nazivamo *funkcionalnom derivacijom* od S,

$$\chi = \frac{\delta S}{\delta\psi}\Big|_{\psi_0}.$$

Ako je ψ simetrično polje (kao što je i metrika), onda tenzoru χ možemo dodati neki antisimetrični tenzor i δS će ostati nepromijenjen. Ovu slobodu eliminiramo tako da zahtijevamo da svaka funkcionalna derivacija bude simetrična. Razmotrimo sada funkcional oblika

$$S[\psi] = \int_{\mathscr{M}} \mathcal{L}[\psi],$$

gdje je $\mathcal{L}$ lokalna funkcija koja ovisi o ψ i konačnom broju njenih derivacija

$$\mathcal{L}\Big|_x = \mathcal{L}(\psi(x),\ \nabla\psi(x),\ ...,\ \nabla^k\psi(x)).$$

Ako je S funkcionalno diferencijabilna i ako su konfiguracije polja koje ekstremiziraju S ujedno i rješenja jednadžbi polja za ψ, onda S nazivamo *akcijom*, a $\mathcal{L}$ *lagranžijanskom gustoćom*. Određivanjem ove gustoće zadajemo lagranžijansku formulaciju teorije.

3.2 Hilbertova akcija

Pa koja bi to gustoća bila prikladna za relativnost? Einsteinovu jednadžbu rješavamo za metriku, pa će tako akcija biti funkcional metrike (i nekih polja materije koja su prisutna, ali se zasada držimo samo metrike). Dakle, možemo pisati:

$$S[g] = \int \boldsymbol{\epsilon}\hat{\mathcal{L}},$$

gdje je $\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|}dx^0 \wedge ... \wedge dx^{n-1} \equiv \sqrt{|g|}\boldsymbol{e}$ prirodni volumni element na $(\mathscr{M}, g_{ab})$ u svakoj desnoj koordinatnoj bazi. Ovdje je g determinanta matrice $g_{\mu\nu}$ komponenti metrike g_{ab} u koordinatnom sustavu u kojem su komponente od e_{abcd} jednake Levi-Civita simbolima. Problem je što ćemo i volumni element morati varirati, jer ovisi o metrici, ali možemo uvesti fiksni volumni element i definirati integrale u odnosu na taj. Uzmemo li $\boldsymbol{e}$ kao volumni element definiramo tenzorske gustoće $T^a{}_b$ za koje vrijedi,

$$T^a{}_b = \sqrt{|g|}\tilde{T}^a{}_b\,,$$

gdje je $\tilde{T}^a{}_b$ tenzor koji je neovisan o izboru $\boldsymbol{e}$. Da bi akcija S bila neovisna o $\boldsymbol{e}$, $\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\hat{\mathcal{L}}$ mora biti skalarna gustoća. Da bi δS bila neovisna o $\boldsymbol{e}$, χ mora biti tenzorska gustoća.

Dakle $\hat{\mathcal{L}}$ mora biti skalar koji je na neki način povezan sa zakrivljenošću metrike, pa idemo isprobati jednostavni izbor Riccijevog skalara R,

$$S_H[g] = \int \boldsymbol{e}\sqrt{|g|}R.$$

Funkcional S_H se naziva *Hilbertovom akcijom*. Sada uvodimo perturbaciju u inverznu metriku $g^{ab} + \lambda\delta g^{ab}$ i nadamo se da ćemo variranjem dobiti Einsteinovu jednadžbu. Svejedno je variramo li metriku g_{ab} ili inverznu metriku g^{ab}, pa ovdje biramo drugi izbor. Želimo $\delta\mathcal{L} = \delta(\sqrt{|g|}R)$ zapisati u obliku $A_{ab}\delta g^{ab}$. Stoga ćemo prvo pronaći poveznicu između varijacije u metrici δg_{ab} i varijacije u inverznoj metrici δg^{ab}. Ne smijemo koristiti neperturbiranu metriku za podizanje i spuštanje indeksa na perturbacijama, ali sigurno vrijedi sljedeće:

$$g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c \rightarrow g_{bc}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta g_{bc} = 0.$$

Kontrahiramo li s g_{ad} slijeva, dobivamo relaciju koja povezuje perturbaciju u metrici s perturbacijom u inverznoj metrici.

$$g_{ad}g^{ab}\delta g_{bc} = -g_{ad}g_{bc}\delta g^{ab} \quad \rightarrow \quad \delta g_{cd} = -g_{ad}g_{cb}\delta g^{ab} \tag{3.1}$$

Spremni smo varirati našu jednostavnu pretpostavku. Sjetimo se da je Ricci skalar $R = R_{ab}g^{ab}$.

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = R\delta\sqrt{|g|} + \sqrt{|g|}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab} \tag{3.2}$$

Odmah vidimo da je srednji član već u željenoj formi. Prvi član trebamo preoblikovati koristeći relaciju $\ln(|\mathrm{det}A|) = \mathrm{Tr}(\ln A)$.

$$\ln(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\ln g)$$

Varirajući ovu relaciju dobivamo[4]

$$\frac{\delta(\sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\sigma}) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{ab}\delta g_{ab}.$$

Iskoristimo (3.1) i preskačemo korak u kojem kontrahiramo metriku s njenim inverzom.

$$\delta(\sqrt{|g|}) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{ab}\delta g^{ab} \tag{3.3}$$

Uvrstimo li gornju relaciju u (3.2), iz prva dva člana možemo prepoznati Einsteinovu jednadžbu u vakuumu bez kozmološke konstante.

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\big(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\big)\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab}$$

[4]Pod tragom se nalaze matrice u određenom koordinatnom sustavu, ali nasreću rezultat možemo zapisati tenzorski.

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{|g|}G_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab} \tag{3.4}$$

Naš jednostavan i jedinstven prvi pokušaj pokazao se dobrim do na zadnji član. Nakon što ga u dodatku A razmrsimo vidjet ćemo da se radi o površinskom integralu

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a v_a,$$

gdje je $v_a = \nabla^b(\delta g_{ab}) - g^{cd}\nabla_a(\delta g_{cd})$. Također ćemo ga povezati s vanjskom zakrivljenošću K ruba mnogostrukosti $\partial\mathscr{M}$. Način na koji ćemo eliminirati ovaj član je također jednostavan. Samo ćemo ga uvesti (sa suprotnim predznakom) kao dodatni član u definiciju vakuumske akcije gravitacije. Ovakav potez nam je dopušten jer u biti mi nemamo ni motivaciju, ni opravdanje, za izbor $\hat{\mathcal{L}} = R$, osim toga što će nam reproducirati željene jednadžbe gibanja. Isto tako jedina motivacija za imati dodatni član je reproduciranje Einsteinove jednadžbe. Ipak, nemamo potpunu slobodu u izboru lagranžijana, jednadžbe koje proizlaze iz njega moraju biti konzistentne.[5] U slučaju da lagranžijan implicira nekakva ograničenja na sustav, ona moraju biti očuvana tijekom evolucije sustava. Dovoljan uvjet za ovo je da Poissonove zagrade među ograničenjima, te zagrade ograničenja i hamiltonijana, možemo prikazati kao linearnu kombinaciju tih ograničenja. Više o tome ćemo govoriti u poglavlju 5. U dodatku A.5 uvjeriti ćemo se da je ovo istina u slučaju opće relativnosti. Raspravom u dodatku A zaključili smo da drugi član u (3.4) možemo zapisati kao divergenciju vektorskog polja, pa ga u akciji zapisujemo kao površinski integral. Kozmološka konstanta je po definciji aditivna, pa je tako i dodamo u ukupnu akciju.

$$S[g] = \int_{\mathscr{M}}(R - 2\Lambda) + \int_{\partial\mathscr{M}} 2K \tag{3.5}$$

Variranjem po (inverznoj) metrici dobili bismo vakuumsku Einsteinovu jednadžbu

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0,$$

potvrđujući da imamo akciju koja odgovara općoj teoriji relativnosti u vakuumu, ovaj put s kozmološkom konstantom.

[5] Recimo za $\mathcal{L} = q$ jednadžba gibanja je 1=0.

Zašto onda ne bismo jednostavno definirali integral po putevima poput

$$Z \propto \int \mathcal{D}g_{ab}\mathcal{D}\pi^{ab}e^{iS[g]},$$

gdje je π^{ab} konjugirani impuls? Mjera ovog integrala nije analogna onoj u (2.4) i naišli bi na značajne poteškoće kada bismo je pokušali definirati. Zbog kovarijantosti lagranžijanske formulacije ne možemo definirati vremensku derivaciju metrike, pa joj ne znamo ni pripisati impuls. Značajna razlika sa slučajem iz prvog poglavlja je u tome što ovdje nismo sigurni jesu li sve komponente metrike zaista nezavisni stupnjevi slobode. Zapravo već znamo da nisu, zbog simetrije metrike, preostaje samo 10 nezavisnih komponenti. Dodatno imamo slobodu izbora koordinatnog sustava za sve 4 dimenzije prostorvremena, što znači da preostaje samo 6 nezavisnih stupnjeva slobode. Stupnjevi slobode koji su zaista dinamičke varijable teorije. Samo na njih postavljamo rubne uvjete i po njihovim konfiguracijama želimo integrirati u integralu po putevima. Da bi odgovorili na pitanje: Koje su to dinamičke varijable opće relativnosti?, pronaći ćemo njenu hamiltonijansku formulaciju.

4 Hamiltonijan opće teorije relativnosti

U lagranžijanskoj formulaciji na mnogostrukosti $\mathscr{M}$ zadajemo funkcional akcije u nekom polju, tretirajući sve komponentne metrike identično. Drugim riječima, formulacija je kovarijantna. Zbog toga nije ni čudno što iz nje ne možemo pronaći dinamičke varijable. Sva dinamika utkana je u kovarijantne izraze. Dakle da bismo iskopali nezavisne stupnjeve slobode moramo uvesti smisao vremena i evolucije. Definiranje hamiltonijanske formulacije zahtjeva uvođenje istih koncepta.

4.1 Dinamičke varijable opće teorije relativnosti

Kao što imamo slobodu izbora koordinatnog sustava, tako imamo slobodu izbora smisla vremena. Pod tim mislimo na uvođenje vektorskog polja t^a vremenskog tipa i globalne "funkcije vremena" t, tako da je zadovoljeno $t^a\nabla_a t = 1$. Ograničimo se na globalno hiperbolična prostorvremena $(\mathscr{M}, g_{ab})$ raslojena Cauchyjevim plohama

Σ_t, koje su parametrizirane s t.[6] U smislu da je hiperploha Σ_t određena uvjetom $t =$konst. Iako t nazivamo funkcijom vremena, ono je samo proizvoljna parametrizacija, te nije fizikalan smisao vremena kojeg ćemo znati tek kada dobijemo rješenje za metriku. Iako proizvoljan, t mora biti dobar parametar, odnosno dvije hiperplohe se mogu poklapati jedino ako imaju istu vrijednost parametra t. Neka je prostor-vrijeme $\mathscr{M}$ zatvoreno i neka su hiperplohe Σ_t kompaktne. Ovim ćemo izbjeći neke dodatne članove u hamiltonijanu. Za hiperplohe postoji n^a jedinično vektorsko polje normalno na Σ_t pa slijedi

$$n^a = \frac{\nabla^a t}{\sqrt{-\nabla_a t \nabla^a t}}. \tag{4.1}$$

Zanimaju nas prostorne Σ_t i vremenski vektori n^a pa će vrijediti $n^a n_a = -1$ (minus u korijenu). Metrika g_{ab} na hiperplohi Σ_t inducira trodimenzionalnu Riemannovu metriku h_{ab}[7].

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{4.2}$$

Također definiramo fiksirani volumni element e_{abcd} tako da $\pounds_t e_{abcd} = 0$ (ne evoluira u vremenu t) i volumni element $\mathring{e}_{abc} = e_{abcd} t^d$ induciran na hiperplohi. Objekte koji su u potpunosti definirani na hiperplohama označavamo s kružićem. Volumne elemente možemo definirati lokalnim uvođenjem koordinata, jedna od kojih je t, tako da $t^a = (\partial_t)^a$, te uzmemo $dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ za volumni element. Integracije po $\mathscr{M}$ i Σ_t vršimo u odnosu na ove fiksne volumne elemente. U analogiji s $\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|}\boldsymbol{e}$ imamo $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt{h}\mathring{\boldsymbol{e}}$, gdje je h determinantna komponenti $h_{\mu\nu}$, inducirane metrike h_{ab} u bazi gdje su neiščezavajuće komponente od $\mathring{e}_{abc}$ jednake Levi-Civita simbolima. Iz toga slijedi

$$\sqrt{|g|} = N\sqrt{h}. \tag{4.3}$$

Definicija (4.2) implicira da $h^a{}_b(t)$ igra ulogu projektora na hiperplohu Σ_t, odnosno ulogu preslikavanja s tangentnog prostora $T_p(\mathscr{M})$, na tangentni prostor $T_p(\Sigma_t)$. Vektorsko polje t^a tada možemo rastaviti na dijelove normalne i tangencijalne na Σ_t definirajući *funkciju toka* N (eng. lapse function),

$$N = -t^a n_a = (n^a \nabla_a t)^{-1}, \tag{4.4}$$

[6]Plohu $\Sigma \subset \mathscr{M}$ nazivamo Cauchyjevom ako svaka neproduljiva diferencijabilna krivulja vremenskog tipa ima točno jednu točku sjecišta sa Σ. Prema toj definiciji Cauchyjeve plohe možemo zamišljati kao trenutke u vremenu.

[7]Riemannova metrika je ona koja daje pozitivno definitan skalarni umnožak na tangentnom prostoru $T_p(\Sigma_t)$ u svakoj točki $p \in \Sigma_t$.

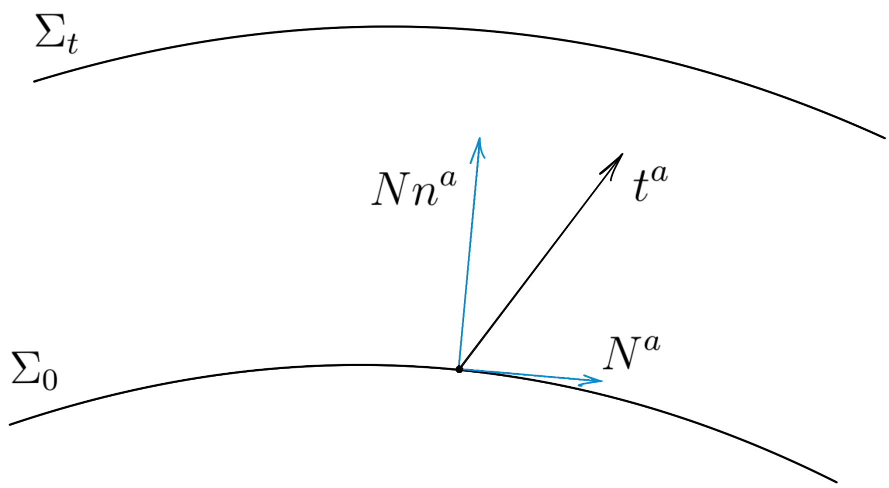
i *vektor pomaka* N^a (eng. shift vector),

$$N^a = h^a{}_b t^b. \tag{4.5}$$

Stoga za vektorsko polje možemo pisati,

$$t^a = Nn^a + N^a. \tag{4.6}$$

Funkcija toka N mjeri brzinu toka vlastitog vremena τ u odnosu na koordinatno vrijeme t kada se krećemo normalno na Σ_t, dok vektor pomaka N^a mjeri pomak tangencijalan na hiperplohu koji je sadržan u polju t^a.



Slika 4.1

Identificiramo li hiperplohe Σ_0 i Σ_t s difeomorfizmom koji slijedi iz integralnih krivulja od t^a, te ako interpretiramo t^a kao tok vremena, povećavanje vremenskog parametra t izgleda poput evolucije $(\Sigma_0, h_{ab}(0))$ u $(\Sigma_t, h_{ab}(t))$. Dakle prostorvrijeme $(\mathscr{M}, g_{ab})$ možemo interpretirati kao vremensku evoluciju Riemannove metrike h_{ab} na fiksiranoj trodimenzionalnoj (pod)mnogostrukosti Σ_t. Iz relacije (4.6) možemo izraziti normalni jedinični vektor n^a,

$$n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a).$$

Prema tome za metriku vrijedi

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b). \tag{4.7}$$

U konstruiranju lagranžijanske formulacije kao varijablu polja tretirali smo inverznu metriku g^{ab}. Ako je $h^{ab}h_{bc} = \delta^a{}_c$ na Σ_t i $h^{ab}\nabla_b t = 0$ onda možemo odrediti h_{ab} iz h^{ab} i $N^a = h^{ab}N_b$. Stoga možemo (h_{ab}, N, N^a) uzeti kao varijable polja. Tu imamo $6 + 1 + 3 = 10$ komponenti baš kao i u metrici g_{ab}. Budući da N i N^a pripisuju dinamiku, odnosno opisuju kako se pomičemo naprijed u vremenu i tangencijalno po plohi, ne možemo ih smatrati dinamičkim varijablama, pa nam preostaje 6 nezavisnih stupnjeva slobode, baš kao što smo očekivali. Vidjet ćemo da su funkcija toka i vektor pomaka zapravo Lagrangeovi multiplikatori za ograničenja opće relativnosti, slično kao što je i skalarni potencijal V u elektromagnetizmu.

Pomoću Liejeve derivacije možemo definirati veličinu koja se može interpretirati kao vremenska derivacija inducirane metrike na hiperplohi Σ_t s

$$\dot{h}_{ab} \equiv h_a{}^d h_b{}^e \pounds_t h_{de}. \tag{4.8}$$

U dodatku A uveden je pojam vanjske zakrivljenosti K_{ab} hiperplohe Σ_t s induciranom metrikom h_{ab} i normalnim vektorom n^a.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab} = h^c{}_{(a}\nabla_{|c|}n_{b)}$$

Ovaj tenzor povezan je s veličinom $\dot{h}_{ab}$ iz (4.8). Prvo ćemo izvesti jednu relaciju koja je i intuitivna, jer je vektor n^a ortogonalan na K_{ab}. Tvrdimo da je tenzor unutrašnje zakrivljenosti u potpunosti definiran na hiperplohi odnosno,

$$h_a{}^d h_b{}^e K_{de} = K_{ab}.$$

Provjeravamo za prvi član

$$h_a{}^d h_b{}^e h^c{}_d \nabla_c n_e = h_a{}^d h^c{}_d \nabla_c n_b = h^c{}_a \nabla_c n_b.$$

Prva jednakost slijedi iz (A.17), a druga iz činjenice da h_{ab} mogu jedne drugima podizati i spuštati indekse. Za drugi član dobili bismo analogan rezultat. Iz ovoga zaključujemo da kada K_{ab} projiciramo na hiperplohu opet dobijemo K_{ab}. Krećemo od istog raspisa koji se koristi kod (A.15).

$$\begin{aligned}2K_{ab} =& n^c\tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc}\nabla_a n^c + h_{ac}\nabla_b n^c = N^{-1}[Nn^c\tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc}\nabla_a(Nn^c) + h_{ac}\nabla_b(Nn^c)] \\ =& N^{-1}\pounds_{Nn}h_{ab} = h_a{}^d h_b{}^e N^{-1}\pounds_{Nn}h_{de}\end{aligned}$$

Imamo jednakost jer prema konstrukciji $h_{bc}n^c\nabla_a(N) = 0$. Vektor Nn^a možemo izraziti preko N^a i t^a,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}h_a{}^d h_b{}^e(\pounds_t h_{de} - \pounds_N h_{de}),$$

iz čega slijedi,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}(\dot{h}_{ab} - h_a{}^d h_b{}^e \pounds_N h_{de}). \tag{4.9}$$

Raspisujemo Liejevu derivaciju u smjeru vektora pomaka,

$$h_a{}^d h_b{}^e \pounds_N h_{de} = h_a{}^d h_b{}^e (N^c\nabla_c h_{de} + h_{ec}\nabla_d N^c + h_{dc}\nabla_e N^c).$$

U prvom članu koristimo definiciju inducirane metrike, pa vidimo da taj član iščezava. Za druga dva možemo iskoristiti definiciju inducirane derivacije (B.1) kompatibilne s induciranom metrikom. S tim dobivamo vezu između vanjske zakrivljenosti i vremenske derivacije inducirane metrike

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a). \tag{4.10}$$

Dakle za globalno hiperboličko prostorvrijeme $(\mathscr{M}, g_{ab})$ dinamičke varijable su komponente inducirane metrike h_{ab} za Cauchyevu plohu Σ_t, sa svojim vremenskim derivacijama $\dot{h}_{ab}$ definiranim u (4.8). Preostale komponente ukupne metrike sastoje se od funkcije toka N i vektora pomaka N^a koji nisu dinamični te samo opisuju kako se dinamika odvija. Imamo veličine potrebne za definiciju konjugiranog impulsa i hamiltonijana u općoj relativnosti, ali prije toga idemo promotriti primjer elektrodinamike tako da na poznatom tlu proučimo ograničenja.

