

# Smithov teorem i ADE-klasifikacija

---

Gudelj, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:875948>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2022-10-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Matej Gudelj

**SMITHOV TEOREM I**  
**ADE-KLASIFIKACIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, veljača 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Slavenu Kožiću na strpljenju i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala obitelji i prijateljima na podršci tijekom studiranja.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Uvod u teoriju grafova</b>	<b>3</b>
<b>2 Spektar grafa</b>	<b>9</b>
<b>3 Perron-Frobeniusov teorem</b>	<b>15</b>
3.1 Simultana dijagonalizacija . . . . .	15
3.2 Perron-Frobeniusov teorem . . . . .	17
3.3 Ujednačene i gotovo ujednačene particije grafa . . . . .	22
3.4 Rayleighov kvocijent . . . . .	28
3.5 Ispreplitanje . . . . .	28
<b>4 Smithov teorem</b>	<b>32</b>
4.1 Najveća svojstvena vrijednost . . . . .	32
4.2 <i>ADE</i> -klasifikacija . . . . .	33
<b>5 Klasifikacija sistema korijena prostih Liejevih algebri</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>45</b>

# Uvod

Spektralna teorija grafova bavi se proučavanjem svojstava grafa u odnosu na svojstvene polinome, svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica povezanih s grafom, kao što je njegova matrica susjedstva. Glavni aspekti teorije koje ćemo promatrati u ovom radu su Perron-Frobeniusov teorem te Smithov teorem.

Spektralna teorija grafova je korisno područje matematike sa širokim rasponom primjena. Primjerice, kada se Google pojavio na internetu kasnih 1990-ih, jedna stvar koja ga je razlikovala od drugih tražilica je da su njegovi relevantni rezultati pretraživanja uvijek bili na prvim stranicama. Na drugim tražilicama često su se na prvim stranicama rezultata pretraživanja nalazile irelevantne web-stranice, koje se slučajno podudaraju s tekстом pretraživanja. Google svoju popularnost duguje PageRank algoritmu, koji ocjenjuje važnost svake web-stranice, omogućujući Googleu da ih rangira i na taj način korisniku predstavi one važnije (i obično najrelevantnije i najkorisnije) web-stranice. Osnivači Googlea su izračunali Perron-Frobeniusov svojstveni vektor web grafa i postali milijarder. Više informacija je dostupno u članku [6].

*ADE*-dijagrami klasificiraju, tj. navode sve moguće oblike različitih objekata u matematici i teorijskoj fizici. Oni su relevantni za klasifikaciju Platonovih tijela (ili konačnih ortogonalnih grupa u Euklidskom prostoru), Coxeterovih grupa generiranih refleksijama i još mnogo toga. Glavni cilj ovog diplomskog rada je dati kratki pregled osnovnih pojmova teorije grafova te zatim detaljno proučiti Smithov teorem koji kaže da su jedini grafovi spektralnog radijusa strogo manjeg od 2 upravo Dynkinovi dijagrami tipa *A*, *D* i *E*. U radu ćemo proučavati i Perron-Frobeniusov teorem, koji se koristi u dokazu Smithovog teorema. Dio rada ćemo posvetiti primjenama *ADE*-klasifikacije u drugim područjima matematike, kao što je primjerice klasifikacija sistema korijena prostih Liejevih algebri.

U prvom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove iz teorije grafova kao što su susjedni vrhovi, regularnost, povezanost, minimalni, maksimalni i prosječni stupanj grafa. Definicije ćemo potkrijepiti primjerima.

Na početku drugog poglavlja navest ćemo neke osnovne pojmove iz linearne algebre, koje ćemo u nastavku koristiti u proučavanju grafova. Promatrat ćemo konačne, jednostavne i neusmjerene grafove. Definirat ćemo matricu susjedstva *A* grafa te ćemo spektar grafa poistovjetiti sa spektrom matrice *A*. Matrica *A* će biti simetrična matrica koja sadrži

cjelobrojne vrijednosti. Koeficijenti svojstvenog polinoma matrice susjedstva pridružene grafu dat će nam neke informacije o broju bridova grafa te broju podgrafova koji su ciklusi s 3 vrha. Uvest ćemo pojam algebre susjedstva koja je u bliskoj vezi sa spektrom grafa. Matrica susjedstva  $A$  dat će nam korisne informacije o pripadnom grafu, među kojima je i ta da je element na mjestu  $(i, j)$   $k$ -te potencije od  $A$  zapravo broj šetnji duljine  $k$  od vrha  $i$  do vrha  $j$ .

U trećem poglavlju definirat ćemo nenegativne, primitivne i ireducibilne matrice. Pokazat ćemo da postoji veza između ireducibilne matrice susjedstva grafa i čvrsto povezanog grafa. Također, u ovom poglavlju ćemo proučavati spektralni radijus grafa kojeg definiramo kao maksimum skupa svih apsolutnih vrijednosti svojstvenih vrijednosti njegove matrice susjedstva. Iskazat ćemo Perron-Frobeniusov teorem koji tvrdi da, uz određene pretpostavke, postoji jedna realna svojstvena vrijednost od  $A$  čija je vrijednost veća od ostalih svojstvenih vrijednosti takva da je svojstveni vektor pridružen toj svojstvenoj vrijednosti pozitivan. Pokazat ćemo što su ujednačene particije grafa te ćemo definirati Rayleighov kvocijent koji nam je potreban u proučavanju ispreplitanja svojstvenih vrijednosti.

U četvrtom poglavlju koristimo Perron-Frobeniusovu teoriju i ispreplitanja za pronalazak gornje i donje granice za najveću svojstvenu vrijednost povezanog grafa. Reprezentirat ćemo  $ADE$ -dijagrame i proširene  $ADE$ -dijagrame. Iskazat ćemo i dokazati Smithov teorem koji nam daje sve grafove čija je najveća svojstvena vrijednost manja od 2 ili jednaka 2.

U petom poglavlju bavit ćemo se sistemima korijena. Definirat ćemo bazu sistema korijena, pojam ireducibilnosti te Cartanovu matricu. Sisteme korijena možemo reprezentirati Coxeterovim grafovima, tj. Dynkinovim dijagramima, ako se radi o grafu s višestrukim bridovima. Uočit ćemo povezanost grafova iz Smithovog teorema čija je najveća svojstvena vrijednost manja od 2 s Dynkinovim dijagramima čiji su korijeni iste duljine.

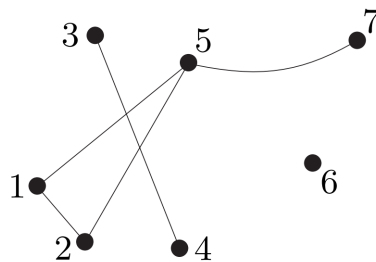
# Poglavlje 1

## Uvod u teoriju grafova

U ovom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i definicije teorije grafova potrebni za razumijevanje i dokazivanje tvrdnji u nastavku rada. Navedene pojmove i definicije možete pronaći u prvim poglavljima knjiga [4] i [9].

**Definicija 1.1.** Za uređeni par  $\Gamma = (V, E)$  kažemo da je graf, ako je  $V$  konačan skup, a  $E$  je skup dvočlanih podskupova od  $V$ . Elementi skupa  $V = V(\Gamma)$  nazivaju se vrhovi grafa, a elementi skupa  $E = E(\Gamma)$  nazivaju se bridovi grafa.

Oznaka  $V$  za skup vrhova dolazi od engleske riječi *vertex* za vrh, a oznaka  $E$  za skup bridova od engleske riječi *edge* za brid. Graf prikazujemo crtajući vrhove kao točke, a bridove kao linije. Način na koji crtamo graf je nevažan, bitna je samo informacija koji vrhovi čine brid, a koji ne čine brid.



Slika 1.1: Graf  $\Gamma = (V, E)$ , gdje je  $V = \{1, \dots, 7\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$ <sup>1</sup>

U našoj definiciji grafa, bridovi su dvočlani skupovi, tj. neuređeni parovi. Dakle, brid  $\{3, 4\}$  sa slike 1.1 je isti kao i brid  $\{4, 3\}$ . Ova vrsta grafa naziva se još i *neusmjereni graf*. Za graf čiji su bridovi uređeni parovi kažemo da je *usmjereni graf*. Prikazujući graf

<sup>1</sup>Slika preuzeta iz [9] (9.2.2022.).



crtanjem, to pokazujemo pomoću strelica. Za brid  $(u, v)$ , gdje su  $u, v$  vrhovi grafa, crtamo strelicu koja počinje u vrhu  $u$  i završava u vrhu  $v$ .

**Definicija 1.2.** Za graf  $\Gamma$  kažemo da je konačan ako su skupovi  $E(\Gamma)$  i  $V(\Gamma)$  konačni.

S obzirom na to da promatramo konačne grafove, za graf  $\Gamma$  možemo pisati  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Broj vrhova  $|V| = n$  zove se *red grafa*  $\Gamma$ , a broj bridova  $|E| = m$  *veličina grafa*  $\Gamma$ . Za graf  $\Gamma$  za koji vrijedi  $|V| \in \{0, 1\}$  kažemo da je *trivijalan graf*, a inače kažemo da je *netrivijalan*.

**Definicija 1.3.** Za brid  $e = \{u, v\} = uv$  kažemo da spaja vrhove  $u$  i  $v$ . Kažemo da su vrhovi  $u$  i  $v$  grafa  $\Gamma$  susjedni te ih zovemo krajevima brida. Također, kažemo da je vrh  $u$  incidentan s bridom  $e$ . Naravno,  $v$  je također incidentan s bridom  $e$ .

Bridovi s barem jednim zajedničkim krajem zovu se *susjedni bridovi*. Skup svih bridova iz  $E$  čiji jedan kraj čini vrh  $v$  označavamo s  $E(v)$ .

Pojam grafa kojeg promatramo u radu ne može sadržavati petlje, tj. bridove koji počinju i završavaju u istoj točki.<sup>2</sup>

**Primjer 1.4.** Pogledajmo graf sa slike 1.1.

Skup bridova jednak je

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$$

pa su vrhovi 1 i 2, 1 i 5, 2 i 5, 3 i 4 te 5 i 7 susjedni. Vrh 6 nije susjedan niti s jednim vrhom grafa jer ne postoji brid koji ih spaja. Analogno nađemo ostale nesusjedne vrhove. Susjedni bridovi su

$$\{1, 2\} \text{ i } \{2, 5\}, \{2, 1\} \text{ i } \{1, 5\}, \{1, 5\} \text{ i } \{5, 7\} \text{ te } \{2, 5\} \text{ i } \{5, 7\}$$

jer imaju zajednički vrh. Brid  $\{3, 4\}$  nije susjedan niti s jednim bridom jer nema niti jedan zajednički kraj brida s ostalim bridovima iz grafa. Analogno nađemo ostale nesusjedne bridove.

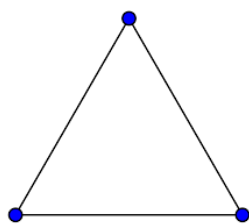
**Definicija 1.5.** Graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna naziva se *potpuni graf*.

Potpuni graf s  $n$  vrhova označavamo s  $K_n$ . Za graf  $K_3$  kažemo da je *trokut*.

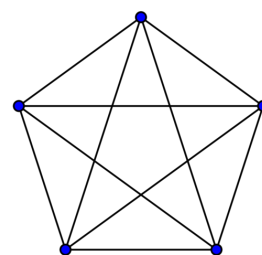
<sup>2</sup>Nekad se u literaturi promatraju multigrafovi, tj. grafovi s višestrukim bridovima, pa se grafovi kao u definiciji 1.1 u tom kontekstu nazivaju jednostavnim grafovima. Primjer multigrafa možemo vidjeti na slici 1.5.

<sup>2</sup>Slika preuzeta s [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete\\_graph\\_K3.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete_graph_K3.svg) (24.1.2022.).

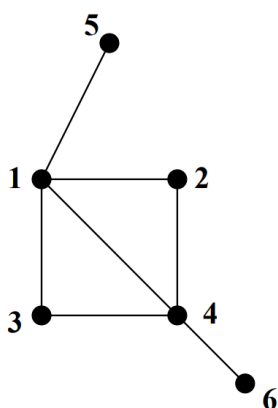
<sup>3</sup>Slika preuzeta s [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete\\_graph\\_K5.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete_graph_K5.svg) (24.1.2022.).



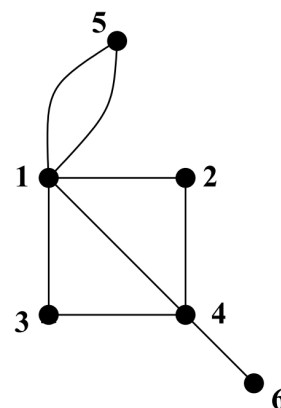
Slika 1.2: Graf  $K_3^2$



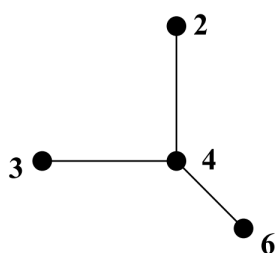
Slika 1.3: Graf  $K_5^3$



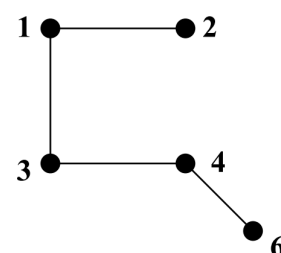
Slika 1.4: Jednostavan graf<sup>4</sup>



Slika 1.5: Multigraf<sup>4</sup>



Slika 1.6: <sup>4</sup>



Slika 1.7: <sup>4</sup>

Neka su  $\Gamma = (V, E)$  i  $\Gamma' = (V', E')$  dva grafa. Ako je  $V' \subseteq V$  i  $E' \subseteq E$ , tada kažemo da je graf  $\Gamma'$  *podgraf* grafa  $\Gamma$  i pišemo  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ . Kažemo da  $\Gamma$  sadrži  $\Gamma'$ . Ako je  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , ali  $\Gamma' \neq \Gamma$ , kažemo da je  $\Gamma'$  *pravi podgraf* od  $\Gamma$  i pišemo  $\Gamma' \subset \Gamma$ . Ako je  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  i  $\Gamma'$  sadrži sve

<sup>4</sup>Slika preuzeta s [https://courses.cit.cornell.edu/info2950\\_2012sp/graph.pdf](https://courses.cit.cornell.edu/info2950_2012sp/graph.pdf) (24.1.2022.).

bridove  $uv \in E$ , gdje su  $u, v \in V'$ , tada kažemo da je graf  $\Gamma'$  *inducirani podgraf* od  $\Gamma$ .