4.2 Hamiltonijan i ograničenja elektrodinamike

Kada imamo lagranžijansku, hamiltonijansku formulaciju obično možemo dobiti primjenom standardnog postupka koji je analogan onom u klasičnoj mehanici čestica.

Neka je naša kanonska koordinata q zapravo polje ψ na podmnogostrukosti $\Sigma_t \subset \mathscr{M}$. Pretpostavimo li da lagranžijanska gustoća $\mathcal{L}$ ne ovisi o derivacijama q većima od prvog reda, možemo definirati pripadni impuls π,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}.$$

U slučaju da ovu jednadžbu možemo riješiti za $\dot{q}$ kao funkciju od q i π, hamiltonijansku gustoću možemo definirati pomoću Legendreove transformacije.

$$\mathcal{H}(q, \pi) = \pi \dot{q} - \mathcal{L} \tag{4.11}$$

Ovaj postupak će raditi za primjerice Klein-Gordonovo polje na prostorvremenu Minkowskog. Međutim, to neće biti tako izravno za recimo elektromagnetsko polje na istom prostorvremenu. Neka je polje u pitanju vektorski potencijal A_a koji je izvrijednjen na Σ_t i rastavimo ga na tangencijalni i normalni dio.

$$V = -A_a n^a \qquad \mathring{A}^a = h^{ab} A_b$$

Raspišemo li lagranžijan $\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}$ dobivamo

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2} (\partial_b A_a \partial^a A^b - \partial_a A_b \partial^a A^b)$$

Raspišimo oba komada (prešutno smo izabrali koordinatni sustav za ovaj raspis pa možemo pisati $\mathring{A}^a = \vec{A}$).

$$\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu = \dot{V}^2 + 2\dot{\vec{A}} \vec{\nabla} V + \partial_i A_j \partial^j A^i$$

$$\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \dot{V}^2 - \dot{\vec{A}}^2 - (\vec{\nabla} V)^2 + \partial_i A_j \partial^i A^j$$

Prvi članovi se krate, jedino zadnja dva su u malo nepoželjnom obliku, stoga mijenjamo zapis,

$$\partial_i A_j \partial^j A^i - \partial_i A_j \partial^i A^j = (\delta^{il} \delta^{kj} - \delta^{ik} \delta^{jl}) \partial_i A_j \partial_k A_l = -\epsilon^{ijm} \epsilon^{kl}{}_m \partial_i A_j \partial_k A_l = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

S tim dobijamo lagranžijan elektromagnetskog polja,

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2}[(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V)^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})].$$

Iz ovog oblika lako vidimo da je konjugirani kanonski impuls za tangencijalni dio $\vec{\pi} = \dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V \equiv -\vec{E}$. Također vidimo da za normalni dio impuls iščezava, ali to znači da nemamo invertibilnu relaciju između impulsa i brzina. Stoga nećemo moći pravilno definirati hamiltonijansku gustoću. Ovo je posljedica baždarne slobode u A_a i na sličan problem ćemo naići za slučaj gravitacije. Hamiltonijan tada možemo zadati tako da gledamo samo $\vec{A}$ kao dinamičku varijablu teorije (jer ove komponente imaju neiščezavajući konjugirani impuls). Onda za $\mathcal{H}$ pišemo

$$\mathcal{H}_{em} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 + \vec{B}^2) - \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla}V$$

Na zadnji član primijenimo Leibnizovo pravilo i zanemarujemo površinski član jer će nakon integracija uz asimptotske uvjete postavljene na V i π taj član iščezavati.

$$\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 + \vec{B}^2) + V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \mathcal{H}_0 + V\varphi \tag{4.12}$$

Sada V igra ulogu Lagrangeovog multiplikatora za ograničenje $\varphi = 0$,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{em}}{\partial V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

Ova jednadžba uz Hamiltonove jednadžbe ekvivalentna je jednadžbama gibanja.

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\partial \mathcal{H}_{em}}{\partial \vec{\pi}} = -\vec{E} - \vec{\nabla}V, \qquad \dot{\vec{\pi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{em}}{\partial \vec{A}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

Čak smo dobili i prirodan rastav jednadžbi na ograničenja i na jednadžbe evolucije. Ovakva formulacija naziva se *ograničenom hamiltonijanskom formulacijom* i s općenitijom teorijom takvih sustava upoznat ćemo se u poglavlju 5. Očekujemo da se pojavi kada varijable polja u teoriji imaju baždarnu slobodu, u ovom slučaju je to invarijantnost na transformaciju $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$, za proizvoljnu skalarnu funkciju χ. Drugim riječima, kada u lagranžijanu postoji neka razina proizvoljnosti, brzine ne možemo jedinstveno izraziti preko impulsa i koordinata, što implicira postojanje nekih relacija između tih veličina. Takve relacije nazivamo *ograničenjima*, a takav lagranžijan *singularnim*. Nužan i dovoljan uvjet da lagranžijan bude singularan je

$$\det\Big(\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\Big) = 0. \tag{4.13}$$

Kada je ovaj uvjet ispunjen uvijek možemo napraviti kanonsku transformaciju varijabli tako da barem jedan od konjugiranih impulsa ne ovisi o vremenskim derivacijama koordinata, što znači da nemamo dovoljno invertibilnih relacija između brzina i impulsa. Na primjeru elektrodinamike imamo jednu proizvoljnu funkciju χ i dobili smo jedno ograničenje $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$. U složenijim slučajevima će također vrijediti da broj ograničenja odgovara broju proizvoljnih funkcija u lagranžijanu. Opća relativnost u ovom smislu ima sličnosti s elektrodinamikom, ali samo u tome što dolaze s ograničenjima. U ovom primjeru smo implicitno izabrali koordinatni sustav da bismo opisali polje s baždarnom slobodom. Značajna je razlika da u općoj relativnosti baždarna sloboda leži upravo u izboru koordinatnog sustava i stoga, zbog 4 dimenzije prostorvremena, očekujemo 4 ograničenja u hamiltonijanskoj formulaciji opće relativnosti. Također, kada dekomponiramo akciju (3.5) očekujemo da ćemo pronaći vremenske derivacije inducirane metrike h_{ab}, ali ne i derivacije funkcije toka te vektora pomaka N, N^a.

4.3 Hamiltonijan i ograničenja opće teorije relativnosti

Poučeni primjerom elektrodinamike očekujemo da će i opća relativnost zahtijevati ograničenu hamiltonijansku formulaciju. Baždarna sloboda u ovom slučaju leži u invarijantnosti na difeomorfizme[8]. Ako je $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ difeomorfizam, onda $(\mathscr{M}, g_{ab})$ i $(\mathscr{M}, \phi^* g_{ab})$ opisuju fizikalno isto prostorvrijeme. Prvo pronalazimo Hilbertovu akciju izraženu preko novih varijabli polja. Uzimamo prvu Gauss-Codazzijevu relaciju (B.3) izračunatu u dodatku B i kontrahiramo dva od četiri indeksa.

$$\mathring{R}_{abc}{}^{b} = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^b{}_j R_{fgh}{}^j - K_{ac}K + K_{bc}K_a{}^b$$

Još jednom kontrahiramo, ovaj puta s g^{ac}.

$$\mathring{R} = g^{ac}(\mathring{R}_{abc}{}^{b}) = h^{cf} h_b{}^g h_c{}^k h^b{}_j R_{fgk}{}^j - K^2 + K_{ab}K^{ab}$$

[8]Difeomorfizmi su C^∞ bijektivna preslikavanja $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, koja imaju C^∞ inverz.

Prvi član postaje $h^{fk}h^{jg}R_{fgkj}$ što možemo dodatno reducirati.

$$\begin{aligned} h^{fk}h^{jg}R_{fgkj} &= h^{fk}(R_{fk} + R_{fgkj}n^g n^j) \\ &= R + R_{ab}n^a n^b + h^{fk}R_{gfkj}n^g n^j \\ &= R + R_{ab}n^a n^b + R_{ab}n^a n^b + R_{gfjk}n^g n^j n^f n^k \end{aligned}$$

Zadnji član nestaje zbog kontrakcije Riemannovog tenzora sa simetričnim objektom.

$$\mathring{R} = R + 2R_{ab}n^a n^b - K^2 + K_{ab}K^{ab} \tag{4.14}$$

Na srednjem članu koristimo definiciju Riemannovog tenzora preko komutatora derivacija $R_{abc}{}^d\omega_d = [\nabla_a, \nabla_b]\omega_c$ koja se koristi u dodatku B.

$$R_{ab}n^a n^b = -g^{cd}R_{acdb}n^a n^b = -g^{cd}n^a[\nabla_a, \nabla_c]n_d = n^a[\nabla_c, \nabla_a]n^c$$

Raspisujući ovaj izraz možemo prepoznati neke objekte koji opisuju hiperplohu Σ_t.

$$n^a[\nabla_c, \nabla_a]n^c = \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) - (\nabla_a n_c)(\nabla^c n^a) - \nabla_a(n^a\nabla_c n^c) + (\nabla_a n^a)^2$$

$$R_{ab}n^a n^b = K^2 - K_{ab}K^{ab} + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) - \nabla_a(n^a\nabla_c n^c)$$

Zadnja dva člana možemo prebaciti na rub. Zbog okomitosti $n^a\nabla_a n^c$ na n^c treći član neće doprinositi akciji. Doprinos četvrtog člana će se poništiti s drugim članom u akciji (3.5), jer $n_a n^a = -1$ i prema (A.18) vrijedi $K = \nabla_c n^c$. Iskoristimo li sada i $\sqrt{|g|} = N\sqrt{h}$ za akciju (3.5) možemo pisati

$$S = \int_{\mathscr{M}} d^4x \; N\sqrt{h}(\mathring{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2). \tag{4.15}$$

Pogledamo li zadnju relaciju iz prošlog odlomka (4.10) zaključujemo da se pojavljuju samo vremenske derivacije h_{ab}, dok su N, N^a samo Lagrangeovi multiplikatori s iščezavajućim impulsom. Za dinamičku varijablu h_{ab} možemo definirati konjugirani impuls π^{ab}.

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = N\sqrt{h}\big(2K^{ab}\frac{1}{2N} - 2Kh^{ab}\frac{1}{2N}\big) = \sqrt{h}\big(K^{ab} - Kh^{ab}\big)$$

Sada možemo pronaći hamiltonijan izražen preko π^{ab} i h_{ab},

$$\mathcal{H} = \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}.$$

Dobivamo

$$\mathcal{H} = -\sqrt{g}\big(\mathring{R} - \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} + \frac{1}{2h}\pi^2\big) + 2D_a(\pi^{ab}N_b) - 2N_b D_a \pi^{ab},$$

gdje smo primijenili Leibnizovo pravilo na inducirinu derivaciju u zadnjem članu. Hiperplohe Σ_t su po pretpostavci kompaktne pa puna derivacija ne doprinosi. Definiramo li $\pi \equiv \pi^{ab}h_{ab}$ hamiltonijan možemo zapisati kao

$$\mathcal{H} = -\sqrt{g}\big(\mathring{R} - \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} + \frac{1}{2h}\pi^2\big) - 2N_b D_a \pi^{ab}. \tag{4.16}$$

Varijacije (4.16) u odnosu na funkciju toka i vektor pomaka daju nam jednadžbe ograničenja.

$$\mathcal{H}_0 \equiv \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta N} = \sqrt{h}\big(- \mathring{R} + \frac{1}{h}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2h}\pi^2\big) = 0 \tag{4.17}$$

$$\mathcal{H}_b \equiv \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta N^b} = D^a\pi_{ab} = 0 \tag{4.18}$$

Ukupna hamiltonijanska gustoća $\mathcal{H}$ je iščezavajuća za fizikalna prostorvremena koja zadovoljavaju Einsteinove jednadžbe.

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i \equiv N^\mu\mathcal{H}_\mu = 0 \tag{4.19}$$

Ovakva gustoća nam predlaže da ukupnu energiju zatvorenog svemira definiramo kao nulu, ali ovo svojstvo nije jedinstveno za opću relativnost. Štoviše teorije se mogu parametrizirati tako da im hamiltonijan iščezava. Iako se oblici ograničenja $\mathcal{H}_\mu$ mijenjaju, za sve (generalno kovarijantne) teorije ograničenja imaju svojstvo da su Poissonove zagrade među njima jednake linearnoj kombinaciji samih $\mathcal{H}_\mu$ i da su strukturni koeficijenti te kombinacije univerzalni za sve takve teorije. Algebra se može izvesti iz samo dvije pretpostavke [6]: $\mathcal{H}_\mu$ su prve klase i Hamiltonove jednadžbe su integrabilne[9]. Rezultat se može pronaći u radovima Diraca [5] [3] i Sc-

[9]Integrabilnost znači da je promjena kanonskih varijabli, tijekom evolucije između dvije plohe, neovisna o redoslijedu ploha između. Oba zahtjeva su u suštini zahtjevi konzistencije teorije.

hwingera [4], te glasi:

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0'\} = (\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_i')\delta^{,i}(u-u'), \tag{4.20}$$

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_i'\} = \mathcal{H}_0'\delta_{,i}(u-u'), \tag{4.21}$$

$$\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j'\} = \mathcal{H}_j\delta_{,i}(u-u') + \mathcal{H}_i'\delta_{,j}(u-u'). \tag{4.22}$$

Često se ove relacije citiraju u nešto drugačijem obliku, razlika je u tome što se nekada umjesto $\mathcal{H}_0$ koristi $\sqrt{h}\mathcal{H}_0$. Njihovo fizikalno značenje ostaje nepromijenjeno. Ove relacije vrijede i za teorije koje su već parametrizirane tako da su generalno kovarijantne, poput opće relativnosti. U standardnom slučaju generalno kovarijantne teorije se mogu deparametrizirati, ali to nije moguće za opću teoriju relativnosti, jer je ograničenje $\mathcal{H}_0$ kvadratično u impulsu. Kada bismo je mogli deparametrizirati možda bi se pojavila prirodna ideja ukupne energije zatvorenog svemira.

5 Fradkin–Vilkoviskyjev teorem

U prvom potpoglavlju ćemo po uzoru na Diraca [5] raspraviti o općenitom hamiltonijanskom sustavu s ograničenjima. Vidjet ćemo kako je spomenuto svojstvo prvoklasnosti nužno da bi imali konzistentan sustav, te kako ograničenja uvode proizvoljnosti. Za Fradkin–Vilkoviskyjev teorem biti će nam potrebne i fermionske i bozonske varijable, pa u drugom potpoglavlju definiramo Grassmanove varijable i alate koji će nam biti potrebni. Naposlijetku dajemo iskaz teorema, te dokaz u dodatku C.

5.1 Hamiltonijanski sustav s ograničenjima

Razmotrimo sada općeniti sustav sa singularnim lagranžijanom L i kanonskim varijablama (q, p) (neka ih ima n, ali nećemo pisati indekse radi preglednosti). Tada postoje neka *primarna ograničenja* $\varphi_a(q,p) = 0,\ a = 1, ..., M$, koja slijede direktno iz definicije impulsa $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Budući da će nam biti potreban formalizam Poissonovih zagrada, trebamo paziti da ograničenja ne izjednačimo s nulom prije nego što izračunamo sve Poissonove zagrade od interesa. Moguće je da zagrade ograničenja i nekih kanonskih varijabli nisu nula, tada umjesto $\varphi_a = 0$ koristimo oznaku $\varphi_a \approx 0$. Služi kao podsjetnik da ograničenja možemo fiksirati na nulu tek kada smo izračunali sve potrebne Poissonove zagrade. Za ograničenja onda kažemo da su *slabo iščezavajuća*. Možemo pronaći hamiltonijan $H = p\dot{q} - L$, ali neće biti jedinstven, jer mu uvijek možemo dodati proizvoljnu linearnu kombinaciju ograničenja $H' = H + \xi^a \varphi_a$, gdje koeficijenti ξ mogu biti funkcije kanonskih varijabli. Slijede i neodređene jednadžbe gibanja[10],

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} + \xi^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \xi^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial q}.$$

Uvedemo li Poissonove zagrade možemo ove jednadžbe zapisati kompaktnije. Za dvije funkcije $f(q,p)$ i $g(q,p)$ kanonskih varijabli definiramo Poissonove zagrade,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}, \tag{5.1}$$

gdje se podrazumijeva suma po svih n indeksa. Za općenitu funkciju kanonskih varijabli $g(q,p)$ tada imamo jednadžbu gibanja,

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p} = \{g, H\} + \xi^a\{g, \varphi_a\} \approx \{g, H'\}. \tag{5.2}$$

Jednadžbe gibanja za ograničenja nazivamo *uvjetima konzistentnosti*. Ograničenja trebaju biti očuvana tijekom evolucije sustava, pa postavljamo $g = \varphi_a$ i $\dot{g} = 0$.

$$\{\varphi_a, H\} + \xi^b\{\varphi_a, \varphi_b\} \approx 0 \tag{5.3}$$

Ovakve jednadžbe možemo svrstati u četiri slučaja. U prvom vode do nekonzistentnosti, kao što smo već spomenuli za primjer $L = q$. Ovakvim teorijama se nema smisla baviti, pa zahtijevamo da nemamo takav lagranžijan. U drugom slučaju nas navode na jednadžbu tipa $1 = 1$, odnosno samo potvrđuju da imamo konzistentno zadanu teoriju. Moguće je da nas jednadžbe konzistencije navode na ograničenja za koeficijente ξ^a. Jednadžbe četvrtog slučaja su neovisne o koeficijentima ξ^a i, poput primarnih ograničenja, daju neke relacije između kanonskih varijabli. Ovakve jednadžbe nužno su neovisne o ograničenjima jer bi inače odgovarale drugom slučaju. Time dobivamo *sekundarna ograničenja* $\varphi_k,\ k = M+1, ..., M+K$. Uvjeti konzis-

[10]Ne pojavljuju se derivacije koeficijenata ξ^a jer ih množe ograničenja, koja možemo izjednačiti s nulom u jednadžbama gibanja.

tentnosti moraju vrijediti i za sekundarna ograničenja, pa se ovaj postupak nastavlja dok više ne dobivamo nove relacije među kanonskim varijablama. Hamiltonijanski formalizam ne mari za razlikom između primarnih i sekundarnih ograničenja, pa ih obično grupiramo u $\varphi_j \approx 0,\ j = 1, ..., M + K.$ Na ovaj način ograničenja φ_j su sve nezavisne slabo iščezavajuće veličine u teoriji. Za jednadžbe treće vrste, ograničenja koeficijenata ξ^a, moramo moći pronaći rješenja $\xi_0^a(q, p)$, jer bismo u suprotnom imali nekonzistentne jednadžbe gibanja. Pogledom na jednadžbu za koeficijente,

$$\{\varphi_j, H\} + \xi^b\{\varphi_j, \varphi_b\} \approx 0, \tag{5.4}$$

gdje su indeksi $j = 1, ..., M + K$ i $b = 1, ..., M$, vidimo da rješenje nije jedinstveno, već možemo dodati kombinaciju rješenja homogene jednadžbe

$$\xi_\alpha^b\{\varphi_j, \varphi_b\} = 0. \tag{5.5}$$

Neka tih rješenja ima m i označimo ih s $\xi_\alpha^b(q, p),\ \alpha = 1, ..., m.$ Tada su općenita rješenja za koeficijente,

$$\xi^a = \xi_0^a + \lambda^\alpha \xi_\alpha^a, \tag{5.6}$$

gdje su novi koeficijenti λ^α potpuno proizvoljni, čak i ako su vremenski ovisni. Za ukupni hamiltonijan možemo pisati,

$$H_T = H + \xi_0^a\varphi_a + \lambda^\alpha\xi_\alpha^a\varphi_a \equiv H_0 + \lambda^\alpha T_\alpha, \tag{5.7}$$

gdje su $H_0 = H + \xi_0^a\varphi_a$ kanonski hamiltonijan i $T_\alpha = \xi_\alpha^a\varphi_a$ "nova" ograničenja. Dakle za sustav imamo cijelu klasu fizikalno ekvivalentnih hamiltonijana $H_T \approx H_0$. Za dinamičku veličinu A kažemo da je *prve klase*, ako vrijedi

$$\{A, \varphi_j\} \approx 0 \quad \to \quad \{A, \varphi_j\} = c_{jj'}\varphi_{j'}, \tag{5.8}$$

iz čega slijedi da je lijeva zagrada strogo jednaka linearnoj kombinaciji ograničenja $\varphi_j,\ j = 1, ..., M + K$, jer su φ_j sve nezavisne slabo iščezavajuće veličine. Koristeći ovo svojstvo lako je dokazati da su Poissonove zagrade dvije veličine prve klase također veličina prve klase. Možemo definirati i veličine *druge klase*, kada ima barem jedan

φ_j za kojeg gornja relacija (5.8) nije istinita.[11]

Sada iz uvjeta konzistentnosti (5.3) slijedi da je hamiltonijan H_0 veličina prve klase, dok iz jednadžbe (5.5) slijedi da su i nova ograničenja T_α, također prve klase. Linearna kombinacija primarnih ograničenja će naravno isto biti primarna, tako da su T_α zapravo primarna ograničenja prve klase. Dakle za dobro zadanu teoriju govorimo o sustavu gdje je ukupni hamiltonijan (5.7) suma hamiltonijana prve klase H_0 i proizvoljne linearne kombinacije primarnih ograničenja T_α prve klase. Broj prisutnih proizvoljnih funkcija λ^α jednak je m, što je jednako broju nezavisnih primarnih ograničenja prve klase T_α.