**Primjer 1.6.** *Slike 1.6 i 1.7 prikazuju dva podgrafa grafa sa slike 1.4. Prvi podgraf je inducirani podgraf jer svi bridovi između vrhova 2, 3, 4 i 6 koji se nalaze u skupu bridova grafa sa slike 1.4, također su i u skupu bridova ovog graf. Drugi podgraf nije inducirani podgraf jer mu nedostaju bridovi  $\{2, 4\}$  i  $\{1, 4\}$ .*

**Definicija 1.7.** *Stupanj vrha  $v$  grafa  $\Gamma$  definiramo kao broj bridova koji su incidentni s  $v$ . Označavamo ga s  $d(v)$ . Vrh stupnja 0 zovemo izolirani vrh, a vrh stupnja 1 zovemo krajnji vrh. Definiramo*

$$\delta(\Gamma) := \min \{ d(v) \mid v \in V \},$$

$$\Delta(\Gamma) := \max \{ d(v) \mid v \in V \},$$

$$d(\Gamma) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v),$$

gdje je  $\delta(\Gamma)$  minimalni stupanj grafa,  $\Delta(\Gamma)$  maksimalni stupanj grafa te  $d(\Gamma)$  prosječni stupanj grafa.

**Primjer 1.8.** *Pogledajmo jednostavan graf sa slike 1.4 sa skupom vrhova  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Stupnjevi vrhova grafa jednaki su:*

$$d(1) = 4, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 4, d(5) = 1, d(6) = 1.$$

*Minimalni stupanj grafa jednak je 1, maksimalni stupanj 4, a prosječni stupanj jednak je  $\frac{7}{3} \approx 2.3$ .*

**Definicija 1.9.** *Za graf  $\Gamma$  kažemo da je regularan ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je  $\Gamma$   $r$ -regularan ako je  $d(v) = r$ , za svaki  $v \in V(\Gamma)$ . Cijeli broj  $r$  tada ćemo zvati stupanj regularnosti grafa  $\Gamma$ .*

**Primjer 1.10.** *Graf  $K_3$  sa slike 1.2 je 2-regularan graf, a graf  $K_5$  sa slike 1.3 je 4-regularan graf.*

**Definicija 1.11.** *Šetnja  $W$  u grafu  $\Gamma$  konačan je niz  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m$ , gdje je  $m \geq 0$ , čiji su članovi naizmjenice vrhovi i bridovi grafa  $\Gamma$  sa svojstvom da su krajevi brida  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$  za svaki  $i = 1, \dots, m$ . Kažemo da je  $W$  šetnja od  $v_0$  do  $v_m$  ili da je  $W$   $(v_0, v_m)$ -šetnja,*

Primijetimo da je u jednostavnom grafu šetnja potpuno određena nizom svojih vrhova  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_m$ .

**Definicija 1.12.** Šetnja u kojoj su svi bridovi različiti naziva se staza. Ako su pritom i svi vrhovi, osim eventualno početnog i krajnjeg, različiti, takvu stazu nazivamo put. Za šetnju kažemo da je zatvorena ako je  $v_0 = v_m$ , a zatvoreni put nazivamo ciklusom.

Duljinu šetnje  $W$  definiramo kao broj bridova od  $W$ . Put od  $n$  vrhova u nekom grafu je njegov podgraf. Oznaka za taj graf je  $P_n$ . Uočimo,  $P_1 = K_1$ .

**Primjer 1.13.** Pogledajmo jednostavan graf sa slike 1.4 s  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Niz 5, {5, 1}, 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4, {4, 6}, 6, {6, 4}, 4, {4, 3}, 3 je šetnja  $W$  od vrha 5 do vrha 3.

Niz 5, {5, 1}, 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4, {4, 1}, 1, {1, 3}, 3 je staza od vrha 5 do vrha 3.

Niz 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4, {4, 3}, 3 je put od vrha 1 do vrha 3.

Niz 1, {1, 2}, 2, {2, 4}, 4, {4, 3}, 3, {3, 1}, 1 je ciklus.

**Definicija 1.14.** Za dva vrha  $u$  i  $v$  grafa  $\Gamma$  kažemo da su povezani ako postoji  $(u, v)$ -put u  $\Gamma$ .

**Definicija 1.15.** Za graf  $\Gamma$  kažemo da je povezan ako za svaki par vrhova postoji put između njih. Nepovezani graf se sastoji od više povezanih dijelova koji se nazivaju komponente.

**Primjer 1.16.** Graf sa slike 1.1 je primjer nepovezanog grafa koji ima 3 komponente povezanosti, a grafovi s preostalim slika 1.2 - 1.7 su povezani grafovi.

**Definicija 1.17.** Za usmjereni graf  $\Gamma$  kažemo da je čvrsto povezan ako za svaka dva vrha  $u, v$  postoji usmjereni put od  $u$  do  $v$ , to jest postoje vrhovi  $u = v_0, v_1, \dots, v_m = v$  takvi da  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  za  $1 \leq i \leq m$ .

**Definicija 1.18.** Udaljenost između vrhova  $u$  i  $v$  u grafu  $\Gamma$  definiramo kao duljinu najkraće šetnje među njima, tj. broj bridova kojima se ona koristi. Oznaka za tu udaljenost je  $\partial(u, v)$ .

$\partial(u, v)$  ćemo zvati funkcijom udaljenosti. Očito vrijedi  $\partial(u, v) = \partial(v, u)$  jer promatramo neusmjerene grafove.

**Definicija 1.19.** Dijametar povezanog grafa  $\Gamma$  definiramo kao najveću vrijednost funkcije udaljenosti dvaju vrhova. Dijametar grafa  $\Gamma$  označavamo s  $\text{diam}(\Gamma)$ .

**Primjer 1.20.** Izračunajmo dijametar grafa sa slike 1.6.

Udaljenosti između vrhova u grafu iznose:

$$\partial(2, 2) = \partial(3, 3) = \partial(4, 4) = \partial(6, 6) = 0,$$

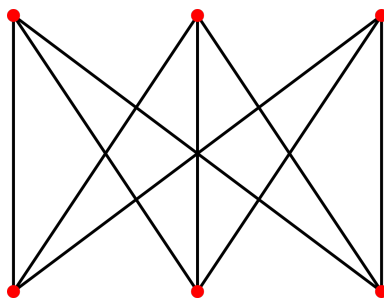
$$\partial(2, 4) = \partial(3, 4) = \partial(4, 6) = 1,$$

$$\partial(2, 3) = \partial(2, 6) = \partial(3, 6) = 2 .$$

Najveći broj između 0, 1 i 2 je 2 pa zaključujemo da je dijametar grafa jednak 2. Analogno, dijametar grafa sa slike 1.7 jednak je 4.

**Definicija 1.21.** Ako skup vrhova grafa  $\Gamma$  možemo razdvojiti na dva disjunktna skupa  $A$  i  $B$  tako da svaki brid od  $\Gamma$  spaja neki vrh skupa  $A$  s nekim vrhom iz skupa  $B$ , onda kažemo da je  $\Gamma$  bipartitan graf.

**Primjer 1.22.** Potpun bipartitan graf je onaj bipartitan graf s particijom skupa vrhova  $V(\Gamma) = A \cup B$  kod kojeg je svaki vrh iz skupa  $A$  spojen sa svakim iz  $B$ . Ako je  $|A| = r$ , te  $|B| = s$ , onda takav graf označavamo s  $K_{r,s}$ . Jasno je da vrijedi da graf  $K_{r,s}$  ima  $r + s$  vrhova i  $rs$  bridova.



Slika 1.8: Graf  $K_{3,3}$ <sup>5</sup>

**Definicija 1.23.** Aciklički graf  $\Gamma$ , tj. onaj graf koji ne sadrži cikluse, naziva se šuma. Graf  $\Gamma$  koji je povezana šuma naziva se stablo. Slijedi da je šuma graf čije su komponente stabla.

<sup>5</sup>Slika preuzeta s [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete\\_bipartite\\_graph\\_K3,3.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete_bipartite_graph_K3,3.svg) (7.2.2022.).

## Poglavlje 2

### Spektar grafa

Prvo ćemo ponoviti neke osnovne pojmove iz linearne algebre, koje ćemo u nastavku koristiti u proučavanju grafova. Ovaj dio poglavlja sadrži pojmove i rezultate iz knjige [1].

**Definicija 2.1.** *Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  i neka je  $A$  linearan operator na prostoru  $V$ . Kaže se da je skalar  $\theta_0 \in \mathbb{F}$  svojstvena vrijednost operatora  $A$  ako postoji vektor  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ , takav da je  $Ax = \theta_0 x$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora  $A$  naziva se spektar operatora  $A$  i označava sa  $\sigma(A)$ .*

Vektor  $x$  iz navedene definicije naziva se *svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\theta_0$* . Treba primijetiti da svojstveni vektor nikako nije jedinstven: ako je  $x$  svojstveni vektor pridružen  $\theta_0$ , onda je i  $\alpha x$  svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Zaista,  $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\theta_0 x) = \theta_0(\alpha x)$ . Štoviše, neka svojstvena vrijednost  $\theta_0$  operatora  $A$  može posjedovati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Primjer je jedinični operator  $I$ : za njega su svi vektori prostora, osim nulvektora, svojstveni za svojstvenu vrijednost 1 jer vrijedi  $Ix = 1x$ , za svaki  $x \in V$ .

Za matricu  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  definiramo transponiranu matricu  $A^T$  formulom  $A^T = (b_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$  za svaki  $i, j$ .

Neka je  $A \in M_n(\mathbb{F})$ .

**Definicija 2.2.** *Polinom  $k_A(\theta) = \det(\theta I - A)$  naziva se svojstveni polinom matrice  $A$ .*

**Definicija 2.3.** *Vektor  $x \neq 0$  koji zadovoljava  $Ax = \theta x$  naziva se desni svojstveni vektor matrice  $A$  za svojstvenu vrijednost  $\theta$ , a vektor  $y \neq 0$  koji zadovoljava  $y^T A = \theta y^T$  naziva se lijevi svojstveni vektor matrice  $A$  za svojstvenu vrijednost  $\theta$ .*

**Definicija 2.4.** *Normirani polinom najmanjeg stupnja različit od nulpolinoma koji poništava  $A$  naziva se minimalni polinom linearnog operatora  $A$ .*

**Definicija 2.5.** *Kratnost nultočke  $\theta_0$  polinoma  $k_A(\theta)$  naziva se algebarska kratnost svojstvene vrijednosti  $\theta_0$  i označavamo ju s  $l(\theta_0)$ . Maksimalan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti  $\theta_0$  naziva se geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti  $\theta_0$  i označavamo ju s  $d(\theta_0)$ .*

Može se dokazati da vrijedi  $d(\theta_0) \leq l(\theta_0)$ .

U nastavku poglavlja slijedimo izlaganje iz točke 1.2 knjige [3]. Neka je  $\Gamma$  konačan, jednostavan i neusmjeren graf te pretpostavimo da je  $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Prisjetimo se, ako su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  spojeni bridom, kažemo da su  $v_i$  i  $v_j$  susjedni vrhovi.

**Definicija 2.6.** *Matrica susjedstva grafa  $\Gamma$  je matrica  $A = A(\Gamma)$  čiji su elementi  $a_{ij}$  definirani s*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako su } v_i \text{ i } v_j \text{ susjedni;} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Iz definicije slijedi da je  $A$  realna simetrična matrica i da je trag od  $A$  jednak nuli.

Ako je  $\Gamma$  multigraf,  $a_{ij}$  odgovara broju bridova od  $i$  do  $j$ .

U nastavku pod spektrom podrazumijevamo spektar nad poljem kompleksnih brojeva.

Budući da retci i stupci od  $A$  odgovaraju proizvoljnom označavanju vrhova  $\Gamma$ , zanimati će nas svojstva matrice susjedstva koja su invarijantna prema permutacijama redaka i stupaca (vidi Primjer 2.7). Neka od tih svojstava su spektralna svojstva od  $A$ .

Spektar matrice susjedstva grafa  $\Gamma$  ne ovisi o odabiru numeracije vrhova grafa  $\Gamma$  jer slične matrice imaju isti spektar.

**Primjer 2.7.** *Neka je  $\Gamma$  jednak putu  $P_3$  s tri vrha i dva brida. Ako po proizvoljnom redosljedju numeriramo tri vrha od  $\Gamma$ , dobivena matrica susjedstva  $A$  jednaka je jednoj od navedenih:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Izračunamo svojstveni polinom i spektar te dobivamo*

$$k_A(\theta) = \theta^3 - 2\theta, \quad \sigma(A) = \{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}.$$

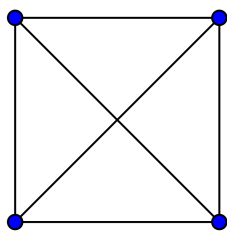
*Svojstveni vektori jednaki su*

$$(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}), (1, 0, -1), (\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}).$$

Pretpostavimo da je  $\theta$  svojstvena vrijednost od  $A$ . Budući da je  $A$  realna i simetrična, slijedi da je  $\theta$  realna i da je kratnost od  $\theta$ , gdje je  $\theta$  korijen jednadžbe  $\det(\theta I - A) = 0$ , jednaka dimenziji prostora svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti  $\theta$ .

**Definicija 2.8.** *Spektar grafa  $\Gamma$  definiramo kao skup svih svojstvenih vrijednosti od  $A(\Gamma)$ . Ako su različite svojstvene vrijednosti od  $A(\Gamma)$  jednake  $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_{s-1}$  s kratnostima  $m(\theta_0), m(\theta_1), \dots, m(\theta_{s-1})$ , tada spektar grafa zapisujemo kao:*

$$\text{Spec } \Gamma = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \dots & \theta_{s-1} \\ m(\theta_0) & m(\theta_1) & \dots & m(\theta_{s-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$



Slika 2.1: Graf  $K_4$ <sup>1</sup>

**Primjer 2.9.** *Promotrimo potpuni graf  $K_4$  sa slike 2.1. Graf  $K_4$  ima matricu susjedstva*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*svojstveni polinom*

$$k_A(\theta) = \theta^4 - 6\theta^2 - 8\theta - 3 = (\theta - 3)(\theta + 1)^3$$

*te spektar*

$$\text{Spec } K_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Slika preuzeta s [https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Complete\\_graph\\_K4](https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Complete_graph_K4) (7.2.2022.).



U nastavku, svojstvene vrijednosti grafa  $\Gamma$  odnose se na svojstvene vrijednosti od  $A = A(\Gamma)$ , a svojstveni polinom grafa  $\Gamma$ , s oznakom  $\chi_\Gamma(\theta)$ , odnose se na svojstveni polinom od  $A$ . Pretpostavimo da je svojstveni polinom od  $\Gamma$  jednak

$$\chi_\Gamma(\theta) = \theta^n + c_1\theta^{n-1} + c_2\theta^{n-2} + c_3\theta^{n-3} + \dots + c_n. \quad (2.3)$$

Prema Vieteovim formulama,  $-c_1$  je jednak sumi svojstvenih vrijednosti. To je također trag od  $A$  i on iznosi 0 pa slijedi da je  $c_1 = 0$ . Svi koeficijenti se mogu izraziti u terminima glavnih minora od  $A$ , gdje je glavna minora determinanta podmatrice dobivene uzimanjem istog podskupa redaka i stupaca. To dovodi do sljedećeg jednostavnog rezultata.