Neka onda imamo sustav s kanonskim hamiltonijanom prve klase H_0, n kanonskih parova (q^i, p^i) i m primarnih ograničenja prve klase $T_\alpha(q,p)$. Akcija za ovakav sustav glasi,

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\big(p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^\alpha(t) T_\alpha\big). \tag{5.9}$$

Pretpostavimo da ograničenja zadovoljavaju algebru s uobičajenom definicijom Poissonovih zagrada iz klasične mehanike.

$$\{T_\alpha, T_\beta\} = U_{\alpha\beta}^{\gamma} T_\gamma, \qquad \{H_0, T_\alpha\} = V_\alpha^\beta T_\beta \tag{5.10}$$

Ove relacije slijede direktno iz uvjeta da su H_0 i T_α prve klase, što je nužno za konzistentan sustav. Ako je ova algebra zadovoljena, jedan početni uvjet (q_0, p_0) će, za različite funkcije $\lambda^\alpha(t), \lambda'^\alpha(t)$..., generirati jednu klasu ekvivalentnih rješenja $(q_1, p_1),\ (q_1', p_1')$.... Ona se u faznom prostoru nalaze na plohi definiranom s ograničenjima $T_\alpha(q,p) = 0$. Stoga dinamiku ovakvog sustava možemo prikazati kao dinamiku nekog sustava s $(n-m)$ fizikalnih stupnjeva slobode (q^*, p^*) (uistinu nezavisni stupnjevi slobode) i hamiltonijanom $H_{ph}(q^*, p^*)$. Za općenitu dinamičku veličinu A ograničenja generiraju infinitezimalnu transformaciju

$$\delta A = \epsilon^\alpha \{A, T_\alpha\}, \qquad \epsilon^\alpha \equiv \epsilon^\alpha(q, p, \lambda; t). \tag{5.11}$$

Iz prve relacije u (5.10) vidimo da se ploha na kojoj su rješenja ne mijenja tijekom

[11] Ograničenja druge klase su definirana do na linearnu kombinaciju ograničenja prve klase. Primijetimo da je veličina druge klase na kvadrat, veličina prve klase.

ove transformacije, pa tako ni rješenja na plohi ovom transformacijom nikada ne silaze s plohe. Dakle upravo ova transformacija preslikava između članova jedne klase ekvivalentnih rješenja, određenih s različitim koeficijentima $\lambda, \lambda' \dots$ Kako bi akcija bila invarijantna na ove transformacije potrebno je da se multiplikatori transformiraju kao,

$$\delta\lambda^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha - U^\alpha_{\beta\gamma}\lambda^\beta\epsilon^\gamma - V^\alpha_\beta\epsilon^\beta. \tag{5.12}$$

Tada preostaje samo rubni član za čiju eliminaciju je dovoljno fiksirati $p_i\delta q^i$ u nulu na rubovima, što možemo učiniti s uvjetom

$$\epsilon^\alpha(t_1) = \epsilon^\alpha(t_0) = 0. \tag{5.13}$$

Kako bismo izdvojili fizikalne stupnjeve slobode i pravilno definirali integral po putevima potrebno je izabrati po jednog predstavnika iz svake klase. To se može napraviti *fiksiranjem baždarenja*, odnosno, uvođenjem m dodatnih ograničenja koja slamaju simetriju (tako da $\epsilon^\beta\{\phi^\alpha, T_\beta\} \neq 0$),

$$\phi^\alpha(q^i, p_i, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha, \Pi_\alpha) = 0, \qquad \det\big(\{\phi^\alpha, T_\beta\}\big) \neq 0. \tag{5.14}$$

Za relativističke teorije nužno je pretpostaviti ovako općenitu ovisnost za dodatna ograničenja [10][12]. Promjene u dodatnim ograničenjima odgovaraju kanonskim transformacijama u fizikalnom faznom prostoru, pa je njihov izbor proizvoljan, što odgovara tome da je izbor predstavnika svake klase proizvoljan. Uvođenjem multiplikatora Π_α, jednadžbe ograničenja i jednadžbe gibanja mogu se dobiti iz akcije S,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \big(p_i\dot{q}^i - H_0 - \lambda^\alpha T_\alpha - \Pi_\alpha\phi^\alpha\big).$$

Možemo je zapisati kompaktnije ako uvedemo prošireni multiplikator ζ^a i ograničenja Ψ_a. Za ukupni hamiltonijan slijedi $H_T = H_0 + \lambda^\alpha T_\alpha + \Pi_\alpha\phi^\alpha \equiv H_0 + \Psi_a\zeta^a$. Jednadžba gibanja za ovakav sustav je onda

$$\dot{g} = \{g, H_0\} + \{g, \Psi_a\}\zeta^a.$$

[12]Primjerice u elektromagentizmu A^0 odgovara multiplikatoru λ, pa Lorenzovo baždarenje $\partial_\mu A^\mu$ ne bi bilo uključeno da su ϕ^α funkcije samo kanonskih vraijabli.

Primijetimo da su nova ograničenja upravo takva da uvjeti konzistentnosti nisu više automatski zadovoljeni, već sada fiksiraju multiplikatore ζ^a uvjetom

$$\{\Psi_b, \Psi_a\}\zeta^a + \{\Psi_b, H_0\} = 0 \quad \rightarrow \quad \zeta^a = -\big(\{\Psi_b, \Psi_a\}\big)^{-1}\{\Psi_b, H_0\}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti nekakav oblik baždarnih ograničenja, pa neka je

$$\phi^\alpha = -\dot{\lambda}^\alpha + \chi^\alpha(q, p, \lambda, \Pi), \tag{5.15}$$

tzv. *kovarijantno baždarenje*. Uvrstimo li to u S vidimo da sustav nije više u ograničenoj formulaciji i da λ^α postaje dinamičan (u proširenom faznom prostoru razapetim s (q^A, p_A)) s konjugiranim impulsom Π_α,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \big(p_i\dot{q}^i + \Pi_\alpha\dot{\lambda}^\alpha - H_0 - \lambda^\alpha T_\alpha - \Pi_\alpha\chi^\alpha\big).$$

Radi se o sustavu s $(n+m)$ stupnjeva slobode

$$q^A = \begin{pmatrix} q^i \\ \lambda^\alpha \end{pmatrix}, \qquad p_A = \begin{pmatrix} p_i & \Pi_\alpha \end{pmatrix}, \qquad A = 1, ..., (n+m). \tag{5.16}$$

Da bismo ljepše zapisali akciju uvodimo oznake za ograničenja ($\Pi_\alpha = 0$ je ograničenje jer su ti impulsi sigurno nula na fizikalnom presjeku proširenog faznog prostora) i njihove multiplikatore.

$$G_a = \begin{pmatrix} T_\alpha & \Pi_\alpha \end{pmatrix}, \qquad \chi^a = -\begin{pmatrix} \lambda^\alpha \\ \chi^\alpha \end{pmatrix}, \qquad a = 1, ..., 2m. \tag{5.17}$$

Sada za akciju možemo pisati

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, (p_A\dot{q}^A - H_0 - G_a\chi^a) \tag{5.18}$$

Ovakav sustav mogli bismo kvantizirati postavljajući kanonske komutacijske relacije na q^A i p_A, ali ovaj sustav ima $(n+m)$ stupnjeva slobode, dok fizikalni sustav ima $(n-m)$ stupnjeva slobode, stoga ovaj sustav nije ekvivalentan početnom sustavu s ograničenjima. Kao što ćemo vidjeti ubrzo ideja je da uvedemo $2m$ dodatnih fermionskih (Grassmannovih) stupnjeva slobode (η^a, ρ_a) da bismo dobili efektivno oduzimanje stupnjeva slobode $(n+m)-2m=n-m$. Hamiltonijan proširenog sustava određen je uvjetom da je S-matrica unitarna i može se dati kao korolar Fradkin–Vilkoviskyjevom teoremu. Korolar ćemo izostaviti, dok ćemo formalni iskaz teorema dati u odlomku nakon sljedećeg. Dokaz se nalazi u dodatku C. Sada ćemo raspraviti o fermionskim varijablama da bismo mogli dati općeniti teorem.

5.2 *Grassmannove varijable*

Grassmannove (fermionske) varijable su jednostavno antikomutirajuće varijable. Antikomutirajući objekti $\eta_1, ..., \eta_N$ generiraju Grassmannovu algebru,

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i, \quad i,j = 1, ..., N.$$

Iz antikomutacije sa samim sobom slijedi da je $\eta_i^2 = 0$. Općeniti element algebre možemo definirati kao konačni red potencija u generatorima,

$$f(\eta) = f_0 + \sum_i f_i \eta_i + \ ... \ + f_{12...N} \eta_1 ... \eta_N.$$

Primijetimo da se svaki η_i u svakom članu može pojaviti najviše jednom. Kada deriviramo po ovakvim varijablama potrebno je uzeti u obzir orijentaciju operacije, odnosno potrebno je razlikovati između desne i lijeve derivacije. Imamo li lijevu derivaciju od f po η_i, moramo sve η_i u f prebaciti na lijevu stranu koristeći antikomutacijska pravila, i onda primijeniti pravila ispod. Postupak za desnu derivaciju je analogan.

$$\frac{\partial^{(l)}}{\partial \eta_i} \eta_i = \partial_i^l \eta_i \equiv \overrightarrow{\partial}_i \eta_i = 1$$

Analogno za desnu derivaciju imamo $\partial_i^r \eta_i \equiv \eta_i \overleftarrow{\partial}_i = 1$.

Naravno potrebno je definirati i integraciju preko fermionskih varijabli (Berezinova integracija), za što nam je nužno uvesti samo dva pravila,

$$\int d\eta_i = 0 \qquad \text{i} \qquad \int d\eta_i \ \eta_i = 1. \tag{5.19}$$

Iz njih možemo izvesti dvije korisne relacije koje ćemo kasnije upotrijebiti,

$$\int d\eta\; e^{k\eta} = k, \qquad \text{i} \qquad \int d\eta\; e^{k\eta}\eta = 1. \tag{5.20}$$

U općenitom slučaju bavit ćemo se sustavima s fermionskim i bozonskim varijablama pa je za objekt A korisno uvesti Grassmannovu signaturu n_A.

$$n(A) \equiv n_A = \begin{cases} 0, & \text{bozon A} \\ 1, & \text{fermion A} \end{cases} \tag{5.21}$$

Sada možemo definirati općenito komutacijsko pravilo za dva objekta A i B bilo koje statistike.

$$AB = (-)^{n_A n_B} BA \tag{5.22}$$

Definicija lijeve i desne derivacije može se primijeniti i na bozone, samo tada koristimo komutacijska pravila, umjesto antikomutacijskih. Prema tome možemo ih pisati u oba slučaja. Recimo sada da imamo set bozonskih i fermionskih kanonskih parova $q^A, p_A,\; A = 1, ..., N$. Tada je definicija općenitih Poissonovih zagrada između objekta P i Q na tom faznom prostoru

$$\{P, Q\} = \frac{\partial^r P}{\partial q^A}\frac{\partial^l Q}{\partial p_A} - (-1)^{n_P n_Q}\frac{\partial^r Q}{\partial q^A}\frac{\partial^l P}{\partial p_A}, \tag{5.23}$$

ili u notaciji sa strelicama

$$\{P, Q\} = P\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p Q - (-)^{n_P n_Q} Q\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p P.$$

Konjugirani impulsi imaju istu Grassmannovu signaturu kao i koordinata pa je $\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p$ sigurno bozon. Nikada nećemo imati nekakav objekt između tih derivacija pa zamjena mjesta s Poissonovim zagradama ne ovisi o signaturi kanonskih varijabli. Stoga, zbog jednostavnosti, u nekim računima ne pišemo indekse na kanonskim varijablama i privremeno zanemarujemo njihovu statistiku. Iz definicije Poissonovih zagrada (5.23) možemo dobiti Leibnizovo pravilo i Jacobijev identitet za objekte A, B, C s bilo kojom signaturom.

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + (-)^{n_B n_C}\{A, C\}B \tag{5.24}$$

$$(-)^{n_A n_C}\{\{A,B\},C\} + (-)^{n_A n_B}\{\{B,C\},A\} + (-)^{n_B n_C}\{\{C,A\},B\} = 0 \tag{5.25}$$

5.3 Iskaz teorema

Radimo na prostoru s $(n+m)$ bozonskih i fermionskih kanonskih parova: (q^A, p_A). Na ovom faznom prostoru razmatramo dinamički sustav opisan s kanonskim hamiltonijanom $H_0(q^A, p_A)$ i $2m$ bozonskih i fermionskih funkcija ograničenja $G_a(q^A, p_A)$, koje zadovoljavaju sljedeće relacije (tzv. relacije involucije):

$$\{G_a, G_b\} = G_c U^c_{ab}, \quad \{H_0, G_a\} = G_b V^b_a. \tag{5.26}$$

Strukturne funkcije U^c_{ab} i V^b_a mogu ovisiti o kanonskim varijablama, a u slučaju opće relativnosti i hoće. Pretpostavlja se da je skup ograničenja minimalan, odnosno da su jednadžbe $G_a = 0$ nezavisne. Za svako od $2m$ ograničenja u sustav uvodimo dodatan stupanj slobode: (η^a, ρ_a) sa statistikom (signaturom) *suprotnom* od odgovarajućeg ograničenja G_a. Od sada pa nadalje n_a se uvijek odnosi na signaturu ograničenja G_a, tako da je signatura $n(\eta^a) = 1 + n_a$. Poissonove zagrade prirodno proširimo na novi fazni prostor. U većini računa članovi s derivacijama po duhovima će biti nula pa ih obično ni ne pišemo.

Teorem: Neka je $\psi(q^A, p_A, \eta^a, \rho_a)$ proizvoljna fermionska funkcija. Sljedeći funkcionalni integral je neovisan o izboru ψ.

$$Z_\psi = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\rho \exp\left[i \int dt(p_A \dot{q}^A + \rho_a \dot{\eta}^a - H_\psi)\right], \tag{5.27}$$

s ukupnim hamiltonijanom,

$$H_\psi = H_0 + \rho_a V^a_b \eta^b - \{\psi, \Omega\}. \tag{5.28}$$

Objekt Ω nazivamo BRST (Becchi–Rouet–Stora–Tyutin) nabojem,

$$\Omega = G_a \eta^a + \frac{1}{2}(-1)^{n_a} \rho_c U^c_{ab} \eta^b \eta^a, \tag{5.29}$$

gdje n_a sudjeluje u sumi.

Imaju li λ^α u q^A spin, tada će i polja duhova naslijediti taj spin. Dok λ^α imaju uobičajenu vezu između spina i statistike, duhovi će je u potpunosti kršiti zbog zahtjeva suprotne statistike u odnosu na ograničenja. Duhovi cjelobrojnog spina su antikomutirajući, a oni polu-cjelobrojnog su komutirajući. Ovo je jedan od razloga zašto se polja duhova smatra nefizikalnima.

Polja duhova ima $2m$ i možemo im pripisati *kvantni broj duha* (eng. ghost number). Neka je za neki a-ti indeks, $\eta_a = c$, te neka je njegov konjugirani impuls $\rho^a = \bar{\rho}$. Akcija će imati broj duha nula, pa iz $\bar{\rho} = \overrightarrow{\partial}_{\dot{c}}\mathcal{L}$ vidimo da je broj duha impulsa suprotan broju duha svoje koordinate $gh(\bar{\rho}) = -gh(c)$ te ga zato nazivamo $\bar{\rho}$. Uvodimo 2 Grassmanova polja po ograničenju imamo m polja c^α s pozitivnim brojem duha i m polja $\bar{c}^\alpha$ s negativnim (anti-duhovi). Njihovi impulsi su $\bar{\rho}_\alpha$ za duhove i ρ_α za anti-duhove. Za akciju taj broj iščezava pa se komponente zapisuju kao

$$\eta^a = \begin{pmatrix} c^\alpha \\ \rho_\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \rho_a = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_\alpha & \bar{c}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Proizvoljna fermionska funkcija obično se koristi u obliku $\psi = \rho_a \chi^a$, gdje je χ^a isti onome u (5.17). Pogledajmo opet akciju (5.18). Član $G_a \chi^a$ pojavljuje se i u akciji danoj u teoremu, samo što je zapakiran u $\{\psi, \Omega\}$. Da bi akcija ostala bozon vidimo da je signatura multiplikatora nužno ista kao i signatura ograničenja, $n(\chi^a) = n(G_a) = n_a$. Signatura duhova je prema definiciji suprotna u odnosu na asocirano ograničenje, $n(\rho_a) = 1 + n_a$, pa slijedi da je $n(\psi) = n_a + 1 + n_a = 1$[13] što znači da se zaista uvijek radi o fermionskom ψ.