**Propozicija 2.10.** *Koeficijenti svojstvenog polinoma grafa  $\Gamma$  zadovoljavaju*

- (i)  $c_1 = 0$ ;
- (ii)  $-c_2$  je broj bridova od  $\Gamma$ ;
- (iii)  $-c_3$  je dvostruko veći od broja trokuta  $K_3$  u  $\Gamma$ .

*Dokaz.* Za svaki  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , broj  $(-1)^i c_i$  je suma glavnih minora od  $A$  koje imaju  $i$  redaka i stupaca.

- (i) Kako su svi dijagonalni elementi od  $A$  jednaki nuli, slijedi da je  $c_1 = 0$ .
- (ii) Glavna minora s dva retka i stupca, čiji retci imaju barem jedan element različit od nule, mora biti oblika

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Postoji jedna takva minora za svaki par susjednih vrhova od  $\Gamma$  i svaka ima vrijednost  $-1$ . Stoga  $(-1)^2 c_2 = -|E(\Gamma)|$ .

- (iii) Do na permutacije redaka i stupaca matrice imamo tri mogućnosti za netrivialne glavne minore s tri retka i stupca:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

a jedina minora koja ima ne-nul vrijednost je zadnja minora s vrijednošću 2. Ta glavna minora odgovara trima međusobno susjednim vrhovima u  $\Gamma$  te tako dobivamo traženi opis za  $c_3$ . □

**Primjer 2.11.** Iz primjera 2.9 vidimo da graf  $K_4$  ima svojstveni polinom

$$\chi_{\Gamma}(\theta) = \theta^4 - 6\theta^2 - 8\theta - 3.$$

Po (2.3) zaključujemo da su koeficijenti svojstvenog polinoma

$$c_1 = 0, c_2 = -6, c_3 = -8, c_4 = -3.$$

Sa slike 2.1 vidimo da je broj bridova od  $K_4$  jednak 6, a broj trokuta  $K_3$  jednak 4. Jer vrijedi  $c_1 = 0$ ,  $-c_2 = 6$  i  $-2c_3 = 8$ , zaista smo provjerili propoziciju 2.10 za graf  $\Gamma = K_4$ .

Pretpostavimo da je  $A$  matrica susjedstva grafa  $\Gamma$ . Tada skup polinoma od  $A$ , s kompleksnim koeficijentima, tvori algebru s uobičajenim matričnim operacijama. Ova algebra je konačne dimenzije kao kompleksan vektorski prostor. Dimenzija algebre susjedstva je manja ili jednaka  $n^2$  jer je  $n^2$  dimenzija prostora svih matrica reda  $n$ . Preciznije, Cayley-Hamiltonov teorem tvrdi da  $A$  zadovoljava vlastitu svojstvenu jednadžbu pa je dimenzija pripadne algebre najviše  $n$ , gdje je  $n$  broj vrhova u  $\Gamma$ . Također je asocijativna i komutativna algebra s jedinicom  $I$ .

**Definicija 2.12.** Algebru susjedstva grafa  $\Gamma$  definiramo kao algebru polinoma matrice susjedstva  $A$  grafa  $\Gamma$ . Algebru susjedstva od  $\Gamma$  označavamo s  $\mathcal{A}(\Gamma)$ .

Rezultate o  $\mathcal{A}(\Gamma)$  možemo dobiti proučavanjem potencija od  $A$  jer je svaki element algebre susjedstva linearna kombinacija potencija od  $A$ .

**Primjer 2.13.** Pogledajmo potencije matrica susjedstava grafova  $P_2$  i  $P_3$  i odredimo dimenzije pripadnih algebri susjedstava.

Matrica susjedstva grafa  $P_2$  jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Očito je  $A^0 = I$ ,  $A^1 = A$  te

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Prve dvije potencije,  $I$  i  $A$ , linearno su nezavisne. No  $A^2$  možemo dobiti kao linearnu kombinaciju prvih dviju potencija. Zaključujemo da je algebra susjedstva grafa  $P_2$  komutativna asocijativna algebra dimenzije 2.

Analogno, za graf  $P_3$  i pripadnu matricu susjedstva

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

izračunamo

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je  $A^3 = 2 \cdot A$  pa zaključujemo da je algebra susjedstva grafa  $P_3$  komutativna asocijativna algebra dimenzije 3.

**Lema 2.14.** Neka je  $l$  nenegativni cijeli broj. Tada je  $(A^l)_{ij}$  broj šetnji duljine  $l$  od vrha  $i$  do  $j$ .

*Dokaz.* Tvrdnja vrijedi za  $l = 0$  jer je  $A^0 = I$  i za  $l = 1$  jer je  $A^1 = A$ , a  $A$  je matrica susjedstva. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $l = L$ . Postoji bijekcija iz skupa šetnji duljine  $L + 1$  od  $v_i$  do  $v_j$  u skup šetnji duljine  $L$  od  $v_i$  do vrhova  $v_h$ , koji su susjedni s  $v_j$ . Prema tome, broj ovakvih šetnji je

$$\sum_{\{v_h, v_j\} \in E(\Gamma)} (A^L)_{ih} = \sum_{h=1}^n (A^L)_{ih} a_{hj} = (A^{L+1})_{ij}.$$

Slijedi da je broj šetnji duljine  $L + 1$  od  $v_i$  do  $v_j$  jednak  $(A^{L+1})_{ij}$ . Općeniti rezultat slijedi indukcijom.  $\square$

Iz prethodne leme slijedi da je  $(A^2)_{ii}$  stupanj vrha  $i$ , a  $trA^2 = 2|E(\Gamma)|$ . Slično,  $trA^3 = 6t$ , gdje je  $t$  broj trokuta  $K_3$  u  $\Gamma$ .

**Propozicija 2.15.** Neka je  $\Gamma$  povezan graf s algebrom susjedstva  $\mathcal{A}(\Gamma)$  i dijametrom  $diam$ . Tada  $\mathcal{A}(\Gamma)$  ima dimenziju barem  $diam + 1$ .

*Dokaz.* Neka su  $u$  i  $v$  vrhovi grafa  $\Gamma$  takvi da vrijedi  $\partial(u, v) = diam$  i pretpostavimo da je

$$u = w_0, w_1, \dots, w_{diam} = v$$

šetnja duljine  $diam$ . Tada, za svaki  $i \in \{1, 2, \dots, diam\}$ , postoji barem jedna šetnja duljine  $i$ , ali ne i kraća šetnja, spajajući  $w_0$  i  $w_i$ . Stoga, prema lemi 2.14,  $A^i$  ima nenul elemente na mjestu gdje su odgovarajući elementi od  $I, A, A^2, \dots, A^{i-1}$  jednaki 0. Slijedi da  $A^i$  nije linearno zavisna o  $\{I, A, A^2, \dots, A^{i-1}\}$  te da je  $\{I, A, A^2, \dots, A^{diam}\}$  linearno nezavisan skup u  $\mathcal{A}(\Gamma)$ . Kako ovaj skup ima  $diam + 1$  elemenata, propozicija je dokazana.  $\square$

Algebra susjedstva i spektar grafa  $\Gamma$  su u bliskoj vezi. Ako matrica susjedstva ima  $s$  različitih svojstvenih vrijednosti te znamo da je realna simetrična matrica, minimalni polinom je stupnja  $s$ . Slijedi da je dimenzija algebre susjedstva jednaka  $s$ . Tako imamo sljedeću granicu za broj različitih svojstvenih vrijednosti.

**Korolar 2.16.** Povezan graf s dijametrom  $diam$  ima barem  $diam + 1$  različitih svojstvenih vrijednosti.

## Poglavlje 3

### Perron-Frobeniusov teorem

U ovom poglavlju slijedimo 2. poglavlje knjige [5] o Perron-Frobeniusovoj teoriji. Promatrat ćemo matricu  $A$ , čiji su svi elementi pozitivni, kao matricu susjedstva grafa. Proučavajući Perron-Frobeniusovu teoriju dolazimo do korisnih rezultata u teoriji grafova. Vidjet ćemo da postoji jedna realna svojstvena vrijednost od  $A$  čija je vrijednost veća od ostalih svojstvenih vrijednosti, a svojstveni vektor pridružen toj svojstvenoj vrijednosti je pozitivan. Ovi rezultati se generaliziraju na nenegativne matrice.

#### 3.1 Simultana dijagonalizacija

**Definicija 3.1.** Za matricu  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$  definira se hermitski adjungirana matrica  $A^* = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$  s  $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , za sve  $i, j$  (gdje je  $\bar{a}_{ji}$  kompleksno konjugiran broj broju  $a_{ji}$ ).

**Definicija 3.2.** Za matricu  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$  kažemo da je hermitska ako vrijedi  $A^* = A$ .

**Primjer 3.3.** Pogledajmo dvije matrice i njihove hermitski adjungirane matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & i \\ 3+i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$
$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 3-i & i \\ 1 & 4 & 1 \\ -i & 1 & 3 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Napomena 3.4.** Ako svi elementi matrice  $A$  imaju realne vrijednosti, tada je  $A^*$  samo transponirana matrica od  $A$ .

**Definicija 3.5.** Za matricu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kažemo da je simetrična ako vrijedi  $A = A^* = A^T$ .

Neka je  $V$  kompleksan vektorski prostor konačne dimenzije  $n$  i fiksirane baze. Skalarni produkt na  $V$  možemo definirati ovako:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = \bar{x}^\top y, \quad x, y \in V, \quad (3.1)$$

gdje su  $x_i$  i  $y_i$   $i$ -te koordinate vektora  $x$  i  $y$  iz fiksirane baze, a crtica označava kompleksno konjugiranje.

**Lema 3.6.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitska matrica. Tada su sve svojstvene vrijednosti od  $A$  realne.*

**Lema 3.7.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitska matrica te neka su  $x$  i  $y$  njeni svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima. Tada su  $x$  i  $y$  ortogonalni.*

*Dokaz.* Neka su  $x$  i  $y$  svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , tj. vrijedi  $Ax = \theta_1 x$  i  $Ay = \theta_2 y$ . Tada

$$(Ax, y) = (Ax)^* y = x^* A^* y = x^* Ay = (x, Ay) .$$

Vrijedi

$$(Ax, y) = \theta_1 (x, y) , \quad (x, Ay) = \theta_2 (x, y) , \quad (\theta_1 - \theta_2)(x, y) = 0 .$$

Budući da su  $\theta_1$  i  $\theta_2$  različite svojstvene vrijednosti, slijedi  $(x, y) = 0$ .  $\square$

**Teorem 3.8.** *Neka je  $A$  hermitski operator na  $V$ . Tada postoji ortonormirana baza od  $V$  koja se sastoji od svojstvenih vektora od  $A$ . Drugim riječima, postoji ortonormirana baza  $e$  od  $V$  u kojoj je matrica  $A(e)$  dijagonalna.*

Dokaz teorema koristi lemu 3.7 i može se pronaći u [14].

**Propozicija 3.9.** *Pretpostavimo da je  $\mathcal{A}$  familija komutirajućih hermitskih linearnih operatora na  $V$ , tj. takvih da je  $AB = BA$  za  $A, B \in \mathcal{A}$ . Tada  $V$  ima bazu koja se sastoji od zajedničkih svojstvenih vektora od svih  $A \in \mathcal{A}$ .*

*Dokaz.* Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po dimenziji prostora  $V$ . Bazu indukcije čini slučaj  $\dim V = 1$ , gdje je tvrdnja (na trivijalan način) točna. Pretpostavimo da prostor  $V$  dimenzije  $n$  ima bazu koja se sastoji od zajedničkih svojstvenih vektora od svih  $A \in \mathcal{A}$ . Ako je svaki  $A \in \mathcal{A}$  višekratnik identitete  $I$ , onda je sve jasno. Inače, neka  $A \in \mathcal{A}$  nije višekratnik od  $I$ . Ako je  $Au = \theta u$  i  $B \in \mathcal{A}$ , tada  $A(Bu) = BAu = \theta Bu$  tako da je taj svojstveni potprostor invarijantan na  $B$ . Po pretpostavci indukcije možemo odabrati bazu koja se sastoji od zajedničkih svojstvenih vektora za svaki  $B \in \mathcal{A}$  u svakom svojstvenom prostoru. Unija ovih baza je baza od  $V$  koju smo tražili.  $\square$

Kvadratnu matricu  $A$  možemo promatrati kao linearni operator na vektorskom prostoru s fiksiranom bazom. Matrica hermitskog operatora je hermitska matrica ako se gleda s obzirom na neku ortonormiranu bazu, no, s obzirom na proizvoljnu bazu, to ne mora vrijediti. Matrica  $A$  biti će hermitska upravo kada je  $A = \bar{A}^T$ ; posebno, realna simetrična matrica je hermitska.

## 3.2 Perron-Frobeniusov teorem

**Definicija 3.10.** Za vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  kažemo da je pozitivan (nenegativan), tj. pišemo  $x > 0$  ( $x \geq 0$ ), ako su mu svi elementi pozitivni (nenegativni).

**Definicija 3.11.** Za matricu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kažemo da je pozitivna (nenegativna), tj. pišemo  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ), ako su joj svi elementi pozitivni (nenegativni).

**Primjer 3.12.** Vektor  $x = (1, 2, 3)$  je pozitivan vektor, a  $y = (1, 0, 3)$  nenegativan.

**Primjer 3.13.** Neka su  $A$  i  $B$  dvije kvadratne matrice reda 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  je nenegativna matrica, a  $B$  je pozitivna matrica.

Neka je  $T$  nenegativna realna kvadratna matrica reda  $n$ .

**Definicija 3.14.** Za matricu  $T$  kažemo da je primitivna ako postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $T^k > 0$ .

**Definicija 3.15.** Za matricu  $T$  kažemo da je ireducibilna ako za sve  $i, j$  postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $(T^k)_{ij} > 0$ .

**Primjer 3.16.** Promotrimo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo prvih nekoliko potencija:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrica  $A$  je ireducibilna jer za svaki par  $(i, j)$  postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $(T^k)_{ij} > 0$ .

Zaista,

$$\begin{aligned}(A^1)_{12} &= (A^1)_{23} = (A^1)_{31} = (A^1)_{32} = 1 > 0, \\(A^2)_{13} &= (A^2)_{21} = (A^2)_{22} = (A^2)_{33} = 1 > 0, \\(A^3)_{11} &= 1 > 0.\end{aligned}$$

Matrica  $A$  je primitivna jer za  $k = 5$ , svi elementi matrice  $A^k = A^5$  su pozitivni brojevi.

**Primjer 3.17.** Jedinična matrica  $I$  reda  $n > 1$  nije ireducibilna. Potenciranjem jedinične matrice uvijek dobijemo jediničnu matricu pa nikada nećemo dobiti pozitivne nedijagonalne elemente.

Tvrđnja iduće leme je očita.

**Lema 3.18.** Neka je  $T$  primitivna matrica. Tada je  $T$  ireducibilna matrica.

**Primjer 3.19.** Pokažimo da ireducibilna matrica ne mora biti i primitivna.

Neka je

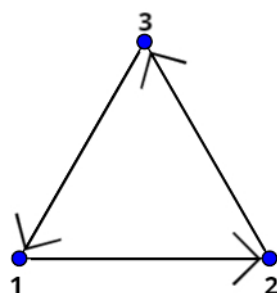
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica  $A$  je ireducibilna. Postoji li  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $A^k > 0$ ? Svaka neparna potencija od  $A$  jednaka je matrici  $A$ , a svaka parna potencija od  $A$  jednaka je  $A^2$ . Zaključujemo da ne postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $A^k > 0$ , tj.  $A$  nije primitivna matrica.

**Teorem 3.20.** Neka je  $\Gamma$  usmjereni graf s pridruženom matricom susjedstva  $T$ . Matrica  $T$  je ireducibilna ako i samo ako je graf  $\Gamma$  čvrsto povezan.

*Dokaz.* Neka je  $T$  ireducibilna matrica reda  $n$  te tvrdnju dokažimo kontradikcijom. Pretpostavimo da  $\Gamma$  nije čvrsto povezan. Tada postoje neka dva vrha, recimo  $v_i$  i  $v_j$ , koji nisu povezani. Neka je  $S_1$  skup vrhova povezanih s vrhom  $v_i$ , a  $S_2$  je skup preostalih vrhova. Uočimo, nijedan vrh  $v_l$  iz  $S_2$  nije povezan s vrhom  $v_q$  iz  $S_1$  jer bi inače vrijedilo  $v_l \in S_1$ . Oba skupa su neprazna jer je  $v_i \in S_1$  i  $v_j \in S_2$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se prvih  $r$  vrhova nalazi u  $S_1$ , a da su preostali u  $S_2$ . Matrica susjedstva  $T$  usmjerenog grafa definirana je tako da je  $T_{ij}$  broj usmjerenih bridova od vrha  $i$  do vrha  $j$ . Slijedi da je  $T_{ij} = 0$  i  $T_{ji} = 0$ , za sve  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $j \in \{r+1, \dots, n\}$ . Vidimo da  $T$  nije ireducibilna. Dolazimo do kontradikcije jer je po pretpostavci  $T$  ireducibilna.

Obratno, pretpostavimo da je  $\Gamma$  čvrsto povezan te da  $T$  nije ireducibilna. Ako obrnemo redoslijed gornjeg argumenta, graf neće biti čvrsto povezan što nas dovodi do kontradikcije.  $\square$

Slika 3.1: Usmjereni  $K_3$  graf

**Primjer 3.21.** Pogledajmo usmjereni graf sa slike 3.1. Graf sa slike je čvrsto povezan jer za svaka dva vrha postoji usmjereni put od jednog vrha do drugog. Matrica susjedstva grafa jednaka je:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunamo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica  $A$  zaista je ireducibilna.

**Lema 3.22.** Ako je  $T$  ireducibilna, onda je  $I + T$  primitivna.

*Dokaz.* Neka je  $T$  ireducibilna matrica i neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Matrica  $I + T$  bit će primitivna ako postoji neki  $n \in \mathbb{N}$  tako da su svi elementi matrice  $(I + T)^n$  pozitivni. Raspišimo  $n$ -tu potenciju od  $I + T$  pomoću binomne formule, tj.

$$(I + T)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} T^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I T^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k.$$

Jer je  $T$  ireducibilna matrica, matrica  $(I + T)^n$  na kraju će imati sve pozitivne elemente, ako je  $n$  dovoljno velik. Znači,  $I + T$  je primitivna matrica za neki  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Definicija 3.23.** Period  $d$  ireducibilne matrice  $T$  definiramo kao najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva  $k$  za koje vrijedi  $(T^k)_{ii} > 0$ .

Period  $d$  je neovisan o izboru indeksa  $i$  iz gornje definicije.



**Primjer 3.24.** Pogledajmo matricu  $A$  iz primjera 3.16 i njene potencije. Uzmimo  $i = 2$  pa vrijedi

$$(A^2)_{22} > 0, (A^3)_{22} > 0, (A^4)_{22} > 0, \dots$$

Najveći zajednički djelitelj brojeva 2, 3, 4, ..., je 1 pa je period  $d$  jednak 1. Sada uzmimo  $i = 1$  i vrijedi

$$(A^3)_{11} > 0, (A^5)_{11} > 0, \dots$$

Najveći zajednički djelitelj brojeva 3, 5, ..., je 1 pa odavde također vidimo da je period  $d$  jednak 1.

**Definicija 3.25.** Spektralni radijus matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definiramo s

$$\rho_A = \rho(A) = \max \{ |\theta| : \theta \text{ svojstvena vrijednost matrice } A \}. \quad (3.2)$$

**Teorem 3.26. (Perron-Frobeniusov teorem)** Neka je kvadratna matrica  $T \geq 0$  ireducibilna. Tada postoji jedinstveni pozitivan realan broj  $\theta_0$  sa svojstvima:

- (i) Postoji realan vektor  $x_0 > 0$  takav da je  $Tx_0 = \theta_0 x_0$ .
- (ii)  $\theta_0$  ima geometrijsku i algebarsku kratnost 1.
- (iii) Za svaku svojstvenu vrijednost  $\theta$  od  $T$  imamo  $|\theta| \leq \theta_0$ . Ako je  $T$  primitivna, tada  $|\theta| = \theta_0$  povlači  $\theta = \theta_0$ . Općenito, ako  $T$  ima period  $d$ , tada  $T$  ima točno  $d$  svojstvenih vrijednosti  $\theta$  takvih da je  $|\theta| = \theta_0$ . Preciznije, te svojstvene vrijednosti su upravo  $\theta = \theta_0 e^{\frac{2\pi i j}{d}}$  za  $j = 0, 1, \dots, d-1$ . Zapravo je čitav spektar od  $T$  invarijantan s obzirom na rotaciju kompleksne ravnine za kut  $\frac{2\pi}{d}$  oko ishodišta.
- (iv) Svaki nenegativni lijevi ili desni svojstveni vektor od  $T$  ima svojstvenu vrijednost  $\theta_0$ . Općenitije, ako  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$  i  $Tx \leq \theta x$ , tada  $x > 0$  i  $\theta \geq \theta_0$ ; štoviše,  $\theta = \theta_0$  ako i samo ako  $Tx = \theta x$ .
- (v) Ako je  $S$  matrica takva da vrijedi  $0 \leq S \leq T$  ili ako je  $S$  glavna minora od  $T$ , i  $S$  ima svojstvenu vrijednost  $\sigma$ , tada  $|\sigma| \leq \theta_0$ ; ako  $|\sigma| = \theta_0$ , tada  $S = T$ .
- (vi) Neka je  $S$  proizvoljna kompleksna matrica. Sa  $|S|$  označimo matricu s elementima  $|S|_{ij} = |S_{ij}|$ . Ako  $|S| \leq T$  i  $S$  ima svojstvenu vrijednost  $\sigma$ , tada  $|\sigma| \leq \theta_0$ . Ako vrijedi jednakost, tada  $|S| = T$ , i postoji dijagonalna matrica  $E$  s dijagonalnim elementima apsolutne vrijednosti 1 i kompleksan broj  $c$  apsolutne vrijednosti 1, tako da je  $S = cETE^{-1}$ .

Dokaz teorema može se pronaći u točki 2.2 knjige [5].

Uočimo da je  $\theta_0$  upravo spektralni radijus od  $T$ .

Zaključujemo, po tvrdnji (ii) i (iv), da ne postoji svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\theta_0$  koji je nekolinearan s  $x_0$ . Iz tvrdnje (v) slijedi da se pripadna svojstvena vrijednost  $\theta_0$  od  $T$  poveća kada se poveća bilo koji element od  $T$ .

**Primjer 3.27.** Pokažimo da matrica  $B$  zadovoljava tvrdnju (iii) iz teorema 3.26.

Neka je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uistinu, matrica  $B$  je primitivna. Po lemi 3.18,  $B$  je i ireducibilna. Period od  $B$  iznosi 1 jer je

$$(B)_{33} = 1 > 0, (B^2)_{33} = 3 > 0.$$

Spektar od  $B$  jednak je

$$\sigma(B) = \{-1, 0, 2\}.$$

Spektralni radijus  $\rho_B$  iznosi 2 jer vrijedi

$$|-1| \leq \rho_B, |0| \leq \rho_B, |2| \leq \rho_B.$$

Matrica  $B$ , s periodom  $d = 1$ , ima svojstveni potprostor dimenzije 1 za svojstvenu vrijednost 2 takvu da vrijedi  $|\theta| = \rho_B$ .

**Primjer 3.28.** Pogledajmo matricu  $A$  iz primjera 3.19. Njen period  $d$  jednak je 2. Svojstveni polinom iznosi  $k_A(\theta) = \theta^2 - 1$  i spektar je  $\sigma(A) = \{-1, 1\}$ . Spektralni radijus  $\rho(A) = \theta_0 = 1$  i vrijedi  $|-1| = \theta_0$ ,  $|1| = \theta_0$ . Zaista,  $A$  ima period jednak 2 i ima točno dvije svojstvene vrijednosti  $\theta$  takve da je  $|\theta| = \theta_0$ .

**Napomena 3.29.** U slučaju da je  $T \geq 0$ , ali nije nužno ireducibilna, možemo reći sljedeće.

- (i) Spektralni radijus  $\theta_0$  od  $T$  je svojstvena vrijednost i lijevi i desni svojstveni vektori pridruženi  $\theta_0$  su nenegativni.
- (ii) Ako je  $|S| \leq T$  i  $S$  ima svojstvenu vrijednost  $\sigma$ , tada  $|\sigma| \leq \theta_0$ .

### 3.3 Ujednačene i gotovo ujednačene particije grafa

Neka je  $\Gamma$  graf s matricom susjedstva  $A = (a_{ij})$ .  $A$  je realna simetrična matrica čiji su retci i stupci indeksirani s  $X = \{1, \dots, n\}$ . Neka je  $\pi = \{X_1, \dots, X_m\}$  particija skupa  $X$ . Matricu  $A$  particioniramo s obzirom na  $\pi$ , odnosno,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}.$$

$A_{i,j}$  označava podmatricu od  $A$ , koja je formirana od redaka s indeksima iz  $X_i$  i stupaca s indeksima iz  $X_j$ . Za  $m \times m$  matricu  $B = (b_{ij})$  kažemo da je kvocijentna matrica pridružena matrici  $A$  s obzirom na particiju  $\pi$  ako za svaki  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  vrijedi

$$b_{ij} = \frac{\sum_{s \in X_i} \sum_{t \in X_j} a_{st}}{|X_i|}, \quad (3.3)$$

tj. ako je  $b_{ij}$  prosječna vrijednost sume redaka matrice  $A_{ij}$ . Za particiju  $\pi$  kažemo da je ujednačena s obzirom na graf  $\Gamma$  i matricu  $A$  ako za svaka dva indeksa  $i, j = 1, \dots, m$  svaki vrh iz  $X_i$  ima isti broj susjeda koji se nalaze u  $X_j$ .

Zahtjev iz gornje definicije ujednačene particije znači da je broj susjeda svakog vrha iz  $X_i$  koji se nalaze u  $X_j$  upravo jednak elementu  $b_{ij}$  kvocijentne matrice.

**Primjer 3.30.** Promotrit ćemo neku realnu matricu  $A$ , ne nužno simetričnu, kako bismo objasnili kvocijentnu matricu  $B$  i njene elemente. Promotrimo sljedeću matricu čiji su retci i stupci indeksirani s elementima iz skupa  $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Neka je  $\pi = \{X_1, X_2, X_3\}$  particija od  $X$ , gdje je  $X_1 = \{1\}$ ,  $X_2 = \{2, 3\}$  i  $X_3 = \{4, 5, 6\}$ . Prikažimo matricu  $A$  particioniranu s obzirom na  $\pi$ :

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Pogledajmo podmatricu  $A_{32}$ , njezini retci su indeksirani s elementima iz skupa  $X_3$ , a stupci s elementima iz skupa  $X_2$ . Suma prvog retka te podmatrice iznosi 0 jer je  $a_{42} + a_{43} = 0$ . Suma drugog i trećeg retka također iznosi 0. Kada sumu  $0 + 0 + 0$  podijelimo s  $|X_3| = 3$ , dobijemo 0. Slijedi da element kvocijentne matrice na poziciji  $(3, 2)$  iznosi 0, tj.  $b_{32} = 0$ . Analogno, koristeći formulu (3.3), izračunamo ostale prosječne sume redaka svake podmatrice i dobijemo iduću kvocijentnu matricu  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Primjer 3.31.** Neka je  $\Gamma$  jednostavan graf sa slike 3.2. Matrica susjedstva grafa jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ujednačena particija  $\pi$  s obzirom na graf  $\Gamma$  i matricu  $A$  jednaka je

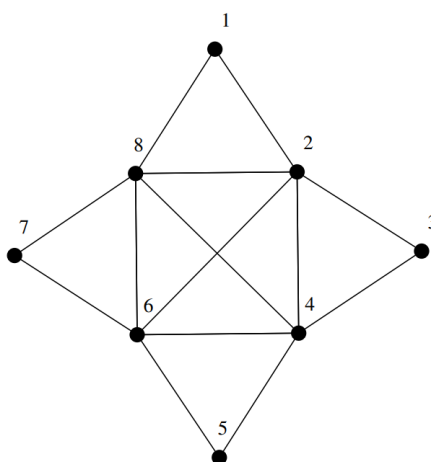
$$\pi = \{X_1, X_2\}, \text{ gdje su } X_1 = \{1, 3, 5, 7\}, X_2 = \{2, 4, 6, 8\}. \quad (3.6)$$

Po definiciji kvocijentne matrice, slijedi da je  $b_{11} = 0$ ,  $b_{12} = 2$ ,  $b_{21} = 2$ ,  $b_{22} = 3$ . Kvocijentna matrica  $B$  jednaka je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

sa spektrom  $\sigma(B) = \{4, -1\}$ , koji se sastoji od dvije svojstvene vrijednosti matrice  $A$ , tj.  $\sigma(A) = \{4, 1, 1, 0, -1, -1, -2, -2\}$ .

<sup>1</sup>Slika preuzeta iz [2] (9.2.2022.).