6 Integral po putevima za metriku minisuperprostora

Većina suvremenih i prošlih računa ovog tipa vrše se u modelu minisuperprostora, koji je vrlo jednostavan, ali je dovoljno dobra aproksimacija svemira u vrlo ranoj fazi. Također, i za nas trenutno najvažnije, dovoljan je za demostraciju ideje iza pristupa s integralima po putevima. Pretpostavimo da su sve hiperplohe maksimalno

[13]Ova jednakost je možda zbunjujuća, ali signatura uvijek potencira (-1) pa $2n_a$ ne doprinosi.

simetrične, odnosno da se razlikuju jedino u veličini (faktoru skale), te da evoluiraju samo okomito na same sebe. Tada metriku možemo zapisati u obliku,

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 d\Omega_3^2, \tag{6.1}$$

gdje je $d\Omega_3^2$ metrika maksimalno simetričnog trodimenzionalnog prostora. Nema miješanja između vremenskih i prostornih koordinata pa je vektor pomaka N^a jednak nuli i ograničenja (4.18) su time zadovoljena. Prema tome ovakvo prostorvrijeme možemo zamišljati kao homogenu i izotropnu trodimenzionalnu hiperplohu koja dinamički evoluira okomito na samu sebe. Jedina preostala (fizikalna) dinamička varijabla je faktor skale $a(t)$, kojeg ćemo zamijeniti s $q(t) = a^2(t)$, tako da dobijemo hamiltonijan kvadratičan u impulsu.

6.1 *Akcija za minisuperprostor*

Počinjemo od (4.15) te računamo vanjsku i intrinzičnu zakrivljenost trodimenzionalnih hiperploha. Za vanjsku zakrivljenost imamo formulu

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - 2D_{(a}N_{b)}) = \frac{\dot{a}}{Na}h_{ab}.$$

S ovim jedini preostali problematični član u akciji je onaj s Riccijevim skalarom $\mathring{R}$. Maksimalno simetrična prostorvremena ne daju prednost nijednom smjeru, odnosno geometrija izgleda identično u svim smjerovima, pa očekujemo da će i tenzor zakrivljenosti biti izotropan. Drugim riječima, ako uvedemo lokalni inercijalni koordinatni sustav u nekoj točki, komponente tenzora zakrivljenosti ostaju nepromijenjene pod Lorentzovim transformacijama u toj točki. Takvi tenzori već postoje, oni su ujedno i jedinstveni, pa je $\mathring{R}_{\mu\rho\nu\sigma}$ nužno proporcionalan nekom od njih. Kada bismo pokušali i ispuniti sve simetrije Riemannovog tenzora dobili bismo

$$\mathring{R}_{\mu\rho\nu\sigma} = \kappa(h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} - h_{\mu\sigma}h_{\nu\rho}) \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{\mathring{R}}{6},$$

gdje je κ neka konstanta. Maksimalno simetričnu trodimenzionalnu metriku možemo zapisati kao

$$d\Omega_3^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa' r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

gdje je κ' parametar zakrivljenosti. Direktnim računom neke komponente tenzora zakrivljenosti (recimo $R^r{}_{\theta r\theta}$), može se pokazati da je $\kappa' = \kappa$. Za $\kappa = 0$ radi se o ravnom Euklidskom prostoru, ali za $\kappa \neq 0$ uvijek možemo reskalirati koordinatu r, što efektivno mijenja veličinu prostora. Recimo da $\kappa = sgn(\kappa)|\kappa| \equiv k|\kappa|$, onda slijedi

$$\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} = \frac{1}{|\kappa|}\frac{dr'^2}{1-kr'^2}.$$

U našem slučaju imamo $a(t)^2 d\Omega_3^2$, pa radimo asocijaciju $\frac{1}{|\kappa|} = a(t)^2$ i od sada pa nadalje parametar zakrivljenosti značajan je samo u svom predznaku $k \in \{-1, 0, 1\}$. Onda za Riccijev skalar slijedi

$$\mathring{R} = 6\kappa = 6sgn(\kappa)|\kappa| \rightarrow \mathring{R} = \frac{6k}{a(t)^2}. \tag{6.2}$$

S tim imamo sve potrebno da preobrazimo lagranžijan.

$$\mathcal{L} = N\sqrt{a^6}\Big(\frac{6k}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2} - \frac{9\dot{a}^2}{N^2a^2}\Big)$$

$$\mathcal{L} = 6Nka - \frac{6a\dot{a}^2}{N} \tag{6.3}$$

Ubacimo li još i aditivnu kozmološku konstantu Λ dobivamo akciju minisuperprostora.

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\ [\mathcal{L} - 2\Lambda N\sqrt{h}] \tag{6.4}$$

Primijetimo da su svi objekti pod integralom funkcije u t, stoga možemo obaviti integraciju po prostornim varijablama. Nas će zanimati slučaj pozitivne zakrivljenosti, $k = 1$, stoga integracija po prostoru rezultira s volumenom trodimenzionalne sfere radijusa 1, što je jednako $2\pi^2$. Akcija tada postaje

$$S = 2\pi^2\int dt\ \Big(-\frac{3a\dot{a}^2}{N} + 3Nka - \Lambda Na^3\Big). \tag{6.5}$$

U računima ćemo koristiti nešto drugačiju i prikladniju, ali u potpunosti ekvivalentnu formu lagranžijana, koju dobijemo pomoću zamjene $a^2 \rightarrow q$, $N^2 \rightarrow N^2/q$. Ovo odgovara nešto drugačijem, ali ekvivalentnom ansatzu za metriku. Ovim ćemo dobiti hamiltonijan kvadratičan u impulsu, poželjno svojstvo da bi analogijom s (2.11) definirali mjeru funkcionalnog integrala. Metrika je sada

$$ds^2 = -\frac{N(t)^2}{q(t)}dt^2 + q(t)d\Omega_3^2. \tag{6.6}$$

Akcija će sada postati kvadratična u $\dot{q}(t)$,

$$S = 2\pi^2 \int dt \,\big(-\frac{3\dot{q}^2}{4N} + 3Nk - \Lambda N q\big). \tag{6.7}$$

Nakon pronalaženja impulsa variranjem po $\dot{q}$, vršimo odgovarajuću Legendreovu transformaciju da bismo dobili hamiltonijan $\int d^3x\mathcal{H} \equiv NH$,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{-3\pi^2\dot{q}}{N} \quad \rightarrow \quad H = -\frac{p^2}{6\pi^2} - 6\pi^2 k + 2\pi^2\Lambda q.$$

Vidimo da impuls nije dobro definiran u $N = 0$, pa nemamo invertibilnu relaciju među brzinom i impulsom, što znači da prijelaz iz lagranžijanske formulacije u hamiltonijansku nije dopušten u $N = 0$. Kada budemo određivali funkcionalni integral vidjet ćemo još jedan razlog zašto $N = 0$ isključujemo iz razmatranja. U sljedećem potpoglavlju na sustav s akcijom,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \,[p\dot{q} - N(t)H], \tag{6.8}$$

primijenit ćemo Fradkin-Vilkoviskyjev teorem. $N(t)$ je sada Lagrangeov multiplikator koji nas navodi na ograničenje $H = 0$. Ova akcija odgovara onoj u (5.9) uz $H_0 = 0$, te $T_\alpha = H$ i $\lambda^\alpha = N$. Integral ide između dvije krajnje točke t_0, t_1 na kojima zadajemo rubne uvjete za faktor skale $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$, dok p i $N(t)$ ostavljamo slobodnima. Uvest ćemo kovarijantno baždarenje s multiplikatorom Π koji dolazi s rubnim uvjetima $\Pi(t_0) = \Pi(t_1) = 0$. Zbog ovakvih rubnih uvjeta u funkcionalnoj integraciji ćemo q, Π tretirati kao koordinate, a p, N kao impulse.

6.2 *Primjena metoda*

Fradkin-Vilkoviskyjev teorem daje nam izraz za funkcionalni integral u proizvoljnom izboru baždarenja. Trebamo ga samo primijeniti na naš slučaj minisuperprostora. Već smo zaključili da vektor pomaka N^μ, nije dinamičan, stoga igra ulogu multiplikatora

λ^α. Biramo kovarijantno fiksiranje baždarenja,

$$\phi^\alpha = -\dot{N}^\alpha + \chi^\alpha(q, p, N^\mu, \Pi_\mu). \tag{6.9}$$

Hamiltonijan smo rastavili na 4 ograničenja $\mathcal{H}_\mu$ koja odgovaraju T_α, iz čega zaključujemo da kanonski hamiltonijan H_0 iščezava. Ukupni hamiltonijan je onda $H_\psi = -\{\psi, \Omega\}$. Izborom ansatza za metriku postavili smo $N^i = 0$, čime su ograničenja $\mathcal{H}_i$ i njihove komutacijske relacije automatski zadovoljene, pa algebra ograničenja postaje trivijalna, $\{\mathcal{H}_0(x), \mathcal{H}_0(x')\} = 0$. Dakle, svi strukturni koeficijenti V_a^b i U_{ab}^c iščezavaju. Za ansatz minisuperprostora onda koristimo

$$q^A = \begin{pmatrix} q \\ N \end{pmatrix}, \qquad p_A = \begin{pmatrix} p & \Pi \end{pmatrix}, \qquad \chi^a = -\begin{pmatrix} N \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad G_a = \begin{pmatrix} H & \Pi \end{pmatrix}.$$

Imamo dva G_a ograničenja pa nam trebaju 2 dodatna (Grassmannova) stupnja slobode. Neka su to $(c, \bar{\rho})$ i $(\bar{c}, \rho)$. Ove varijable zadovoljavaju kanonske (anti)komutacijske relacije s općenitim bose-fermi Poissonovim zagradama iz (5.23), gdje su varijable izvrijednjene za istu vrijednost parametra vremena t,

$$\{q, p\} = \{N, \Pi\} = \{\bar{c}, \rho\} = \{\bar{\rho}, c\} = 1. \tag{6.10}$$

Sve ostale zagrade su naravno jednake nuli. Kao što smo rekli neka je funkcija ψ jednaka $\rho_a \chi^a$. Trebamo izračunati kako izgleda ukupni hamiltonijan H_ψ pomoću

$$\Omega = cH + \rho\Pi \qquad \psi = -\bar{c}\chi - \bar{\rho}N.$$

Slijedi rezultat,

$$H_\psi = -\{\psi, \Omega\} = \{\bar{c}\chi + \bar{\rho}N, cH + \rho\Pi\} = \bar{c}\{\chi, H\}c + \bar{c}\{\chi, \Pi\}\rho + \chi\Pi + NH + \bar{\rho}\rho.$$

Možemo izabrati $\chi = 0$ tako da nam se duhovi razvežu od ostalih varijabli, pa prva tri člana iščezavaju. Slijedi izraz za funkcionalni integral minisuperprostora.

$$Z = \int \mathcal{D}\mu \exp[i \int_{t_0}^{t_1} dt(p\dot{q} + \Pi\dot{N} + \bar{c}\dot{\rho} + \bar{\rho}\dot{c} - \bar{\rho}\rho - NH)] \tag{6.11}$$

Akcija je kvadratična u $\dot{q}$, pa prema (2.11) u mjeri preostaje $\mathcal{D}q$. Za ukupnu funkcionalnu mjeru uzimamo $\mathcal{D}\mu = \mathcal{N}\mathcal{D}q\mathcal{D}N\mathcal{D}\Pi\mathcal{D}\rho\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{\rho}$. Konstanta $\mathcal{N}$ analogna je onoj u poglavlju 2. Prije nego počnemo računati potrebni su nam rubni uvjeti. Već znamo dio uvjeta, a to su

$$q(t_0) = q_0,\ q(t_1) = q_1 \qquad i \qquad \Pi(t_0) = \Pi(t_1) = 0. \tag{6.12}$$

Preostaju rubni uvjeti na duhove, koje ćemo dobiti iz invarijantnosti akcije na transformacije koje generira Ω. Slično kao i kod (5.13), dovoljno je fiksirati varijaciju koordinata na rubovima,

$$\big(p_A\{q^A, \Omega\} + \rho_a\{\eta^a, \Omega\}\big)\Big|_{t_0,t_1} = 0.$$

Budući da p_A sadrži Π, od prvog člana preostaje $p\{q, \Omega\} = pc\frac{\partial H}{\partial p}$, koji iščezava ako postavimo $c(t_0) = c(t_1) = 0$. Tada u drugom članu preostaje $\bar{c}\{\rho, \Omega\}$. Stoga su rubni uvjeti za duhove

$$c(t_0) = c(t_1) = \bar{c}(t_0) = \bar{c}(t_1) = 0. \tag{6.13}$$

Razvezivanjem duhova omogućili smo neovisnu funkcionalnu integraciju po duhovima. Koristimo izvedena pravila za Berezinovu integraciju (5.20). Zbog rubnih uvjeta varijable $q, \Pi, c, \bar{c}$ tijekom funkcionalne integracije tretiramo kao koordinate, a $\rho, \bar{\rho}, p, N$ kao impulse. Dio integrala s duhovima glasi:

$$Z_{gh} = \int \mathcal{D}\rho\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{\rho}\exp[i\int_{t_0}^{t_1} dt(\bar{c}\dot{\rho} + \bar{\rho}\dot{c} - \bar{\rho}\rho)] = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\,\mathcal{I}_\rho.$$

Rubni uvjeti također omogućuju pretvaranje prvog člana u $\rho\dot{\bar{c}}$. Parametar t diskretiziramo u $(n+1)$ intervala jednake duljine $\epsilon = (t_1 - t_0)/(n+1)$. Prvo računamo integrale po impulsima $\mathcal{I}_{\rho_j}$,

$$\mathcal{I}_\rho = \int d\rho_{\frac{1}{2}}...d\bar{\rho}_{n+\frac{1}{2}} \exp i \sum_0^n [\rho_{j+\frac{1}{2}}(\bar{c}_{j+1} - \bar{c}_j) + \bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}(c_{j+1} - c_j) - \epsilon\bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}\rho_{j+\frac{1}{2}}] = \prod_0^n \mathcal{I}_{\rho_j}.$$

Iz rubnih uvjeta (6.13) slijedi $c_{n+1} = \bar{c}_{n+1} = c_0 = \bar{c}_0 = 0$. Koristeći (5.20) integriramo prvi par ($j = 0$) i izostavljamo indekse na impulsima,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\rho_0} &= \int d\rho d\bar{\rho}\ \exp(i[\rho(\bar{c}_1 - \bar{c}_0) + \bar{\rho}(c_1 - c_0) - \epsilon\bar{\rho}\rho]) = \int d\rho\ e^{i\rho(\bar{c}_1 - \bar{c}_0)} \int d\bar{\rho}\ e^{i\bar{\rho}(c_1 - c_0 - \epsilon\rho)} \\ &= \int d\rho\ e^{i\rho(\bar{c}_1 - \bar{c}_0)} i(c_1 - c_0) - i\epsilon \int d\rho\ e^{i\rho(\bar{c}_1 - \bar{c}_0)}\rho = -(\bar{c}_1 - \bar{c}_0)(c_1 - c_0) - i\epsilon.\end{aligned}$$

Zbog oblika gornjeg rješenja, svaki sljedeći par će imati analogan rezultat pa možemo zaključiti rezultat cijele funkcionalne integracije po impulsima duhova. Preostaje nam integracija po koordinatama,

$$Z_{gh} = \int d\bar{c}_1 ... dc_n \prod_0^n [-(\bar{c}_{j+1} - \bar{c}_j)(c_{j+1} - c_j) - i\epsilon] \equiv \mathcal{I}_n.$$

Vrijedi $\mathcal{I}_j = \int d\bar{c}_j dc_j\ \mathcal{I}_{j-1}[-(\bar{c}_{j+1} - \bar{c}_j)(c_{j+1} - c_j) - i\epsilon]$, gdje je $\mathcal{I}_0 = [-\bar{c}_1 c_1 - i\epsilon]$. Opet počinjemo s integracijom po prvom paru, za što su nam potrebna prva dva člana u umnošku,

$$\mathcal{I}_{c_1} = \int d\bar{c}_1 dc_1\ [-(\bar{c}_1 - \bar{c}_0)(c_1 - c_0) - i\epsilon][-(\bar{c}_2 - \bar{c}_1)(c_2 - c_1) - i\epsilon].$$

Iskoristimo li rubne uvjete preostaje

$$\mathcal{I}_{c_1} = \int d\bar{c}_1 dc_1 [\bar{c}_1 c_1 + i\epsilon][\bar{c}_2 c_2 - \bar{c}_2 c_1 - \bar{c}_1 c_2 + \bar{c}_1 c_1 + i\epsilon].$$

Svaki član koji nema i c_1 i $\bar{c}_1$ će dati nulu nakon integracije, pa izostavljamo takve članove. Također izostavljamo član kvadratičan u ϵ. Trebamo paziti na redoslijed integracije, c_1 i $\bar{c}_1$ antikomutiraju pa dobivamo jedan faktor -1.

$$\mathcal{I}_{c_1} = -\int d\bar{c}_1 dc_1 [c_1 \bar{c}_1 \bar{c}_2 c_2 + 2i\epsilon c_1 \bar{c}_1] = -(\bar{c}_2 c_2 + 2i\epsilon)$$

Iz rezultata odmah zaključujemo da će ostali biti analogni, pa vidimo kako će izgledati integracija po zadnjem paru.

$$\mathcal{I}_n = \int d\bar{c}_n dc_n [\bar{c}_n c_n + ni\epsilon][(\bar{c}_{n+1} - \bar{c}_n)(c_{n+1} - c_n) + i\epsilon]$$

Ponovnom primjenom rubnih uvjeta dobivamo konačni rezultat za integraciju po potprostoru duhova.

$$Z_{gh} = \int d\bar{c}_n dc_n [\bar{c}_n c_n + ni\epsilon][\bar{c}_n c_n + i\epsilon] = -i(n+1)\epsilon = -i(t_1 - t_0)$$

Okrenimo se značajno jednostavnijoj integraciji po funkciji toka $N(t)$ i njenom impulsu Π.

$$\int dN_0 ... \frac{d\Pi_n}{2\pi} \exp[i \sum_1^n \Pi_j (N_j - N_{j-1})] = \int dN_0 ... dN_n \prod_1^n \delta(N_j - N_{j-1}) = \int dN$$

U drugoj jednakosti imamo $(n+1)$ integraciju, a samo n delta funkcija pa preostaje jedna integracija, recimo po $N \equiv N_0$. Primijetite da zadržavamo naziv N, ali ovo više nije funkcija već je samo kompleksni broj[14], dok je integracija u zadnjoj jednakosti samo obični Riemannov integral. Funkcionalni integral sada glasi

$$Z = -i \int_{0^+}^{\infty} dN(t_1 - t_0) \int \mathcal{N}\mathcal{D}q \ \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt(p\dot{q} - NH)]. \tag{6.14}$$

Za domenu integracije po N uzeli smo pozitivnu realnu os bez ishodišta. Naime N je faktor proporcionalnosti između fizikalnog vremena i parametriziranog vremena. Prema tome intuitivno je zahtijevati da N poprima realne vrijednosti. To predstavlja fundamentalno realno vrijeme i odgovara realnim metrikama. Rekli smo da parametar t mora biti dobar, odnosno da svaka njegova vrijednost određuje jednu jedinstvenu hiperplohu. Tada N ne može biti nula, što odgovara činjenici da tok vremena nikada ne staje. Funkcija toka po definiciji je kontinuirana, stoga i $N(t)$, pa tako i N mogu biti ili samo pozitivni ili samo negativni. U klasičnoj teoriji, N i $-N$ predstavljaju isto prostorvrijeme, stoga smo motivirani pretpostaviti da je za fizikalno rješenje dovoljno integrirati samo po jednoj od ovih domena. Kao i u mnogim drugim radovima ovdje biramo $N > 0$. U tom slučaju dobivamo kauzalan poredak između q_0 i q_1 [16] [17]. Preostali jednodimenzionalni Riemannov integral $\int dN$ sumira po svim vlastitim vremenskim udaljenostima (eng. proper-time) između $q(t_0)$ i $q(t_1)$, pa su granice integrala $\int dt$ proizvoljne, što je konzistentno s time da je t i bio samo naš

[14]U principu je realni broj, jer to predstavlja fundamentalno realno vrijeme. Produljujemo ga na kompleksnu ravninu, da bi pronašli integracijsku konturu s konvergentnim rezultatom.

izbor parametrizacije. Neka su granice onda $t_0 = 0$ i $t_1 = 1$.

$$Z = -i\int_{0^+}^{\infty} dN \int \mathcal{N}\mathcal{D}q \ \exp[\frac{2\pi^2 i}{\hbar}\int_0^1 dt\Big(-\frac{3\dot{q}^2}{4N} + 3Nk - N\Lambda q\Big)]. \tag{6.15}$$

Ova akcija daje jednu jednadžbu gibanja i jedno ograničenje,

$$\ddot{q} = \frac{2\Lambda}{3}N^2, \qquad \frac{3}{4N^2}\dot{q}^2 + 3k - \Lambda q = 0. \tag{6.16}$$

Općenito rješenje koje zadovoljava uvjete $q(0) = q_0$ i $q(1) = q_1$, ali ne i ograničenje, nazivamo $\bar{q}(t)$.

$$\bar{q}(t) = q_0 + \Big(-\frac{\Lambda N^2}{3} + q_1 - q_0\Big)t + \frac{\Lambda N^2}{3}t^2 \tag{6.17}$$

Neka je $q(t) = \bar{q}(t) + Q(t)$ rješenje koje zadovoljava ograničenje, tada mjera funkcionalnog integrala postaje $\mathcal{D}q = \mathcal{D}Q$. Rješenje $\bar{q}(t)$ zadovoljava rubne uvjete, pa slijedi $Q(0) = Q(1) = 0$. Akcija sada postaje,

$$S = -\frac{3\dot{\bar{q}}^2}{4N} - \frac{3}{4N}2\dot{\bar{q}}\dot{Q} - \frac{3\dot{Q}^2}{4N} + 3Nk - N\Lambda\bar{q} - N\Lambda Q.$$

Na umnožak brzina možemo primijeniti Leibnizovo pravilo $\dot{\bar{q}}\dot{Q} = \frac{d}{dt}(\dot{\bar{q}}Q) - \ddot{\bar{q}}Q$. Nakon integracije po t, prvi član iščezava zbog rubnih uvjeta na Q. U drugi član možemo uvrstiti jednadžbu gibanja za $\bar{q}$ i time otkriti da se krati sa zadnjim članom u akciji S. Funkcionalni integral je sada jednak,

$$Z = -i\int_{0^+}^{\infty} dN \int \mathcal{D}Q \ \exp\Big[\frac{2\pi^2 i}{\hbar}\int_0^1 dt\Big(-\frac{3\dot{\bar{q}}^2}{4N} + 3Nk - N\Lambda\bar{q} - \frac{3}{4N}\dot{Q}^2\Big)\Big]. \tag{6.18}$$

Možemo izdvojiti integraciju po Q i iskoristiti rezultat (2.12) kojeg imamo u dodatku A, uz $q(t') = q(t) = 0$ i $\frac{m}{2} \to \frac{-3\pi^2}{2N}$.

$$\mathcal{N}\int \mathcal{D}Q \ \exp[\frac{2\pi^2 i}{\hbar}\int_0^1 dt\ \Big(-\frac{3}{4N}\dot{Q}^2\Big)] = \sqrt{\frac{3\pi i}{2N\hbar}}$$

Preostalu akciju S možemo izraziti eksplicitno pomoću (6.17), pa funkcionalni integral postaje

$$Z = -i\sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}}\int_{0^+}^{\infty}\frac{dN}{\sqrt{N}}\exp\Big(\frac{2\pi^2 i}{\hbar}S\Big), \tag{6.19}$$

gdje je akcija

$$S = \frac{\Lambda^2 N^3}{36} + N\Big(-\frac{\Lambda}{2}(q_1 + q_0) + 3k\Big) - \frac{3}{4N}(q_1 - q_0)^2. \tag{6.20}$$

Integral (6.19) je oscilatoran i na njega možemo primjeniti Picard–Lefschetzovu metodu. Akcija S ima 4 sedlene točke u kompleksnoj ravnini, označavamo ih s N_σ. Cilj je originalnu konturu pretvoriti u $\mathcal{C}$, onu koja je suma po Lefschetzovim naprscima (eng. Lefschetz thimbles),

$$\langle 0, \infty \rangle \to \mathcal{C} = \sum n_\sigma \mathcal{J}_\sigma,$$

kao što je objašnjeno u dodatku D. Sedlene točke i njihovi pridruženi tokovi reći će nam koji naprsci su bitni. Tada gornja suma ide samo po tim naprscima. Nakon što smo ustanovili kauzalnu domenu za N, primijetite da zapravo nemamo slobodu izbora integracijske krivulje $\mathcal{C}$, niti relevantnih sedlenih točaka, Picard–Lefschetzov formalizam govori nam što da radimo i upravo tu leži njegova prednost nad Wickovom rotacijom i ostalim slabo motiviranim izborima integracijske krivulje. Sada funkcionalni integral za propagator glasi

$$Z = -i\sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \sum_\sigma n_\sigma \int_{\mathcal{J}_\sigma} \frac{dN}{\sqrt{N}} \exp\Big(\frac{2\pi^2 i}{\hbar} S\Big). \tag{6.21}$$

Neka je S_σ akcija izvrijednjena u sedlenoj točki N_σ i neka je $S_{\sigma,NN} = \frac{\partial^2 S}{\partial N^2}\big|_\sigma$ njena druga derivacija u N_σ. Integral možemo aproksimirati metodom sedlene točke u limesu $\hbar \to 0$, stoga vrijedi $S \approx S_\sigma + \frac{1}{2} S_{\sigma,NN}(N - N_\sigma)^2$.

$$Z \approx -i\sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \sum_\sigma n_\sigma \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} e^{\frac{2\pi^2 i}{\hbar} S_\sigma} \int_{\mathcal{J}_\sigma} dN \exp\Big(\frac{\pi^2 i}{\hbar} S_{\sigma,NN}(N - N_\sigma)^2\Big)$$

Označimo li $N - N_\sigma = n e^{i\theta_\sigma}$, gdje je n realan, imamo

$$Z \approx -i\sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \sum_\sigma n_\sigma \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} e^{\frac{2\pi^2 i}{\hbar} S_\sigma} e^{i\theta_\sigma} \int dn \exp\Big(\frac{\pi^2 i}{\hbar} |S_{\sigma,NN}| n^2 e^{\arg(S_{\sigma,NN}) + 2\theta_\sigma}\Big),$$

gdje je θ_σ kut koji Lefschetzov naprstak $\mathcal{J}_\sigma$ čini s pozitivnom realnom osi. Sedlene točke N_σ, kutovi θ_σ i koeficijenti n_σ određeni su uvjetima q_0, q_1 i zakrivljenošću k.

Četiri sedlene točke N_σ možemo pronaći iz bikvadratne jednadžbe $\partial_N S = 0$.

$$N_\sigma = \pm\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\Big(\sqrt{q_0 - \frac{3k}{\Lambda}} \pm \sqrt{q_1 - \frac{3k}{\Lambda}}\Big) \tag{6.22}$$

Kutove θ_σ pronalazimo na sljedeći način. N se šeće po krivuljama $(\mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_\sigma)$ po kojima je realni dio akcije konstantan. U sedlenoj točki prva derivacija iščezava pa je promjena akcije proporcionalna drugoj derivaciji $S_{,NN}(N_\sigma) \equiv S_{\sigma,NN}$. Zahtjevajući da realni dio iščezava dobivamo uvjet koji određuje kutove θ_σ.

$$S - S_\sigma \approx \frac{S_{\sigma,NN}}{2} n^2 e^{2i\theta_\sigma} \quad \to \quad \cos\big(\arg(S_{\sigma,NN}) + 2\theta_\sigma\big) = 0 \tag{6.23}$$

Da bismo prepoznali koji kut odgovara $\mathcal{J}_\sigma$, a koji $\mathcal{K}_\sigma$, možemo provjeriti što je s imaginarnim dijelom za te kutove. U slučaju da je $\sin\big(\arg(S_{\sigma,NN}) + 2\theta_\sigma\big) = 1$, tada kut pripada $\mathcal{J}_\sigma$. Integral po n ide po realnim brojevima bliskim nuli, da bi se zadržali oko sedlene točke, ali zbog brzog propadanja integranda u poluklasičnoj aproksimaciji $\hbar \to 0$, integraciju po n možemo proširiti na cijelu realnu domenu. S tim imamo

$$Z \approx -i\sqrt{\frac{3\pi i}{2\hbar}} \sum_\sigma n_\sigma \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} e^{\frac{2\pi^2 i}{\hbar} S_\sigma} e^{i\theta_\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp\Big(- \frac{\pi^2}{\hbar} |S_{\sigma,NN}| n^2 \Big).$$

Obavljanjem integracije po n dobivamo

$$Z \approx -i \sum_\sigma n_\sigma \sqrt{\frac{3i}{2N_\sigma |S_{\sigma,NN}|}} e^{\frac{2\pi^2 i}{\hbar} S_\sigma} e^{i\theta_\sigma} [1 + \mathcal{O}(\hbar^2)]. \tag{6.24}$$

Ograničimo li se na sferične ekspandirajuće Svemire ($k = 1$, $\Lambda > 0$) imamo sljedeće slučajeve:

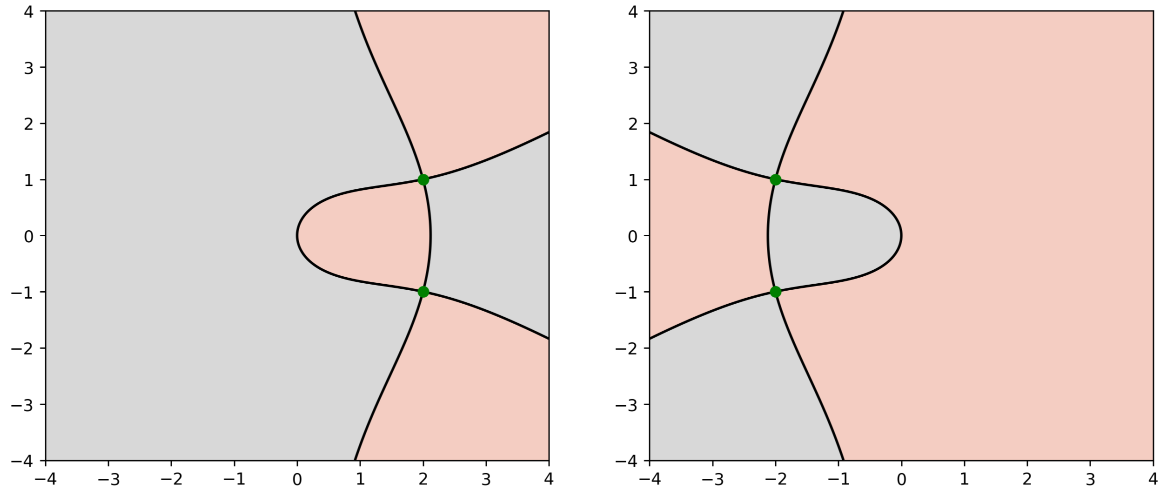
- $q_1 \geq q_0 > \frac{3}{\Lambda}$, sve sedlene točke su realne. Opisuje potpuno klasični svemir.
- $q_1 > \frac{3}{\Lambda} > q_0$, jedan od korijena postaje imaginaran, sedlene točke postaju kompleksne. Među ovim slučajevima nalazi se i "no-boundary" prijedlog.
- $q_1 \geq q_0 = \frac{3}{\Lambda}$, limitirajući slučaj između kvantnog i klasičnog.
- $\frac{3}{\Lambda} > q_1 \geq q_0$, oba korijena su imaginarna pa su sedlene točke čisto imaginarne. Opisuje potpuno kvantni svemir.

6.3 "No-boundary" prijedlog

Razmotrimo "no-boundary" slučaj kojeg su Hartle i Hawking predložili kao realno rješenje Wheeler–de Wittove jednadžbe i nazvali ga "valnom funkcijom svemira". Jedini rubni uvjet je konačni prostorni rub $q(t_1) = q_1$, dok početni rubni uvjet iščezava $q(t_0) = q_0 = 0$. Umjesto "oštrog" singulariteta, ovakvi početni uvjeti opisuju gladak početak svemira. Ovo je moguće samo za pozitivne parametre zakrivljenosti $k = 1$. Neka je $\Lambda = 3$ i $q_1 = 5$ te zapišimo akciju (6.20) eksplicitno,

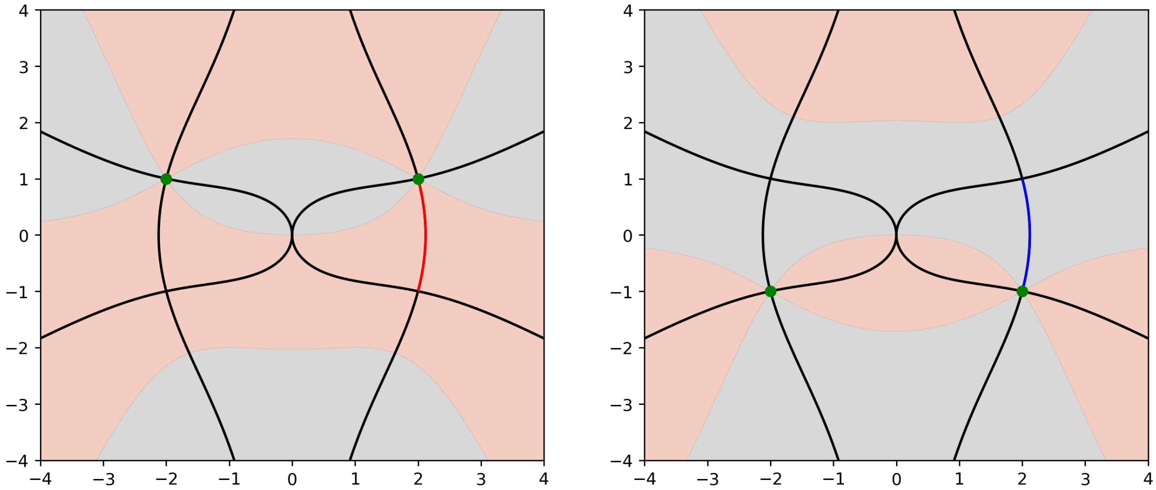
$$S = \frac{N^3}{4} - \frac{9N}{2} - \frac{75}{4N}. \tag{6.25}$$

Pomoću (6.22) računamo sedlene točke $N_\sigma = \pm 2 \pm i$. Akcija (6.25) je realna i neparna u N, prema tome, ako proširimo akciju na kompleksnu ravninu N vrijedi $[S(N)]^* = S(N^*)$, iz čega slijedi da $\Re[S(N^*)] = \Re[S(N)]$, te $\Im[S(-N^*)] = \Im[S(N)]$. Ove relacije objašnjavaju simetrije grafova ispod. Na njima su prikazane vrijednosti realnog i imaginarnog dijela akcije S na kompleksnoj domeni u odnosu na njihovu vrijednost u određenim sedlenim točkama. Sedlene točke označene su zelenim točkama i nazivamo ih $N_{1,2,3,4}$ prema broju kvadranta u kojem se nalaze, npr. $N_1 = 2 + i$. Prema raspravi iz dodatka D zaključujemo da su linije na grafovima



Slika 6.1: Na grafu se nalaze relevantne sedlene točke i realni dijelovi funckija, $\Re[S(N) - S(N_1)]$ (lijevo) i $\Re[S(N) - S(N_2)]$ (desno). Na crveno obojanim dijelovima domene funkcije poprimaju pozitivne vrijednosti, dok na sivo obojanim negativne vrijednosti. Crne linije označavaju (ekvipotencijalne) krivulje po kojima je vrijednost 0, odnosno vrijednost realnog dijela akcije $S(N)$ je ista kao i u sedlenoj točci iz kojih izlaze krivulje. Zbog spomenutih simetrija akcije ne trebamo crtati grafove za N_3 i N_4.

zapravo silazni i uzlazni tokovi $(\mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_\sigma)$. Po tim krivuljama nema oscilacija u integrandu funkcionalnog integrala, jer je realni dio akcije konstantan. Upravo od silaznih tokova $\mathcal{J}_\sigma$ želimo sastaviti novu integracijsku krivulju $\mathcal{C}$. Da bi prepoznali koja krivulja je silazni, a koja uzlazni tok, potrebno je promotriti imaginarni dio akcije. Iz grafa imaginarnih dijelova vrlo lako možemo prepoznati silazne i uzlazne

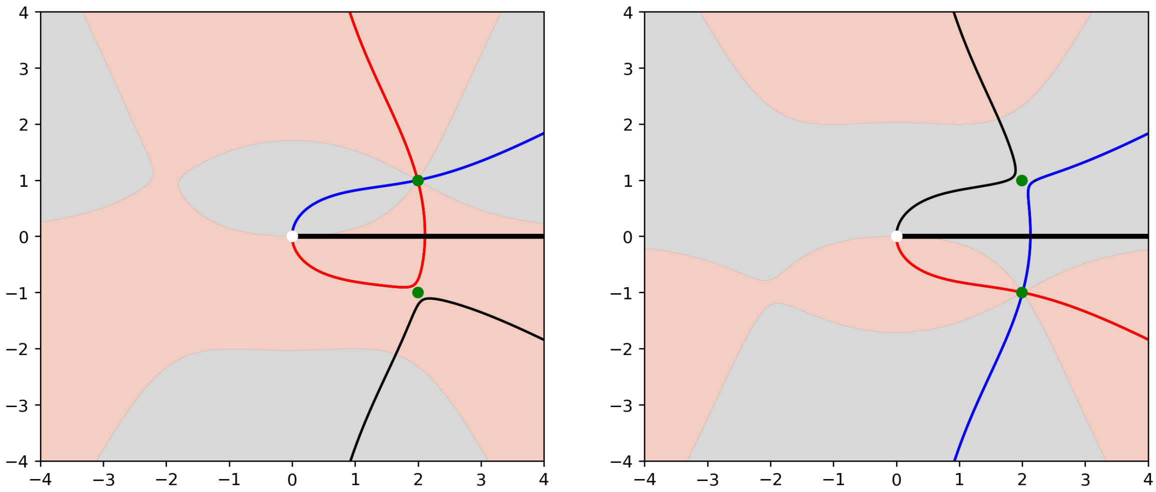


Slika 6.2: Na grafu se nalaze relevantne sedlene točke i imaginarni dijelovi funkcija, $\Im[S(N) - S(N_1)]$ (lijevo) i $\Im[S(N) - S(N_3)]$ (desno). Na crveno obojanim dijelovima domene funkcije poprimaju pozitivne vrijednosti, dok na sivo obojanim negativne vrijednosti. Crne linije označavaju ekvipotencijalne krivulje realnog dijela akcije kao i na 6.1. Zbog spomenutih simetrija akcije ne trebamo crtati grafove za N_2 i N_4.

tokove. Oni dijelovi crne krivulje koji se nalaze na sivom području su silazni tokovi $\mathcal{J}_\sigma$, a oni na crvenom su uzlazni tokovi $\mathcal{K}_\sigma$. Ovom metodom nailazimo na prepreku u interpretaciji. Krivulju između N_1 i N_4 možemo interpretirati na oba načina. Za N_1 ona je uzlazni tok $\mathcal{K}_1$ (slika lijevo), ali za N_4 ona je silazni tok $\mathcal{J}_4$ (slika desno). Ista tvrdnja vrijedi i na drugoj strani realne osi, pa nije potrebno posebno razmatranje. Ova degeneracija uzrokovana je simetrijama u akciji, točnije realnošću akcije, pa je možemo ukloniti uvođenjem imaginarne perturbacije u akciju S. Na kraju ćemo je pustiti u nulu da se parametar perturbacije ne bi pojavljivao u rezultatima.

$$S(N) \to S(N) + i3\epsilon N \qquad \leftrightarrow \qquad k \to k + i\epsilon \tag{6.26}$$

Uvođenje imaginarne perturbacije u ovom slučaju ekvivalentno je uvođenju male imaginarne korekcije u parametar zakrivljenosti k. Na grafovima ispod vidimo da perturbacija uklanja degeneraciju i sada možemo jedinstveno interpretirati dijelove krivulje. Nekoć problematična krivulja sada se rascijepila na dvije, uzlazni tok $\mathcal{K}_1$ i si-



Slika 6.3: Graf imaginarnih dijelova, $\Im[S(N) - S(N_1)]$ (lijevo) i $\Im[S(N) - S(N_3)]$ (desno), ali ovaj puta s perturbiranom akcijom. Iznos perturbacije je $\epsilon = 1/100$. Crvena područja označavaju pozitivne vrijednosti funkcija, dok siva negativne. Dodane su bijele točke u ishodišta kako bismo naglasili da $N = 0$ nije dio ni orginalne domene integracije, niti dio nove domene $\mathcal{C}$.

lazni tok $\mathcal{J}_4$. Jedinstvena identifikacija tokova dopušta nam da upotrijebimo relaciju (D.2). Prema tome, novu integracijsku krivulju $\mathcal{C}$ želimo sastaviti od silaznih tokova $\mathcal{J}_\sigma$, koji odgovaraju sedlenim točkama N_σ čiji uzlazni tokovi $\mathcal{K}_\sigma$ sijeku originalnu domenu integracije $\mathscr{D}$, pozitivnu realnu os $\langle 0, \infty\rangle$. Dakle, zaključujemo da je upravo $\mathcal{K}_1$ jedini uzlazni tok koji siječe originalnu domenu. Tada je jedina relevantna sedlena točka N_1, preko njenih silaznih tokova povlačimo novu integracijsku konturu i u njoj radimo aproksimaciju sedlene točke prema (6.24).