 Slika 3.2: <sup>1</sup>

**Definicija 3.32.** Neka je  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  skup vrhova grafa  $\Gamma$  i  $S$  njegov podskup. Za vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  kažemo da je karakteristični vektor od  $S$  ako je oblika:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } v_i \in S; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (3.8)$$

**Definicija 3.33.** Neka je  $\pi = \{X_1, \dots, X_m\}$  particija skupa  $X$ . Za  $n \times m$  matricu  $S$  kažemo da je karakteristična matrica ako joj je  $j$ -ti stupac karakteristični vektor od  $X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

**Primjer 3.34.** Pogledajmo matricu  $A$  (3.5) iz primjera 3.31.

Skup vrhova jednak je  $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ , dok je particija  $\pi$  jednaka

$$\pi = \{X_1, X_2\}, \text{ gdje su } X_1 = \{1, 3, 5, 7\}, X_2 = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Prema definiciji 3.32, karakteristični vektor  $x$  od  $X_1$  jednak je

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), \text{ tj. } x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 1,$$

jer je  $X_1 \ni \{1, 3, 5, 7\}$ , a  $X_1 \not\ni \{2, 4, 6, 8\}$  pa su ostali elementi tog vektora jednaki nuli. Analogno, karakteristični vektor  $y$  od  $X_2$  jednak je

$$y = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Prema definiciji 3.33, stupci karakteristične matrice  $S$  su, redom, vektori  $x$  i  $y$ , tj.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

**Teorem 3.35.** Neka je  $A$  matrica susjedstva grafa  $\Gamma$  i  $S$  karakteristična matrica. Particija  $\pi$  vrhova grafa je ujednačena ako i samo ako postoji kvocijentna matrica  $B$  takva da je

$$AS = SB. \quad (3.10)$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $u \in X_i$  i promotrimo  $(AS)_{uj}$ . Uočimo da je sumand u  $(AS)_{uj} = \sum_{k=1} A_{uk}S_{kj}$  jednak 1 ako je vrh  $u$  susjedan vrhu  $u$  u  $X_j$ , a inače je jednak 0.  $(AS)_{uj}$  je broj susjednih vrhova vrha  $u$  u  $X_j$  i taj broj je  $b_{ij}$ . Također, kako  $u$  pripada točno jednom skupu iz particije  $\pi$ , u ovom slučaju  $X_i$ , jedini nenul element u retku  $u$  od  $S$  je u  $i$ -tom stupcu. Imamo  $(SB)_{uj} = b_{ij}$  pa slijedi da je  $AS = SB$ .  $\square$

**Primjer 3.36.** Neka je  $A$  matrica susjedstva jednaka (3.5) i  $S$  karakteristična matrica jednaka (3.9). Ujednačena particija  $\pi$  jednaka je (3.6). Neka je  $B$  matrica oblika

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Izračunamo  $AS$  i  $SB$ :

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad SB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ a & b \\ c & d \\ a & b \\ c & d \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Izjednačavanjem  $AS$  i  $SB$ , dobivamo vrijednosti od  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  pa slijedi da je matrica  $B$  jednaka

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Po teoremu 3.35, postoji kvocijentna matrica  $B$  koja zadovoljava  $AS = SB$ . Zaista, dobivena matrica  $B$  jednaka je kvocijentnoj matrici pridruženoj matrici  $A$  s obzirom na particiju (3.6) u primjeru 3.31.

Definiramo  $n_i = |X_i|$  i  $K = \text{diag}(n_1, \dots, n_m)$ . Po prethodnom teoremu, lako imamo

$$KB = S^T AS, \quad S^T S = K.$$

**Lema 3.37.** *Ako je, za ujednačenu particiju,  $v$  svojstveni vektor od  $B$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ , tada je  $Sv$  svojstveni vektor od  $A$  pridruženoj istoj svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ .*

*Dokaz.*  $Bv = \lambda v$ , a (3.10) povlači  $ASv = SBv = \lambda Sv$ . □

U situaciji ove leme, spektar od  $A$  sastoji se od spektra kvocijentne matrice  $B$  (sa svojstvenim vektorima u prostoru stupaca od  $S$ , tj. konstanta na dijelovima particije) zajedno sa svojstvenim vrijednostima koje pripadaju svojstvenim vektorima ortogonalnim na stupce od  $S$ . Ove posljednje svojstvene vrijednosti ostaju nepromijenjene ako se podmatrice  $A_{i,j}$  zamjene s  $A_{i,j} + c_{i,j}J$  za određene konstante  $c_{i,j}$ , gdje je  $J$  matrica čiji su svi elementi jedinice.

**Primjer 3.38.** *U primjeru 3.31, spektar matrice susjedstva  $A$  i spektar kvocijentne matrice  $B$  jednaki su*

$$\sigma(A) = \{4, 1, 1, 0, -1, -1, -2, -2\}, \quad \sigma(B) = \{4, -1\},$$

gdje vidimo da  $\sigma(A)$  sadrži  $\sigma(B)$ .

**Definicija 3.39.** *Za particiju  $\pi = \{X_1, \dots, X_m\}$  matrice  $A$  kažemo da je gotovo ujednačena  $m$ -particija grafa ako svaki vrh u  $X_i$  ima jednak broj susjeda u dijelu  $X_j$ , za svaki  $j \neq i$ , i taj broj susjeda je jednak  $b_{ij}$ .*

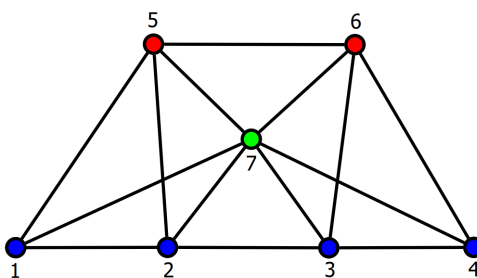
Za gotovo ujednačenu particiju, element  $B_{ii}$ , za  $i \in X$ , ne mora biti dobro definiran. Prema gornjoj definiciji, svaka ujednačena particija je gotovo ujednačena, ali obrnuto, općenito, ne vrijedi. Međutim, kada je graf regularan, koncepti gotovo ujednačene particije i ujednačene particije su isti.

**Primjer 3.40.** *Promotrimo graf sa slike 3.3, gdje je particija  $\pi$  jednaka*

$$\pi = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad \text{gdje je } X_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad X_2 = \{5, 6\}, \quad X_3 = \{7\}.$$

---

<sup>2</sup>Slika preuzeta s <https://web.wpi.edu/Pubs/ETD/Available/etd-032218-131000/unrestricted/TMR Reese.pdf> (9.2.2022.).


 Slika 3.3: Gotovo ujednačena particija vrhova<sup>2</sup>

Svaki vrh iz  $X_1$  ima jedan susjedni vrh iz  $X_2$ , svaki vrh iz  $X_2$  ima dva susjedna vrha iz  $X_1$ . Slično, svaki vrh iz  $X_1$  ili  $X_2$  ima jedan susjedni vrh iz  $X_3$ , svaki vrh iz  $X_3$  ima četiri susjedna vrha iz  $X_1$  i dva susjedna vrha iz  $X_2$ . Stoga,  $\pi$  je gotovo ujednačena particija s

$$b_{12} = 1, b_{21} = 2, b_{13} = b_{23} = 1, b_{31} = 4, b_{32} = 2.$$

Međutim, vrhovi 1 i 4 imaju po jedan susjedni vrh iz  $X_1$ , a vrhovi 2 i 3 imaju po dva susjedna vrha iz  $X_2$ . Slijedi da  $\pi$  nije ujednačena particija.

**Primjer 3.41.** Matrica susjedstva potpunog bipartitnog grafa  $K_{p,q}$  ima ujednačenu particiju s  $m = 2$ , tj. skup vrhova  $X$  je particioniran na  $m = 2$  skupa. Kvocijentna matrica  $B$  jednaka je

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

i ima svojstvene vrijednosti  $\pm \sqrt{pq}$ , koje su nenul svojstvene vrijednosti od  $K_{p,q}$ .

Općenitije, razmotrimo graf  $\Gamma$  koji je dobiven spajanjem dva grafa  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  s disjunktним skupovima vrhova. Graf  $\Gamma$  je dobiven umetanjem svih mogućih bridova između  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Ako  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  imaju  $n_1$  odnosno  $n_2$  vrhova i oba su regularna, stupnja  $k_1$  odnosno  $k_2$  te imaju spektar  $\sigma_1$  odnosno  $\sigma_2$ , tada  $\Gamma$  ima spektar

$$\sigma = (\sigma_1 \setminus \{k_1\}) \cup (\sigma_2 \setminus \{k_2\}) \cup \{k', k''\},$$

gdje su  $k'$  i  $k''$  dvije svojstvene vrijednosti matrice

$$\begin{pmatrix} k_1 & n_2 \\ n_1 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Zaista, imamo ujednačenu particiju matrice susjedstva od  $\Gamma$  s gore navedenom kvocijentnom matricom. Svojstvene vrijednosti koje ne pripadaju kvocijentu podudaraju se s onima iz disjunktne unije od  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ .



### 3.4 Rayleighov kvocijent

**Definicija 3.42.** Neka je  $A$  realna simetrična matrica reda  $n$  i neka je  $u$   $n$ -dimenzionalan realan nenul vektor. Rayleighov kvocijent od  $u$  s obzirom na  $A$  definiran je s

$$\frac{u^T A u}{u^T u}. \quad (3.11)$$

Neka je  $u_1, \dots, u_n$  ortonormiran skup svojstvenih vektora od  $A$ , takvih da je  $Au_i = \theta_i u_i$ , gdje je  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ . Ako je  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ , tada je

$$u^T u = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{ i } u^T A u = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \theta_i.$$

Slijede nejednakosti

$$\frac{u^T A u}{u^T u} \geq \theta_i \text{ ako je } u \in [\{u_1, \dots, u_i\}] \quad (3.12)$$

i

$$\frac{u^T A u}{u^T u} \leq \theta_i \text{ ako je } u \in [\{u_1, \dots, u_{i-1}\}]^\perp. \quad (3.13)$$

U oba slučaja, jednakost implicira da je  $u$  svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\theta_i$  od  $A$ . Obratno, vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 3.43.** (Courant-Fischer) Neka je  $W$   $i$ -potprostor od  $V$ , gdje  $i$ -potprostor označava prostor svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti  $\theta_i$ . Tada

$$\theta_i \geq \min_{u \in W, u \neq 0} \frac{u^T A u}{u^T u}$$

i

$$\theta_{i+1} \leq \max_{u \in W^\perp, u \neq 0} \frac{u^T A u}{u^T u}.$$

### 3.5 Ispreplitanje

**Definicija 3.44.** Dana su dva niza realnih brojeva  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$  i  $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_m$  s  $m < n$ . Kažemo da drugi niz isprepliće prvi niz ako vrijedi

$$\theta_i \geq \eta_i \geq \theta_{n-m+i} \text{ za sve } i = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

**Definicija 3.45.** Ispreplitanje je strogo ako postoji cijeli broj  $k \in [0, m]$  takav da vrijedi

$$\theta_i = \eta_i \text{ za } 1 \leq i \leq k$$

i

$$\theta_{n-m+i} = \eta_i \text{ za } k+1 \leq i \leq m.$$

Ako je  $m = n - 1$ , nejednakost (3.14) postaje  $\theta_1 \geq \eta_1 \geq \theta_2 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_m \geq \theta_n$ , zbog toga se to naziva ispreplitanje.

**Teorem 3.46.** *Neka je  $S$  realna  $n \times m$  matrica takva da  $S^\top S = I$  (njezini stupci su ortonormirani). Neka je  $A$  realna simetrična matrica reda  $n$  sa svojstvenim vrijednostima  $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ . Definiramo  $B = S^\top A S$  i neka  $B$  ima svojstvene vrijednosti  $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_m$  i odgovarajuće svojstvene vektore  $v_1, \dots, v_m$ .*

- (i) *Svojstvene vrijednosti od  $B$  isprepliću se s onima od  $A$ .*
- (ii) *Ako je  $\eta_i = \theta_i$  ili  $\eta_i = \theta_{n-m+i}$  za neki  $i \in [1, m]$ , tada  $B$  ima svojstveni vektor  $v$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\eta_i$  takav da je  $Sv$  svojstveni vektor pridruženoj svojstvenoj vrijednosti  $\theta_i$  od  $A$ .*
- (iii) *Ako za neki cijeli broj  $l$  vrijedi  $\eta_i = \theta_i$  za  $i = 1, \dots, l$  (ili  $\eta_i = \theta_{n-m+i}$  za  $i = l, \dots, m$ ), tada je  $Sv_i$  svojstveni vektor pridruženoj svojstvenoj vrijednosti  $\theta_i$  od  $A$  za  $i = 1, \dots, m$  (odnosno  $i = l, \dots, m$ ).*
- (iv) *Ako je ispreplitanje strogo, tada  $SB = AS$ .*

*Dokaz.* (i) Neka je  $u_1, \dots, u_n$  ortonormiran skup svojstvenih vektora od  $A$ , takvih da je  $Au_i = \theta_i$ . Za svaki  $i \in [1, m]$ , uzmimo nenul vektor  $s_i$  iz

$$[\{v_1, \dots, v_i\}] \cap [\{S^\top u_1, \dots, S^\top u_{i-1}\}]^\perp. \quad (3.15)$$

Tada je  $Ss_i \in [\{u_1, \dots, u_{i-1}\}]^\perp$ , dakle po Rayleighevom principu (3.13),

$$\theta_i \geq \frac{(Ss_i)^\top A (Ss_i)}{(Ss_i)^\top (Ss_i)},$$

a po (3.12), slijedi

$$\frac{s_i^\top B s_i}{s_i^\top s_i} \geq \eta_i.$$

Jer smo  $B$  definirali kao  $B = S^\top A S$ , imamo

$$\theta_i \geq \frac{(Ss_i)^\top A (Ss_i)}{(Ss_i)^\top (Ss_i)} = \frac{s_i^\top B s_i}{s_i^\top s_i} \geq \eta_i,$$

tj.  $\theta_i \geq \eta_i$ . Slično (ili primjenom gornje nejednakosti na  $-A$  i  $-B$ ) dobivamo  $\theta_{n-m+i} \leq \eta_i$ .

- (ii) *Ako je  $\theta_i = \eta_i$ , tada su  $s_i$  i  $Ss_i$  svojstveni vektori od  $B$  i  $A$  pridruženi svojstvenoj vrijednosti  $\theta_i$ .*

- (iii) Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po  $l$ . Bazu indukcije čini slučaj  $l = 1$ , gdje tvrdnja slijedi iz (ii). Pretpostavimo da je  $Sv_i = u_i$  za  $i = 1, \dots, l - 1$ . Tada možemo uzeti  $s_l = v_l$  u (3.15), ali u dokazu za (ii) vidimo da je  $Ss_l$  svojstveni vektor pridruženoj svojstvenoj vrijednosti  $\theta_l$  od  $A$ .
- (iv) Neka je ispreplitanje strogo. Po (iii) slijedi da je  $Sv_1, \dots, Sv_m$  ortonormiran skup svojstvenih vrijednosti od  $A$  za svojstvene vrijednosti  $\eta_1, \dots, \eta_m$  pa imamo  $SBv_i = \eta_i Sv_i = ASv_i$ , za  $i = 1, \dots, m$ . Budući da vektori  $v_i$  čine bazu, slijedi da je  $SB = AS$ .  $\square$

Ako uzmemo  $S = [I \ 0]^T$ , onda je  $B$  samo glavna podmatrica od  $A$  i imamo sljedeći korolar.