Neka je i dalje $k = 1$, ali vratimo se na općeniti q_1, Λ i uklonimo perturbaciju te primjenimo (6.24). Bitna sedlena točka je

$$N_1 = \frac{3}{\Lambda}\Big(i + \sqrt{\frac{\Lambda q_1}{3} - 1}\Big).$$

Potreban nam je iznos akcije $S(N_1)$ i njene druge derivacije $S_{,NN}(N_1)$.

$$S_1 = -\frac{6}{\Lambda}\Big(- i + (\frac{\Lambda q_1}{3} - 1)^{\frac{3}{2}}\Big), \quad S_{1,NN} = \frac{2i\sqrt{3}}{N_1}\sqrt{\Lambda q_1 - 3}$$

Uvrštavanjem ovih rezultata u (6.24) dobivamo

$$Z \approx -i\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\Lambda q_1 - 3}}} e^{i\theta_1 + i\frac{\pi}{4} - i\frac{1}{2}\arg(N_1)} \exp\big[- \frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda} - i\frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda}(\frac{\Lambda q_1}{3} - 1)^{\frac{3}{2}}\big]$$

Izraz za $S_{1,NN}$ implicira da $\arg(S_1, NN) = \frac{\pi}{2} - \arg(N_1)$, iz čega koristeći uvjet (6.23) slijedi $2\theta_1 = \arg(N_1)$. Konačni rezultat za jezgru zatvorenog prostorvremena, s pozitivnom zakrivljenošću i pozitivnom kozmološkom konstantom, unutar ”no-boundary” prijedloga, gdje je Lorentzijanski integral po putevima izračunat Picard–Lefschetzovom teorijom u poluklasičnoj i aproksimaciji u sedlenoj točki, glasi

$$Z[q_1] = -i\frac{3^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2(\Lambda q_1 - 3)^{\frac{1}{4}}} \exp\big[-\frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda} - i\frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda}(\frac{\Lambda q_1}{3} - 1)^{\frac{3}{2}}\big]. \tag{6.27}$$

Wentzel-Kramers-Brillouin uvjet klasičnosti sustava kaže da amplituda treba biti sporo promjenjiva u usporedbi s fazom. Vidimo da je to istina za rješenje $Z[q_1]$ u limesu velikih q_1. Dakle ovo rješenje opisuje svemir koji je imao kvantni početak, ali što je veći, je sve više klasičan. Ova amplituda slaže se s rezultatom Vilekina, te Turoka i suradnika. Gornji rezultat dobiven je za ”no-boundary” početne uvjete, stoga iako se slaže s Vilenkinovim, ti rezultati dobiveni su iz različitih pretpostavki i nema razloga da bi se poklapali za realističnije i složenije modele.

Usporedimo sada rezultat (6.27) s onim kojeg su Hartle i Hawking dobili rješavanjem Euklidskog integrala [15]. Njihov rezultat ima suprotan predznak realnog dijela, odnosno umjesto $-\frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda}$ dobije se $+\frac{12\pi^2}{\hbar\Lambda}$. Da bi se došlo to tog rezultata na integral (6.19) s akcijom (6.20) primijenili su Wickovu rotaciju u imaginarno vrijeme, što se svodi na zamjenu $N \to -iN$. Ishodište $N = 0$ i dalje predstavlja singularitet pa je opet potrebno izabrati domenu integracije $N > 0$ ili $N < 0$. Primijetimo da ovakav postupak postavlja integraciju po imaginarnom vremenu kao fundamentalnu i stoga odgovara teoriji s intrinzično kompleksnim metrikama. Zanemarimo to zasada i pogledajmo što se dogodilo s eksponentom u funkcionalnom integralu

$$iS(-iN) = -\frac{\Lambda^2 N^3}{36} + N\big(-\frac{\Lambda}{2}(q_1 + q_0) + 3k\big) + \frac{3}{4N}(q_1 - q_0).$$

Izaberemo li $-\infty < N < 0$ kao domenu integracije vidimo da akcija teži prema $+\infty$ kada N teži u $-\infty$, odnosno rezultat divergira. Za domenu $0 < N < \infty$ akcija divergira u $+\infty$ kada $N \to 0^+$. Ovaj član divergira jer u originalnoj akciji (6.20) dolazi s negativnim predznakom, što je posljedica negativnog predznaka prvog člana akcije u integralu (6.18), drugim riječima ovdje se radi o problemu konformalnog faktora.

Prema tome potrebna je neka druga integracijska kontura da bi Euklidski integral konvergirao. Ako takva kontura postoji, Picard-Lefschetz formalizam će nam je pokazati, pa pogledajmo opet sliku 6.2. Na toj slici originalna kontura je sada jedna polovina imaginarne osi i iako vidimo da se neki tokovi približavaju imaginarnoj osi, niti jedan je nikada ne siječe. Zbog toga ne možemo pronaći relevantne sedlene točke i konvergentnu konturu niti primijeniti aproksimaciju sedlene točke. Na drugu stranu Lorentzijanski integral uzima realno vrijeme i metrike kao fundamentalne, te ne pati od problema konformalnog faktora jer Picard–Lefshetzov formalizam identificira jedinstvenu konturu po kojoj se predznak doprinosa tog člana okreće.

Turok i suradnici su za "no-boundary" prijedlog dobili rezultat suprotan onome od Hartlea i Hawkinga, ali time zapravo ojačali kvantnu gravitaciju u integralima po putevima, predstavljajući intuitivno, i tehnički, preciznije definiran formalizam. Trebalo je nekoliko desetljeća da se dobije taj rezultat i svane Sunce na "no-boundary" prijedlog, a pak samo nekoliko godina da opet zađe [26] [25]. Dodamo li nekakve perturbacije ili druga kvantna polja, ona će u akciju ulaziti s predznakom koji je suprotan predznaku člana s gradijentom faktora skale. Stoga upravo rješenje problema konformalnog faktora, sada postaje novi problem, jer će u konačnom rješenju veće perturbacije biti preferirane i napraviti teoriju nestabilnom. Dorronsorro i suradnici, među kojima je i Hartle, su nedugo nakon predložili novu konturu koja je zaobilazila ishodište [27]. Turok i suradnici su im ubrzo ukazali na nekonzistencije u tom prijedlogu [28]. Najnoviji prijedlog koji rješava problem nepotisnutih perturbacija je da za rubne uvjete moramo uzeti Robinove rubne uvjete [29]. Postavljanjem takvih uvjeta gubimo početne svemire iščezavajuće veličine i u biti napuštamo "no-boundary" prijedlog.

7 Zaključak

Da bi se fokusirali na demonstrirane metode izbjegli smo formalnu definiciju funkcionalne mjere za opću teoriju relativnosti. Ta tema zahtjeva rasprava posvećenu raspravu. Krenuli smo od integrala po putevima za nerelativistički sustav s jednim stupnjem slobode i hamiltonijanom kvadratičnim u impulsu, sve da bi mogli povući analogiju za definiciju funkcionalne mjere u iznimno simetričnom slučaju. Koristili smo jednostavni model zatvorenog svemira s Friedmann–Robertson–Lemaître–Walker metrikom unutar kojeg hamiltonijan možemo preoblikovati u kvadratičnu formu. Pronašli smo klasičnu akciju i zaključili da se zbog invarijantnosti fizikalnog prostorvremena na difeomorfizme u teoriji pojavljuju ograničenja. Proučili smo općenite hamiltonijanske sustave s ograničenjima i definirali odgovarajuću formulaciju za opću teoriju relativnosti. Uveli smo pojam Grassmannovih varijabli, koje su bile nužne da bi dali iskaz općenitog Fradkin–Vilkoviskyjevog teorema. Ovim teoremom i spomenutom analogijom dobili smo baždarno invarijantni funkcionalni integral za Feynmanovu jezgru kvantne gravitacije s pozitivnom kozmološkom konstantom. Umjesto primjenjivanja Wickove rotacije, zadržali smo uvjetno konvergentni Lorentzijanski integral. U odnosu na Euklidski, vidjeli smo i neke prednosti Lorentzijanskog Picard–Lefschetzovog pristupa. Specifično, Lorentzijanski integral zadržava unitarnost i, pomoću kauzalnog izbora integracijske domene za faktor toka N, predstavlja teoriju s fundamentalno realnim vremenom i metrikama. Dodatno, Picard–Lefschetzova teorija nam osigurava apsolutnu kovergenciju i rješava problem konformalnog faktora. Primjenom svih metoda reproduciramo rezultat Turoka i suradnika, te ukratko analiziramo zašto Euklidski integral nikada nije imao šansu za konvergenciju. Obećanje ”no-boundary” prijedloga bilo je da će upotpuniti sliku inflacijskog svemira, ali noviji napredci ukazuju na to da treba napustiti takav prijedlog. Unatoč neuspijehu ideja je motivirala razvoj integrala po putevima za kvantnu gravitaciju, što se reflektiralo i na matematičku fiziku, u područjima poput holografije, te konformalne i topološke teorije polja. Ipak, kao i u prošlom stoljeću, preostaje pitanje: Kako upotpuniti početak svemira?

Dodaci

Dodatak A Površinski član u Hilbertovoj akciji

Da bismo došli do konačne forme za ovaj član, morat ćemo naći dobar izraz za Riccijev tenzor. Budući da Riemannov tenzor možemo izraziti preko derivacija, prvo nalazimo vezu među derivacijama koju ćemo izraziti preko metrike i njenih prvih derivacija. Nakon toga izračunat ćemo varijaciju Riccijevog tenzora. Naposlijetku, povezujemo je s vanjskom zakrivljenošću ruba mnogostrukosti.

Imamo li dva operatora derivacije $\tilde{\nabla}_a$ i ∇_a može se naći tenzorsko polje $C^c{}_{ab}$ tako da vrijedi

$$\nabla_a T_b{}^c = \tilde{\nabla}_a T_b{}^c + C^c{}_{ad} T_b{}^d - C^d{}_{ab} T_d{}^c. \tag{A.1}$$

Zahtijevamo da tenzor torzije za sve operatore derivacije iščezava, odnosno da $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ za svaki skalarni f. Iz toga slijedi da $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$.

Neka je sada jedan od njih ∇_a kompatibilan s metrikom g_{ab}. Sa sigurnošću možemo reći da vrijedi

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{db}.$$

Prema tome slijedi

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc}. \tag{A.2}$$

Zamjenom indeksa $a \leftrightarrow b$ dobijemo sličnu relaciju s istim značenjem.

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac} \tag{A.3}$$

Napravimo još jednu zamjenu $b \leftrightarrow c$.

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab} \tag{A.4}$$

Zbrajamo (A.2) i (A.3), te oduzimamo (A.4). Iskorištavamo svojstvo simetričnosti

$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$ i dobivamo izraz za $C^c{}_{ab}$,

$$2C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab},$$

odnosno,

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}). \tag{A.5}$$

Neka sada imamo familiju egzaktnih rješenja Einsteinove jednadžbe $g_{ab}(\lambda)$, te neka je ${}^\lambda\nabla_a$ familija kompatibilnih derivacija. Neka je $\tilde{g}_{ab} = g_{ab}(\lambda = 0)$ vakuumsko rješenje i $\tilde{\nabla}_a$ njena kompatibilna derivacija. Onda (A.5) postaje:

$$C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2} g^{cd}(\lambda) (\tilde{\nabla}_a g_{bd}(\lambda) + \tilde{\nabla}_b g_{ad}(\lambda) - \tilde{\nabla}_d g_{ab}(\lambda)) \quad . \tag{A.6}$$

Za neki dualni vektor ω_c vrijedi

$$[{}^\lambda\nabla_a, {}^\lambda\nabla_b]\omega_c = 2{}^\lambda\nabla_{[a}{}^\lambda\nabla_{b]}\omega_c = R_{abc}{}^d(\lambda)\omega_d \quad , \tag{A.7}$$

gdje je $R_{abc}{}^d$ Riemannov tenzor zakrivljenosti. Sada $R_{abc}{}^d(\lambda)$ možemo izraziti preko $\tilde{R}_{abc}{}^d$ i $C^c{}_{ab}(\lambda)$. Za račun koristimo (A.1), ali ovdje $\nabla_a = {}^\lambda\nabla_a$.

$${}^\lambda\nabla_b \omega_c = \tilde{\nabla}_a \omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d$$

$${}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b \omega_c = \tilde{\nabla}_a({}^\lambda\nabla_b \omega_c) - C^d{}_{ab}{}^\lambda\nabla_d \omega_c - C^d{}_{ac}{}^\lambda\nabla_b \omega_d$$

Imajte na umu da ćemo na kraju napraviti antisimetrizaciju u indeksima a i b stoga srednji član iščezava. Korištenjem prvog rezultata slijedi

$${}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b \omega_c = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \omega_c - \tilde{\nabla}_a(C^d{}_{bc}\omega_d) - C^d{}_{ac}\tilde{\nabla}_b \omega_d + C^d{}_{ac}C^e{}_{bd}\omega_e,$$

$${}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b \omega_c = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \omega_c - \tilde{\nabla}_a(C^d{}_{bc})\omega_d - C^d{}_{bc}\tilde{\nabla}_a \omega_d - C^d{}_{ac}\tilde{\nabla}_b \omega_d + C^d{}_{ac}C^e{}_{bd}\omega_e.$$

Treći i četvrti komad su simetrični u indeksima a i b pa oni također otpadaju. Kontrahiranim indeksima e i d zamijenimo nazive.

$${}^\lambda\nabla_{[a}{}^\lambda\nabla_{b]}\omega_c = \tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\omega_c - \tilde{\nabla}_{[a}(C^d{}_{b]c})\omega_d + C^e{}_{[a|c|}C^d{}_{b]e}\omega_d$$

Iz ovoga slijedi veza među Riemannovim tenzorima.

$$R_{abc}{}^{d}(\lambda) = \tilde{R}_{abc}{}^{d} - 2\tilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{b]c} + C^{e}{}_{c[a}C^{d}{}_{b]e} \tag{A.8}$$

Kontrakcijom odgovarajućih indeksa dolazimo do Riccijevih tenzora. Ali $\tilde{g}_{ab}$ je vakuumsko rješenje pa $\tilde{R}_{ac} = 0$.

$$R_{ac}(\lambda) = R_{abc}{}^{b}(\lambda) = -2\tilde{\nabla}_{[a}C^{b}{}_{b]c} + C^{e}{}_{c[a}C^{b}{}_{b]e} \tag{A.9}$$

Iz definicije slijedi da će $C^{c}{}_{ab}$ biti nula kada je parametar λ nula, prema čemu svi članovi kvadratični u $C^{c}{}_{ab}$ neće doprinositi $\delta R_{ac}(\lambda)$, stoga slijedi

$$\delta R_{ac} = 2\tilde{\nabla}_{[b}\delta C^{b}{}_{a]c}. \tag{A.10}$$

Derivacija $\tilde{\nabla}$ kompatibilna je s vakuumskom metrikom pa je parametarska derivacija ”ne vidi” u gornjoj relaciji, a slično će se dogoditi i ispod. Iz relacije (A.6) možemo vidjeti

$$\delta C^{c}{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab}), \tag{A.11}$$

gdje je $\gamma_{ab} = \delta g_{ab}$. Parametarska derivacija ”ne djeluje” na inverznu metriku $g^{cd}(\lambda)$ ispred zagrade, zato što je član u zagradi nula kada $\lambda = 0$, jer $\tilde{\nabla}_a(\tilde{g}_{bc}) = 0$. Kontrakcijom i preimenovanjem indeksa slijedi

$$\delta C^{b}{}_{bc}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}_c\gamma_{bd} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{bc}) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_c\gamma_{bd}.$$

Sada računamo članove u (A.10).

$$\tilde{\nabla}_a\delta C^{b}{}_{bc}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c\gamma_{bd}$$

$$\tilde{\nabla}_b\delta C^{b}{}_{ac}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_b(\tilde{\nabla}_a\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}_c\gamma_{ad} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{ac})$$

U izrazu perturbacije lagranžijana pojavljuje se $g^{ac}\delta R_{ac}$ pa kontrahiramo s vakuumskom metrikom slijeva,

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_a\delta C^{b}{}_{bc} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd},$$

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_b\delta C^{b}{}_{ac} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}^c\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}^c\gamma_{cd} - \tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}^b\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac}).$$

Prema (A.10) oduzimamo zadnja dva izraza za rezultat,

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_b \delta C^b{}_{ac} - \tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_a \delta C^b{}_{bc} = \tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^c\gamma_{ac} - \tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd},$$

dakle varijacija Riccijevog tenzora odgovara divergenciji vektorskog polja,

$$\tilde{g}^{ac}\delta R_{ac} = \tilde{\nabla}^a v_a, \tag{A.12}$$

gdje je $v_a = \tilde{\nabla}^c\gamma_{ac} - {}^0g^{bd}\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd}$. Kontrahirali smo s vakuumskom metrikom jer još ne pričamo o materiji na metrici. Da jesmo, brzo bismo primijetili da ovaj izvod vrijedi samo do na prvi red u perturbaciji oko vakuumskog rješenja, jer materija utječe na metriku. Napokon možemo vidjeti da je zadnji doprinos varijaciji Hilbertove akcije uistinu površinski integral. Prema Stokesovom teoremu integral po $\mathscr{M}$ možemo prebaciti na rub $\partial\mathscr{M}$ (ne-svjetlosnog tipa s dobrim volumnim elementom $\mathring{\epsilon}$), s normalnim vektorskim poljem n^a za koje vrijedi $n_a n^a = \mp 1$.

$$\int_{\mathscr{M}} \epsilon \nabla_a v^a = \int_{\partial\mathscr{M}} \mathring{\epsilon}\; v^a n_a$$

Koristeći izraz za vektor v^a možemo urediti integrand,

$$n^a v_a = n^a\tilde{g}^{bc}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac} - \tilde{\nabla}_a\gamma_{bc}) = n^a h^{bc}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac} - \tilde{\nabla}_a\gamma_{bc}),$$

gdje je h_{ab} metrika inducirana na rubu. Budući da je $\tilde{g}^{bc} = h^{bc} \pm n^b n^c$, imali bismo kontrakciju $n^a n^b n^c$ sa zagradom koja je antisimetrična u a, b, pa preostaje samo $n^a h^{bc}$ član. Produkt $n_a v^a$ izvrijednjuje se na rubu gdje je $\delta g_{ab} = 0$, pa preostaje samo drugi član,

$$n^a v_a = -n^a h^{bc}\tilde{\nabla}_a\gamma_{bc}. \tag{A.13}$$

Prema konstrukciji n^a je ortogonalno polje na hiperplohu, pa će vrijediti $h_{ab}n^b = 0$, ali i $\tilde{\nabla}_c(h_{ab}n^b)$.