**Korolar 3.47.** *Ako je  $B$  glavna podmatrica simetrične matrice  $A$ , onda se svojstvene vrijednosti od  $B$  isprepliću sa svojstvenim vrijednostima od  $A$ .*

Teorem zahtijeva da stupci od  $S$  budu ortonormirani. Ako su stupci ortogonalni, ali ne nužno ortonormirani vektori, potrebno je određeno skaliranje.

Neka je  $\|\cdot\|$  norma inducirana skalarnim produktom.  $\mathbf{1}$  označava vektor kojemu su svi elementi jedinice.

**Korolar 3.48.** *Neka je  $A$  realna simetrična matrica reda  $n$ . Neka su  $x_1, \dots, x_m$  nenul ortogonalni realni vektori reda  $n$ . Definiramo matricu  $C = (c_{ij})$  sa  $c_{ij} = \frac{1}{\|x_i\|^2} x_i^T A x_j$ .*

- (i) *Svojstvene vrijednosti od  $C$  isprepliću svojstvene vrijednosti od  $A$ .*
- (ii) *Ako je ispreplitanje strogo, tada  $Ax_j = \sum_{i=1}^m c_{ij}x_i$  za sve  $j \in [1, m]$ .*
- (iii) *Neka je  $x = \sum_{j=1}^m x_j$ . Broj  $r := \frac{x^T A x}{x^T x}$  se nalazi između najmanje i najveće svojstvene vrijednosti od  $C$ . Ako je  $x$  svojstveni vektor od  $A$  sa svojstvenom vrijednošću  $\theta$ , tada također  $C$  ima svojstvenu vrijednost  $\theta$  (za svojstveni vektor  $\mathbf{1}$ ).*

*Dokaz.* Neka je  $K$  dijagonalna matrica dana s  $K_{ii} = \|x_i\|$ . Neka je  $R$   $n \times m$  matrica sa stupcima  $x_j$  te stavimo  $S = RK^{-1}$ . Tada je  $S^T S = I$  i teorem vrijedi za  $B = S^T A S = K C K^{-1}$ . Ako je ispreplitanje strogo, imamo  $AR = RC$ . S  $x = \sum_{j=1}^m x_j = R\mathbf{1}$  i  $y = K\mathbf{1}$ , imamo

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{y^T B y}{y^T y}.$$

$\square$

Ovo se posebno primjenjuje kada su  $x_i$  karakteristični vektori particije (ili samo familije u parovima disjunktih podskupova).

**Korolar 3.49.** *Neka je  $C$  kvocijentna matrica simetrične matrice  $A$  čiji su retci i stupci particionirani s obzirom na particiju  $\{X_1, \dots, X_m\}$ .*

- (i) Svojsvene vrijednosti od  $C$  isprepliću svojsvene vrijednosti od  $A$ .*
- (ii) Ako je isprepletanje strogo, onda je particija ujednačena.*

# Poglavlje 4

## Smithov teorem

U ovom poglavlju primjenjujemo linearnu algebru iz prethodnog poglavlja na spektar grafa te slijedimo izlaganje iz 3. poglavlja knjige [5]. Smithov teorem će nam reći da su jedini grafovi spektralnog radijusa strogo manjeg od 2 upravo grafovi  $A$ ,  $D$  i  $E$ .

### 4.1 Najveća svojstvena vrijednost

Najveća svojstvena vrijednost grafa poznata je kao njegov spektralni radijus ili indeks. Osnovne informacije o najvećoj svojstvenoj vrijednosti (moguće i usmjerenog) grafa nam pruža Perron-Frobeniusova teorija. Iduća propozicija slijedi iz teorema 3.20 i teorema 3.26.

**Propozicija 4.1.** *Svaki graf  $\Gamma$  ima realnu svojstvenu vrijednost  $\theta_0$  kojoj je pridružen ne-negativan realan svojstveni vektor, takav da za svaku drugu njegovu svojstvenu vrijednost  $\theta$  imamo  $|\theta| \leq \theta_0$ . Vrijednost od  $\theta_0$  se ne povećava kada se vrhovi ili bridovi uklone iz  $\Gamma$ . Pretpostavimo da je  $\Gamma$  čvrsto povezan. Tada*

(i)  $\theta_0$  ima kratnost 1.

(ii) Ako je  $\Gamma$  primitivan (čvrsto povezan i takav da nemaju svi ciklusi duljinu koja je višekratnik nekog cijelog broja  $d > 1$ ), tada  $|\theta| < \theta_0$  za sve svojstvene vrijednosti  $\theta$  različite od  $\theta_0$ .

(iii) Vrijednost  $\theta_0$  se smanjuje kada se vrhovi ili bridovi uklone iz  $\Gamma$ .

**Napomena 4.2.** *Ako imamo (neusmjeren) graf koji je povezan, njegovu matricu susjedstva (koja je simetrična) možemo shvatiti kao matricu usmjerenog grafa koji je čvrsto povezan pa je stoga ona ireducibilna. Obratno, ako pogledamo matricu nekog usmjerenog čvrsto povezanog grafa koja je simetrična (i, jasno, ireducibilna), onda se ona može shvatiti kao*

matrica (neusmjerenog) povezanog grafa. Dakle, kod (neusmjerenih) grafova, povezanost je ekvivalentna ireducibilnosti matrice susjedstva.

Neka je sada  $\Gamma$  (neusmjeren) graf. Koristeći Perron-Frobeniusovu teoriju i ispreplitanja nalazimo gornju i donju granicu za najveću svojstvenu vrijednost povezanog grafa. (Imajmo na umu da  $A(\Gamma)$  je ireducibilna ako i samo ako je  $\Gamma$  povezan.)

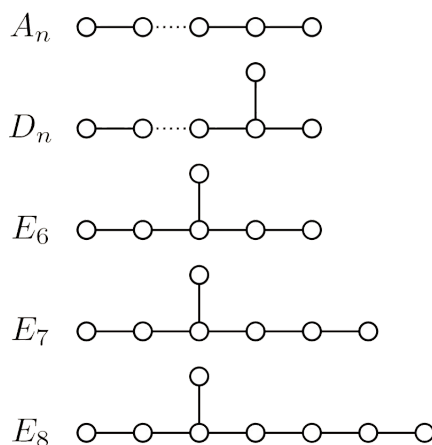
**Propozicija 4.3.** *Neka je  $\Gamma$  povezan graf s najvećom svojstvenom vrijednošću  $\theta_1$ . Ako je  $\Gamma$  regularan stupnja  $k$ , tada je  $\theta_1 = k$ . Inače, imamo  $k_{min} < \bar{k} < \theta_1 < k_{max}$ , gdje su  $k_{min}$ ,  $k_{max}$  i  $\bar{k}$  minimalni, maksimalni i prosječni stupanj.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{1}$  vektor sa svim elementima jednakim 1. Tada je  $A\mathbf{1} = (d(v_1), \dots, d(v_n))^T \leq (k_{max}, \dots, k_{max})^T = k_{max}\mathbf{1}$  te, po teoremu 3.26 (iv),  $\theta_1 \leq k_{max}$ , gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je  $A\mathbf{1} = \theta_1\mathbf{1}$ , odnosno ako i samo ako je  $\Gamma$  regularan stupnja  $\theta_1$ . Razmotrimo sada particiju skupa vrhova koji se sastoji od jednog dijela. Po korolaru 3.49, imamo  $\bar{k} \leq \theta_1$ , gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\Gamma$  regularan.  $\square$

Za ne nužno povezane grafove, imamo  $\bar{k} \leq \theta_1 \leq k_{max}$ , i  $\bar{k} = \theta_1$  ako i samo ako je  $\Gamma$  regularan. Ako je  $\theta_1 = k_{max}$ , onda samo znamo da  $\Gamma$  ima regularnu komponentu s tim stupnjem, ali  $\Gamma$  ne mora biti regularan.

Kao što je već navedeno u Propoziciji 4.1, najveća svojstvena vrijednost povezanog graf se strogo smanjuje kada se brid ukloni.

## 4.2 ADE-klasifikacija



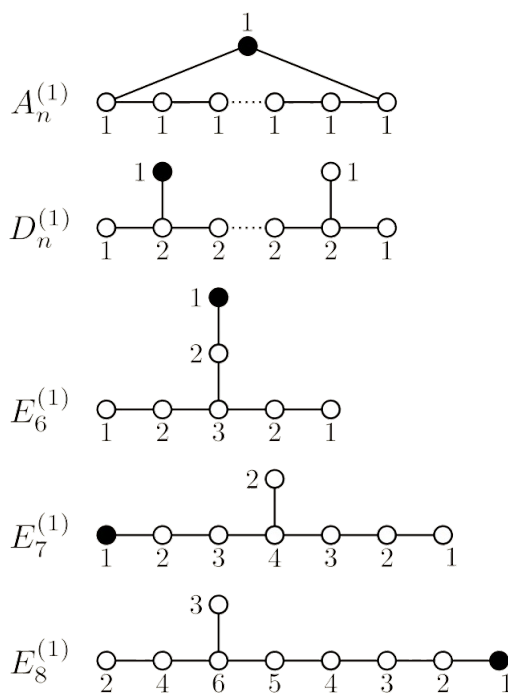
Slika 4.1: Grafovi ADE-klasifikacije<sup>1</sup>

Grafovi  $ADE$ -klasifikacije su grafovi prikazani na slici 4.1.

Usko povezani s  $ADE$  grafovima su takozvani prošireni grafovi. U svakom slučaju proširenje dodaje jedan vrh, kako slijedi:

- (i) Za  $A_n$ , novi vrh spaja oba kraja puta, formirajući  $(n + 1)$ -ciklus;
- (ii) Za  $D_n$ , stvara račvu na drugom kraju grafa, ili  $K_{1,4}$  za  $n = 4$ ;
- (iii) Za  $E_n$ , produžuje jedan od krakova, tako da su brojevi vrhova na krakovima:  $(3, 3, 3)$  za  $n = 6$ ,  $(2, 4, 4)$  za  $n = 7$ ,  $(2, 3, 6)$  za  $n = 8$ .

Prošireni grafovi  $ADE$ -klasifikacije su:  $A_n^{(1)}$  ( $n \geq 2$ ),  $D_n^{(1)}$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6^{(1)}$ ,  $E_7^{(1)}$ ,  $E_8^{(1)}$  i prikazani su na slici 4.2.



Slika 4.2: Prošireni grafovi  $ADE$ -klasifikacije<sup>2</sup>

Sa slike 4.2 vidi se da su oznake na vrhovima pozitivni brojevi takvi da je zbroj oznaka na susjednim vrhovima vrha  $v$  dvostruko veći od oznake na vrhu  $v$ .

<sup>1</sup>Slika preuzeta s [https://www.math.miami.edu/~armstrong/Talks/What\\_is\\_ADE.pdf](https://www.math.miami.edu/~armstrong/Talks/What_is_ADE.pdf) (2.2.2022.).

<sup>2</sup>Slika preuzeta s [https://www.math.miami.edu/~armstrong/Talks/What\\_is\\_ADE.pdf](https://www.math.miami.edu/~armstrong/Talks/What_is_ADE.pdf) (2.2.2022.).

**Teorem 4.4. (Smithov teorem)** *Jedini povezani grafovi koji imaju najveću svojstvenu vrijednost jednaku 2 su grafovi  $A_n^{(1)}$  ( $n \geq 2$ ),  $D_n^{(1)}$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6^{(1)}$ ,  $E_7^{(1)}$ ,  $E_8^{(1)}$  (broj vrhova je za jedan veći od danog indeksa). Za svaki graf, odgovarajući svojstveni vektor je označen cijelim brojevima na vrhovima. Štoviše, svaki povezani graf s najvećom svojstvenom vrijednošću manjom od 2 je podgraf jednog od gornjih grafova, tj. jedan od grafova  $A_n = P_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Konačno, svaki povezani graf s najvećom svojstvenom vrijednošću većom od 2 sadrži jedan od grafova  $A_n^{(1)}$  ( $n \geq 2$ ),  $D_n^{(1)}$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6^{(1)}$ ,  $E_7^{(1)}$ ,  $E_8^{(1)}$ , kao podgraf.*

*Dokaz.* Na slici 4.2, vrhovi svakog grafa označeni su koordinatama svojstvenog vektora pridruženog svojstvenoj vrijednosti 2. Kako su sve koordinate vektora pozitivne, svojstveni vektor je pozitivan. Kako za dane grafove postoji pozitivan vektor svojstvene vrijednosti 2, iz teorema 3.26 slijedi da je 2 najveća svojstvena vrijednost.

Tvrdimo da su jedini grafovi s najvećom svojstvenom vrijednošću jednakom 2 upravo grafovi sa slike 4.2. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je  $\Gamma^{(1)}$  povezan graf s najvećom svojstvenom vrijednošću jednakom 2 koji je različit od grafova  $A_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(1)}$ ,  $E_6^{(1)}$ ,  $E_7^{(1)}$  i  $E_8^{(1)}$ . Sada uklonimo jedan vrh iz  $\Gamma^{(1)}$ , tako da on ostane povezan, i dobijemo graf označen s  $\Gamma$ . Također, tvrdimo da su jedini grafovi s najvećom svojstvenom vrijednošću strogo manjom od 2 upravo grafovi sa slike 4.1, tj.  $A_n = P_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Pretpostavimo da  $\Gamma$  nije jedan od navedenih grafova. Neka je  $\theta_0$  najveća svojstvena vrijednost grafa  $\Gamma$ . Po propoziciji 4.1, slijedi da je  $\theta_0$  strogo manja od 2. Povezan graf može biti ili ciklus ili stablo.  $\Gamma$  ne sadrži ciklus, inače  $\Gamma$  sadrži  $A_n^{(1)}$ , za neki  $n \geq 2$ , kao podgraf pa dolazimo do kontradikcije. Ako  $\Gamma$  ne sadrži ciklus, tada je  $\Gamma$  stablo različito od puta jer bi inače bio jednak  $A_n$  za neki  $n$ .  $\Gamma$  ne sadrži vrh stupnja većeg ili jednakog 4, inače bi  $D_4^{(1)}$  bio podgraf od  $\Gamma$  pa bi  $\theta_0$  bila barem 2. Graf  $\Gamma$  sadrži najviše jedan vrh stupnja 3, inače sadrži  $D_n^{(1)}$  kao podgraf te dolazimo do kontradikcije. Ako graf  $\Gamma$  ima vrh stupnja 3, znači da se tri puta sastaju u tom vrhu, tj. imamo tri puta čiji je krajnji vrh upravo taj vrh stupnja 3. Barem jedan put, čiji je krajnji vrh stupnja 3, trebao bi biti duljine 1, inače  $\Gamma$  sadrži  $E_6^{(1)}$ . Nadalje, sljedeći, drugi po redu, najkraći put bi trebao biti duljine najviše 2, inače  $\Gamma$  sadrži  $E_7^{(1)}$ . Ako je jedan put kroz vrh stupnja 3 duljine 1, drugi duljine 2, treći put je duljine najviše 4, inače  $\Gamma$  sadrži  $E_8^{(1)}$ . Ako je taj treći put duljine 4, dobivamo graf  $E_8$ , ako je duljine 3, dobivamo  $E_7$ , ako je duljine 2, dobivamo  $E_6$ . Ako su dva od tri puta kroz vrh stupnja 3 duljine 1, onda je  $\Gamma$  jednak  $D_n$  za neki  $n \geq 4$ . Ako je  $\Gamma$  put, jednak je grafu  $A_n$ . Dokazali smo da ne postoji graf čija je najveća svojstvena vrijednost manja od 2, a da to nije jedan od grafova  $A_n = P_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Također, kada bismo dodali vrh grafu  $\Gamma$ , tako da novi graf ostane povezan graf, dobili bismo jedan od grafova sa slike 4.2. Svaki graf koji sadrži jedan od grafova 4.2, kao inducirani pravi podgraf, ima svojstvenu vrijednost veću od 2. □

Navedimo svojstvene vrijednosti do sada spomenutih grafova.