$$\tilde{\nabla}_c(h_{ab}n^b) = h_{ab}\tilde{\nabla}_c n^b + n^b\tilde{\nabla}_c h_{ab} = 0$$

$$h_{ab}\tilde{\nabla}_c n^b + n^b n_b\tilde{\nabla}_c n_a + n^b n_a\tilde{\nabla}_c n_b = 0$$

Lako se uvjerimo da je zadnji član jednak nuli, jer $n^b\tilde{\nabla}_c n_b = \nabla_c(n^b n_b) - n_b\tilde{\nabla}_c n^b$. Pa dobivamo izraz

$$\tilde{\nabla}_c n_a = h_{ab} \tilde{\nabla}_c n^b. \tag{A.14}$$

Za smještenu mnogostrukost s induciranom metrikom h_{ab} i normalnim vektorom n^a, *vanjska zakrivljenost* K_{ab} može se definirati na sljedeći način:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \pounds_n h_{ab}. \tag{A.15}$$

Raspišimo Liejevu derivaciju,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}(n^c \tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c).$$

Iskoristimo $\tilde{g}_{ab} = h_{ab} + n_a n_b$ (+ znači da smo izabrali n^a vremenskog tipa) i kompatibilnost $\tilde{\nabla}_c \tilde{g}_{ab} = 0$ na prvom članu.

$$\begin{aligned}
2K_{ab} &= -\, n^c \tilde{\nabla}_c (n_a n_b) + h_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac} \tilde{\nabla}_b n^c \\
&= -\, n^c n_a \tilde{\nabla}_c n_b - n^c n_b \tilde{\nabla}_c n_a + h_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac} \tilde{\nabla}_b n^c \\
&= h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b - \tilde{\nabla}_a n_b + h^c{}_b \tilde{\nabla}_c n_a - \tilde{\nabla}_b n_a + h_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac} \tilde{\nabla}_b n^c
\end{aligned}$$

Izraz za vanjsku zakrivljenost pojednostavljuje se na

$$K_{ab} = \frac{1}{2}(h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b + h^c{}_b \tilde{\nabla}_c n_a). \tag{A.16}$$

Zadnja jednakost slijedi iz činjenice da $n_c \nabla_a n^c = \frac{1}{2} \nabla_a (n_c n^c) = 0$, iz koje vrijedi

$$h_{bc} \nabla_a n^c = \nabla_a n_b. \tag{A.17}$$

Vanjsku zakrivljenost K_{ab} iz (A.16) kontrahiramo s inverznom metrikom $\tilde{g}^{ab}$, te iskoristimo njenu simetričnost,

$$K = g^{ab} h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b = \tilde{\nabla}_a n^a. \tag{A.18}$$

Sada iz (A.1) nalazimo parametarsku derivaciju skalara K,

$$\delta K = h_{ac} (\delta C)^{ca}{}_d n^d = h^a{}_c (\delta C)^c{}_{ad} n^d,$$

ubacujemo (A.11),

$$\delta K = h^a{}_c \frac{1}{2}\tilde{g}^{cb}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab} - \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad}) = h^{ab}\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab} - \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad}) = \frac{1}{2}h^{ab}n^d\tilde{\nabla}_d\gamma_{ab},$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da prvi i treći član čine objekt antisimetričan u a, b, kontrahiran sa simetričnim h^{ab}. Usporedbom s (A.13) vidimo da površinski integral možemo povezati s ekstrinzičnom zakrivljenošću ruba.

$$n^a v_a = -2\delta K \tag{A.19}$$

Dodatak B Gauss–Codazzijeve relacije

Inducirana metrika h_{ab} će jedinstveno određivati (inducirati) operator derivacije na podmnogostrukosti Σ. Nazovimo tu derivaciju D_a, tako da vrijedi $D_c h^{ab} = 0$. Ona tada određuje tenzor zakrivljenosti na Σ, $\mathring{R}_{abc}{}^d$. Imamo li neki tenzor $T^a{}_b$ takav da je na Σ, u smislu da mu indekse možemo spuštati i podizati s metrikom h_{ab}, za njega ne možemo definirati $\nabla_c T^a{}_b$, jer bi se trebalo pomicati sa Σ, ali možemo definirati $h_d{}^c \nabla_c T^a{}_b$, jer su sve derivacije u smjeru tangencijalnom na Σ. Neka je $(\mathscr{M}, g_{ab})$ prostorvrijeme i neka je Σ glatka prostornolika hiperploha u $\mathscr{M}$, te neka je h_{ab} inducirana metrika i D_a derivacija kompatibilna s njom. Tada vrijedi

$$D_c T^a{}_b = h^a{}_d h_b{}^e h_c{}^f \nabla_f T^d{}_e. \tag{B.1}$$

Gornja jednadžba nam daje vezu između tenzora zakrivljenosti na Σ i tenzora zakrivljenosti cijelog prostorvremena. Ako je ω_c dualno vektorsko polje na Σ onda Riemmanov tenzor zakrivljenosti na Σ definiramo s

$$\mathring{R}_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c. \tag{B.2}$$

Prva relacija povezuje Riemannov tenzor zakrivljenosti za hiperplohu Σ i Riemannov tenzor zakrivljenosti za $\mathscr{M}$. Stoga raspisujemo komutator derivacije na Σ prema definiciji i prepoznajemo objekte.

$$D_a D_b \omega_c = D_a(h_b{}^g h_c{}^e \nabla_g \omega_e) = h_a{}^f h_b{}^k h_c{}^l \nabla_f (h_k{}^g h_l{}^e \nabla_g \omega_e)$$

Koristimo $K_{ab} = h_a{}^c \nabla_c n_b$ i simetričnost pa srednji član u donjem izrazu iščezava. U drugom redu koristimo $h_a{}^f h_b{}^k \nabla_f h_k{}^g = K_{ab} n^g$.

$$
\begin{aligned}
D_a D_b \omega_c &= h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e \nabla_f \nabla_g \omega_e + h_a{}^f \nabla_g \omega_e [h_c{}^e h_b{}^k \nabla_f h_k{}^g + h_b{}^g h_c{}^l \nabla_f h_l{}^e] \\
&= h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e \nabla_f \nabla_g \omega_e + h_c{}^e K_{ab} n^g \nabla_g \omega_e + h_b{}^g K_{ac} n^e \nabla_g \omega_e
\end{aligned}
$$

Sada opet koristimo izraz za tenzor vanjske zakrivljenosti u zadnjem članu

$$
h_b{}^g n^e \nabla_g \omega_e = h_b{}^g \nabla_g (n^e \omega_e) - h_b{}^g \omega_g \nabla_d n^e = -K_b{}^e \omega_e,
$$

iz čega slijedi,

$$
D_a D_b \omega_c = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e \nabla_f \nabla_g \omega_e - K_{ac} K_b{}^e \omega_e.
$$

Antisimetrizacijom zadnjeg izraza dobivamo prvu Gauss–Codazzijevu relaciju,

$$
\mathring{R}_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e h^d{}_k R_{fge}{}^k - K_{ac} K_b{}^d + K_{bc} K_a{}^d. \tag{B.3}
$$

Sada ćemo naći i drugu relaciju na sličan način. Pogledajmo derivaciju tenzora vanjske zakrivljenosti,

$$
\begin{aligned}
D_c K_{ab} &= h_a{}^d h_b{}^e h_c{}^f \nabla_f K_{de} \\
&= h_a{}^d h_b{}^e h_c{}^f [h_{eg} \nabla_f \nabla^g n_d + (\nabla_g n_d) \nabla_f h_e{}^g] \\
&= h_a{}^d h_b{}^e h_c{}^f h_{eg} \nabla_f \nabla^g n_d + h_a{}^d (\nabla_g n_d) K_{cb} n^g.
\end{aligned}
$$

U drugom redu iskoristili smo $K_{de} = h_{eg} \nabla^g n_d$ i za drugi član $h_a{}^f h_b{}^k \nabla_f h_k{}^g = K_{ab} n^g$ kao i prije. Nakon antisimetrizacije u indeksima c i b drugi član iščezava pa ga ne pišemo dalje. Nakon antisimetrizacije i kontrakcije indeksa c i a preostaje

$$
\begin{aligned}
2D_{[a} K^a{}_{b]} &= h^{ad} h_{[a}{}^f h_{b]}{}^g \nabla_f \nabla_g n_d = h^{ad} h_a{}^f h_b{}^g \nabla_{[f} \nabla_{g]} n_d \\
&= h^{df} h_b{}^g \nabla_{[f} \nabla_{g]} n_d = h_b{}^g (g^{df} + n^d n^f) \nabla_{[f} \nabla_{g]} n_d \\
&= h_b{}^g \nabla_{[d} \nabla_{g]} n^d + n^f [\nabla_{[f} (n^d \nabla_{g]} n_d) - (\nabla_{[f} n^d)(\nabla_{g]} n_d)] \\
&= h_b{}^g \nabla_{[d} \nabla_{g]} n^d = h_b{}^g R_{cg}{}^c{}_d n^d = h_b{}^g R_{gd} n^d.
\end{aligned}
$$

Srednji član u predzadnjem redu je nula jer je $n^d \nabla_g n_d = 0$, a treći član iščezava zbog komutativnosti umnoška i kompatibilnosti metrike. Iskorištavanjem svojstava Riemannovog tenzora dolazimo do druge Gauss–Codazzijeve relacije,

$$2D_{[a}K^a{}_{b]} = h_b{}^a R_{ac} n^c. \tag{B.4}$$

Dodatak C Dokaz Fradkin–Vilkoviskyjevog teorema

Iskaz i dokaz dani po uzoru na radove Batalina, Fradkina i Vilkoviskog [7] [9] [10].

Teorem: Neka je $\psi(q^A, p_A, \eta^a, \rho_a)$ proizvoljna fermionska funkcija. Uz pretpostavku da je skup jednadžbi $G_a = 0$ nezavisan, sljedeći funkcionalni integral neovisan je o izboru funkcije ψ:

$$Z_\psi = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\rho \exp\left[i \int dt(p_A \dot{q}^A + \rho_a \dot{\eta}^a - H_\psi)\right], \tag{C.1}$$

$$H_\psi = H_0 + \rho_a V_b^a \eta^b - \{\psi, \Omega\}, \tag{C.2}$$

Ω nazivamo BRST (Becchi–Rouet–Stora–Tyutin) nabojem,

$$\Omega = G_a \eta^a + \frac{1}{2}(-1)^{n_a} \rho_c U^c_{ab} \eta^b \eta^a, \tag{C.3}$$

gdje n_a sudjeluje u sumi i ograničenja zadovoljavaju relacije involucije,

$$\{G_a, G_b\} = G_c U^c_{ab}, \quad \{H_0, G_a\} = G_b V^b_a. \tag{C.4}$$

Dokaz: Uvodimo pokratu $U^c_b \equiv -(-1)^{n_b} U^c_{ba} \eta^a$ i prevodimo relacije involucije u kompaktniji zapis,

$$\{G_a \eta^a, G_b \eta^b\} = G_c U^c_b \eta^b. \tag{C.5}$$

Da bismo ovo dokazali možemo samo raspisati Poissonove zagrade prema definiciji (5.23) i iskoristiti komutacijske relacije među varijablama. Sjetimo se da je signatura

$n(G_a) = n_a$ i $n(\eta^a) = 1 + n_a$. Dakle $G_a\eta^a$ je sigurno fermion pa imamo plus u zagradama,

$$\{G_a\eta^a, G_b\eta^b\} = G_a\eta^a\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}G_b\eta^b + G_b\eta^b\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}G_a\eta^a.$$

U prvom članu pomičemo η^a na desno što nam daje faktor $(-)^{(1+n_a)1}$, a u drugom pomičemo η^b između G_a i η^a što daje faktor $(-)^{(1+n_b)n_a}$ prema (5.22),

$$\{G_a\eta^a, G_b\eta^b\} = -(-)^{n_a}G_a\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}G_b\eta^b\eta^a + (-)^{n_a+n_an_b}G_b\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}G_a\eta^b\eta^a.$$

Izvlačimo faktor $-(-)^{n_a}$ te prepoznajemo definiciju Poissonovih zagrada i uvedene pokrate U^c_b,

$$\{G_a\eta^a, G_b\eta^b\} = (-)^{1+n_a}\{G_a, G_b\}\eta^b\eta^a \equiv G_cU^c_a\eta^a,$$

što dokazuje modificirane relacije involucije (C.5). Primijetite da je objekt na desnoj strani sigurno bozon pa je signatura $n(U^c_a\eta^a) = n(G_c) = n_c$. Na sličan način može se pokazati da vrijedi

$$\{G_d\eta^d, G_c\} = G_dU^d_c. \tag{C.6}$$

Kao što smo rekli $G_a\eta^a$ je fermion, stoga primjenjujući Jacobijev identitet (5.25) za tri identična fermiona dobivamo

$$\{\{G_a\eta^a, G_b\eta^b\}, G_d\eta^d\} = 0 \quad \to \quad \{G_cU^c_b\eta^b, G_d\eta^d\} = 0.$$

Iskoristimo relacije (C.5) i (C.6), te Leibnizovo pravilo (5.24).

$$G_c\{U^c_b\eta^b, G_d\eta^d\} + (-)^{n_c}\{G_c, G_d\eta^d\}U^c_b\eta^b = 0$$

$$G_c\{U^c_b\eta^b, G_d\eta^d\} = -(-)^{n_c}G_fU^f_{cd}\eta^dU^c_b\eta^b = G_cU^c_aU^a_b\eta^b$$

U zadnjoj jednakosti smo preimenovali indekse da bismo mogli izlučiti i pokratiti G_a, što je dopušteno zbog nezavisnosti ograničenja.

$$\{U^c_b\eta^b, G_d\eta^d\} = U^c_aU^a_b\eta^b. \tag{C.7}$$

S jednadžbama (C.5), (C.7) možemo izvesti relaciju (C.8) koja je ključna za dokaz nilpotentnosti $\{\Omega, \Omega\} = 0$, svojstva koje je potrebno da akcija bude invarijantna na transformacije generirane s Ω.

$$\{U^a_b\eta^b, U^c_f\eta^f\} = 0 \tag{C.8}$$

Počinjemo od Jacobijevog identiteta za $A = B = G_a\eta^a$ i $C = G_c$. Druga dva člana su jednaka i preostaje nam

$$\{G_dU^d_e\eta^e, G_c\} - (-)^{n_c}2\{\{G_b\eta^b, G_c\}, G_a\eta^a\} = 0 \tag{C.9}$$

Iz ove jednakosti želimo nekako izvući $\{U^d_e\eta^e, G_c\}$. Koristimo Leibnizovo pravilo na prvom članu i (C.6) na drugom.

$$G_d\{U^d_e\eta^e, G_c\} + (-)^{n_cn_d}\{G_d, G_c\}U^d_e\eta^e - 2\{G_a\eta^a, G_dU^d_c\} = 0$$

U srednjem članu iskoristimo relacije involucije, a u zadnjem Leibnizovo pravilo.

$$G_d\{U^d_e\eta^e, G_c\} = G_dU^d_{cf}U^f_e\eta^e + 2\{G_a\eta^a, G_d\}U^d_c + (-)^{n_d}2G_d\{G_a\eta^a, U^d_c\}$$

Preimenujemo indekse da bismo mogli izlučiti i pokratiti G_d, što nam ostavlja

$$\{U^d_e\eta^e, G_c\} = U^d_{cf}U^f_e\eta^e + 2U^d_fU^f_c + (-)^{n_d}2\{G_a\eta^a, U^d_c\}. \tag{C.10}$$

Pogledajmo sada Jacobijev identitet za $A = B = G_a\eta^a$ i $C = U^a_b\eta^b$. Kao i kod (C.9),

$$\{\{G_d\eta^d, G_e\eta^e\}, U^a_b\eta^b\} + 2\{\{U^a_b\eta^b, G_e\eta^e\}, G_d\eta^d\} = 0.$$

Raspisujemo pomoću (C.5), (5.24), (C.10).

$$G_c\{U^c_d\eta^d, U^a_b\eta^b\} - \{U^a_b\eta^b, G_c\}U^c_d\eta^d + 2\{U^a_bU^b_c\eta^c, G_d\eta^d\} = 0$$

$$\begin{aligned}G_c\{U^c_d\eta^d, U^a_b\eta^b\} &- U^a_{cf}U^f_e\eta^eU^c_d\eta^d - 2U^a_fU^f_cU^c_d\eta^d - (-)^{n_a}2\{G_d\eta^d, U^a_c\}U^c_d\eta^d \\ &+2U^a_b\{U^b_c\eta^c, G_d\eta^d\} + (-)^{n_b}2\{U^a_b, G_d\eta^d\}U^b_c\eta^c = 0\end{aligned}$$

Vidimo da se treći i peti član krate, a drugi član je nula sam po sebi, jer su U_{cf} i $U^f_e\eta^eU^c_d\eta^d$ suprotnog pariteta u odnosu na zamjenu indeksa c i f. U zadnjem članu zamjena argumenta u zagradama otkriva da se taj član poništava s četvrtim, pa preostaje samo prvi član,

$$G_c\{U^c_d\eta^d, U^a_b\eta^b\} = 0.$$

Zbog nezavisnosti ograničenja slijedi (C.8),

$$\{U^c_d\eta^d, U^a_b\eta^b\} = 0.$$

Analogno, može se pokazati da vrijedi slična relacija za druge strukturne koeficijente V^b_a,

$$\{V^c_d\eta^d, U^b_a\eta^a\} = 0. \tag{C.11}$$

Razmotrimo sada kanonsku transformaciju u potpunom faznom prostoru s generatorom Ω i parametrom μ,

$$\varphi \equiv \phi(q,\eta;p,\rho), \quad \varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi + \{\varphi, \Omega\}\mu. \tag{C.12}$$

Ova transformacija čini jednodimenzionalnu Abelovu superalgebru, odnosno kažemo da je naboj Ω nilpotentan.