Svojsvene vrijednosti od  $A_n$  su  $2\cos i\pi / (n + 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Svojsvene vrijednosti od  $D_n$  su  $0$  i  $2\cos i\pi / (2n - 2)$  ( $i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 3$ ).

Svojsvene vrijednosti od  $E_6$  su  $2\cos i\pi / 12$  ( $i = 1, 4, 5, 7, 8, 11$ ).

Svojsvene vrijednosti od  $E_7$  su  $2\cos i\pi / 18$  ( $i = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ ).

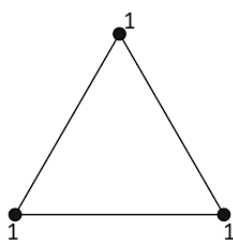
Svojsvene vrijednosti od  $E_8$  su  $2\cos i\pi / 30$  ( $i = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ ).

Svojsvene vrijednosti od  $D_n^{(1)}$  su  $2, 0, 0, -2$  i  $2\cos i\pi / (n - 2)$  ( $i = 1, \dots, n - 3$ ).

Svojsvene vrijednosti od  $E_6^{(1)}$  su  $2, 1, 1, 0, -1, -1, -2$ .

Svojsvene vrijednosti od  $E_7^{(1)}$  su  $2, \sqrt{2}, 1, 0, 0, -1, -\sqrt{2}, -2$ .

Svojsvene vrijednosti od  $E_8^{(1)}$  su  $2, \tau, 1, \tau^{-1}, 0, -\tau^{-1}, -1, -\tau, -2$ , gdje je  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ .



Slika 4.3: Graf  $A_2^{(1)}$

**Primjer 4.5.** Proučimo graf  $A_2^{(1)}$  sa slike 4.3. Vrh  $v \in V(A_2^{(1)})$  označen je pozitivnim brojem tako da je zbroj oznaka na susjednim vrhovima dvostruko veći od oznake na vrhu  $v$ . Pripadna matrica susjedstva  $A = A(A_2^{(1)})$  jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kako bi matrica susjedstva  $A$  zadovoljila pretpostavke teorema 3.26, ona mora biti nenegativna realna kvadratna matrica reda  $n$  te ireducibilna. Prema napomeni 4.2, matrica je ireducibilna, a ostalo očito vrijedi pa su pretpostavke Perron-Frobeniusova teorema zadovoljene. Svojsveni polinom od  $A$  jednak je

$$k_A(\theta) = (\theta + 1)^2 (\theta - 2)$$

sa spektrom

$$\sigma(A) = \{2, -1, -1\}.$$

Izračunajmo svojsveni vektor pridružen svojsvenoj vrijednosti  $2$ , tj. tražimo  $x$  takav da vrijedi  $Ax = 2x$ :

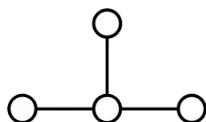
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Rješavajući 3 jednadžbe s 3 nepoznanice, dobijemo:

$$x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1, \quad \text{gdje je } x_1 \text{ proizvoljan broj.}$$

Slijedi da je svojstveni vektor  $x$  pridružen svojstvenoj vrijednosti 2 jednak  $(1, 1, 1)$ , što odgovara oznakama na vrhovima grafa  $A_2^{(1)}$ . Uistinu, 2 je jedinstvena pozitivna realna svojstvena vrijednost kojoj je pridružen pozitivni svojstveni vektor. Također, svojstvena vrijednost 2 ima algebarsku i geometrijsku kratnost jednaku 1. 2 je najveća svojstvena vrijednost tog grafa.



Slika 4.4: Graf  $D_4$

**Primjer 4.6.** Proučimo graf  $D_4$  sa slike 4.4. Pripadna matrica susjedstva  $A = A(D_4)$  jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni polinom jednak je

$$k_A(\theta) = \theta^2(\theta^2 - 3)$$

sa spektrom

$$\sigma(A) = \{\sqrt{3}, 0, 0, -\sqrt{3}\}.$$

Matrica susjedstva  $A$  je ireducibilna jer je graf  $D_4$  povezan, a očito je nenegativna realna kvadratna matrica reda  $n = 4$  pa su pretpostavke Perron-Frobeniusova teorema zadovoljene. Najveća svojstvena vrijednost jednaka je  $\sqrt{3}$ , a to je manje od 2.

## Poglavlje 5

# Klasifikacija sistema korijena prostih Liejevih algebri

U ovom poglavlju slijedimo izlaganje iz 3. poglavlja knjige [10]. *ADE*-klasifikacija se javlja u različitim područjima matematike te ćemo to demonstrirati u ovom poglavlju na primjeru područja Liejevih algebri. Preciznije, svakoj prostoj konačnodimenzionalnoj kompleksnoj Liejevoj algebri odgovara jedinstveni sistem korijena, kao i pripadni Dynkinov dijagram. Ovdje ćemo prezentirati klasifikaciju svih takvih Dynkinovih dijagrama.

Neka je  $V$  konačnodimenzionalan unitaran vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  sa skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot)$ . Podsjetimo se, u  $n$ -dimenzionalnom afinom prostoru  $(n - 1)$ -ravnina naziva se hiperravnina.

**Definicija 5.1.** *Neka je  $P$  hiperravnina. Za invertibilnu linearnu transformaciju kažemo da je refleksija na  $V$  s obzirom na  $P$  ako točke od  $P$  ostavlja nepromijenjenima, a svaki vektor  $x \in V$  koji je ortogonalan na tu hiperravninu  $P$  šalje u vektor  $-x$ .*

Očito, refleksija je ortogonalna, tj. čuva skalarni produkt na  $V$ . Svaki nenul vektor  $x$  određuje refleksiju  $\sigma_x$  s obzirom na hiperravninu

$$P_x = \{ y \in V \mid (y, x) = 0 \}.$$

Svaki nenul vektor proporcionalan s  $x$  daje istu refleksiju.

Za  $x \in V$  označavamo sa  $\sigma_x$  ortogonalnu refleksiju prostora  $V$  u odnosu na  $x$ , tj.

$$\sigma_x(y) = y - \frac{2(y, x)}{(x, x)}x, \quad \text{gdje je } y \in V, \quad (5.1)$$

$$\text{tj. } \sigma_x x = -x \text{ i } \sigma_x y = y \text{ za } y \perp x.$$

Uvedimo oznaku

$$\langle y, x \rangle = \frac{2(y, x)}{(x, x)}.$$

Primijetimo da je  $\langle y, x \rangle$  linearno samo u prvoj varijabli.

**Definicija 5.2.** Za skup  $R \subseteq V$  kažemo da je sistem korijena ako vrijedi:

- (i)  $R$  je konačan, razapinje  $V$  i ne sadrži  $0$ .
- (ii) Za  $x \in R$  i  $c \in \mathbb{R}$  vrijedi  $cx \in R$  ako i samo ako je  $c = 1$  ili  $c = -1$ .
- (iii) Za svaki  $x \in R$  je  $\sigma_x R = R$ .
- (iv) Ako su  $x, y \in R$ , onda je  $\langle y, x \rangle \in \mathbb{Z}$ .

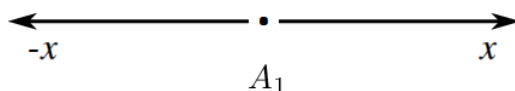
U ovom sustavu aksioma ima suvišnih. Preciznije, i tvrdnja (ii) i tvrdnja (iii) iz gornje definicije impliciraju da je  $R = -R$ .

U nastavku ćemo elemente sistema korijena nazivati korijenima.

**Definicija 5.3.** Rang sistema korijena  $R$  definiramo kao dimenziju vektorskog prostora  $V$ . Rang sistema korijena  $R$  označavamo s  $r = \dim V$ .

U slučaju  $r \leq 2$ , sistem korijena  $R$  opisujemo jednostavnom slikom.

**Primjer 5.4.** Postoji samo jedan sistem korijena ranga 1, koji se sastoji od dva nenul vektora  $x$  i  $-x$ . Ovaj sistem korijena naziva se  $A_1$ . Zbog (ii), postoji samo jedna mogućnost za  $r = 1$  i prikazana je na slici 5.1. Lako se provjere i ostala tri svojstva.



Slika 5.1: Sistem korijena za  $r = 1$

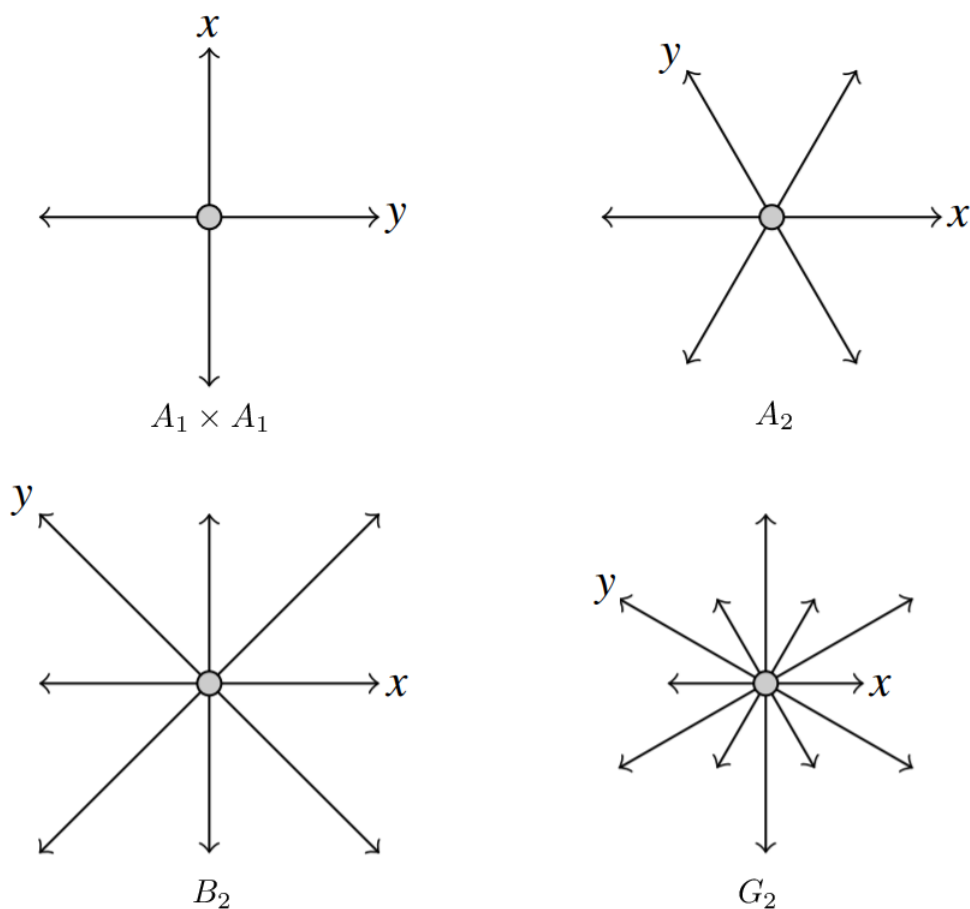
**Primjer 5.5.** Za sistem korijena ranga 2 postoje četiri mogućnosti i one su prikazane na slici 5.2.

Aksiom (iv) iz definicije 5.2 ograničava vrijednost kuta između dva korijena. Označimo kut između dva korijena  $x, y \in V$  s  $\alpha$ . Kosinus kuta  $\alpha$  između vektora  $x, y \in V$  dan je formulom:

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \alpha, \quad (5.2)$$

gdje je  $\|\cdot\|$  norma inducirana skalarnim produktom. Slijedi

$$\langle y, x \rangle = \frac{2(y, x)}{(x, x)} = 2 \frac{\|y\|}{\|x\|} \cos \alpha,$$



Slika 5.2: Sistemi korijena za  $r = 2^1$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = 4 \cos^2 \alpha . \tag{5.3}$$

Po (iv) iz definicije 5.2 slijedi

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \langle y, x \rangle \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = 4 \cos^2 \alpha \in \mathbb{Z} .$$

$$0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4 \cos^2 \alpha \leq 4 .$$

Zaključujemo da je (5.3) nenegativan cijeli broj manji ili jednak od 4 pa  $\langle x, y \rangle$  i  $\langle y, x \rangle$  imaju isti predznak. Jedine mogućnosti su one kada  $x \neq \pm y$  i  $\|y\| \geq \|x\|$  te su dane u tablici 5.1.

**Definicija 5.6.** Neka je  $R$  sistem korijena u  $V$  s rangom  $r$ . Za skup  $K \subseteq R$  kažemo da je baza ako vrijedi:

<sup>1</sup>Slika preuzeta s [https://edu.itp.phys.ethz.ch/fs13/cft/BLT\\_Wieser.pdf](https://edu.itp.phys.ethz.ch/fs13/cft/BLT_Wieser.pdf) (2.2.2022.).

$\langle x, y \rangle$	$\langle y, x \rangle$	$\alpha$
0	0	$\pi/2$
1	1	$\pi/3$
-1	-1	$2\pi/3$
1	2	$\pi/4$
-1	-2	$3\pi/4$
1	3	$\pi/6$
-1	-3	$5\pi/6$

Tablica 5.1:

(i)  $K$  je baza od  $V$ .

(ii) Svaki korijen  $y \in R$  može se zapisati kao  $y = \sum_{x \in K} k_x x$  sa cjelobrojnim koeficijentima  $k_x$ , takvim da su oni svi ili nenegativni ili nepozitivni.

Za korijene iz baze  $K$  kažemo da su *jednostavni korijeni*. Iz (i) slijedi da je  $|K| = r$ , a iz (ii) slijedi da je izraz za  $y$  jedinstven.

Ako su svi  $k_x \geq 0$  ( $k_x \leq 0$ ), kažemo da je  $y$  *pozitivan* (*negativan*) i tada pišemo  $y > 0$  ( $y < 0$ ).

**Teorem 5.7.** Svaki sistem korijena  $R$  ima bazu  $K$ .

Dokaz teorema 5.7 može se naći u knjizi [10].

**Definicija 5.8.** Neka je  $R$  sistem korijena. Kažemo da je  $R$  *ireducibilan* ako se ne može prikazati kao unija dvaju pravih podskupova takvih da je svaki korijen iz prvog skupa ortogonalan na svaki korijen iz drugog skupa.

Neka je  $R$  sistem korijena s bazom  $K$ . Može se dokazati da je  $R$  ireducibilan ako i samo ako se skup  $K$  ne može prikazati kao unija dvaju pravih podskupova takvih da je svaki korijen iz prvog skupa ortogonalan na svaki korijen iz drugog skupa.

**Primjer 5.9.** Pogledajmo slike 5.1 i 5.2.

$A_1 \times A_1$  nije ireducibilan sistem korijena jer je  $x$  ortogonalan na  $y$  i na  $-y$  te  $-x$  je ortogonalan na  $y$  i na  $-y$ .  $A_1, A_2, B_2, G_2$  su ireducibilni sistemi korijena.

Ako je sistem korijena  $R$  ireducibilan s dvije različite duljine korijena, govorimo o dugim i kratkim korijenima. Ako su  $x$  i  $y$  različiti pozitivni korijeni, tada iz tablice 5.1 vidimo da vrijedi  $\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = 0, 1, 2$  ili  $3$ .

Fiksirajmo niz jednostavnih korijena  $(x_1, \dots, x_r)$ .

**Definicija 5.10.** Neka je  $R$  sistem korijena ranga  $r$ . Matrica

$$C = C(R) = (C_{ij}) = (\langle x_i, x_j \rangle), \text{ za sve } i, j \in \{1, \dots, r\},$$

naziva se Cartanova matrica od  $R$ . Za elemente Cartanove matrice  $C$  kažemo da su Cartanovi cijeli brojevi.

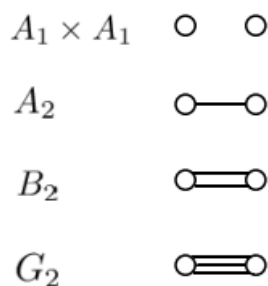
**Primjer 5.11.** Pogledajmo Cartanove matrice sistema korijena ranga 1 i 2.

$$C(A_1) = (2)$$

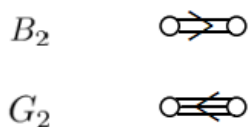
$$C(A_1 \times A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; C(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C(B_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; C(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Definicija 5.12.** Za graf  $\Gamma$  sa skupom vrhova  $V = \{1, \dots, r\}$  kažemo da je Coxeterov graf od  $R$  ako je vrh  $i$  povezan s vrhom  $j$  s  $\langle x_i, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle$  bridova.



Slika 5.3: Coxeterovi grafovi sistema korijena  $A_1 \times A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $G_2$



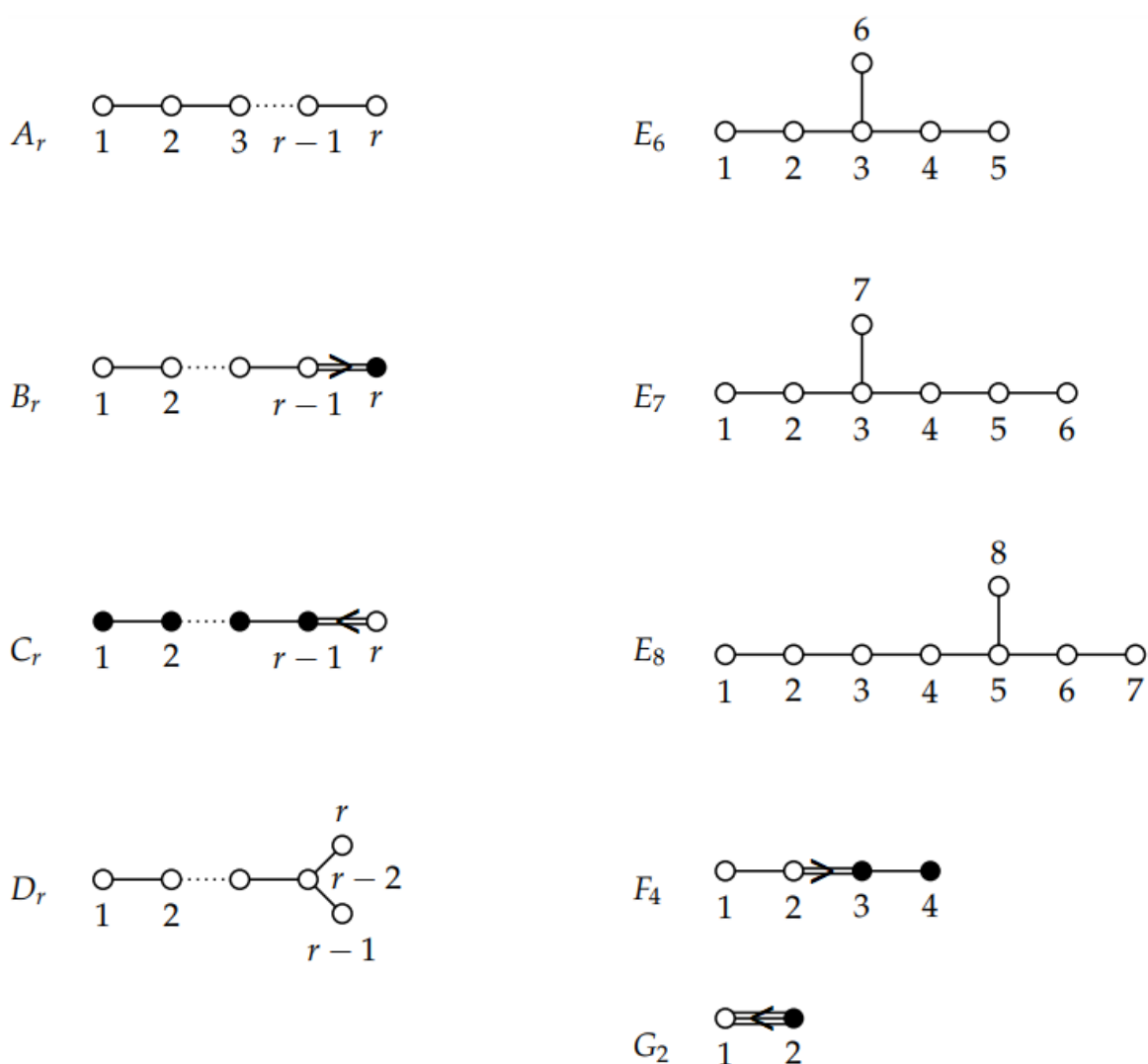
Slika 5.4: Neki primjeri Dynkinovih dijagrama

Coxeterov graf određuje brojeve  $\langle x_i, x_j \rangle$  kada su svi korijeni jednake duljine, od tud  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ . Ako postoje dvije različite duljine korijena (npr.  $B_2$  ili  $G_2$ ), iz grafa ne

možemo iščitati koji vrh odgovara kratkom korijenu, a koji dugom korijenu (u slučaju da su ti vrhovi spojeni s dva ili tri brida).

Kada Coxeterov graf od  $R$  sadrži dvostruki ili trostruki brid, dodajemo strelicu koja ide od dužeg prema kraćem korijenu. Takav graf naziva se *Dynkinov dijagram od  $R$* .

**Teorem 5.13.** *Ako je  $R$  ireducibilan sistem korijena ranga  $r$ , onda je pripadni Dynkinov dijagram jedan od prikazanih grafova na slici 5.5, gdje vrijedi  $A_r$  ( $r \geq 1$ ),  $B_r$  ( $r \geq 2$ ),  $C_r$  ( $r \geq 3$ ),  $D_r$  ( $r \geq 4$ ) ( $r$  označava broj vrhova u svakom slučaju).*



Slika 5.5: Dynkinovi dijagrami<sup>2</sup>



Dokaz Teorema 5.13 može se naći u knjizi [10].

Uveli smo ograničenja za  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  i  $D_r$  kako nam se neki grafovi ne bi ponavljali. Naime, graf  $A_1$  ima 1 vrh pa bismo ga mogli označiti s  $B_1$  i  $C_1$ , graf  $B_2$  sa  $C_2$ , a graf  $A_3$  s  $D_3$ .

Primijetimo da su svi Dynkinovi dijagrami iz teorema 5.13 čiji su svi korijeni iste duljine upravo grafovi sa slike 4.1, tj. grafovi iz teorema 4.4 spektralnog radijusa strogo manjeg od 2. Sasvim analogno, preostali grafovi iz teorema 4.4, tj. oni sa slike 4.2, spektralnog radijusa 2, su povezani s određenom klasom beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri. Preciznije, oni su upravo Dynkinovi dijagrami svih kompleksnih afinih Kac-Moodyjevih Liejevih algebri s korijenima istih duljina. Više o klasifikaciji tih dijagrama može se pronaći u knjizi [11].

---

<sup>2</sup>Slika preuzeta s <http://www.refert.itp.unibe.ch/LieLectures.pdf> (9.2.2022.).

# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, 2008.
- [2] W. Barrett, A. Francis, B. Webb, *Linear Algebra and its Applications* **513** (2017), 409–434; <https://arxiv.org/pdf/1510.04366.pdf>.
- [3] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [4] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North-Holland, 1976.
- [5] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, 2011.
- [6] K. Bryan, T. Leise, *The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra Behind Google*, SIAM Review, **48** (3) (2006.), 569–581.
- [7] D. M. Cardoso, C. Delorme, P. Rama, *Laplacian Eigenvectors and Eigenvalues and Almost Equitable Partitions*, Eur. J. Comb., **28** (2007.), 665-673.
- [8] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, Slobodan Simić, *Spectral Generalizations of Line Graphs: On Graphs with Least Eigenvalue  $-2$* , Cambridge University Press, 2004.
- [9] R. Diestel, *Graph theory*, Springer, 2000.
- [10] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.
- [11] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [12] S. Kudose, *Equitable Partitions and Orbit Partitions*, Acta Mathematica Sinica (2009.), 1-9; dostupno na: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Kudose.pdf> (pristupljeno 12.2.2022.).

- [13] M. Mahoney, *Topics in Spectral Graph Methods*, University of California, Berkeley, skripta, 2015.; dostupno na <https://www.stat.berkeley.edu/~mmahoney/s15-stat260-cs294/> (pristupljeno 12.2.2022.).
- [14] G. Muić, M. Primc, *Vektorski prostori*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, skripta; dostupno na [https://www.pmf.unizg.hr/\\_download/repository/vp%5B1%5D.pdf](https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/vp%5B1%5D.pdf) (pristupljeno 14.2.2022.).
- [15] I. Nakić, *Diskretna matematika*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, skripta, 2012.; dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf> (pristupljeno 10.2.2022.).
- [16] S. Singer, *Numerička analiza*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, skripta, 2010.; dostupno na: [https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/](https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/) (pristupljeno 10.2.2022.).

# Sažetak

Glavni cilj ovog diplomskog rada bio je iznijeti kratki pregled osnovnih pojmova teorije grafova te detaljno proučiti Smithov teorem koji tvrdi da su jedini grafovi spektralnog radijusa strogo manjeg od 2 upravo Dynkinovi dijagrami tipa  $A$ ,  $D$  i  $E$ . U prva dva poglavlja iznijeli smo osnovne pojmove i rezultate teorije grafova s naglaskom na spektralnu teoriju grafova. U radu smo promatrali jednostavne, konačne i povezane grafove. U trećem poglavlju uveli smo pojam ireducibilne matrice i uspostavili vezu između povezanih grafova i njihovih ireducibilnih matrica susjedstava. Nadalje, iskazali smo Perron-Frobeniusov teorem koji, uz određene pretpostavke, tvrdi da ireducibilna matrica ima jedinstvenu pozitivnu realnu svojstvenu vrijednost s pridruženim pozitivnim svojstvenim vektorom. Definirali smo i proučavali ujednačene particije, Rayleighov kvocijent te ispreplitanje kako bismo došli do Smithovog teorema. U četvrtom poglavlju, glavni rezultat je Smithov teorem koji predstavlja grafove čija je najveća svojstvena vrijednost manja ili jednaka 2. U petom poglavlju, definirali smo sisteme korijena pridružene konačnodimenzionalnim prostim kompleksnim Liejevim algebrama i proučili njihovu prezentaciju pomoću Dynkinovih dijagrama. Potom smo prezentirali klasifikaciju spomenutih sistema korijena. Na kraju smo uočili povezanost Dynkinovih dijagrama tipa  $A$ ,  $D$  i  $E$  s dijagramima iz Smithovog teorema.

# Summary

The main goal of this thesis was to give a brief overview of the basic notions of graph theory and to study in detail Smith's theorem which states that the only graphs of spectral radius strictly less than 2 are Dynkin diagrams of type  $A$ ,  $D$  and  $E$ . In the first two chapters, we presented the basic notions and results of graph theory with the emphasis on the spectral graph theory. In the thesis we considered a simple, finite and connected graphs. In the third chapter, we introduced the notion of an irreducible matrix and established a connection between the connected graphs and their irreducible adjacency matrices. Furthermore, we presented the Perron-Frobenius theorem which, under certain assumptions, states that the irreducible matrix possesses a unique positive real eigenvalue with positive corresponding eigenvector. We introduced and studied equitable partitions, the Rayleigh quotient and interlacing in order to establish Smith's theorem. In the fourth chapter, the main result is Smith's theorem which classifies all graphs whose maximum eigenvalue is less than or equal to 2. In the fifth chapter, we defined root systems associated with the finite-dimensional simple complex Lie algebras and studied their presentation given by Dynkin diagrams. We then presented the classification of the aforementioned root systems. Finally, we demonstrated the correspondence between the Dynkin diagrams of type  $A$ ,  $D$  and  $E$  and the diagrams from Smith's theorem.

# Životopis

Rođen sam 18. prosinca 1997. godine u Karlovcu. 2003. godine selim se u Zagreb te 2004. godine upisujem Osnovnu školu Brestje. Nakon završetka osnovne škole, 2012. godine upisujem Gimnaziju Sesvete u Zagrebu. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2019. godine stječem titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.