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \tag{C.13}$$

$\Omega = G_a\eta^a - \frac{1}{2}\rho_c U^c_a\eta^a$ je očito fermion pa je ova relacija vrlo netrivijalna, a dokazat ćemo je pomoću do sada izvedenih relacija.

$$\{G_a\eta^a - \frac{1}{2}\rho_c U^c_a\eta^a,\ G_b\eta^b - \frac{1}{2}\rho_d U^d_b\eta^b\} = \{G_a\eta^a, G_b\eta^b\} - \{G_a\eta^a, \rho_d U^d_b\eta^b\} + \frac{1}{4}\{\rho_c U^c_a\eta^a, \rho_d U^d_b\eta^b\}$$

Raspisujemo srednji član.

$$\{G_a\eta^a, \rho_d U^d_b\eta^b\} = G_a\{\eta^a, \rho_d\}U^d_b\eta^b + \rho_d\{U^d_b\eta^b, G_a\eta^a\}$$

Iz kanonskih relacija $\{\eta^a, \rho_d\} = \delta^a_d$ slijedi

$$\{G_a\eta^a, \rho_d U^d_b\eta^b\} = G_a U^a_b\eta^b + \rho_d U^d_a U^a_b\eta^b.$$

Vidimo da već dolazi do kraćenja članova i preostaje nam

$$\{\Omega, \Omega\} = -\rho_d U^d_a U^a_b \eta^b + \frac{1}{4}\{\rho_c U^c_a \eta^a, \rho_d U^d_b \eta^b\}.$$

Raspisivanje zadnjeg člana koristeći Leibnizovo pravilo za produkt ρ_c i $U^c_a\eta^a$, dva puta, će proizvesti 4 člana, od kojih 2 iščezavaju zbog $\{\rho_c, \rho_d\} = 0$ i (C.8). Za preostala dva je lako pokazati da su jednaki.

$$\{\Omega, \Omega\} = -\rho_d U^d_a U^a_b \eta^b + \frac{1}{2}\rho_c\{U^c_a \eta^a, \rho_d\} U^d_b \eta^b$$

Nakon što raspišemo U^c_a, jer u sebi sadrži jedan η, računamo zagrade u drugom članu.

$$\begin{aligned}\{U^c_a\eta^a, \rho_d\} &= -(-)^{n_a}\{U^c_{ab}\eta^b\eta^a, \rho_d\} = -(-)^{n_a}U^c_{ab}\{\eta^b\eta^a, \rho_d\}\\ &= -(-)^{n_a}U^c_{ab}\big(\eta^b\delta^a_d + (-)^{(1+n_a)(1+n_d)}\eta^a\delta^b_d\big)\\ &= -(-)^{n_d}U^c_{db}\eta^b - (-)^{n_a+n_a+n_d)}U^c_{da}\eta^a = 2U^c_d\end{aligned}$$

Preostala dva člana se krate i konačno možemo sigurno reći da je Ω nilpotentan $\{\Omega, \Omega\} = 0$. Ovo je centralna činjenica teorema. Pogledajmo sada kako transformacija (C.12) djeluje na potpuni hamiltonijan H_ψ. Vidjet ćemo da je H_ψ po konstrukciji invarijantan. Primjenom Jacobijevog identiteta imamo

$$2\{\{\psi, \Omega\}, \Omega\} + \{\{\Omega, \Omega\}, \psi\} = 0.$$

Stoga je zadnji član u H_ψ sam za sebe invarijantan. Slično moramo dokazati i za prva dva člana. Ovo će zahtijevati relacije analogne onima u (C.5), (C.7) i (C.8), ali za druge strukturne koeficijente V^b_a, jednu od kojih smo već spomenuli (C.11). Primijetimo da su signature $n(H_0) = 0$ i $n(V^b_a\eta^a) = 1 + n_b$. Počinjemo još jednom od Jacobijeva identiteta, ovaj puta za $A = B = G_a\eta^a$ i $C = H_0$, iz čega se dobije

$$\{H_0, U^c_a\eta^a\} = -V^c_b U^b_a \eta^a + 2\{V^c_a\eta^a, G_b\eta^b\} - 2U^c_b V^b_a \eta^a. \tag{C.14}$$

S ovim transformacija kanonskog hamiltonijana H_0 postaje

$$\{H_0, \Omega\} = G_b V_a^b \eta^a + \frac{1}{2}\rho_c V_b^c U_a^b \eta^a - \rho_c\{V_a^c \eta^a, G_b \eta^b\} + \rho_c U_b^c V_a^b \eta^a,$$

dok za srednji član u H_ψ vrijedi

$$\{\rho_c V_d^c \eta^d, G_b \eta^b - \frac{1}{2}\rho_b U_a^b \eta^a\} = \rho_c\{V_a^c \eta^a, G_b \eta^b\} - G_b V_a^b \eta^a - \frac{1}{2}\{\rho_c V_d^c \eta^d, \rho_b U_a^b \eta^a\}.$$

Još raspisujemo zadnji član u izrazu iznad

$$-\frac{1}{2}\{\rho_c V_d^c \eta^d, \rho_b U_a^b \eta^a\} = -\frac{1}{2}\rho_c V_b^c U_a^b \eta^a - \frac{1}{2}\rho_b \rho_c\{V_d^c \eta^d, U_a^b \eta^a\} - \rho_c U_b^c V_a^b \eta^a,$$

tako da nam nakon pokraćivanja za transformaciju prva dva člana u H_ψ preostaje

$$\{H_0 + \rho_c V_d^c \eta^d, \Omega\} = -\frac{1}{2}\rho_b \rho_c\{V_d^c \eta^d, U_a^b \eta^a\} = 0.$$

Time je cijeli hamiltonijan H_ψ invarijantan na transformacije generirane s Ω. BRST transformacija je kanonska transformacija na proširenom faznom prostoru, stoga se prva dva člana mijenjaju za najviše rubni član koji iščezava zbog rubnih uvjeta $c_\alpha(t_0) = \bar{c}_\alpha(t_0) = c_\alpha(t_1) = \bar{c}_\alpha(t_1) = 0$. Neka je parametar u transformaciji (C.12) jednak $\mu = \int dt\ (\psi' - \psi)$. Ovo ostavlja akciju invarijantnom, a u funkcionalnoj mjeri daje Jacobian

$$\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\tilde{\varphi}(1 + \int dt\ \{\psi' - \psi, \Omega\}),$$

koji za male $\psi' - \psi$ daje $Z_\psi = Z_{\psi'}$. Zbog nilpotentnosti vrijedi $\exp(\Omega\mu) = 1 + \Omega\mu$, pa nam ova metoda omogućava i konačne promjene u Ψ.

Dodatak D Picard–Lefschetzova integracija

Razmotrimo integral I s analitičnim eksponentom u integrandu,

$$I = \int_{\mathscr{D}} dx\ e^{i\phi(x)}.$$

U slučaju da je $\phi(x)$ realna funkcija, ovaj integral nije apsolutno konvergentan. Zbog toga i zbog oscilacija integranda ovakav integral teško je izvrijedniti. Ideja Picard–

Lefschetzove integracije je da analitički produljimo funkciju ϕ na kompleksnu ravninu i onda iskoristimo Cauchyjev teorem da integracijsku konturu deformiramo u $\mathcal{C}$, onu po kojoj nema oscilacija i magnituda konvergira. Neka je onda $\phi(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ i neka je $z = x^1 + ix^2$, te $i\phi(z) = u(x^1, x^2) + iv(x^1, x^2)$. Primijetite da $|e^{i\phi}| = e^u$, pa za smiriti oscilacije želimo v približno konstantnim duž $\mathcal{C}$, dok u određuje magnitudu integranda. Za funkciju u možemo definirati *silazni tok*, pomoću parametra λ.

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = -\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}. \tag{D.1}$$

Na takvom toku funkcija u se smanjuje, jer $\frac{du}{d\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda} = -\gamma^{ij}\partial_i u \partial_j u$.[15] Da bismo mogli definirati smjer u kojem se najbrže smanjuje potrebno je izabrati definiciju za metriku γ^{ij}. Neka odgovara običnom Euklidskom prostoru, tako da su komponentne metrike $\gamma^{ij} = \delta_{ij}$. Koristeći Cauchy–Riemannove jednadžbe vidimo da je na ovakvom toku funkcija v konstantna, pa nemamo oscilacija.

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^i} \overset{C.R.}{=} \frac{\partial v}{\partial x^1}\frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^1} = 0$$

Stoga, integrand $e^{i\phi}$ na silaznom toku ne oscilira, već se monotono smanjuje i to na najbrži mogući način. Analogno možemo definirati i *uzlazni tok*, samo s pozitivnim predznakom u (D.1). Silazni i uzlazni tokovi sijeku se u sedlenim točkama, označimo ih s indeksom sigma σ. Tada silazni tok iz te sedlene točke označavamo s $\mathcal{J}_\sigma$, a uzlazni tok s $\mathcal{K}_\sigma$. Skup svih silaznih tokova jedne sedlene točke nazivamo *Lefschetzovim naprskom* (eng. Lefschetz thimble). Moguće je da se $\mathcal{J}_\sigma$ iz jedne točke, podudara s $\mathcal{K}_{\sigma'}$ iz druge točke. To se dogodi kada je funkcija $\phi(z)$ realna za sve realne z i tada svaka kompleksna sedlena točka dolazi sa svojim konjugiranim parom. Imaginarni dio eksponenta v je onda jednak u obje konjugirane sedlene točke, dok je realni općenito različit. Određivanje integracijske konture zahtijevati će da jedinstveno identificiramo sve tokove. Stoga, degeneraciju uklanjamo uvodeći malu perturbaciju u eksponent i definirajući integracijsku krivulju u limesu kada perturbacija iščezava. U spomenutom slučaju, dolazi do degeneracije zbog realnosti ϕ, pa nam je potrebna imaginarna perturbacija. Kada se uklone sve ovakve degeneracije ostaje nam injekcija između sedlenih točki σ i $(\mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_\sigma)$. Tada za broj sjecišta možemo

[15]Metrika γ^{ij} treba biti pozitivno definitna da bi se u smanjivala.

pisati

$$\mathrm{Int}(\mathcal{J}_\sigma, \mathcal{K}_{\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{D.2}$$

Ovaj broj je topološka konstanta, odnosno neće se promijeniti ako deformiramo integracijsku krivulju nazad u originalnu, realnu domenu $\mathscr{D}$. Cilj nam je definirati integracijsku krivulju tako da je sačinjena od Lefschetzovih naprstaka, tj.

$$\mathcal{C} = \sum n_\sigma \mathcal{J}_\sigma, \tag{D.3}$$

gdje $n_\sigma \in \{-1, 0, +1\}$ brinu o orijentaciji krivulja. Presijecanjem izraza za $\mathcal{C}$ s uzlaznim tokom dobivamo

$$\mathrm{Int}(\mathcal{C}, \mathcal{K}_\sigma) = \sum n_{\sigma'} \mathrm{Int}(\mathcal{J}_{\sigma'}, \mathcal{K}_\sigma) = \sum n_{\sigma'} \delta_{\sigma'\sigma} = n_\sigma.$$

Iz topološke invarijantnosti broja presjecišta slijedi

$$n_\sigma = \mathrm{Int}(\mathcal{C}, \mathcal{K}_\sigma) = \mathrm{Int}(\mathscr{D}, \mathcal{K}_\sigma). \tag{D.4}$$

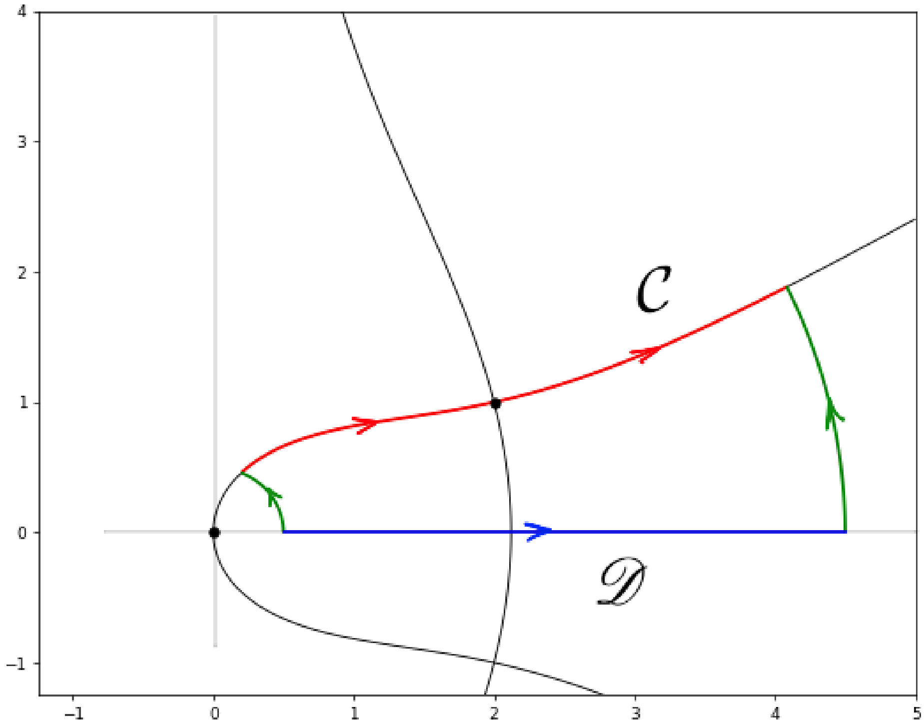
Prema tome nužan i dovoljan uvjet da $\mathcal{J}_\sigma$ bude bitan za integraciju, je da postoji uzlazni tok $\mathcal{K}_\sigma$, iz iste sedlene točke, koji presijeca originalnu integracijsku krivulju. Nakon pronalaska potrebnih tokova činimo integracijsku petlju koja sadrži i originalnu domenu $\mathscr{D}$ i Lefschetzove naprstke $\mathcal{C}$. Dokazujući da integrali po suvislim dijelovima petlje ne doprinose slijedi,

$$I = \int_{\mathscr{D}} dx\; e^{i\phi(x)} = \sum_\sigma n_\sigma \int_{\mathcal{J}_\sigma} dx\; e^{i\phi(x)}. \tag{D.5}$$

Demonstrirajmo postupak na primjeru integrala kojeg smo koristili u poglavlju 6. Neka je $f(N)$ holomorfna funkcija u N,

$$I = \int_{0^+}^{\infty} \frac{dN}{\sqrt{N}} e^{iS(N)/\hbar}. \tag{D.6}$$

Integrand ima singularitet u $N = 0, \infty$ i integraciju vršimo upravo između njih. Konturu deformiramo u sumu po Lefschetzovim naprstcima, prvi i zadnji od kojih sijeku realnu N os, pod nekim kutem različitim od nule, pa trebamo dokazati da su integrali po lukovima oko singulariteta iščezavajući. Neka je zatvorena kontura kao na slici ispod. Prvi od lučnih integrala ide oko singulariteta u $N = 0$. Postavimo $N = N_0 e^{i\theta}$,



Slika D.1: U plavoj boji označena je originalna domena integracije $\mathscr{D}$, a u crvenoj kontura po Lefschetzovim naprscima $\mathcal{C}$. Zelene konture odnose se na integrale po lukovima I_0 i I_1.

gdje je N_0 neka mala realna konstanta, pa integral postaje

$$I_0 = \lim_{N_0 \to 0} i \int_0^{\theta_0} d\theta \; e^{iS(N_0 e^{i\theta})/\hbar},$$

gdje je θ_0 kut pod kojim Lefschetzov naprstak čini kada prilazi ishodištu. Akcija (6.25) je blizu ishodišta dominirana zadnjim članom, prema tome postavljamo $S(N) = \frac{-1}{N}$,

$$I_0 = \lim_{N_0 \to 0} i \int_0^{\theta_0} d\theta \; \exp\Big(\frac{1}{N_0 \hbar}(-i\cos\theta - \sin\theta)\Big).$$

Kut θ_0 pronalazimo iz uvjeta da je realni dio akcije konstantan (ovdje imaginarni dio eksponenta), što u limesu iščezavajućeg N_0 daje

$$\lim_{N_0 \to 0} \frac{\cos\theta_0}{N_0} = \text{konst.} \quad \to \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Apsolutna vrijednost integrala I_0 manja je od integrala apsolutne vrijednosti integranda pa slijedi

$$|I_0| \leq \lim_{N_0 \to 0} \sqrt{N_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \exp\big(\frac{-\sin\theta}{N\hbar}\big) = 0.$$

Zbog domene kuta θ eksponent je uvijek negativan. Integral oko singulariteta u ishodištu ne doprinosi integraciji. Slično možemo napraviti i u suprotnom limesu. Tada najveći doprinos akciji čini prvi član, pa neka je $S(N) = N^3$ i $N = N_1 e^{i\theta}$. Uvjet za kut θ_0 kojeg naprstak zatvara s realnom pozitivnom osi u beskonačnosti je isti kao prije nekoliko redaka

$$\lim_{N_1 \to \infty} N_1^3 \cos(3\theta_0) = \text{konst.} \quad \to \quad \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Za integral I_1 vrijedi

$$|I_1| \leq \lim_{N_1 \to \infty} \sqrt{N_1} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \ \exp\big(-\frac{N_1^3}{\hbar}\sin(3\theta)\big) = 0.$$

Još jednom zbog domene kuta θ integral je sigurno nula. Ovaj dokaz lako se poopći na druge oblike akcije. Oboje I_0 i I_1 ne doprinose integralu po zatvorenoj konturi. Na taj način integral po Lefschetzovim naprscima, uz pravu orijentaciju, postaje jednak originalnom integralu po pozitivnoj realnoj osi.

Bibliography

[1] P. A. M. Dirac, The Lagrangian in Quantum Mechanics, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **3**, 64–72 (1933)

[2] R. Feynman, The principle of least action in quantum mechanics, Doktorski rad, Princeton University (1942)

[3] P. A. M. Dirac, Hamiltonian form of field dynamics, Canad. J. Math. **3**, 1 (1951)

[4] J. Schwinger, Non-Abelian Gauge Fields. Relativistic Invariance, Phys. Rev. **127**, 324 (1962)

[5] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University (1964)

[6] C. Bunster (Teitelboim), The Hamiltonian Structure of Spacetime, Doktorski rad, Princeton University (1973)

[7] E. S. Fradkin; G. A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints, Phys. Lett. **55B**, 224 (1975)

[8] A. Hanson; T. Regge; C. Teitelboim, Constrained Hamiltonian systems, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei (1976)

[9] I. A. Batalin; G. A. Vilkovisky, Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints, Phys. Lett. **69B**, 309 (1977)

[10] E. S. Fradkin; G. A. Vilkovisky, CERN report TH2332 (1977)

[11] G. W. Gibbons, The Einstein action of Riemannian metrics and its relation to quantum gravity and thermodynamics, Phys. Lett. **61A**, 3 (1977)

[12] G. W. Gibbons; S. W. Hawking; M. J. Perry, Path integrals and indefinitness of the gravitational action, Nucl. Phys. **B138**, 141 (1978)

[13] S. W. Hawking, The Boundary Conditions of the Universe, Pontif. Acad. Sci. Scr. Varia **48**, 563 (1982)

[14] C. Bunster (Teitelboim), Quantum mechanics on the gravitational field, Phys. Rev. **25**, 3159 (1982)

[15] J. B. Hartle; S. W. Hawking, Wave function of the Universe, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983)

[16] C. Bunster (Teitelboim), Causality Versus Gauge Invariance in Quantum Gravity and Supergravity, Phys. Rev. Lett. **50**, 705 (1983)

[17] C. Bunster (Teitelboim), Proper-time gauge in the quantum theory of gravitation, Phys. Rev. **28**, 297 (1983)

[18] A. Vilenkin, Quantum creation of universes, Phys. Rev. **D30**, 509 (1984)

[19] R. M. Wald, General relativity, The University of Chicago Press (1984)

[20] J. J. Halliwell; S. W. Hawking, The Origin of Structure in the Universe, Phys. Rev. **D31**, 1777 (1985)

[21] A. Vilenkin, Approaches to quantum cosmology, Phys. Rev. **D50**, 2581 (1994)

[22] A. Zee, Quantum field theory in a nutshell, Princeton University Press (2003)

[23] J. Feldbrugge; J.-L. Lehners; N. Turok, arXiv e-print (2017)

[24] J. Feldbrugge; J.-L. Lehners; N. Turok, Lorentzian quantum cosmology, Phys. Rev. **D95**, 103508 (2017)

[25] J. Feldbrugge; J.-L. Lehners; N. Turok, No smooth beginning for spacetime, Phys. Rev. Lett. **119**, 171301 (2017)

[26] J. Feldbrugge; J.-L. Lehners; N. Turok, No rescue for the no-boundary proposal: Pointers to the future of quantum cosmology, Phys. Rev. **D97**, 023509 (2018)

[27] J.D. Dorronsorro; J. J. Halliwell; J. B. Hartle; T. Hertog; O. Janssen, Real no-boundary wave function in Lorentzian quantum cosmology, Phys.Rev. **D96**, 043505 (2017)

[28] J. Feldbrugge; J.-L. Lehners; N. Turok, Inconsistencies of the New No-Boundary Proposal, arXiv:1805.01609v2 [hep-th] (2018)

[29] A. Di Tucci; J.-L. Lehners, The No-Boundary Proposal as a Path Integral with Robin Boundary Conditions, Phys. Rev. Lett. **122**, 201302 (2019)